

Univerzita Pardubice

Fakulta ekonomicko-správní

Ústav systémového inženýrství a informatiky

Neurčitost a spravedlivost při modelování v Petri sítích

Disertační práce

Autor: Ing. Martin Ibl

Školitel: prof. Ing. Jan Čapek, CSc.

Pardubice 2015

University of Pardubice

Faculty of Economics and Administration

Institute of System Engineering and Informatics

Uncertainty and Fairness in Petri Nets Modelling

Thesis

Author: Ing. Martin Ibl

Supervisor: prof. Ing. Jan Čapek, CSc.

Pardubice 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 30. 3. 2015

Martin Ibl

Poděkování

Rád bych poděkoval svému školiteli prof. Ing. Janu Čapkovi, CSc., za poskytnuté cenné rady a připomínky, vstřícný přístup a odborné vedení při zpracování mé disertační práce.

Abstrakt

Tato disertační práce pojednává o definování nových vlastností Petri sítí, a to o neurčitosti a spravedlivosti v klasických Place/Transition a stochastických Petri sítích. Kvantifikace neurčitosti a spravedlivosti spočívá v mapování množiny všech dosažitelných značení sítě do Markovových řetězců, s kterých jsou poté evaluovány stacionární pravděpodobnosti. Pomocí aplikace principů z oblasti informační entropie, tj. kvantifikace entropie nad stacionárními pravděpodobnostmi je definován postup výpočtu neurčitosti a spravedlivosti v Petri sítích. Součástí práce je implementace navržených vlastností v prostředí Matlab a vlastní implementace editoru Petri sítí, který umožňuje modelovat a analyzovat libovolnou Place/Transition nebo stochastickou Petri síť. V poslední části práce je ilustrována použitelnost takto definovaných vlastností na řadě příkladů z různých zájmových oborů.

Klíčová slova

Neurčitost, spravedlivost, Petri síť, verifikace, implementace

Abstract

This thesis discusses the definition of new Petri nets properties, namely the uncertainty and fairness in the classical Place/Transition Petri nets and stochastic Petri nets. Quantification of uncertainty and fairness lies in the mapping of the set of all reachable marking to the Markov chains, on which are then evaluated the stationary probabilities. Using principles from the calculation of the information entropy on stationary probabilities, it is then possible to define the procedure for calculating the uncertainty and fairness in the Petri nets. Part of the work is the implementation of the proposed methods in Matlab and a custom implementation of the Petri nets, which allows modelling and analysing arbitrary Place/Transition or stochastic net. In the last part of the thesis is illustrated the application of the defined methods on a number of examples from various disciplines.

Keywords

Uncertainty, Fairness, Petri nets, Verification, Implementation

Obsah

Úvod.....	8
1 Popis použitých pojmů a výzkumných oblastí	10
1.1 Petri sítě.....	10
1.1.1 Place/Transtion Petri sítě	10
1.1.2 Formální verifikace v Petri sítích.....	13
1.1.3 Stochastické Petri sítě	15
1.1.4 Ukázkový příklad Petri sítě.....	15
1.2 Markovovy řetězce.....	17
1.2.1 Markovovy řetězce s diskrétním časem	18
1.2.2 Markovovy řetězce se spojitým časem	19
1.3 Neurčitost	19
1.3.1 Informace	20
1.3.2 Informační entropie.....	20
1.4 Spravedlivost.....	21
2 Cíle disertační práce	23
2.1 Hlavní cíl.....	23
2.2 Dílčí cíle	23
2.2.1 Mapování Petri sítí do Markovových řetězců.....	23
2.2.2 Evaluace entropie z Markovových řetězců	23
2.2.3 Kvantifikace neurčitosti a spravedlivosti na základě entropie.....	24
3 Dosažené výsledky	25
3.1 Neurčitost v P/T Petri sítích	25
3.2 Neurčitost v stochastických Petri sítích	28
3.3 Spravedlivost v P/T Petri sítích.....	29
3.4 Spravedlivost v stochastických Petri sítích	34
4 Implementace definovaných vlastností	37

4.1	Maticová implementace v programu Matlab	37
4.2	Implementace vlastního editoru Petri sítí.....	40
4.2.1	Editace sítě a jejích objektů	42
4.2.2	Vizuální reprezentace dynamického chování sítě.....	48
4.2.3	Analýza behaviorálních vlastností sítě	51
4.2.4	Aproximace vlastností Petri sítí pomocí simulace.....	56
4.2.5	Analýza vývoje neurčitosti či spravedlivosti při změně parametrů modelu	58
4.2.6	Shrnutí vlastností editoru Petri sítí.....	59
5	Modelování a analýza reálných systémů	61
5.1	Křižovatka	61
5.1.1	Křižovatka bez značení	61
5.1.2	Křižovatka s hlavní pozemní komunikací	63
5.1.3	Křižovatka se semaforem.....	70
5.2	Plánování vláken a procesů v operačním systému	73
5.3	Elektrárenská síť České Republiky	81
6	Hodnocení výsledků výzkumu	88
7	Závěr.....	90
	Seznam zkratk a pojmů	91
	Seznam obrázků.....	92
	Seznam tabulek.....	95
	Použitá literatura a zdroje	96
	Přílohy.....	103

Úvod

Při modelování a analýze systémů / procesů (např. podnikové procesy, kritické infrastruktury apod.) se zpravidla klade hlavní důraz na jejich správnost a validnost, tj. aby model splňoval formální specifikaci a zároveň modeloval relevantní realitu. V posledních letech se začala rozvíjet výzkumná oblast, která se zabývá analýzou procesních modelů a definicí specifických metrik, které umožňují kvantifikovat různé vlastnosti modelů. Mezi tyto vlastnosti se řadí např. komplexita [1-3], neurčitost [4], koheze [5, 6] či spravedlivost [7-9]. Tyto metriky jsou dále využity pro zkoumání např. uživatelské přívětivosti, použitelnosti, srozumitelnosti, predikovatelnosti a dalších ukazatelů [10]. V následujícím je navržen postup pro analýzu a evaluaci neurčitosti a spravedlivosti libovolného modelu, modelovaného pomocí Place/Transition (P/T) a stochastických Petri sítí.

Kvantifikace neurčitosti (behaviorální či statické) libovolného procesního modelu reprezentuje předpokládané chování modelovaného procesu, tj. jeho stupeň predikovatelnosti. Snižování neurčitosti v procesních modelech (např. úpravou struktury nebo pravděpodobností větvení) může vést k lepší predikovatelnosti reálného stavu modelovaného procesu a tím lepší manažerskou efektivitu spojenou s jeho řízením. Jelikož jsou Petri sítě definovány na exaktním matematickém základu, je možné pomocí matematického aparátu kvantifikovat neurčitost libovolného modelu. Využití stochastických Petri sítí sebou navíc nese výhodu v možnosti implicitně nadefinovat pravděpodobnosti jednotlivých větvení u jednotlivých přechodů. S uvažováním pravděpodobností větvení lze vyčíslit tzv. dynamickou neurčitost, která zohledňuje jak strukturu modelu, tak pravděpodobnosti větvení. Stejně tak je možné kvantifikovat pouze statickou neurčitost, při které se neuvažují specifické pravděpodobnosti větvení (všechny cesty mají stejnou pravděpodobnost).

Pojem spravedlivost je dle [11] definován jako: „The quality of treating people equally or in a way that is right or reasonable”. Při analýze souběžných a reaktivních systémů [12] je tento pojem chápán více formálně a obecně, tj. nemusí se jednat o spravedlivost ve spojitosti s lidmi, ale s jakýmkoli abstraktivními entitami (např. stroje, firmy, oddělení, komunikační kanály apod.). Termín „treating“ v obecné definici specifikuje jakýkoli proces, kterého jsou tyto entity součástí. Z tohoto hlediska je poté možné tyto entity dále rozdělit na ty, pro něž je proces definován (např. pakety v procesu síťová komunikace, vlákna v procesu synchronizace/plánování vláken, nákladní automobily v logistice apod.) a ty, jež proces zaštitují (např. přepínače a komunikační kanály v procesu síťové komunikace, procesory

a operační paměť v procesu synchronizace vláken, pozemní komunikace a komunikační uzly v procesu logistiky apod.). Na spravedlivost tedy lze nahlížet jako na určitý předpoklad, který je vztažen na daný systém/proces. Klasický pohled na spravedlivost v souběžných a reaktivních systémech je spojen s počtem (zpravidla nekonečným) výskytů nějaké události (např. vlákno A čeká na vstup do kritické sekce) v nekonečné sekvenci událostí (execution), které v daném systému mohou nastat [13].

1 Popis použitých pojmů a výzkumných oblastí

V průběhu definování neurčitosti a spravedlivosti v Petri sítích je využita řada pojmů a definic, které vycházejí z oblasti samotných Petri sítí, stochastických procesů (Markovovy řetězce) a informační teorie (Shannonova entropie).

1.1 Petri síť

Petriho síť představují vhodný nástroj pro modelování diskretních dynamických systémů řízených událostmi (DES - Discrete Event Dynamic System), které se vyznačují souběžností, paralelní zpracováním, synchronizací či nedeterminističností. Jejich hlavní výhodou je možnost exaktně verifikovat předpoklady kladené na model. Od 60. let minulého století, kdy byly Petri síť definovány Calrem Adamem Petrim [14], se jejich vývoj ubíral řadou směrů. Jedním směrem bylo definování nových vlastností modelů, které rozšiřují verifikační sílu Petri sítí. Jde především o kontrolu živosti, možnosti ověření dosažitelnosti určitého značení (stavu) sítě, ověření ohraničenosti a mnoho dalších (viz podkapitola 1.1.2). Většina takovýchto vlastností navíc vyžaduje řadu předpokladů, které omezují definici Petri sítě, např. pro verifikaci většiny vlastností Petri sítě je nutné, aby byla daná síť čistá (pure net), tj. neobsahovala vlastní cykly; popř. některé algoritmy pracují pouze s ordinálními sítěmi, tj. násobnost hran je rovna jedné [15]. Dalším směrem vývoje je zpřesňování (rozšiřování) definice Petri sítí přidáváním nových prvků, které zpřesňují a zjednodušují modelování s tímto nástrojem (avšak s důsledkem nižší formálnosti). Příkladem mohou být časované a stochastické Petri síť, které umožňují zpřesňovat jednotlivé změny stavů s uvažováním časové náročnosti (deterministicky [16, 17] nebo stochasticky [18]). Dalším příkladem jsou barvené Petri síť [19, 20], které základní Petri síť kombinují s dalším modelovacím jazykem a tím razantně rozšiřují (a hlavně zjednodušují) modelovací schopnosti Petri sítí nebo Petri sítě typu Predicate/Transition [21]. Hlavní nevýhodou tohoto druhého směru jsou omezené možnosti verifikace takto navržených modelů, tj. nutnost ověřovat většinu předpokladů (vlastností) pomocí simulace. V následujícím jsou definovány základní pojmy z oblasti Place/Transition (P/T) a stochastických Petri sítí, které budou dále potřebné při definování neurčitosti a spravedlivosti.

1.1.1 Place/Transition Petri síť

V současné době existuje řada základních definic Petri sítí, které se rozlišují svou formálností (restrikcemi a verifikační silou) [22]. Struktura a symbolika definic v této podkapitole je

formulována na základě [15]. Zde je uvedena obecná definice P/T Petri sítí, která umožňuje kvantifikovat hrany kladným celým číslem.

Definice 1.1.1.1: Generalizovaná P/T Petri síť je pětice, $PN = (P, T, F, W, M_0)$ kde:

- $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_m\}$ – konečná množina míst,
- $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\}$ – konečná množina přechodů,
- $P \cap T = \emptyset$ – místa a přechody představují navzájem disjunktí množiny,
- $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ – množina hran, definovaná jako podmnožina množiny všech možných propojení,
- $W: F \rightarrow N_1$ – váhová funkce, která definuje násobnost hran,
- $M_0: P \rightarrow N_0$ – počáteční značení.

Takováto definice neomezuje modelování žádnou restrikcí ve smyslu kapacit jednotlivých míst. Pokud je při modelování kladena kapacitní podmínka na nějakou podmnožinu míst, je možné pomocí tzv. „complementary-place transformation“ upravit síť dle požadavků [15]. Pro potřeby řady verifikačních vlastností je však kladena podmínka ohraničenosti jednotlivých míst a tím i konečnosti stavového prostoru. Proto je dále uvedena definice se striktním vymezením kapacit jednotlivých míst.

Definice 1.1.1.2: Kapacitní P/T Petri síť je šestice, $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ kde:

- $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_m\}$ – konečná množina míst,
- $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\}$ – konečná množina přechodů,
- $P \cap T = \emptyset$ – místa a přechody představují navzájem disjunktí množiny,
- $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ – množina hran, definovaná jako podmnožina množiny všech možných propojení,
- $W: F \rightarrow N_1$ – váhová funkce, která definuje násobnost hran,
- $C: P \rightarrow N_1$ – kapacity míst,
- $M_0: P \rightarrow N_0$ – počáteční značení.

Definice 1.1.1.3: Značení Petri sítě

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je Petri síť. Zobrazení $M: P \rightarrow N_0$, se nazývá značení Petri sítě PN .

Značení reprezentuje stav sítě po určitém počtu kroků simulace, tj. aplikace určitého počtu aktivních přechodů. Proveditelnost přechodu je závislá na struktuře sítě a aktuálním značení. Dále je patrné, že musí vždy platit podmínka $0 \leq M(p_i) \leq C_i$.

Definice 1.1.1.4: Proveditelnost přechodu

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je Petri síť. Přechod $t \in T$ nazveme proveditelný při značení M (M -proveditelný), jestliže:

$$\forall p \in {}^*t: M(p) \geq W(p, t)$$

$$\forall p \in t^*: M(p) \leq C(p) - W(t, p)$$

kde *t reprezentuje množinu všech míst, z nichž vede hrana do t a t^* reprezentuje množinu míst, do nichž vede hrana z t .

Definice 1.1.1.5: Následné značení

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je Petri síť a M je její značení. Je-li přechod $t \in T$ proveditelný při značení M , pak jeho provedením získáme následné značení M' ke značení M , které je definováno takto:

$$\forall p \in P: M'(p) = \begin{cases} M(p) - W(p, t), & \text{if } p \in {}^*t \setminus t^* \\ M(p) + W(t, p), & \text{if } p \in t^* \setminus {}^*t \\ M(p) - W(p, t) + W(t, p), & \text{if } p \in t^* \cap {}^*t \\ M(p) & \text{jinak} \end{cases}$$

Situace, že přechod t mění značení M na M' se zpravidla vyjadřuje jako $M[t \rangle M'$.

Definice 1.1.1.6: Sekvence přechodů, dosažitelnost

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je Petri síť. Sekvence přechodů σ je sekvencí proveditelných přechodů, jež vedou ze značení M do jiného značení M' . Situace se znázorňuje jako $M[\sigma \rangle M'$. Značení, pro něž existuje sekvence přechodů z počátečního značení, se nazývá dosažitelné značení.

Definice 1.1.1.7: Množina všech dosažitelných značení

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je Petri síť a M její značení. Množina všech dosažitelných značení z počátečního značení M_0 v síti PN je vyjádřeno jako $R(PN, M_0)$ nebo jednoduše $R(M_0)$.

$$R(M_0) = \begin{bmatrix} M_0(p_1) & M_1(p_1) & \cdots & M_{|R(M_0)|}(p_1) \\ M_0(p_2) & M_1(p_2) & \cdots & M_{|R(M_0)|}(p_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_0(p_m) & M_1(p_m) & \cdots & M_{|R(M_0)|}(p_m) \end{bmatrix}$$

Definice 1.1.1.8: Ohraničenost

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je Petri síť. Místo $p \in P$ se nazývá k – *ohraničené* pokud:

$$\exists k \in N_1: \forall M \in R(M_0): M(p) \leq k$$

Místo $p \in P$ se nazývá ohraničené, pokud je k – *ohraničené* pro nějaké $k \in N_1$. Pokud jsou všechna místa sítě ohraničené, je celá síť nazvána ohraničená Petri síť.

Definice 1.1.1.9: Pokrytí

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je Petri síť. Značení M pokrývá značení M' pokud:

$$\forall p \in P: M(p) \geq M'(p)$$

Definice 1.1.1.10: Živé značení, živá síť

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je Petri síť. Značení $M \in R(M_0)$ je živé, pokud pro $\forall t \in T$ existuje nějaké značení $M_1 \in R(M_0)$ pro něž je přechod t M_1 – *proveditelný*. Pokud $\forall M \in R(M_0)$ jsou živá, je celá PN živá.

1.1.2 Formální verifikace v Petri sítích

Tabulka 1 shrnuje základní behaviorální (závislé na počátečním značení) a strukturální (nezávislé na počáteční značení) vlastnosti, které jsou verifikovány v Petri sítích.

Tabulka 1 - Seznam hlavních vlastností, které jsou verifikovány v Petri sítích. Zdroj [15]

Behaviorální vlastnosti	Strukturální vlastnosti
Dosažitelnost	Strukturální ohraničenost
Ohraničenost	Konzervativnost (částečná)

Živost	Opakovatelnost (částečná)
Domácí značení	Konzistence (částečná)
Pokrytí	Kontrolovatelnost
Perzistence	Strukturální živost
Synchronizační vzdálenost	Strukturální B-spravedlivost
Spravedlivost	

Některé (ty, jež se vyskytují v této práci) z těchto vlastností byly již definovány v předchozí podkapitole. Tabulka 2 stručně popisuje tyto vlastnosti.

Tabulka 2 - Stručný popis využití dříve definovaných behaviorálních vlastností. Zdroj vlastní

Vlastnost	Použití
Dosažitelnost	<ul style="list-style-type: none"> • Generování množiny všech dosažitelných značení. • Verifikace zda předem dané značení je či není z množiny všech dosažitelných značení (bez nutnosti generovat množinu všech dosažitelných značení).
Ohraničenost	<ul style="list-style-type: none"> • Verifikace maximálního a minimálního výskytu tokenů v místě, např. pro potřeby určení optimální velikost vyrovnávací paměti. • Ohraničenost sítě implikuje konečnost nebo nekonečnost množiny všech dosažitelných značení.
Živost	<ul style="list-style-type: none"> • Pokud je síť živá, v množině všech dosažitelných značení nejsou přítomna žádná mrtvá značení, tj. daná síť neobsahuje žádná uváznutí (deadlock-free).
Pokrytí	<ul style="list-style-type: none"> • Pokud je síť neohraničená, tj. množina všech dosažitelných značení je nekonečná, je možné sestavit tzv. strom (graf) pokrytí (konečný), při jehož sestavování (generování množiny všech dosažitelných značení) je u každého značení M, které pokrývá již existující značení M', nahrazena hodnota $M(p)$ symbolem „ω“, pokud platí $M(p) > M'(p)$. • Graf pokrytí je obecnější variantou grafu dosažitelnosti, tj. pokud je síť ohraničená, tak je graf pokrytí stejný jako graf dosažitelnosti. Hlavní výhodou grafu pokrytí je možnost generování konečné množiny stavů. Hlavní nevýhodou je algoritmická složitost v porovnání s grafem dosažitelnosti (více v kapitole 4.2.3).

Možnost verifikace těchto vlastností v Petri síti je jednou z hlavních předností jejich využití [23-25].

1.1.3 Stochastické Petri sítě

Jak již bylo dříve naznačeno, vývoj Petri sítí se z původní definice (P/T Petri sítě) ubíral dvěma směry. Jedním směrem bylo rozšiřování původní definice o nové prvky. V následujícím je definice stochastické Petri sítě [26, 27], která rozšiřuje původní definice o jeden prvek, a to parametr exponenciální rozdělení, který je přidělen jednotlivým přechodům. Stochastické Petri sítě jsou převážně využívány k výkonnostním analýzám. Solidní úvod do problematiky stochastických Petri sítí lze nalézt v [18]. Problematiku spojenou se stochastickými procesy ve spojitosti s Petri sítěmi obsahují např. práce [28, 29]

Definice 2.1.2.1: Stochastická Petri síť [27] je sedmice, $SPN = (P, T, F, \Lambda, W, C, M_0)$ kde:

- $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_m\}$ – konečná množina míst,
- $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\}$ – konečná množina přechodů,
- $P \cap T = \emptyset$ – místa a přechody tvoří navzájem disjunktní množiny,
- $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ – množina hran, definována jako podmnožina všech možných propojení,
- $\Lambda: T \rightarrow R^+$ – parametr exponenciálního rozdělení přechodů,
- $W: F \rightarrow N_1$ – váhová funkce, která definuje násobnost hran,
- $C: P \rightarrow N_1$ – kapacity míst,
- $M_0: P \rightarrow N_0$ – počáteční značení.

Definice 1.1.2.2: Exponenciální rozdělení

Spojité náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametrem λ (střední hodnotu $1/\lambda$ a rozptyl $1/\lambda^2$), pokud její hustota pravděpodobnosti odpovídá vztahu:

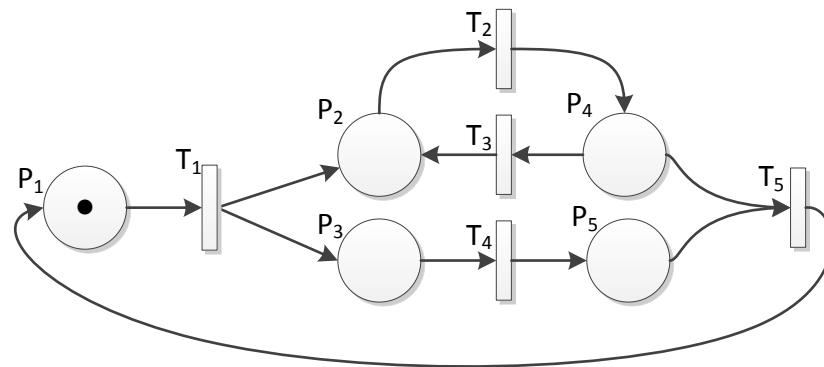
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Ostatní definice zůstávají stejné jako u klasických P/T Petri sítí (viz podkapitola 1.1.1).

1.1.4 Ukázkový příklad Petri sítě

Jako příklad lze uvažovat jednoduchou Petri síť, která se skládá z 5 míst a 5 přechodů, viz Obrázek 1. Model obsahuje typické prvky, které jsou obsaženy v modelech obsahujících souběžnost. Těmito prvky jsou sekvence (např. přechod T4), paralelismus (přechod T1), synchronizace (přechod T5), nedeterminismus (přechody T5 a T3) a cykly (přechod T5, popř.

T2 a T3). Tato Petri síť je ordinální (násobnost všech hran je rovna jedné), čistá (síť neobsahuje vlastní cykly), ohraničená (maximální počet tokenů v jednotlivých místech je roven jedné) a živá (síť neobsahuje mrtvé značení, viz Obrázek 2).

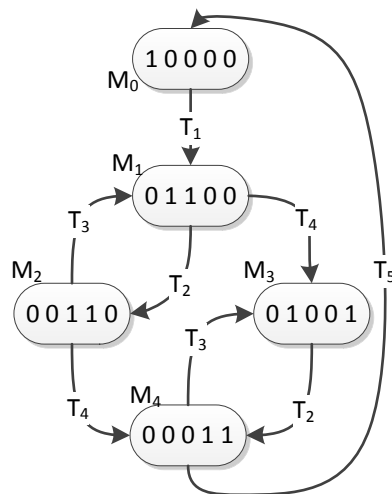


Obrázek 1 - Příklad Petri sítě. Zdroj vlastní

Množina všech dosažitelných značení $R(M_0)$ dané sítě obsahuje pět značení:

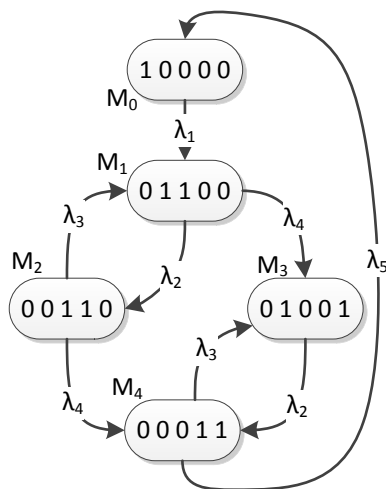
	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
p_1	1	0	0	0	0
p_2	0	1	0	1	0
p_3	0	1	1	0	0
p_4	0	0	1	0	1
p_5	0	0	0	1	1

Stavový graf (graf dosažitelnosti), reprezentující vztah mezi jednotlivými značeními je znázorněn na Obrázek 2. Z obrázku je patrné, že ukázková síť neobsahuje žádná mrtvá značení (značení, z nichž nevedou žádné orientované hrany).



Obrázek 2 - Stavový graf ukázkové Petri sítě. Zdroj vlastní

Při uvažování stochastické Petri sítě se daný stavový graf rozšíří ohodnocením orientovaných hran (podle přechodu, který vykonal danou změnu značení) hodnotami exponenciálního rozdělení $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$, viz Obrázek 3.



Obrázek 3 - Stavový graf ukázkové stochastické Petri sítě. Zdroj vlastní

Tato vzorová Petri síť bude v dalších kapitolách použita pro ilustraci postupu kvantifikace neurčitosti a spravedlivosti v P/T a stochastických Petri sítích (viz kapitola 3).

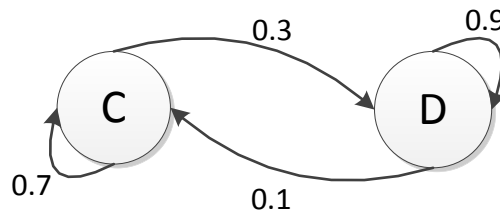
1.2 Markovovy řetězce

Markovovy řetězce reprezentují matematický systém (stochastický proces), který umožňuje zachytit přechody jednotlivých stavů (stavového prostoru) modelovaného systému. Pomocí Markovových řetězců jsou zpravidla modelovány náhodné procesy, které se vyznačují tím, že

každý následný stav je nezávislý na současném stavu (bezpečný proces), tj. proces obsahuje tzv. Markovovu vlastnost [30, 31].

1.2.1 Markovovy řetězce s diskretním časem

Markovovy řetězce s diskretním časem jsou charakteristické tím, že každé změně stavu v systému je přidělena pravděpodobnost, která je závislá pouze na současném stavu systému. Obrázek 4 znázorňuje ukázkou Markovova řetězce s dvěma stavy C a D. Pokud se nachází systém ve stavu C, existuje pravděpodobnost 0.3, že se stav systému změní na stav D a pravděpodobnost 0.7, že systém zůstane ve stavu C. Obdobně, pokud je systém ve stavu D, existuje pravděpodobnost 0.1, že se stav systému změní na stav C a pravděpodobnost 0.9, že systém zůstane ve stavu D.



Obrázek 4 - Ukázkou Markovova řetězce s diskretním časem. Zdroj vlastní

Každý Markovův řetězec lze vyjádřit ve formě matice, tzv. matice přechodu \mathbf{A} , kde $a_{i,j} = p(i,j)$ a $p(i,j)$ reprezentuje pravděpodobnost změny ze stavu i do stavu j . Pro výše zmíněný příklad matice přechodu vypadá následovně:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Hlavní výhodou používání Markovových řetězců je možnost vypočítat tzv. stacionární pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému. Stacionární pravděpodobnosti reprezentují pravděpodobnost, že v libovolný časový okamžik se systém nachází v určitém stavu.

Vektor stacionárních pravděpodobností \mathbf{v} je z matice přechodu vypočítán podle vztahu $\mathbf{v}\mathbf{A} = \mathbf{v}$, tj. hledání vlastního vektoru pro vlastní číslo $\lambda=1$ v transponovaném tvaru ($\mathbf{A}^T \mathbf{v}^T = \mathbf{v}^T$). Řešením výše zmíněného příkladu je vektor:

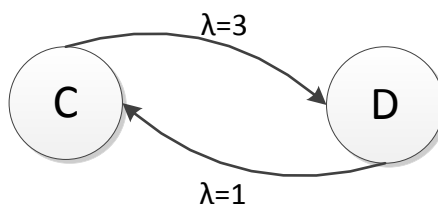
$$\mathbf{v}^T = \begin{pmatrix} 0.375 \\ 0.625 \end{pmatrix}$$

Z výsledků je patrné, že ukázkový systém se bude nacházet s pravděpodobností 0.378 ve stavu C a s pravděpodobností 0.625 ve stavu D.

Markovovy řetězce s diskrétním časem jsou využity při definování neurčitosti a spravedlivosti v klasických P/T Petri sítích v kapitolách 3.1 a 3.3.

1.2.2 Markovovy řetězce se spojitým časem

Na rozdíl od Markovových řetězců s diskrétním časem jsou Markovovy řetězce se spojitým časem význačné tím, že přechod stavů v systému nemá přidělenou pravděpodobnost, ale exponenciální rozdělení pravděpodobností s parametrem λ , viz Obrázek 5.



Obrázek 5 - Ukázka Markovova řetězce se spojitým časem. Zdroj vlastní

Každý Markovův řetězec se spojitým časem lze vyjádřit ve formě tzv. matice intenzity Q , kde $q_{i,i} = -\sum_j \lambda(i,j)$ a $q_{i,j} = \lambda(i,j)$ pro $i \neq j$. Pro výše zmíněný příklad matice intenzity vypadá následovně:

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vektor stacionárních pravděpodobností c je z matice intenzity vypočítán podle vztahu $cQ = 0$ (s podmínkou $\sum c = 1$), tj. řešení homogenní soustavy lineárních rovnic. Řešením výše zmíněného příkladu je vektor:

$$c^T = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

Výsledek naznačuje, že výše zmíněný systém se v libovolný časový okamžik bude nacházet ve stavu C s pravděpodobností 0.25 a ve stavu D s pravděpodobností 0.75.

1.3 Neurčitost

Neurčitost (informační, termodynamická) je vlastnost systému (informačního, fyzikálního) spojena s rovnoměrností distribuce pravděpodobností jeho stavů. Neurčitost se v systémech

kvantifikuje výpočtem entropie. V informačních systémech je definice entropie úzce spojena s pojmem informace. Další přístupy k neurčitosti jsou např. stochastická neurčitost [31, 32], která je přímo spojena s pravděpodobností výskytu určitého jevu, nebo sémantická neurčitost [33, 34], která je spojena s pravdivostí hodnot lingvistických proměnných (fuzzy logika [35, 36]).

1.3.1 Informace

Pojem informace souvisí s pravděpodobností výskytu určitého stavu v systému [37]. Čím je větší pravděpodobnost, že se systém nachází v určitém stavu, tím je nižší množství informace získané ze zjištění, že systém se v tomto stavu skutečně nachází. Pokud je tedy pravděpodobnost určitého stavu rovna jedné ($\text{Pr}(s) = 1$), zpráva o tom, že se systém v tomto stavu nachází, nenese žádnou informaci ($I(s) = 0$). Naopak čím více, se pravděpodobnost určitého stavu blíží nule, tím větší je získaná informace o tom, že se systém v tomto stavu nachází.

Definice 1.3.1.1 Informace

Nechť s je stavem systému S . Množství informace I získané ze zjištění, že se systém S nachází ve stavu s je dán vztahem:

$$I(s) = -\log(\text{Pr}(s))$$

Základ logaritmu vyjadřuje měřítko množství informace. V této práci bude využit logaritmus se základem 2, tj. množství informace je udáváno v bitech.

1.3.2 Informační entropie

Informační entropie (dále jen entropie) umožňuje měřit množství neuspořádanosti, která je spojená s určitou náhodnou veličinou [38, 39]. Informační entropie byla definována Shannonem v roce 1948 [40]. Příklady využití entropie ve spojitosti s Petri sítěmi lze najít např. v pracích [41-43]. Obecně informační entropie vyjadřuje průměrné množství informace v systému.

Definice 1.3.2.1: Entropie

$$H(S) = - \sum_{i=1}^n \text{Pr}(s_i) \log_2 \text{Pr}(s_i)$$

$$0 \cdot \log_2(0) \equiv 0$$

kde S reprezentuje systém (náhodná veličina) a s_i jeho stavy (konkrétní hodnoty náhodné veličiny). Výsledné hodnoty entropie jsou vyjádřeny v bitech.

Definice 1.3.2.2: Maximální entropie

Maximální entropie systému S , který může nabývat n stavů, lze vyjádřit následovně:

$$H_{\max}(S) = \log_2 n$$

1.4 Spravedlivost

Jedna z nejrozpracovanějších teorií o spravedlivosti je spojena s problematikou formální specifikace a formální verifikace. V této oblasti se na pojem spravedlivost pohlíží jako na temporální vlastnost, která spolu s bezpečností a živostí představuje behaviorální vlastnosti, které jsou na systému/modelu ověřovány (např. model checking) [13]. Existuje celá řada specifických typů spravedlivosti, které ověřují chování systému podle různých předpokladů. Nejdůležitější typy spravedlivosti jsou nestrannost (každý bez rozdílu dostane podíl), soucit (každý kdo požádal, dostane podíl) a spravedlnost (každý kdo soustavně požaduje, dostane podíl). Různé notace spravedlivost a jejich formální definice uvádí např. [12, 44, 45].

Další oblastí, která se zabývá pojmem spravedlivost, je teorie front [46, 47]. V této oblasti se historicky vždy dávalo přednost zkoumání výkonnostních charakteristik jako je průchodnost, odezva, délka fronty apod. V posledních 15 letech se však začíná dávat stále větší důležitost právě pojmu spravedlivost [48], jelikož zajišťuje takové parametry jako je rovnoměrnost celkového výskytu entit, což zajišťuje, že některé entity nejsou zvýhodňovány do takové míry, že další entity nemohou vykonat požadovanou činnost (převážně ani v nekonečném čase – problém hladovění). Jedná se tedy o problematiku spravedlivého rozdělování sdílených zdrojů mezi jednotlivé entity. Spravedlivé, v tomto kontextu může znamenat, že entita dostane, co si zaslouží (např. plat zaměstnance) nebo co potřebuje (např. ošetření v nemocnici). Požadavek na spravedlivost je tedy přímo spjat s různými plánovacími algoritmy (scheduling). Dle [49] se spravedlivost v teorii front dělí na spravedlivost s ohledem na pořadí (čas příchodu), doba obsluhy a rozmístění obsluhy. S daným předpokladem spravedlivosti jsou poté analyzovány různé plánovací algoritmy, které však zpravidla zajišťují pouze spravedlivost z hlediska jednoho pohledu, tj. např. FCFS algoritmus

zajišťuje spravedlivost ve smyslu doby příchodů, ale ve smyslu doby čekání je brán jako nespravedlivý [49]. Příkladem aplikace spravedlivosti v tomto kontextu je např. [50].

Výše popsáný „klasický“ pohled na spravedlivost je spojen s entitami, jejichž průběh (souběžnost) je modelován. Jedná se zpravidla o procesy v operačním systému, zákazníci v supermarketu, uživatele webových stránek, materiál ve výrobě, výrobky apod. Druhá možnost jak nahlížet na spravedlivost, je ve spojení s entitami, jež zajišťují daný proces, tj. zaměstnanci, stroje, komunikační kanály, procesory, servery apod. V této práci prezentovaný pohled na spravedlivost je spojen s tímto druhým pohledem. Spravedlivost je v tomto kontextu chápána jako rovnoměrnost vytižení specifických entit, jež zajišťují proces. Tento pohled je obdobou výše zmíněné spravedlivosti front s ohledem na rozmístění obsluhy [49]. Dalším příkladem tohoto typu spravedlivosti je např. analýza vytiženosti clusterů v gridovém prostředí [51]. Spravedlivost, jak je definována v problematice plánování (scheduling), formální verifikace, či Petri sítí, je zpravidla kategorizačního typu. To znamená, že se ověřuje daný předpoklad (daný typ/kategorií spravedlivosti) a výsledkem je pouze určení zda systém/model tento předpoklad splňuje či nikoli (true|false). Přístup definovaný v této práci kvantifikuje spravedlivost z hlediska času, tj. jaký konkrétní podíl času má daná událost vůči ostatním událostem. Toto je dosaženo s využitím Shannonovi definice entropie [40], která obecně určuje míru neuspořádanosti (neurčitosti) v systému. Čím je tedy entropie větší, tím je systém více vyvážený, tj. pravděpodobnost všech jeho stavů je více uniformní.

2 Cíle disertační práce

V této kapitole budou stanoveny hlavní a dílčí cíle disertační práce.

2.1 Hlavní cíl

Cílem disertační práce je definovat neurčitost a spravedlivost jakožto nové behaviorální vlastnosti Petri sítí. Tyto dvě vlastnosti jsou definovány pro klasické P/T (Place/Transition) Petri sítě a stochastické Petri sítě. Jmenovitě se tedy jedná o:

- Neurčitost v P/T Petri sítích.
- Neurčitost v stochastických Petri sítích.
- Spravedlivost v P/T Petri sítích.
- Spravedlivost v stochastických Petri sítích.

Při definování uvedených vlastností je využito konceptu stochastických procesů (Markovovy řetězce) a informační teorie (Shanonova entropie [40]). Součástí hlavního cíle disertační práce je prezentace těchto charakteristik (neurčitost a spravedlivost) na reálných systémech/procesech.

2.2 Dílčí cíle

Pro potřeby dosažení hlavního cíle je nutné splnit následující subcíle. Tyto subcíle zpravidla tvoří dílčí mezistupně definování mezi formální definicí Petri sítě, přes mapování do Markovových řetězců po evaluaci Shanonovu entropii nad těmito řetězci.

2.2.1 Mapování Petri sítí do Markovových řetězců

Prvním krokem při definování výše zmíněných vlastností je mapování pojmů Petri sítí do oblasti stochastických procesů (konkrétně Markovových řetězců), jež nabízejí propracovanější aparát pro práci s pravděpodobností nad stavových prostorem modelovaného systému / procesu. Hlavním důvodem pro využití Markovových řetězců je jejich schopnost kvantifikovat stacionární pravděpodobnosti jednotlivých stavů ve stavovém prostoru.

2.2.2 Evaluace entropie z Markovových řetězců

Následným krokem je evaluace entropie nad specifickou podmnožinou stavového prostoru (množiny všech dosažitelných značení) Petri sítě (při výpočtu neurčitosti), popř. evaluace

entropie nad specifickou podmnožinou míst Petri sítě (při výpočtu spravedlivosti). „Specifická podmnožina“ v tomto kontextu znamená, že entropie, potažmo neurčitost a spravedlivost, nemusí být kvantifikována nad celým modelem, tj. je možné specifikovat určitý submodel, na němž budou uvedené vlastnosti kvantifikovány.

2.2.3 Kvantifikace neurčitosti a spravedlivosti na základě entropie

Posledním krokem při definování výše zmíněných vlastností je normalizace vyčíslené entropie do intervalu $\langle 0,1 \rangle$, čímž jsou výsledným hodnotám neurčitosti a spravedlivosti přiděleny přesné hranice rozsahu. Samotná normalizace je provedena dělením výsledné entropie maximální entropií.

3 Dosažené výsledky

V následujícím jsou uvedeny jednotlivé definice neurčitosti a spravedlivosti v klasických P/T a stochastických Petri sítích [52-54]. Jednotlivé definice jsou prezentovány na ukázkové Petri síti definované v kapitole 1.1.4.

3.1 Neurčitost v P/T Petri sítích

Jelikož existuje izomorfní vztah [28, 55, 56] mezi stavovým grafem sítě a Markovovým řetězcem, lze provést mapování z oblasti Petri sítí do oblasti Markovových řetězců. Prvním krokem při definování neurčitosti v P/T Petri sítích je převedení množiny všech dosažitelných značení na Markovův řetězec. Petri síť lze v pojmech Markovových řetězců vyjádřit pomocí matice přechodu.

Definice 3.1.1: Matice přechodu P/T Petri sítě

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je P/T Petri síť a $R(M_0)$ je množina všech dosažitelných značení této sítě. Matice přechodu A sítě PN je definována jako zobrazení:

$$A: (R(M_0) \times R(M_0)) \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$$

Matice A tvoří pravou stochastickou matici, kde jednotlivé hodnoty odpovídají následujícím pravidlům:

$$A_{i,j} = \begin{cases} 0 & \nexists (t \in T): M_i[t]M_j \\ \frac{1}{|M_j|} & \exists (t \in T): M_i[t]M_j \end{cases}$$

kde $|M_j|$ reprezentuje počet značení, která jsou dosažitelná z M_i . Takto je každému větvení ve stavovém grafu přidělena uniformní pravděpodobnost pro různé cesty. Je však možné zvolit pravděpodobnosti pro různé větve explicitně, avšak s podmínkou $\sum_{j=1}^{|R(M_0)|} A_{i,j} = 1$ (matice musí tvořit pravou stochastickou matici, tj. suma jednotlivých řádků je rovna jedné).

Matice přechodu ukázkové Petri sítě (viz obrázek 1) lze vyjádřit následovně:

	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
M_0	0	1	0	0	0
M_1	0	0	1/2	1/2	0
M_2	0	1/2	0	0	1/2
M_3	0	0	0	0	1
M_4	1/2	0	0	1/2	0

Z takto definované matice lze vyčíslit tzv. stacionární pravděpodobnosti, jež reprezentují pravděpodobnosti, že daný model se nachází v daném stavu (v daný okamžik, v nekonečném čase).

Definice 3.1.2: Stacionární pravděpodobnosti P/T Petri sítě

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je P/T Petri síť a A je její matice přechodu. Vektor stacionárních pravděpodobností u je definován jako levý vlastní vektor matice přechodu A :

$$uA = u$$

Vektor u poté obsahuje jednotlivé pravděpodobnosti všech značení z $R(M_0)$:

$$u = \begin{bmatrix} \Pr(M_0) \\ \Pr(M_1) \\ \vdots \\ \Pr(M_{|R(M_0)|}) \end{bmatrix}$$

Při výpočtu stacionárních pravděpodobností je nutné, aby analyzovaná síť byla živá, jelikož každé mrtvé značení koresponduje s adsorbčním značením v pojmech Markovových řetězců. Každé adsorbční značení může vždy nastat, tj. jeho pravděpodobnost je rovna jedné, a proto pravděpodobnost všech ostatních živých značení bude rovna nule. Toto by vedlo k plně deterministickému modelu bez neurčitosti.

Vektor stacionárních pravděpodobností ukázkové Petri sítě je roven:

$$u = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.20 \\ 0.10 \\ 0.25 \\ 0.30 \end{bmatrix}$$

Z vyčíslených stacionárních pravděpodobností lze poté vypočítat entropii dané Petri sítě.

Definice 3.1.3: Entropie P/T Petri sítě

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je P/T Petri síť a \mathbf{u} je vektor stacionárních pravděpodobností všech dosažitelných značení této sítě $u_i = \Pr(M_i), M_i \in R(M_0)$. Entropie sítě PN je definována jako:

$$H(PN) = - \sum_{i=1}^{|R(M_0)|} \eta_i \log_2 \eta_i$$

Entropie ukázkové Petri sítě lze tedy vyjádřit jako:

$$H(PN) = 0.15 \log_2 0.15 + 0.2 \log_2 0.2 + 0.1 \log_2 0.1 + 0.25 \log_2 0.25 + 0.3 \log_2 0.3 = 2.2282 \text{ (bitů)}.$$

Entropie Petri sítě reprezentuje její neurčitost. Takto definovaná neurčitost však nemá pevně dané hranice, a proto je nutné hodnotu entropie vhodným způsobem normalizovat. Neurčitost Petri sítě lze vyjádřit prostou normalizací entropie do intervalu $\langle 0,1 \rangle$, což je umožněno dělením entropie maximální entropií. Ve zbytku této práce bude za pojmem „neurčitost“ považována normovaná neurčitost, resp. normovaná entropie.

Definice 3.1.4: Neurčitost P/T Petri sítě

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je P/T Petri síť a $H(PN)$ její entropie. Neurčitost (Uncertainty) sítě PN je definována jako:

$$Uncertainty(PN) = \frac{H(PN)}{\log_2 |R(M_0)|}$$

Výsledná hodnota neurčitosti je poté z intervalu $\langle 0,1 \rangle$, kde 0 interpretuje plně deterministický model a 1 reprezentuje absolutně chaotický model.

Neurčitost ukázkové Petri sítě lze vyjádřit dopočítáním maximální entropie $\log_2 5 = 2.3219$. Neurčitost je poté kvantifikována jako podíl entropie vůči této maximální entropii $H(PN)/\log_2 n$, tj. $2.2382/2.3219 = 0.9596$. Tento výsledek lze interpretovat jako skutečnost, že neurčitost ukázkové Petri sítě dosahuje 96%, což lze považovat za vysoký stupeň neurčitosti. S vysokým stupněm neurčitosti jsou poté spojeny problémy jako nízká čitelnost, interpretovatelnost, predikovatelnost a další indikátory [4].

3.2 Neurčitost v stochastických Petri sítích

Pro potřeby definice stacionárních pravděpodobností každého značení $M \in R(M_0)$ je nezbytné definovat tzv. matici intenzity (transition rate matrix).

Definice 3.2.1: Matice intenzity stochastické Petri sítě

Necht' $SPN = (P, T, F, \Lambda, W, C, M_0)$ je stochastická Petri síť a $R(M_0)$ je množina všech dosažitelných značení této sítě. Matice intenzity Q Petri sítě SPN je definována jako zobrazení:

$$Q: (R(M_0) \times R(M_0)) \rightarrow \mathbb{R}$$

kde jsou jednotlivé hodnoty určeny podle následujících pravidel:

$$Q_{i,j} = \begin{cases} \sum_{t_k \in \{h: h \in T \wedge M_i \geq 1 \wedge M_i[h] M_j\}} \lambda_k, & \text{if } i \neq j \\ - \sum_{M_k \in \{h: h \in R(M_0) \wedge i \neq k\}} Q_{i,k}, & \text{if } i = j \end{cases}$$

Při uvažování ukázkové Petri sítě s $\Lambda = (2,1,6,3,10)$ nabývá matice intenzity následujících hodnot:

	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
M_0	-2	2	0	0	0
M_1	0	-4	1	3	0
M_2	0	6	-9	0	3
M_3	0	0	0	-1	1
M_4	10	0	0	6	-16

Definice 3.2.2: Stacionární pravděpodobnosti stochastické Petri sítě

Necht' $SPN = (P, T, F, \Lambda, W, C, M_0)$ je stochastická Petri síť a Q je její matice intenzity. Vektor stacionárních pravděpodobností η je definován jako normalizovaný levý nulový prostor matice intenzity Q :

$$\eta Q = \mathbf{0}$$

$$\eta \mathbf{1}^T = 1$$

Vektor η poté obsahuje stacionární pravděpodobnosti jednotlivých značení sítě SPN :

$$\boldsymbol{\eta}^T = \begin{bmatrix} \Pr(M_0) \\ \Pr(M_1) \\ \vdots \\ \Pr(M_{|R(M_0)|}) \end{bmatrix}$$

Vektor stacionárních pravděpodobností ukázkové Petri sítě je roven:

$$\boldsymbol{\eta}^T = \begin{bmatrix} 0.2055 \\ 0.1233 \\ 0.0137 \\ 0.6164 \\ -0.0411 \end{bmatrix}$$

Definice 3.2.3: Entropie stochastické Petri sítě

Nechť $SPN = (P, T, F, \Lambda, W, C, M_0)$ je stochastická Petri síť a $\boldsymbol{\eta}$ je její vektor stacionárních pravděpodobností $\eta_i = \Pr(M_i)$, $M_i \in R(M_0)$. Entropie SPN je definována jako:

$$H(SP_N) = - \sum_{i=1}^{|R(M_0)|} \eta_i \log_2 \eta_i$$

Definice 3.2.4: Neurčitost stochastické Petri sítě

Nechť $SPN = (P, T, F, \Lambda, W, C, M_0)$ je stochastická Petri síť a $H(SP_N)$ její entropie. Neurčitost (Uncertainty) SPN je definována jako:

$$Uncertainty(SP_N) = \frac{H(SP_N)}{\log_2 |R(M_0)|}$$

Hodnota neurčitost je poté z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, kde 0 interpretuje plně deterministický model a 1 reprezentuje absolutně chaotický model.

Entropie ukázkové stochastické Petri sítě dosahuje hodnoty 1,547 bitů, což při maximální entropii 2,3219 bitů představuje výslednou hodnotu neurčitosti na 0,6657 (66,57%). Výsledná hodnota neurčitosti je v tomto případě výrazně nižší než při použití klasických P/T Petri sítí. Je tomu tak převážně z důvodů nerovnoměrného rozdělení exponenciálních distribucí mezi přechody (hodnota λ_5 je výrazně vyšší než ostatní).

3.3 Spravedlivost v P/T Petri sítích

Klasický pojem spravedlivosti v Petri sítích je obdobný s definicí spravedlivosti z temporální logiky [57, 58] a transakčních systémů obecně a je spojen s počtem výskytů specifického

přechodu (události, aktivity) v každé nekonečné sekvenci přechodů sítě. Přechod je např. označen jako nestranný, pokud se vyskytuje nekonečně mnoho krát ve všech nekonečných sekvencích Petri sítě. Tento přístup ke spravedlivosti se používá např. k odstranění všech nekonečných sekvencí, odstraněním (popř. upravením blokovací podmínky v Coloured Petri nets) všech „impartial“ přechodů, viz [19]. Dalším příkladem je vztah dvou přechodů. Dva přechody jsou ve vztahu bounded-fair [15], pokud jeden přechod může proběhnout omezeně-krát zatímco druhý neprobíhá. Pokud jsou všechny přechody v síti ve vztahu bounded-fair, je celá síť nazvaná B-fair síť. V [59] je navíc prezentována strukturální bounded-fairness, u které nezáleží na počátečním značení. Existuje celá řada dalších notací, které byly definovány nebo převzaty do Petri sítí, např. [60-62]. V této práci je však definován odlišný přístup, který definuje spravedlivost sítě ve spojitosti s rovnoměrností stacionárních pravděpodobností jednotlivých míst.

Kvantifikace spravedlivosti v P/T Petri sítích následuje definice 3.1.1 a 3.1.2.

Definice 3.3.1: Stacionární pravděpodobnosti míst P/T Petri sítě

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je P/T Petri síť a \mathbf{u} je vektor stacionárních pravděpodobností všech dosažitelných značení. Vektor stacionárních pravděpodobností jednotlivých míst $\boldsymbol{\rho}$ je definována jako:

$$\boldsymbol{\rho} = \text{norm}(\mathbf{M} * \mathbf{u}) = \frac{\mathbf{M} * \mathbf{u}}{\sum(\mathbf{M} * \mathbf{u})}$$

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \text{Pr}(p_0) \\ \text{Pr}(p_1) \\ \vdots \\ \text{Pr}(p_n) \end{bmatrix}$$

kde \mathbf{M} reprezentuje matici všech dosažitelných značení (jednotlivá značení reprezentují sloupce matice). V případě, že určité místo ve specifickém značení obsahuje více než jeden token, je dílčí pravděpodobnost multiplikována počtem tokenů v tomto místě.

Stacionární pravděpodobnosti míst ukázkové Petri sítě lze tedy vyčíslit následovně:

$$\text{Pr}(P) = \text{norm}(\mathbf{M} * \mathbf{u}) = \text{norm}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.45 \\ 0.30 \\ 0.40 \\ 0.55 \end{bmatrix}\right) = \text{norm}\left(\begin{bmatrix} 0.150 \\ 0.450 \\ 0.300 \\ 0.400 \\ 0.550 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.081 \\ 0.243 \\ 0.162 \\ 0.216 \\ 0.297 \end{bmatrix}$$

Z výsledku je patrné, že místa p_2 a p_4 jsou charakterizovány nejpodobnějšími pravděpodobnostmi, což znamená, že jejich vztah je možné bez uvažování bližších detailů považovat za nejvíce spravedlivý. Dále výsledky indikují, že místo p_1 má nejmenší stacionární pravděpodobnost a místo p_5 největší.

Alternativní přístup ke kvantifikaci stacionárních pravděpodobností je spojen se značením daných míst, tj. stacionární pravděpodobnosti jsou evaluovány pro všechny různé hodnoty značení v jednotlivých místech.

Definice 3.3.2: Stacionární pravděpodobnosti značení míst P/T Petri sítě

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je P/T Petri síť a \mathbf{u} je vektor stacionárních pravděpodobností všech dosažitelných značení. Matice stacionárních pravděpodobností jednotlivých míst v závislosti na hodnotě značení Ψ je definována vztahem:

$$\Psi_{ij} = \sum_{M_k(p_i)=j} \mathbf{u}_k$$

kde i koresponduje s i -tým místem, j reprezentuje různé hodnoty značení v i -tém místě ($j > 0$) a k koresponduje s k -tým značením (resp. stacionární pravděpodobností).

Z definice vyplývá, že pro síť s ohraničeností všech míst rovnou jedné, je matice Ψ shodná s vektorem ρ .

Definice 3.3.3: Entropie míst P/T Petri sítě

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je P/T Petri síť a ρ je vektor stacionárních pravděpodobností všech míst této sítě. Entropie míst sítě PN je definována jako:

$$H_P(PN) = - \sum_{i=1}^{|P|} \rho_i \log_2 \rho_i$$

Stejný vztah lze použít pro kvantifikaci entropie určité podmnožiny míst. Nechť $D \subset P$, poté entropie této podmnožiny je definována jako:

$$H_P(D) = - \sum_{i=1}^{|D|} \rho_i \log_2 \rho_i$$

Definice 3.3.4: Entropie značení míst P/T Petri sítě

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je P/T Petri síť a Ψ je matice stacionárních pravděpodobností všech značení všech míst této sítě. Entropie značení míst sítě PN je definována jako:

$$H_{PA}(PN) = - \sum_{i=1}^{|P|} \sum_{j=1}^{Max\ Bound.} \Psi_{ij} \log_2 \Psi_{ij}$$

Stejný vztah lze použít pro kvantifikaci entropie určité podmnožiny míst. Nechť $D \subset P$, poté entropie této podmnožiny je definována jako:

$$H_{PA}(D) = - \sum_{i=1}^{|D|} \sum_{j=1}^{Max\ Bound.} \Psi_{ij} \log_2 \Psi_{ij}$$

Definice 3.3.5: Spravedlivost P/T Petri sítě

Nechť $PN = (P, T, F, W, C, M_0)$ je P/T Petri síť a $H_P(PN)$ entropie jejích míst. Spravedlivost (Fairness) sítě PN je definována jako:

$$Fairness(PN) = \frac{H_P(PN)}{H_{P_{max}}(PN)}$$

nebo obdobně pro $D \subset P$:

$$Fairness(D) = \frac{H_P(D)}{H_{P_{max}}(D)}$$

Alternativně lze využít hodnoty entropie značení míst $H_{PA}(PN)$ (resp. $H_{PA}(D)$). Vztah pro výpočet spravedlivosti zůstane nezměněn.

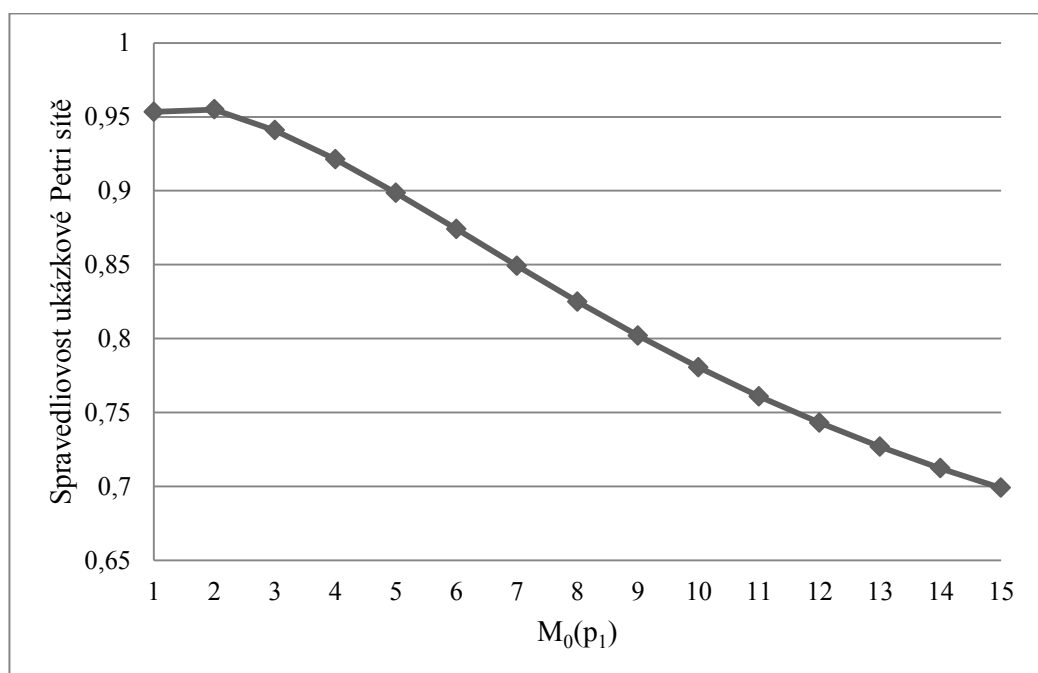
Hodnota spravedlivosti je poté z intervalu $\langle 0,1 \rangle$, kde 0 reprezentuje plně nespravedlivý model a 1 absolutně spravedlivý model. Čím více se hodnota spravedlivosti blíží jedné, tím je větší uniformnost distribuce jednotlivých pravděpodobností míst.

Spravedlivost ukázkové Petri sítě lze vyjádřit následovně:

$Fairness(PN) =$

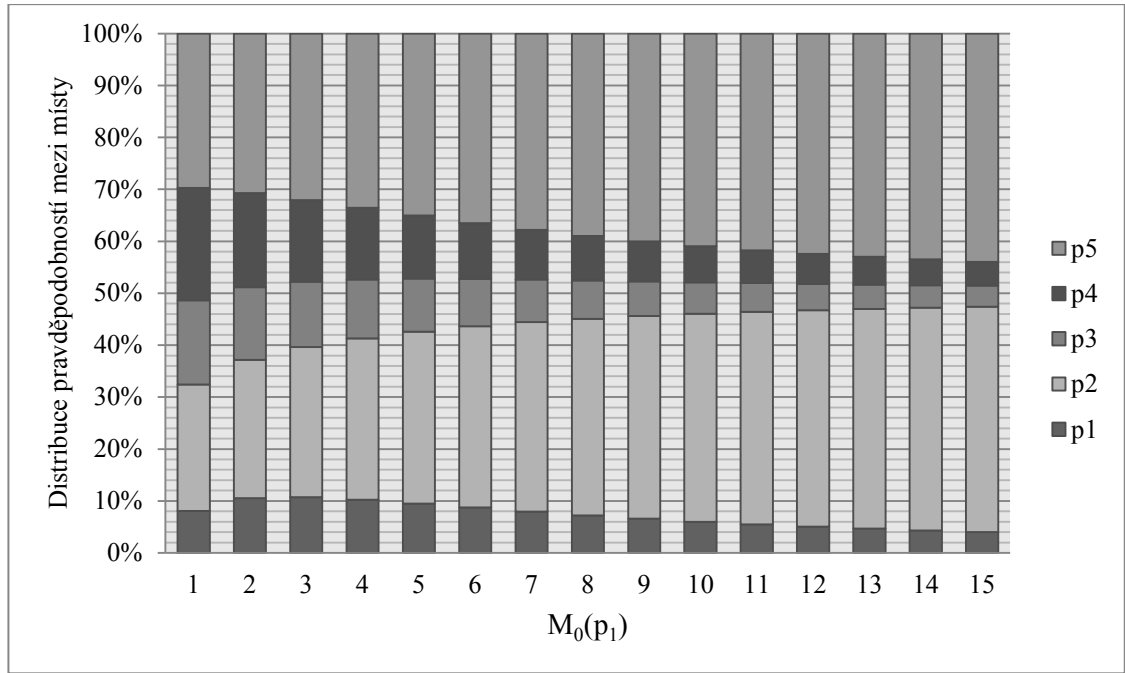
$$\frac{(0.081 \log_2 0.081 + 0.243 \log_2 0.243 + 0.162 \log_2 0.162 + 0.216 \log_2 0.216 + 0.297 \log_2 0.297)}{\log_2 5} = \frac{2.2136}{2.3219} = 0.9533.$$

Výsledek může být volně interpretován jako skutečnost, že spravedlivost v ukázkové Petri síti dosahuje 95,33%. Spravedlivost může být dále analyzována jako odezva modelu na změnu v jeho parametrech, např. počet tokenů v počátečním značení. Obrázek 6 reprezentuje příklad rozložení spravedlivosti ukázkové Petri sítě při změně počtu tokenů v místě p_1 v počátečním značení. Obrázek indikuje, že s rostoucím počtem tokenů v místě p_1 celková spravedlivost sítě klesá.



Obrázek 6 - Spravedlivost vs. počet tokenů v místě p_1 . Zdroj vlastní

Obrázek 7 ilustruje měnící se rozložení stacionárních pravděpodobností jednotlivých míst při změně počtu tokenů v místě p_1 . Z obrázku je patrné, že s rostoucím počtem tokenů v místě p_1 (v počátečním značení) roste dominance míst p_2 a p_5 , což způsobuje snížení entropie a tudíž i celkové spravedlivosti (rozložení pravděpodobností se stává méně uniformní).



Obrázek 7 - Distribuce pravděpodobnosti mezi místy při změně počtu tokenů v místě p_1 . Zdroj vlastní

Tento příklad je pouze ukázkou simulačních možností prezentované vlastnosti. V praxi je možné simulovat různé apriorní předpoklady spojené s distribucí tokenů v počátečním značení, počtem tokenů v jednotlivých místech nebo se samotnou strukturou sítě.

3.4 Spravedlivost v stochastických Petri sítích

Definice spravedlivosti v stochastických Petri sítích následuje definice 3.2.1 a 3.2.2. Definice spravedlivosti v stochastických Petri sítích je obdobou definice spravedlivosti v P/T Petri sítích a proto bude ponechána bez ilustrace dílčích výsledků na vzorovém příkladu.

Definice 3.4.1: Stacionární pravděpodobnosti míst stochastické Petri sítě

Nechť $SPN = (P, T, F, \Lambda, W, C, M_0)$ je stochastická Petri síť a η je vektor stacionárních pravděpodobností všech dosažitelných značení. Vektor stacionárních pravděpodobností jednotlivých míst ρ^s je definována jako:

$$\rho^s = \text{norm}(M * \eta) = \frac{M * \eta}{\sum(M * \eta)}$$

$$\rho^s = \begin{bmatrix} \Pr(p_0) \\ \Pr(p_1) \\ \vdots \\ \Pr(p_n) \end{bmatrix}$$

kde M reprezentuje matici všech dosažitelných značení. V případě, že určité místo ve specifickém značení obsahuje více než jeden token, je dílčí pravděpodobnost multiplikována počtem tokenů v tomto místě.

Definice 3.4.2: Entropie míst stochastické Petri sítě

Nechť $SPN = (P, T, F, \Lambda, W, C, M_0)$ je stochastické Petri síť a ρ^s je vektor stacionárních pravděpodobností všech míst této sítě. Entropie míst sítě SPN je definována jako:

$$H_P(SP_N) = - \sum_{i=1}^{|P|} \rho_i^s \log_2 \rho_i^s$$

Stejný vztah lze použít pro kvantifikaci entropie určité podmnožiny míst. Nechť $D^s \subset P$, poté entropie této podmnožiny je definována jako:

$$H_P(D^s) = - \sum_{i=1}^{|D^s|} \rho_i^s \log_2 \rho_i^s$$

Definice 3.4.3: Spravedlivost stochastické Petri sítě

Nechť $SPN = (P, T, F, \Lambda, W, C, M_0)$ je stochastické Petri síť a $H_P(SP_N)$ entropie jejích míst. Spravedlivost (Fairness) sítě SPN je definována jako:

$$Fairness(SP_N) = \frac{H_P(SP_N)}{H_{P_{max}}(SP_N)}$$

nebo obdobně pro $D^s \subset P$:

$$Fairness(D^s) = \frac{H_P(D^s)}{H_{P_{max}}(D^s)}$$

Hodnota spravedlivosti je poté lokalizována v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, kde 0 reprezentuje plně nespravedlivý model a 1 absolutně spravedlivý model. Čím více se hodnota spravedlivosti blíží jedné, tím je větší uniformnost distribuce jednotlivých pravděpodobností míst. Obdobně lze využít alternativní přístup z definic 3.3.2 a 3.3.4.

Využitím stochastických Petri sítí se rozšiřují možnosti analyzovat odezvu modelu na změnu určitého parametru, o parametr exponenciálního rozdělení λ . Možnosti analýzy odezvy stochastického modelu na změnu parametrů lze shrnout následovně:

- Změna počátečního značení (např. počet tokenů v určitém místě).
- Změna kapacit jednotlivých míst (pokud se využívají kapacitní Petri sítě).
- Změna parametrů λ u přechodů.

V závislosti na měnící se parametr lze poté analyzovat:

- Vývoj neurčitosti, resp. rovnoměrnost distribuce jednotlivých stacionárních pravděpodobností všech dosažitelných značení (popř. podmnožiny všech dosažitelných značení).
- Vývoj spravedlivosti, resp. rovnoměrnost distribuce jednotlivých stacionárních pravděpodobností specifické podmnožiny míst (popř. všech míst sítě).

Analýza neurčitosti a spravedlivosti je založená na kvantifikaci rovnoměrnosti distribuce (kvantifikace entropie) stacionárních pravděpodobností značení, resp. míst. Pojmy neurčitost a spravedlivost jsou vázány s kontextem dříve definovaných vlastností, tj. rozdíl mezi neurčitostí a spravedlivostí je zdroj, z jehož stacionárních pravděpodobností je kvantifikována entropie. V případě neurčitosti je tímto zdrojem množina všech dosažitelných značení, kterou si lze obecně představit jako množinu všech možných stavů (konfigurací) systému. V případě spravedlivosti je tímto zdrojem množina všech míst, která obecně reprezentuje stavy jednotlivých prvků systému. Jelikož lze na každý prvek systému nahlížet jako na samostatný systém, je důležité při modelování a analýze přesně deklarovat funkci a reprezentaci jednotlivých míst sítě (popř. specifické podmnožiny všech míst). Toto je hlavně důležité při zpětné interpretaci neurčitosti či spravedlivosti modelu (sítě). Tyto skutečnosti jsou však přímo spojené s využíváním Petri sítí jakožto modelovacího nástroje, popř. problematiky modelování obecně (např. Teorie systémů). Z tohoto důvodu je konkrétní interpretace neurčitosti a spravedlivosti přímo spojena s konkrétní modelovanou problematikou. Příklady konkrétních interpretací neurčitosti a spravedlivosti obsahuje kapitola 5.

4 Implementace definovaných vlastností

Po teoretickém nadefinování neurčitosti a spravedlivosti je pro účely verifikace a užití, vhodné tyto vlastnosti vhodně implementovat do formy, která je uživatelsky přívětivá a jejíž výstupy snadno interpretovatelné. Implementačně nejsnazší je maticová forma vstupů, výpočtů i výstupů ve vhodném matematickém editoru (např. Matlab). Další možností je vlastní implementace v určitém programovacím jazyku (např. C#).

4.1 Maticová implementace v programu Matlab

Hlavní výhodou implementace pomocí matematického editoru je jeho jednoduchost a transparentnost (skriptovací jazyk), tj. jak forma vstupních a výstupních dat, tak samotné výpočty jsou maticového charakteru a navíc uživatel vidí postup výpočtů. Pro účely výpočtů v prostředí Matlab je nutné Petri síť vyjádřit ve formě dvou incidenčních matic [15], které představují přítomnost (popř. multiplicitu) orientované hrany z míst do přechodů tj. $w_{i,j}^{pt} = W(p_i, t_j)$, resp. přechodů do míst tj. $w_{i,j}^{tp} = W(t_i, p_j)$. Pro ukázkový příklad definovaný v podkapitole 1.1.4 by tyto dvě incidenční matice v prostředí Matlab vypadaly, viz Obrázek 8.

```
%the incidence matrix (arcs from transitions to places)
w_tp = [
    0  0  0  0  1
    1  0  1  0  0
    1  0  0  0  0
    0  1  0  0  0
    0  0  0  1  0];
%the incidence matrix (arcs from places to transtitions)
w_pt = [
    1  0  0  0  0
    0  1  0  0  0
    0  0  0  1  0
    0  0  1  0  1
    0  0  0  0  1];
```

Obrázek 8 - Struktura ukázkové Petri sítě zadána v maticovém tvaru formou incidenčních matic. Zdroj vlastní

Pomocí těchto dvou incidenčních matic je zadána kompletní struktura Petri sítě, tj. P, T, F a W (množina všech míst, přechodů, orientovaných hran a multiplicitu těchto hran). Následně je nutné maticově vyjádřit dynamickou složku definice Petri sítě, tj. počáteční značení, kapacitu míst a parametr exponenciálního rozdělení λ přechodů (pouze u stochastických sítí), viz Obrázek 9.

```

%capacities of places
cap = [50,50,50,50,50];
%exponential rates of transtitions
lambda = [28,5,1,42,142];
%initial marking
init = [
    1
    0
    0
    0
    0];

```

Obrázek 9 - Vektory definující kapacitu míst a počáteční značení sítě. Zdroj vlastní

Všechny tyto matice a vektory slouží jako vstupní parametry pro funkci (viz. Obrázek 10), která vrací vypočítanou množinu všech dosažitelných značení a matici intenzity (pozn. parametr n určuje konstantu pro dynamické rozšiřování pole).

```

function [x,y] = stsp(init,w_tp,w_pt,n,cap,lambda)
table = zeros(cap);
w = w_tp - w_pt;
[p_count,t_count] = size(w);
marking = zeros(p_count,n);
Q = zeros(n);
i = 1;
b = 2;
marking(:,i) = init;
a = num2cell(transpose(marking(:,i)+1));
table(a{:}) = i;
while b > i % && b < 10
    for j = 1:t_count
        if marking(:,i) >= w_pt(:,j)
            m = marking(:,i) + w(:,j);
            a = num2cell(transpose(m+1));
            if b > n
                %incrementation
                n = n * 2;
                %extend markings
                temp = marking;
                marking = zeros(p_count,n);
                marking(:,1:b-1) = temp;
                %extend Q
                temp2 = Q;
                Q = zeros(n);
                Q(1:b-1,1:b-1) = temp2;
            end
            if table(a{:}) == 0
                table(a{:}) = b;
                Q(i,b) = Q(i,b) + lambda(j);
                marking(:,b) = m;
                b = b + 1;
            else
                Q(i,table(a{:})) = Q(i,table(a{:})) + lambda(j);
                %c = c + 1;
            end
        end
    end
    i = i + 1;
end
x = marking(:,1:b-1);
y = Q(1:b-1,1:b-1);

```

Obrázek 10 - Výpočet množiny všech dosažitelných značení matice intenzity u stochastických Petri sítí. Zdroj vlastní

Pro samotný výpočet, např. spravedlivosti u stochastických sítí je postup následující, viz Obrázek 11.

```

%evaluation of steady-state probabilities from transition rate matrix
[m,q] = stsp(init,w_tp,w_pt,n,cap,lambda);
%evaluation of steady-state probabilities from transition rate matrix
[a,~] = size(q);
for i = 1:a
    Q(i,i) = -sum(Q(i,:));
end
o = null(Q');
v = o/sum(o);
pr = m*v
%stationary probabilities of places
pr = pr/sum(pr)
[r,s] = size(pr);
entropy = 0;
for i = 1:r
    entropy = entropy + (pr(i)*log2(pr(i)));
end
entropy = -entropy
max_entropy = log2(r)
fairness = entropy/max_entropy

```

Obrázek 11 - Výpočet spravedlivosti v stochastických Petri sítích v prostředí Matlab. Zdroj vlastní

Zdrojové kódy pro výpočet všech čtyř vlastností (neurčitost a spravedlivost v P/T a stochastických Petri sítích) v prostředí Matlab obsahuje příloha 1.

Hlavní nevýhodou takovéto implementace je špatná uživatelská přívětivost ve smyslu čitelnosti vstupních hodnot (Petri síť je zadána v maticové formě) a špatná flexibilita při jakékoli změně (např. přidání místa, přechodu apod.) tj. nutnost mapovat jakoukoli změnu v grafické (diagramové) formě do maticové formy. U rozsáhlejších modelů činí tato nutnost „mapování“ tento přístup nepoužitelný pro praktické využití.

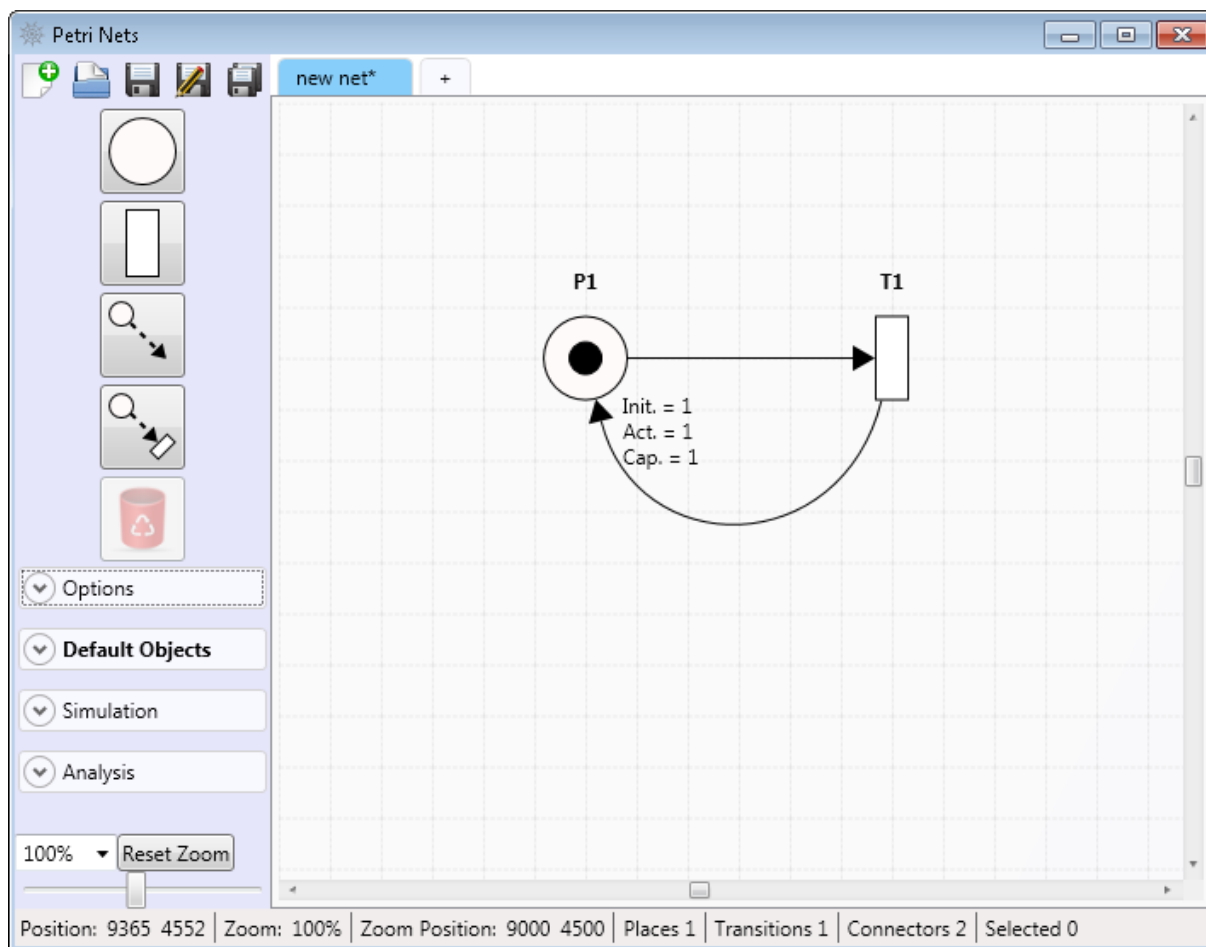
Jedním z možných řešení je nalezení již existujícího editoru Petri sítí, který umožňuje exportovat svou maticovou podobu a tím alespoň částečně eliminovat nutnost manuálního mapování Petri sítě do maticové formy. Jedním z takovýchto editorů je nástroj HPSim [63], který však umožňuje exportovat pouze jednu incidenční matici, která odpovídá rozdílu výše zmíněných matic ($W = W^{pt} - W^{tp}$), z kterého nelze zpětně získat původní matice. Další nástroje, u kterých bylo rozhodováno o použitelnosti, jsou WoPeD [64] (neumožňuje exportovat incidenční matice; spíše orientovaný na modelování a analýzu podnikových procesů) a TimeNET [65] (neumožňuje export incidenčních matic; analýza modelů spíše skriptovacího charakteru; špatná uživatelská přívětivost). V průběhu dokončování této práce byl objeven nástroj PIPE [66], který umožňuje exportovat incidenční matice. Z důvodu nenalezení (v daném čase) vhodného editoru, který by umožňoval exportovat modelovanou Petri síť v maticové formě, bylo přistoupeno k implementaci nového editoru Petri sítí, který by umožňoval modelovat Petri síť v jednoduché grafické formě a zároveň vypočítat hodnoty neurčitosti a spravedlivosti této sítě, popř. definovat podsítě pro specifické analýzy spravedlivosti či neurčitosti.

4.2 Implementace vlastního editoru Petri sítí

K rozhodnutí implementovat vlastní editor Petri sítí přispěla řada skutečností, které lze shrnout následovně:

- Špatná uživatelská přívětivost prostředí Matlab (pouze maticová forma) pro práci s Petri sítěmi.
- Nutnost mapovat každou změnu (např. přidání místa nebo přechodu) z grafické formy (diagram na papíře nebo specifickém editoru Petri sítí) do maticové formy (prostředí Matlab).
- Implementace nového editoru Petri sítí by umožnila provést výpočet neurčitosti a spravedlivosti jakékoli namodelované Petri sítě pomocí jednoduché operace, např. stisku jednoho tlačítka, což by vedlo k výraznému zefektivnění modelování a analýzy.

Editor Petri sítí byl implementován pomocí programovacího jazyka C# [67] s využitím Microsoft .NET Framework 4.5 (příloha 2) a lze jej nalézt v příloze 3 (64 bitová verze) a 4 (32 bitová verze). Zdrojový kód aplikace obsahuje 2969 řádků kódu (cca. 130 stran formátu A4, resp. 330 tisíc znaků vč. mezer) a lze jej nalézt v příloze 5. Grafické uživatelské rozhraní této aplikace ilustruje Obrázek 12.



Obrázek 12 - Grafické uživatelské rozhraní nově implementovaného editoru Petri sítí. Zdroj vlastní

Hlavní okno nově implementovaného editoru (dále jen editoru) se skládá z tří částí:

- Levý pruh okna obsahuje ovládací prvky pro práci s modelem (Petri sítí) a jeho objekty (místa, přechody a orientované hrany). Jmenovitě se jedná o:
 - Sadu funkčních ikon / tlačítek (vlevo nahoře), které umožňují vytvoření nové sítě, otevření uložené sítě a tři možnosti uložení sítě (klasické uložení, uložení jako a uložení všech otevřených sítí).
 - Tlačítka pro vytvoření nového místa, přechodu, orientované hrany, orientované hrany včetně nového místa nebo přechodu (v závislosti na typ uzlu, z kterého je hrana vytvářena) a tlačítko pro vymazání vybraného objektu / objektů (místa, přechody a orientované hrany).
 - Možnosti editace sítě a objektů, viz podkapitola 4.2.1.
 - Možnosti spojené se simulací sítě, viz podkapitola 4.2.2 a 4.2.4.
 - Možnosti spojené s analýzou sítě, viz podkapitola 4.2.3.

- Pracovní plocha pro modelování může obsahovat mřížku, ke které jsou místa a přechody přichytávány (velikost mřížky je možné měnit, viz níže). Mezi jednotlivými pracovními plochami lze přepínat vybráním odpovídající záložky v horní části pracovní plochy.
- Stavový řádek, který poskytuje aktuální informace o:
 - o pozici kurzoru nad pracovní plochou,
 - o úrovni přiblížení v procentech,
 - o pozici vertikálního a horizontálního posuvníku pracovní plochy (scroll bars),
 - o počtu míst na pracovní ploše,
 - o počtu přechodů na pracovní ploše,
 - o počtu orientovaných hran na pracovní ploše,
 - o počtu všech vybraných objektů (počet všech vybraných míst, přechodů a orientovaných hran).

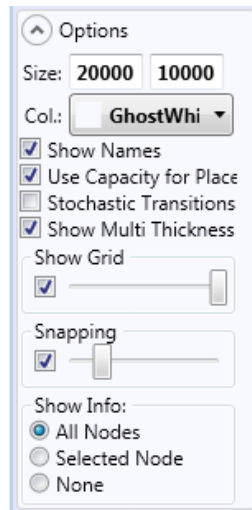
Funkční vlastnosti tohoto editoru lze shrnout do tří kategorií, tj. editace sítě a jejích objektů, simulace dynamického chování sítě a analýza behaviorálních vlastností sítě (ohraničenost, živost, neurčitost, spravedlivost aj.).

4.2.1 Editace sítě a jejích objektů

Možnosti editace sítě ilustruje Obrázek 13. Editor umožňuje nastavit následující vlastnosti sítě:

- velikost uživatelské plochy (plátna) v pixelech (šířka a výška) – zobrazovaná plocha je nastavena na střed této uživatelské plochy,
- barva pozadí uživatelské plochy,
- možnost zapnout či vypnout zobrazování jmen míst a přechodů,
- možnost zapnout či vypnout mřížku na pozadí s možností nastavení její průhlednosti,
- možnost zapnout či vypnout používání kapacit u míst,
- možnost zapnout či vypnout používání stochastických Petri sítí,
- možnost zapnout či vypnout zobrazování tloušťky orientované hrany v závislosti s její multiplicitou (pokud vypnuto, tak se zobrazuje číslo, viz Obrázek 24),
- možnost zapnout či vypnout přichytávání objektů k mřížce na pozadí a nastavení velikosti této mřížky,

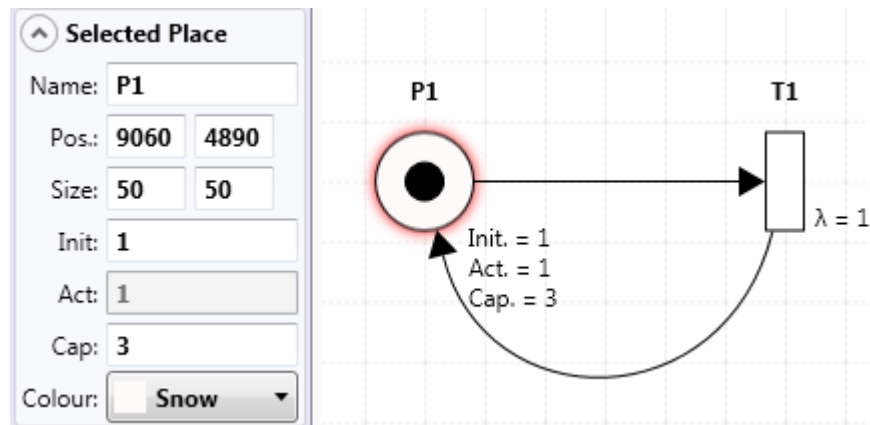
- možnost přepnout mezi zobrazováním informací (počáteční počet tokenů, aktuální počet tokenů a kapacita u míst, parametr λ u přechodů a multiplicita u orientovaných hran) u všech objektů nebo pouze u vybraných objektů nebo nezobrazování těchto informací.



Obrázek 13 - Možnosti editace sítě. Zdroj vlastní

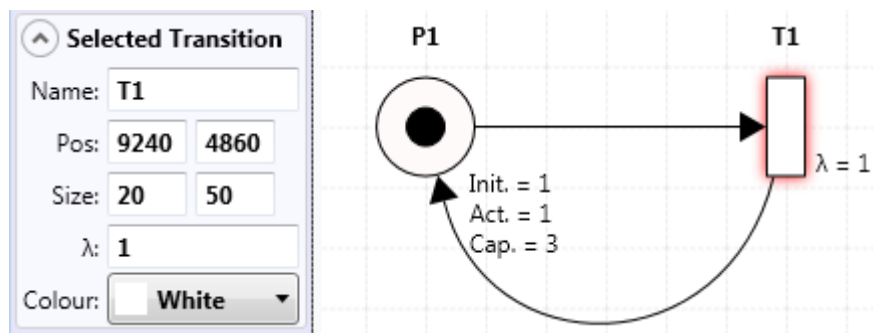
Objektem sítě se rozumí přechod, místo nebo orientovaná hrana. Nabídku pro editaci objektu lze vyvolat kliknutím (vybráním) daného objektu levým tlačítkem myši. Místa i přechody mají možnost nastavení šířky a výšky, tj. místo může být kruh nebo elipsa, resp. přechod může být čtverec nebo obdélník. Každý objekt lze vybrat kliknutím levým tlačítkem myši. Pro výběr víc objektů najednou lze držet klávesu CTRL a kliknout na další objekt, popř. držet levé tlačítko myši na pozadí (mimo objekty) a táhnutím se vytvoří obdélník, který označí všechny objekty pod ním. Místa a přechody jdou dále přesouvat (držení levého tlačítka myši na objektu a táhnutí).

Možnosti editace místa ilustruje Obrázek 14. Z obrázku vyplývá, že lze měnit jméno místa, jeho polohu, velikost (šířka a výška), inicializační počet tokenů (lze měnit i kolečkem myši při stisku klávesy CTRL), kapacitu místa (pouze pokud je zapnuto používání míst – lze měnit i kolečkem myši při stisku klávesy SHIFT) a jeho barvu (barva všech objektů lze vybrat ze 144 přednastavených barev).



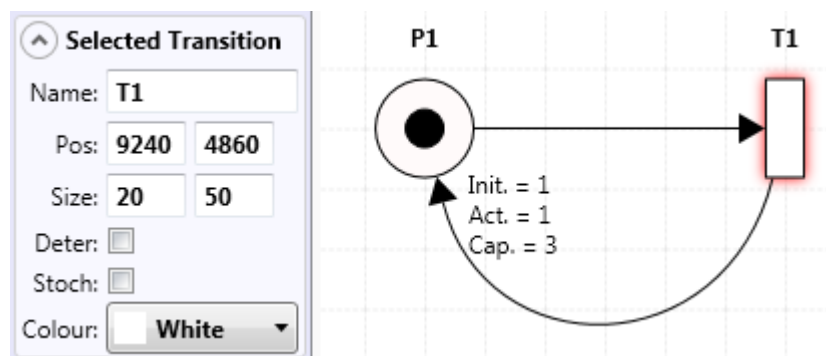
Obrázek 14 - Možnosti editace místa. Zdroj vlastní

Možnosti editace přechodu znázorňuje Obrázek 15. Jedná se o editaci názvu přechodu, jeho polohy, velikosti (šířka a výška), parametru λ (pouze pokud je zapnutá možnost pro používání stochastických sítí) a barva přechodu.



Obrázek 15 - Možnosti editace přechodu pro stochastické sítě. Zdroj vlastní

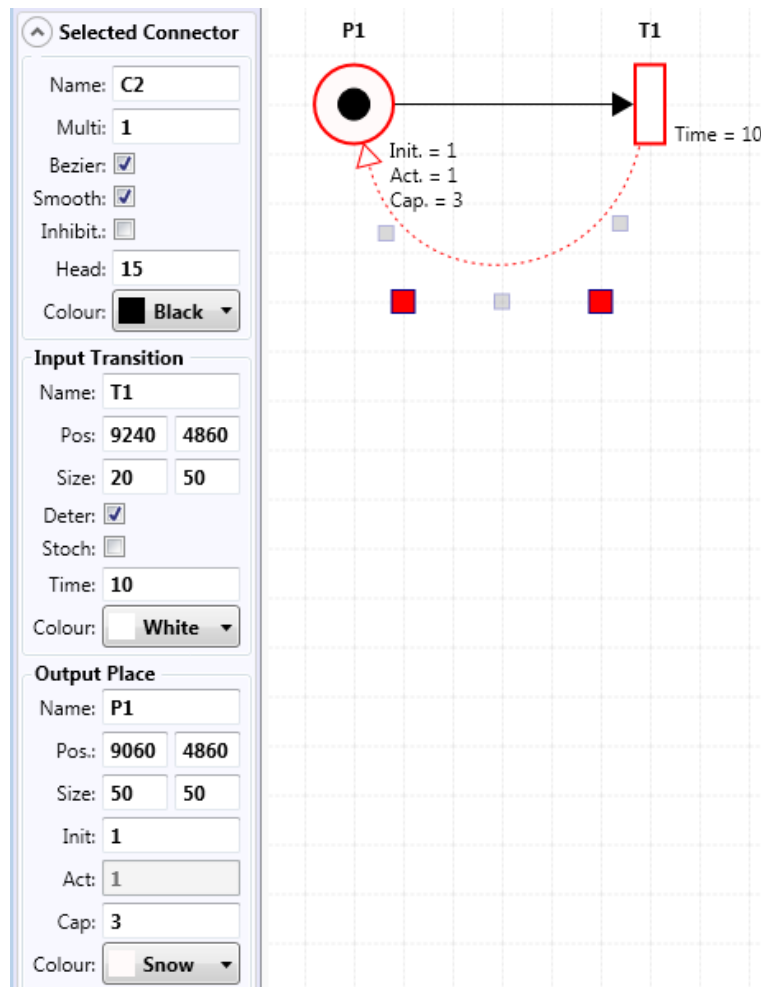
Obrázek 16 znázorňuje možnosti editace přechodu při vypnutí používání stochastických sítí. V takovémto případě lze vybranému přechodu nastavit deterministické, či stochastické zpoždění (v případě, že není žádoucí, aby všechny přechody byly stochastické). Ukázkou nastavení s vybranou možností deterministického zpoždění znázorňuje Obrázek 17.



Obrázek 16 - Možnosti editace přechodu pro nestochastické sítě. Zdroj vlastní

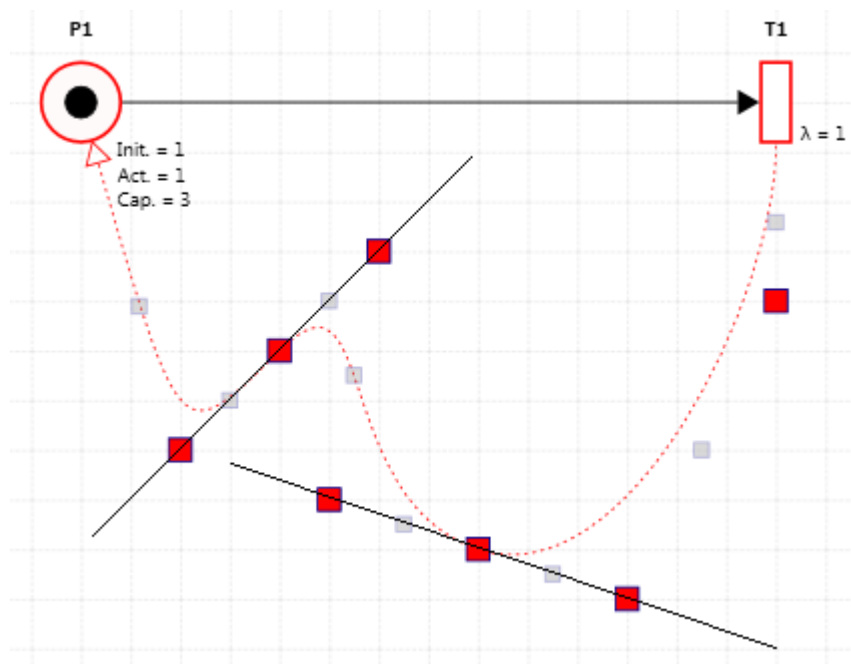
Možnosti editace orientované hrany (dále pouze hrany) znázorňuje Obrázek 17. Každá hrana umožňuje editovat zároveň vstupní místo/přechod a výstupní místo/přechod. U samotné hrany lze editovat její jméno, multiplicitu (násobnost), možnost zapnout či vypnout používání Bézierových křivek, možnost zapnout či vypnout používání hladkých Bézierových křivek (pouze pokud je zapnuto používání Bézierových křivek, viz níže), nastavit danou hranu jako inhibitor, velikost šipky (velikost hrany rovnostranného trojúhelníku) a barva této orientované hrany.

Každá hrana se může skládat z libovolného počtu bodů, podle kterých se lomí (resp. které určují parametry pro konstrukci Bézierových křivek). Nové body jsou přidávány uživatelem kliknutím levým tlačítkem myši na šedý čtverec, který se nachází na hraně, popř. poblíž hrany při používání Bézierových křivek, viz Obrázek 17. Tímto se daný čtverec zvětší a změní barvu na červenou a hrana se podle něj bude lomit. Uživatel může libovolný bod hrany smazat dvojklikem levé myši na tento bod. Další operace s body hrany jsou přesun a označení (stejným způsobem jako např. u přechodu). Označený bod hrany změní svou barvu na zelenou.



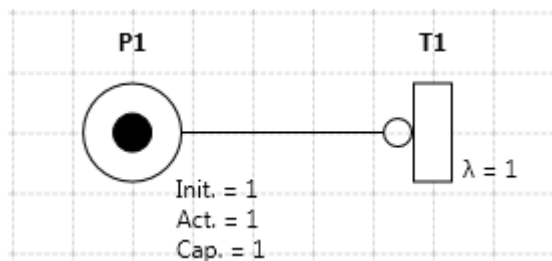
Obrázek 17 - Možnosti editace orientované hrany. Zdroj vlastní

Používání hladkých Béziových křivek je ovlivněno chování jednotlivých bodů křivky při posouvání bodů křivky uživatelem. Každá kubická Béziova křivka obsahuje počáteční bod, dva mezibody a konečný bod. Při využití více než čtyř bodů jsou vytvářeny další Béziovy křivky podle vztahu: konečný bod předchozí křivky je počátečním bodem aktuální křivky. Aby byl přechod mezi jednotlivými křivkami hladký, je nutné, aby druhý mezibod předchozí Béziovy křivky byl zrcadlovým obrazem prvního mezibodu aktuální křivky od koncového bodu přechází křivky (resp. počátečního bodu aktuální křivky). Tento vztah znázorňuje Obrázek 18, kde jsou tři Béziovy křivky, tj. jsou zde 2 vztahy „zrcadlení“ (mezi první a druhou a druhou a třetí křivkou), které jsou ilustrovány přímkami (protínají dvě trojice bodů).



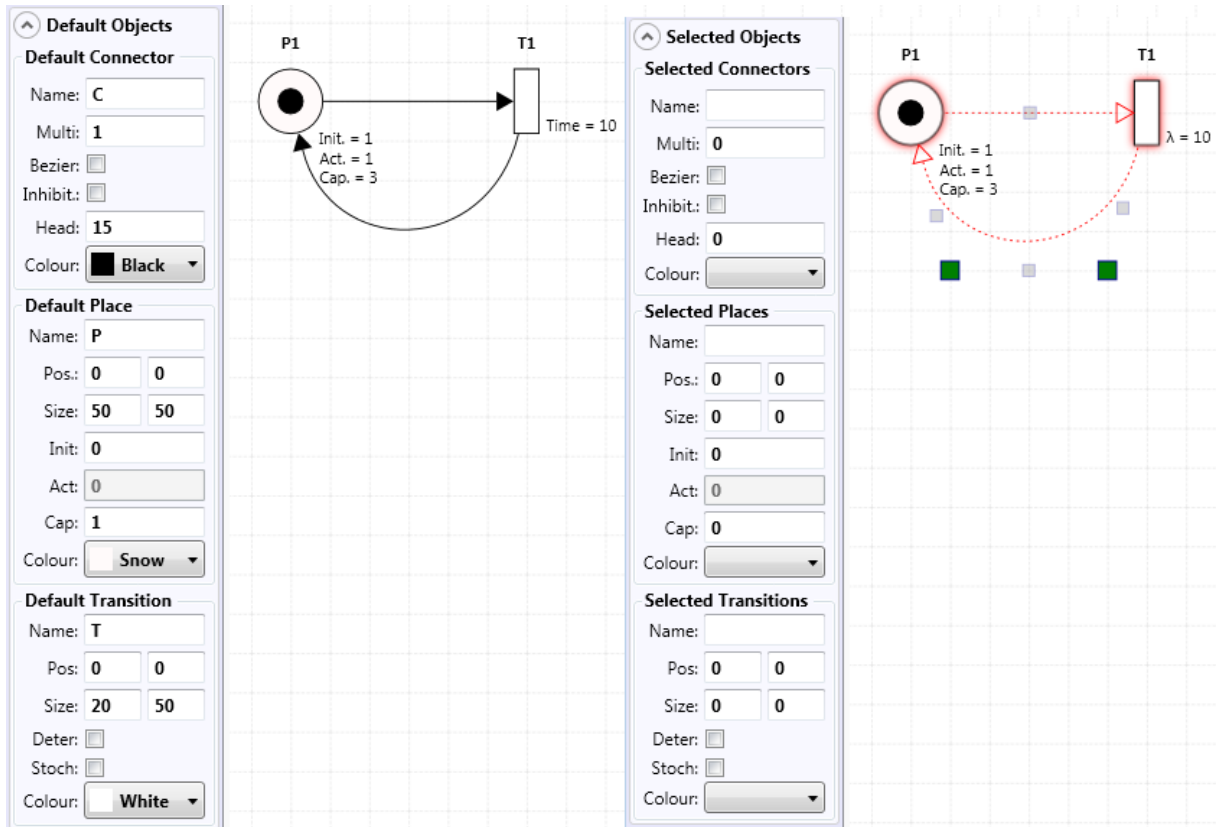
Obrázek 18 - Hladké Bézierovy křivky. Zdroj vlastní

Pokud je hrana nastavena jako inhibitor, vizuální reprezentace jejího konce se změní z rovnostranného trojúhelníku na kružnici, viz Obrázek 19. Hrana typu inhibitor nepřenáší žádné tokeny a slouží pro ověření přítomnosti tokenu ve vstupním místě. Pokud vstupní místo neobsahuje žádný token, přechod může být vykonán (v závislosti na dalších vstupních místech), v opačném případě je přechod nevykonatelný. Hranu typu inhibitor lze definovat pouze mezi vstupním místem a výstupním přechodem a slouží převážně ke zjednodušení modelu (opadne nutnost používat pomocná místa, která definují nepřítomnost určitého jevu). Tím, je zajištěna lepší čitelnost a přehlednost modelu a navíc efektivnější provádění analýz (kompaktnější velikost dosažitelných značení). V některých případech (nebinárních systémech) nelze bez použití tohoto typu hrany systém namodelovat, např. systémy, které využívají vyrovnávací paměť (testování zda je vyrovnávací paměť prázdná apod.) [15]. Příklad využití orientované hrany typu inhibitor a vliv tohoto použití na strukturu a výpočetní efektivitu modelu obsahuje kapitola 5.1.2.



Obrázek 19 - Vizuální reprezentace hrany typu Inhibitor. Zdroj vlastní

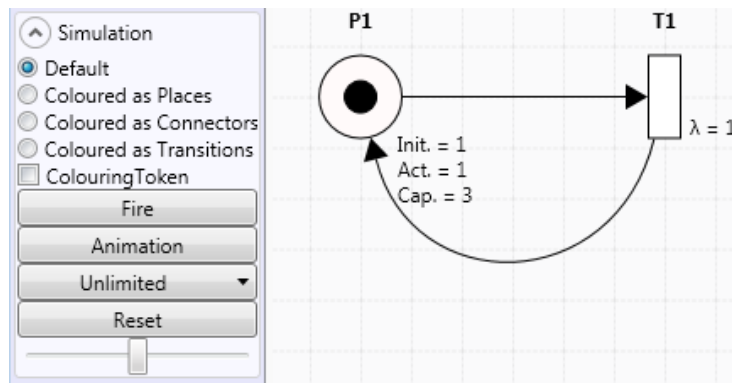
Obrázek 20 ilustruje poslední dvě možnosti spojené s editací objektů, a to nastavení výchozích hodnot (pokud není nic označené, tj. uživatel klikne na pozadí pracovní plochy) pro jednotlivé objekty a hromadná editace vybraných objektů (pokud uživatel vybere více než jeden objekt). Tím je umožněno výrazně ulehčit modelování při práci s rozsáhlejšími systémy, u kterých je potřebné vizuálně odlišit různé typy uzlů či specifické podsítě.



Obrázek 20 - (a) Editace výchozích hodnot (b) Editace vybraných objektů (multiselection). Zdroj vlastní

4.2.2 Vizuální reprezentace dynamického chování sítě

Editor umožňuje provádění simulace dynamického chování sítě, které je podníceno sktrukturou sítě a inicializačním značením (popř. kapacitami míst, pokud jsou zapnuté). Přehled simulačních možností editoru ilustruje Obrázek 21



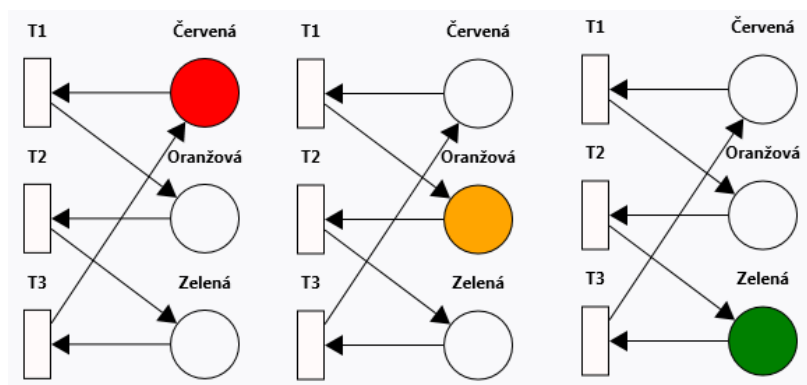
Obrázek 21 - Možnosti simulace dynamického chování sítě. Zdroj vlastní

Jednotlivé možnosti nastavení jsou následující:

- Barva tokenu (výchozí „LimeGreen“), kterou je možné změnit tak, aby se token obarvoval podle barvy místa z/do kterého putuje, podle barvy hrany nebo podle barvy přechodu přes který je přenášen.
- Možnost zapnout nebo vypnout „obarvující token“ (ColouringToken), tj. pro binární sítě, při zapnutí se nezobrazuje token jako černý kruh, ale jeho přítomnost aktivuje barvu místa (pokud místo neobsahuje žádný token, je jeho barva nastavena na „Transparent“, tj. průhledný, resp. bezbarvý). Příkladem využití je např. semafor, viz Obrázek 22.
- Tlačítko „Fire“, které umožňuje spustit jeden krok simulace/animace, tj. testování všech přechodů sítě zda je možné je vykonat (přenést tokeny ze všech vstupních míst do všech výstupních míst). Počet přechodů, které jsou vykonány, může být explicitně omezen výběrem limitu pro počet vykonaných přechodů v jednom kroku. Limit lze nastavit mezi 1 a 10 přechody nebo neomezeně (Unlimited). Každý přechod, který je vykonáván mění svou barvu na „LimeGreen“ a u všech přechodů, které byly v daném kroku proveditelné je nastaveno viditelně širší ohraničení. Součástí každého kroku je animace přesunu tokenů přes hrany z vstupního místa přes přechod do výstupního místa. Příklad vykonávání jednoho přechodu ilustruje Obrázek 23.
- Možnost spustit animaci. Stejně jako předchozí bod, ale v nekonečném cyklu, tj. projdou se všechny proveditelné přechody, provede se animace tokenů mezi místy a celý cyklus se opakuje od začátku (s novým značením).
- Možnost změny rychlosti animace (posuvník). Interval posuvníku je $x \in \langle 1, 12 \rangle$ a doba animace v mikrosekundách je počítána podle vztahu $do\ba\ animace = 5e^{0.69315x}$, tím, je zajištěn plynulá změna rychlosti animace v závislosti na změně posuvníku. Doba animace v závislosti na volbě pozice posuvní je od 10 milisekund do 20

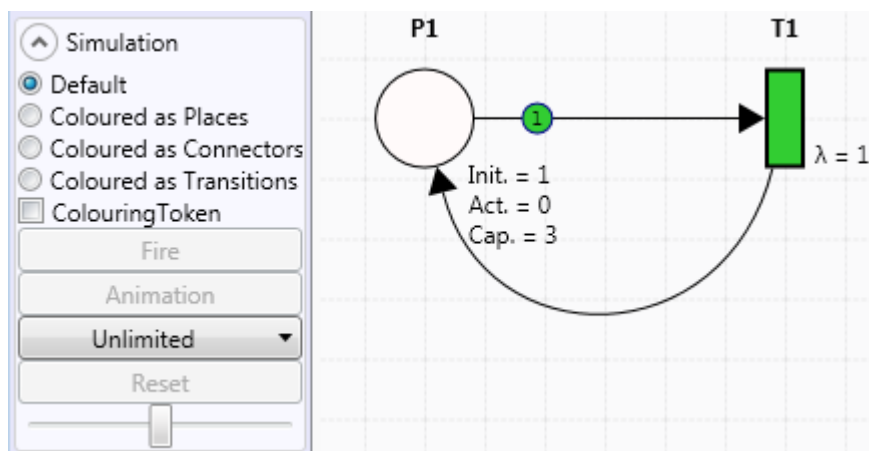
sekund. Součástí celého procesu animace je doba čekání před dalším krokem (z důvodu vizuální čitelnosti nového značení sítě). Doba tohoto čekání je stanovena jako jedna desetina doby animace.

- Možnost resetovat síť, tj. nastavení aktuálního počtu tokenů všech míst na hodnotu inicializačního počtu tokenů.



Obrázek 22 - Příklad "obarvujícího tokenu" semafor. Zdroj vlastní

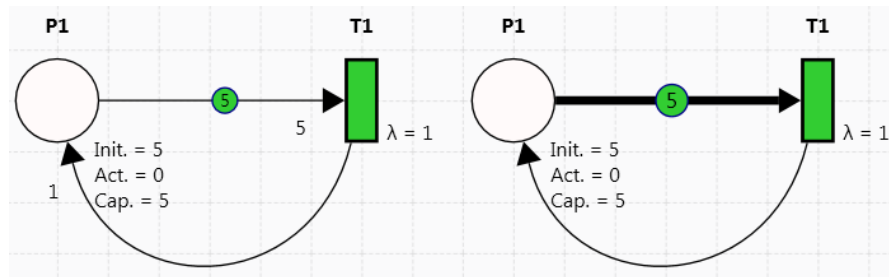
Každý token animace navíc nese číslo, jež reprezentuje multiplicitu hrany, po které je přesouván (viz Obrázek 23).



Obrázek 23 - Animace - Token je přenášen z místa P1 k přechodu T1. Zdroj vlastní

Při zapnutí vizuální reprezentace multiplicity hrany (multiplicita reflektuje tloušťku hrany) je navíc velikost tokenu zvětšena o hodnotu této reprezentace. Obrázek 24 ilustruje průběh animace při vypnuté a zapnuté vizuální reprezentaci multiplicity. Nutno dodat, že při zapnuté vizuální reprezentaci multiplicity, není hodnota tloušťky hrany, či velikosti tokenu přímo nastavována na hodnotu multiplicity. Hodnoty všech multiplicit jsou dynamicky přepočítávány do pevně daného intervalu (maximální tloušťka hrany je 15 pixelů), čímž je

zajištěna relativní přehlednost a čitelnost modelu při využívání velkých hodnot multiplicity (hodnoty v rámci stovek či tisíců).



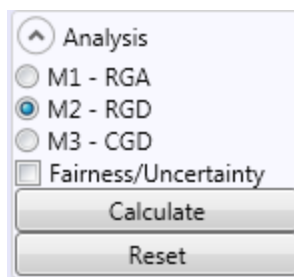
Obrázek 24 – Vliv vizuální reprezentace multiplicity hrany na její tloušťku a velikost tokenu (vpravo). Zdroj vlastní
Mimo vizuální reprezentaci dynamického chování, lze simulaci využít pro aproximaci specifických vlastností sítě, v případech kdy není možné použít analytických přístup řešení. Simulační možnosti editoru v kontextu aproximace určitých veličin obsahuje podkapitola 4.2.4.

4.2.3 Analýza behaviorálních vlastností sítě

Hlavním důvodem k implementaci nového editoru Petri sítě byla možnost výpočtu neurčitosti a spravedlivosti sítě. Jednou z dalších, dříve nezmíněných, výhod vlastní implementace editoru je možnost optimalizace výpočetních procedur, tj. navržené algoritmy výpočtu určité veličiny (např. množiny všech dosažitelných značení) dávají zpravidla lepší výsledky (z hlediska času) než Matlab.

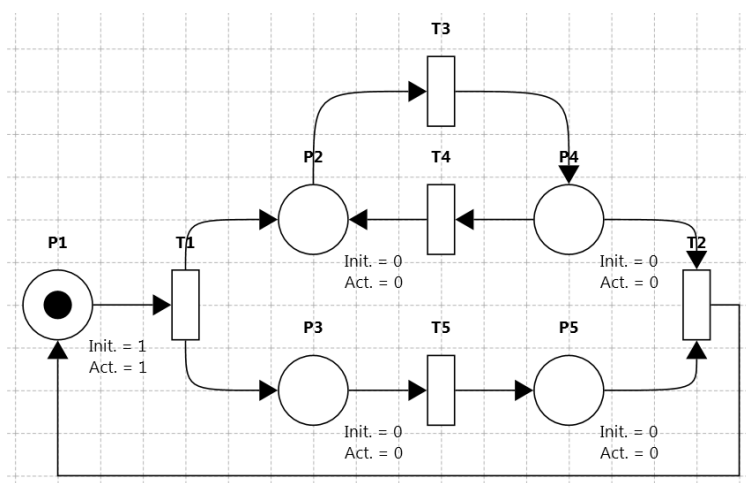
Pro výpočet množiny všech dosažitelných značení byly graduálně navrženy tři algoritmy (viz Obrázek 25):

- výpočet grafu dosažitelnosti s využitím klasických polí („M1 – RGA“; Method 1 – Reachability Graph with Arrays),
- výpočet grafu dosažitelnosti s využitím slovníků („M2 – RGD“; Method 2 – Reachability Graph with Dictionaries),
- výpočet grafu pokrytí s využitím klasických polí a slovníků („M3 – CGD“; Method 3 – Coverability Graph with Dictionaries).



Obrázek 25 - Možnosti analýzy behaviorálních vlastností v editoru Petri sítí. Zdroj vlastní

Všechny tyto algoritmy umožňují vygenerovat množinu všech dosažitelných značení (pokud existuje konečný počet dosažitelných značení, tj. síť je ohraničená), popř. množinu všech pokrytých dosažitelných značení, tzv. strom (popř. graf) pokrytí (pro neohraničené sítě). Využití, principy a omezení jednotlivých algoritmy jsou popsány v následujícím. Jednotlivé algoritmy a výsledky analýz budou ilustrovány na modelu (viz Obrázek 26) ukázkové sítě prezentované v kapitole 1.1.4. Model lze nalézt v příloze 6.



Obrázek 26 - Model ukázkové sítě v editoru Petri sítí. Zdroj vlastní

Výčet všech dílčích výstupů při výpočtu neurčitosti a spravedlivosti ilustruje Obrázek 27.

Jmenovitě se výstup analýzy skládá z:

- incidenčních matic (w^{pt} a w^{tp}),
- rozdílů těchto matic (W),
- matice všech dosažitelných značení (Markings),
- určení živosti, popř. množiny všech mrtvých značení (pokud není síť živá),
- výpočtu ohraničenosti,
- formování závislostí (Dependencies) v grafu dosažitelnosti (orientované hrany v grafu dosažitelnosti),

- formování matice přechodu, resp. matice intenzity u stochastických sítí (Q),
- řešení Q pomocí Gaussovy eliminace (řešení pod diagonálou „L“ a nad diagonálou „U“),
- výpočtu stacionárních pravděpodobností značení (pro potřeby výpočtu neurčitosti),
- výpočtu stacionárních pravděpodobností míst (pro potřeby výpočtu spravedlivosti),
- výpočtu neurčitosti a spravedlivosti.

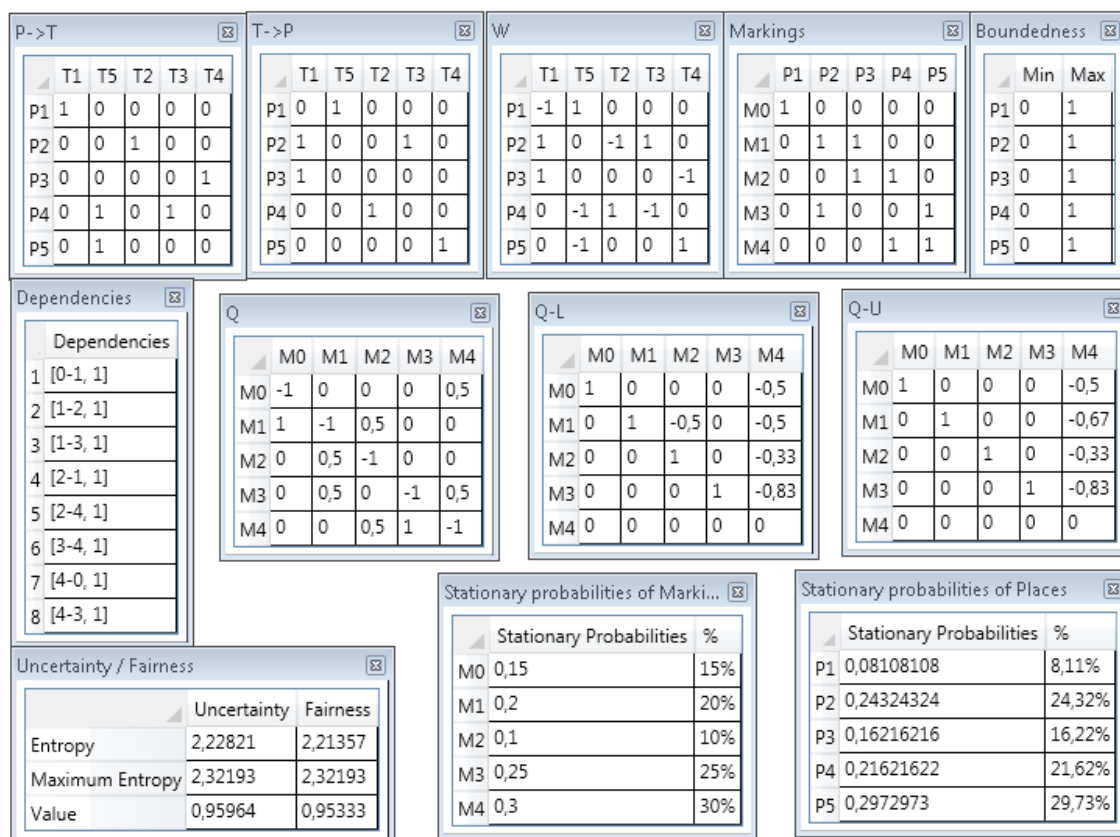
Computing P->T	(00:00:00.0000689)	Show Result
Computing T->P	(00:00:00.0000277)	Show Result
Computing W	(00:00:00.0000289)	Show Result
Computing Markings	5(00:00:00.0000475)	Show Result
Liveness: True		Show Result
Boundedness:	(00:00:00.0000472)	Show Result
Dependencies:	(00:00:00.0000280)	Show Result
Formating Q:	(00:00:00.0000662)	Show Result
Solving Q (Gaussian Elimination L):	(00:00:00.0000623)	Show Result
Solving Q (Gaussian Elimination U):	(00:00:00.0000608)	Show Result
Stationary Probabilites of Markings:	(00:00:00.0000234)	Show Result
Stationary Probabilites of Places:	(00:00:00.0000246)	Show Result
Uncertainty/Fairness:	(00:00:00.0000234)	Show Result

Obrázek 27 - Výstup analýz. Zdroj vlastní

Každý záznam (řádek) v takovémto výstupu (viz Obrázek 27) obsahuje:

- Název záznamu.
- Ukazatel průběhu (progress bar), který po dokončení výpočtu zobrazí dobu trvání tohoto výpočtu ve formátu HH:MM:SS (hodiny, minuty, sekundy). Ukazatel průběhu ukazuje reálný průběh výpočtu, pouze u výpočtu množiny všech dosažitelných značení ukazatel průběhu neukazuje reálný průběh, jelikož nelze předem určit počet vygenerovaných značení, resp. velikost množiny všech dosažitelných značení. Místo toho ukazatel průběhu zobrazuje počet již vygenerovaných značení (zobrazuje každých 5 tisíc značení).
- Tlačítko „Show Result“, po jehož zmáčknutí se zobrazí okno (tabulka) s odpovídajícím výstupem (daného řádku). Ukázka všech otevřených oken odpovídající výše zmíněnému příkladu znázorňuje Obrázek 28. Každé okno obsahuje tabulku, ve které je možné přemísťovat sloupce, měnit velikost řádků sloupců, řadit hodnoty v tabulce podle hodnot v libovolném sloupci a kopírovat obsah (libovolné řádky nebo celá tabulka) do libovolného tabulkového editoru (např. MS Excel nebo Matlab). Při výběru řádku v okně

reprezentující vygenerovaná značení, se zvolené značení promítne na modelované síti, čím lze vizuálně ukázat vzhled daného značení v síti.



Obrázek 28 - Otevřená okna všech výsledků analýzy. Zdroj vlastní

První tři záznamy (w^{pt} , w^{tp} a W) slouží převážně ke zpětné kompatibilitě s algoritmy pro prostředí Matlab představené v předchozí kapitole. Tím je možné porovnat výsledky výpočtu neurčitosti a spravedlivosti mezi prostředím Matlab a editorem (převážně pro kontrolu správnosti výpočtu v průběhu implementace). Ze stejného důvodu záznamy obsahují matici přechodu / matici intenzity Q spolu s jejími částečnými řešeními (Q-L a Q-U). Dalším důvodem pro přítomnost záznamů o řešení matice Q je informování uživatele o průběhu výpočtů, jelikož řešení matice Q má největší časovou složitost $O(N^3)$.

Výpočet stacionárních pravděpodobností značení a míst je počítáno z celé sítě (pokud není vybráno žádné místo) nebo ze specifické podsítě (označená / vybraná místa). Výsledná spravedlivost a neurčitost lze tedy vyčíslit z celé sítě nebo specifické podsítě v závislosti na výběru podmnožiny míst, která představuje zájmovou oblast. Při změně uživatelského výběru podmnožiny míst není nutné provést výpočet znovu (tlačítko „Calculate“). Při každé změně výběru stačí otevřít (tlačítko „Show Result“) záznam příslušného řádku (stacionární

pravděpodobnosti značení, stacionární pravděpodobnosti míst a neurčitost / spravedlivost) výstupu analýzy a výstup se automaticky přepočítá podle výběru.

Výpočet grafu dosažitelnosti s využitím klasických polí

Implementačně nejjednodušší algoritmus pracuje s klasickými poli, kde ke každému prvku pole je přístupováno přes jeho index. Při generování množiny všech dosažitelných značení sebou však tento přístup nese problém spojený s ověřování, zda nově generované značení již existuje, či nikoli. Při každém nově vygenerovaném značení je totiž nutné zpětně prohledat všechna již vygenerovaná značení a ověřit unikátnost tohoto značení. Počet operací potřebných pro vygenerování k-tého značení lze vyjádřit podle vztahu *počet operací* (m_k) = $|T| * (|P| + (k - 1) * |P|)$. Z tohoto vyplývá, že časová složitost výpočtu grafu dosažitelnosti s využitím klasických polí je exponenciálního charakteru, tj. $O(N^2)$.

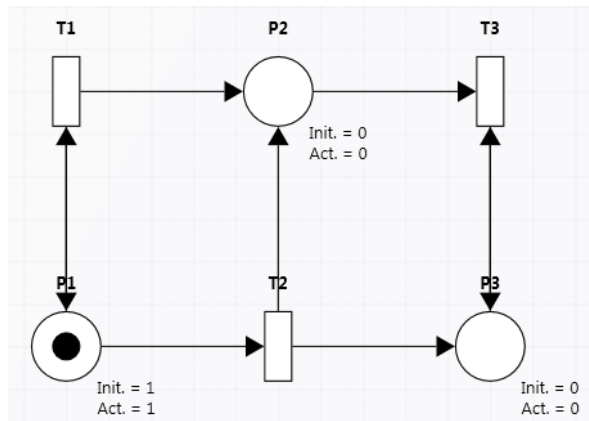
Výpočet grafu dosažitelnosti s využitím slovníků

Hlavní algoritmus, který jako jediný umožňuje počítání neurčitosti a spravedlivosti, je založen na principu užití slovníků, které obsahují informace o již vygenerovaných značeních a závislostech mezi již vygenerovanými značeními. Použitím slovníků je drasticky zvýšena rychlost generování množiny všech dosažitelných značení, a to z důvodu, že ke každému záznamu ve slovníku je přístupováno přes unikátní klíč. Klíč pro jednotlivá značení je unikátní řetězec, který je tvořen podle vztahu $key_i = \sum_{j=0}^{|P|} m_{ij} \& \#$, tj. např. klíč pro značení (2,1,0,0) je řetězec 2#1#0#0#. Tímto je dosažena unikátnost jednotlivých klíčů a s tím spojena optimální rychlost ověřování skutečnosti, že nově vygenerované značení již existuje (odpadne nutnost zpětného prohledávání všech již vygenerovaných dosažitelných značení), tj. ve slovníku s klíčem vytvořeným z daného značení již obsahuje záznam. Záznam pro daný klíč (značení) obsahuje počet značení, ze kterých vede do tohoto značení orientovaná hrana (jinak řečeno, při vygenerování nového značení je záznam pro daný klíč nastaven na hodnotu 1 a při každém nově generovaném značení, jehož klíč již obsahuje záznam je tento záznam inkrementován o 1).

Počet operací pro vygenerování k-tého značení je v tomto případě vyjádřen vztahem *počet operací* (m_k) = $|T| * 2|P|$, tj. časová složitost generování značení s využitím slovníku je lineární, tj. $O(N)$.

Výpočet grafu pokrytí s využitím polí a slovníků

Posledním algoritmem výpočtu množiny všech dosažitelných značení je výpočet grafu pokrytí. Graf pokrytí (popř. strom pokrytí) umožňuje generovat množinu pokrytých dosažitelných značení pro neohraničené sítě, tj. neexistuje horní hranice pro počet míst alespoň v jednom místě modelované sítě. Obrázek 29 ilustruje příklad takovéto neohraničené sítě. Z výsledků analýzy (viz Obrázek 30) je patrné, že neohraničené je místo P2.



Obrázek 29 - Příklad neohraničené sítě. Zdroj: převzato z [68]

Markings			
	P1	P2	P3
M0	1	0	0
M1	1	ω	0
M2	0	ω	1
M3	0	1	1
M4	0	0	1

Dependencies	
Dependencies	
1	[0->1, 1]
2	[1->1, 1]
3	[1->2, 1]
4	[2->2, 1]
5	[0->3, 1]
6	[3->4, 1]

Boundedness		
	Min	Max
P1	0	1
P2	0	ω
P3	0	1

Obrázek 30 - Značení, závislosti a ohraničenost příkladu neohraničené sítě. Zdroj vlastní

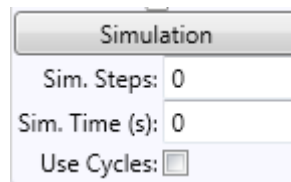
Více informací o tomto konkrétním příkladu lze nalézt v [68] a obecné informace o stromech a grafech pokrytí např. v [15, 68]. Hlavní nevýhodou neohraničených sítí je nemožnost generování všech dosažitelných značení a s tím spojená neschopnost verifikovat živost sítě. Z tohoto důvodu nelze na neohraničených sítích počítat neurčitosti či spravedlivost.

4.2.4 Aproximace vlastností Petri sítí pomocí simulace

V případech kdy je množina všech dosažitelných značení příliš rozměrná, tj. v rámci miliónů značení, je výpočet spravedlivosti či neurčitosti na běžných počítačích takřka

ner realizovatelný. Obecně navíc dochází k nepřesnostem (zaokrouhlování) výpočtu s důvodu rozdělení stacionárních pravděpodobností mezi milióny značení, tj. suma všech stacionárních pravděpodobností je vždy rovna jedné. Dále mohou nastat případy, kdy není možné realizovat modelování s využitím klasických P/T Petri sítí nebo stochastických Petri sítí (např. není vždy žádoucí, aby byly všechny přechody sítě stochastické). V takovýchto případech lze stacionární pravděpodobnosti aproximovat průměrnými hodnotami výskytu určitého značení, resp. tokenu v místě.

Editor umožňuje aproximovat stacionární pravděpodobnosti na základě simulace, kterou je možné nastavit na libovolný počet kroků (jeden krok je roven jednomu realizovanému přechodu) nebo určitému časovému intervalu (v sekundách). Obrázek 31 ilustruje možnosti nastavení času či počtu kroků simulace.



Obrázek 31 - Možnosti nastavení rozsahu simulace. Zdroj vlastní

Výstup simulace je obdobný výstupu analýzy s předchozí kapitoly, viz Obrázek 32.

Simulation - Markings		Show Result
Simulation - Stacionary Marking		Show Result
Simulation - Stacionary Places		Show Result
Simulation - Uncertainty		Show Result
Simulation - Fairness		Show Result

Obrázek 32 - Výstup simulace. Zdroj vlastní

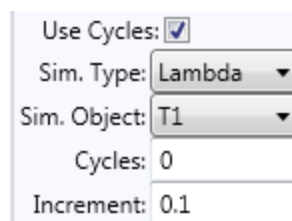
Výstup obsahuje aproximace:

- množiny „všech“ dosažitelných značení,
- stacionárních pravděpodobností značení,
- stacionárních pravděpodobností míst,
- neurčitosti a
- spravedlivosti.

Přesnost takto aproximovaných hodnot je závislá na délce simulace (počtu kroků) a struktuře stavového prostoru (stavového graf). Hlavní výhodou použití simulace je možnost výpočtu (aproximace) neurčitosti a spravedlivosti v definicích Petri sítí, jež nebyly definovány v této práci. Těmito definicemi mohou být např. generalizované stochastické Petri sítě, jež využívají jak stochastické, tak nestochastické přechody nebo barvené Petri sítě, které nabízejí propracovaný aparát pro podporu modelování složitějších systémů. Příklady využití simulace pro výpočet neurčitosti či spravedlivosti v generalizovaných stochastických Petri sítích a barvených Petri sítích bude prezentován v kapitole 5.

4.2.5 Analýza vývoje neurčitosti či spravedlivosti při změně parametrů modelu

Při analýze modelu je v řadě případů vhodné vizualizovat průběh zkoumané veličiny při změně určitého parametru modelu, tj. tzv. odezva modelu. Editor umožňuje vypočítat neurčitost a spravedlivost pro předem deklarovaný počet cyklů, kde v každém cyklu dojde k inkrementaci zvoleného parametru (počáteční značení, kapacita míst nebo parametr exponenciálního rozdělení). Obrázek 33 znázorňuje možnosti nastavení editoru při využití cyklické inkrementace určitého parametru.



Obrázek 33 - Možnosti cyklického výpočtu spravedlivosti a neurčitosti při změně parametrů. Zdroj vlastní

Při použití tohoto přístupu lze nastavit následující:

- Parametr, který bude inkrementován (Sim. Type).
- Konkrétní objekt, jehož parametr bude inkrementován (Sim. Object).
- Počet cyklů (Cycles).
- Velikost inkrementu (Increment), tj. jaká hodnota bude přičtena k zvolenému parametru vybraného objektu.

Obrázek 34 ilustruje vývoj hodnoty spravedlivosti ukázkového příkladu pro výše zmíněné nastavení (Obrázek 33).

	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
Entropy	1,85278	1,84562	1,83874	1,83213	1,82578	1,81968	1,81381	1,80818	1,80275	1,79753
Maximum Entropy	2,32193	2,32193	2,32193	2,32193	2,32193	2,32193	2,32193	2,32193	2,32193	2,32193
Fainess	0,79795	0,79487	0,7919	0,78906	0,78632	0,78369	0,78117	0,77874	0,7764	0,77416

Obrázek 34 - Příklad výstupu při využití cyklické inkrementace. Zdroj vlastní

Takovýto výstup lze poté jednoduše zkopírovat do libovolného tabulkového editoru a vyjádřit např. graficky. Stejný způsobem lze vyjádřit spravedlivost, neurčitost, stacionární pravděpodobnosti značení či stacionární pravděpodobnosti míst.

Tento přístup lze použít jak při analytickém výpočtu tak simulaci.

4.2.6 Shrnutí vlastností editoru Petri sítí

Tabulka 3 shrnuje vlastnosti / události editoru Petri sítí a uživatelské akce (myši nebo klávesnicí), které tyto vlastnosti / události uvozují.

Tabulka 3 - Souhrn vlastností editoru Petri sítí. Zdroj vlastní

Událost	Myš	Klávesnice
Nová síť	Kliknutí levého tlačítka myši na ikonu „New Net“ nebo na záložku se symbolem „+“	Klávesová zkratka CTRL+N
Otevření uložené sítě	Kliknutí levého tlačítka myši na ikonu „Open Net“	Klávesová zkratka CTRL+O
Uložení sítě	Kliknutí levého tlačítka myši na ikonu „Save“	Klávesová zkratka CTRL+S
Uložení sítě (uložit jako)	Kliknutí levého tlačítka myši na ikonu „Save As“	Klávesová zkratka SHIFT+S
Uložení sítě (uložit vše)	Kliknutí levého tlačítka myši na ikonu „Save All“	Klávesová zkratka CTRL+SHIFT+S
Zavření sítě	Kliknutí levého tlačítka myši na křížek za názvem sítě v záložce	Klávesová zkratka CTRL +M
Vytvoření nového místa	Kliknutí levého tlačítka myši na tlačítko „New Places“	Klávesa A
Vytvoření nového přechodu	Kliknutí levého tlačítka myši na tlačítko „New Transition“	Klávesa S
Vytvoření nové orientované hrany	Kliknutí levého tlačítka myši na tlačítko „New Connector“	Klávesa D
Vytvoření nové orientované hrany vč. nového objektu	Kliknutí levého tlačítka myši na tlačítko „New Connector with Autocompletion“	Klávesa F
Smazání označeného objektu (objektů)	Kliknutí levého tlačítka myši na tlačítko „Delete Selected Object“	Klávesa Del
Označit všechny objekty	Držení levého tlačítka myši na pracovní ploše a táhnutí nově zobrazeného obdélníka přes všechny objekty	Klávesová zkratka CTRL+A
Přibližování a oddalování	Kolečko myši nad pracovní plochou	
Pohyb pracovní plochy	Držení pravého tlačítka myši na pracovní ploše a táhnutí	
Vyvolání kontextové nabídky	Kliknutí pravého tlačítka myši na pracovní plochu (možnosti: Vyjmout, Kopírovat, Vložit, Označit Vše)	
Změna počtu tokenů v označeném místě (místech)	Držení klávesy CTRL plus rolování kolečka myši nad označeným místem / místy	
Změna kapacit u označeného místa (míst)	Držení klávesy SHIFT plus rolování kolečka myši nad označeným místem / místy	

5 Modelování a analýza reálných systémů

Do této části práce, byly navržené postupy výpočtu neurčitosti a spravedlivosti prezentovány pouze na ukázkových (typových) příkladech. V této kapitole bude ukázána praktická použitelnost navržených vlastností (a implementovaného editoru) na rozsáhlejších modelech, které modelují reálné systémy různých typů (např. binární, diskrétní, spojité) a rozsahů (převážně počet všech dosažitelných značení, tj. stavů systému). Navíc jsou v této kapitole ilustrovány omezení a nedostatky Petri sítí jakožto nástroje pro modelování a analýzu reálných systémů.

5.1 Křižovatka

Jedním z nejzákladnějších použití Petri sítí je modelování dopravních situací. Může se jednat o automobilovou dopravu (např. křižovatky) [69-73], vlakovou dopravu (např. rozvrh spojů, křižování apod.) [74-76], leteckou dopravu [77, 78] aj. V následujícím jsou modelovány tři běžně užívané komunikační uzly, na jejichž modelech jsou prezentovány dříve definované vlastnosti ve spojitosti s implementovaným editorem.

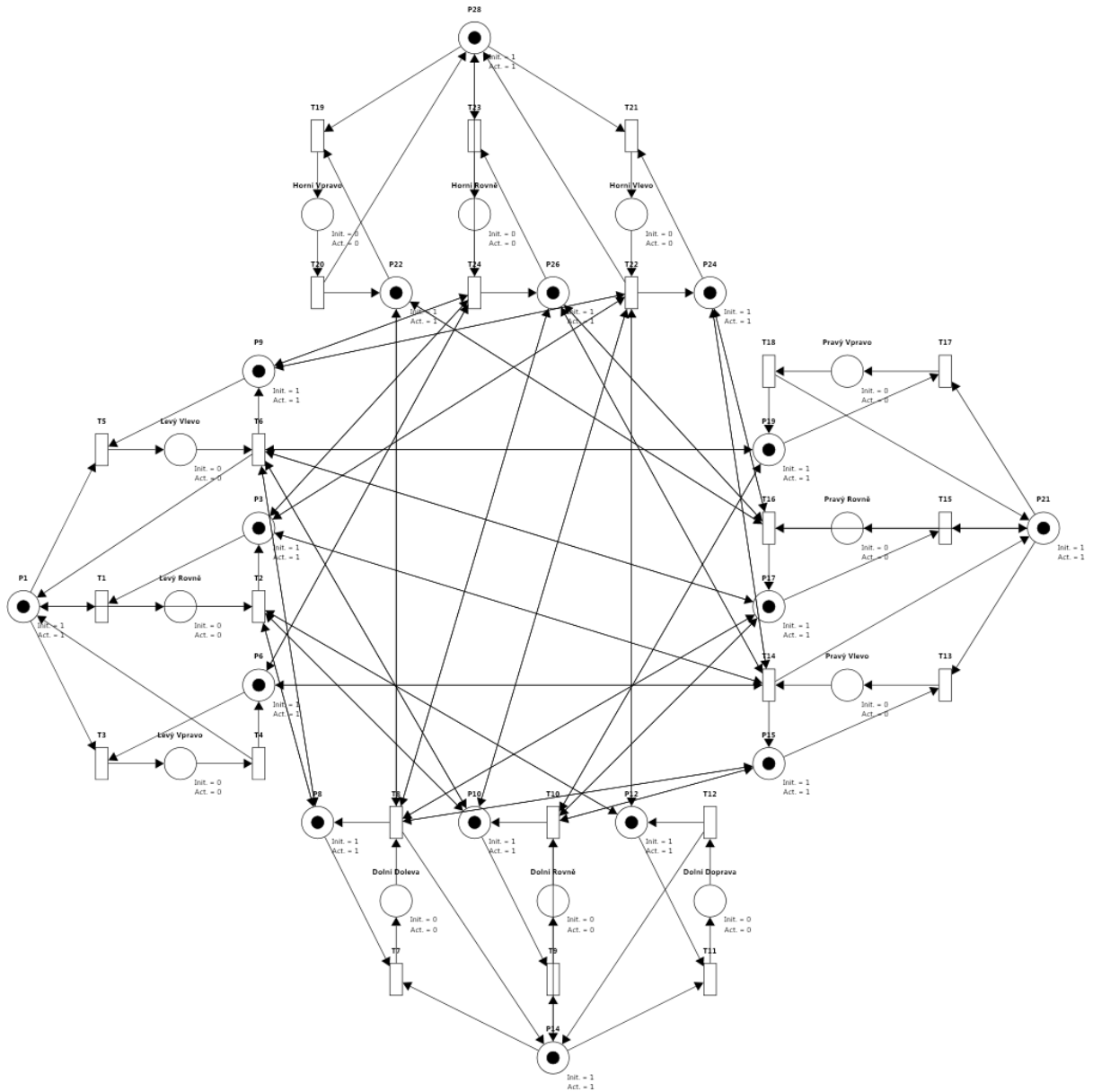
5.1.1 Křižovatka bez značení

Nejjednodušším typem komunikačního uzlu je křižovatka bez dopravního značení (křížení silnic stejné úrovně), kde se řidiči řídí pouze zákonem pravé ruky. Obrázek 35 znázorňuje model tohoto typu křižovatky. Model se skládá ze čtyř identických podsítí, které reprezentují čtyři strany křižovatky (příjezd zleva, zprava, shora a zdola). Každá z těchto identických podsítí je dále dělena na tři podsítě, které reprezentují možný směr jízdy z daného umístění (doleva, rovně nebo doprava). Celkově je síť složena z 28 míst (4 místa reprezentují přítomnost vozidla v dané části křižovatky, 3x4 míst reprezentuje 3 možné směry v každé ze čtyř částí křižovatky a 12 pomocných míst), 24 přechodů a 128 orientovaných hran. Hrany ve středu modelu reprezentují řídicí logiku (pravidla silničního provozu) tohoto typu křižovatky. Pro každý směr jízdy v libovolné části křižovatky platí:

- Řidič může odbočit **vlevo**, pokud:
 - na protilehlé straně křižovatky nestojí vozidlo, které chce jet rovně nebo odbočit vpravo (z jeho pohledu, tj. vlevo z pohledu řidiče původního vozu),
 - na pravé straně křižovatky nestojí vozidlo, které chce projet křižovatkou rovně nebo vlevo (z jeho pohledu, tj. vpravo z pohledu řidiče původního vozu).

- Řidič může pokračovat **rovně**, pokud v pravé části křižovatky nestojí vozidlo.
- Řidič může vždy odbočit **vpravo**.

Model lze nalézt v příloze 7.



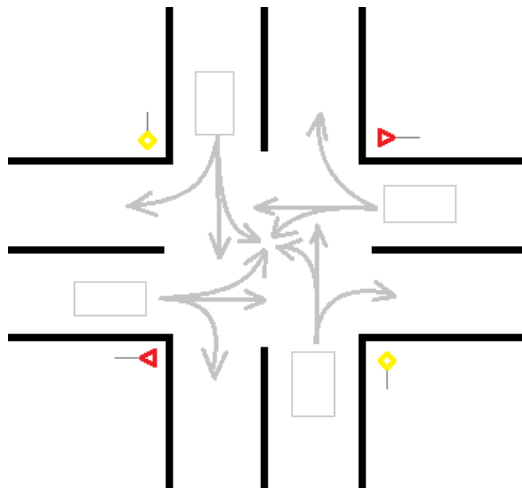
Obrázek 35 - Model křižovatky s pravidlem pravé ruky. Zdroj vlastní

Výsledkem analýzy této sítě je 256 dosažitelných značení s ohraničeností 1 pro všechna místa a 16 mrtvých značení (situace, kdy vjedou do křižovatky všechna čtyři vozidla a všechna chtějí jet rovně nebo doleva, tj. 2^4 takovýchto situací). V reálných situacích se v případě uváznutí (mrtvé značení) na takovýchto typech křižovatek musejí řidiči domluvit, kdo pojedje první (jinak dojde k zacyklení, kdy každý řidič čeká na průjezd řidiče vpravo, tj. tzv. deadlock – uváznutí). Z tohoto důvodu se v praxi přidávají dopravní značení jako „hlavní pozemní

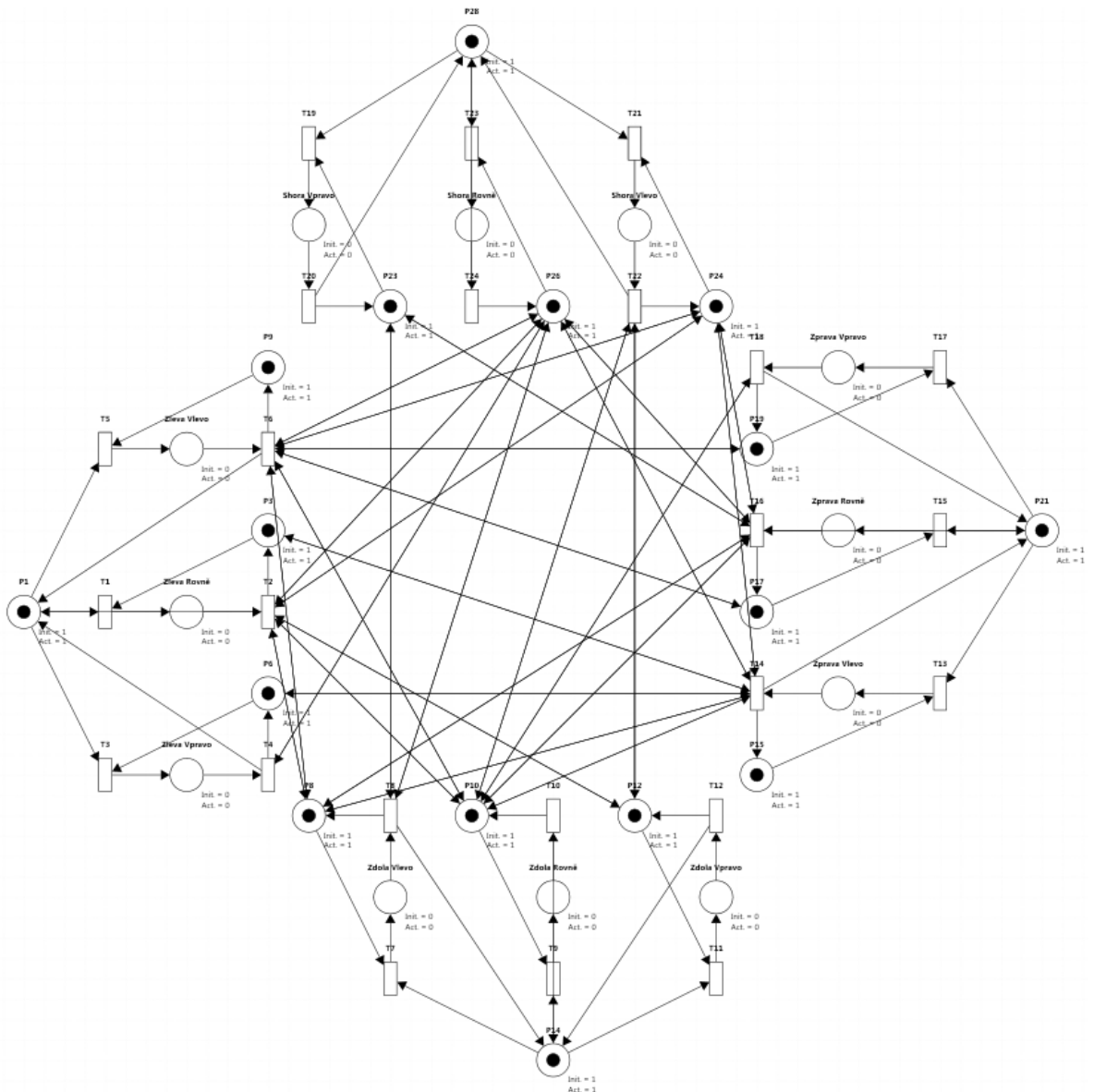
komunikace“ (resp. „dej přednost v jízdě“) nebo semaforey v závislosti na dopravní vytiženosti daného komunikačního uzlu. Jelikož je tato síť neživá, nelze provést analýzu neurčitosti či spravedlivosti.

5.1.2 Křižovatka s hlavní pozemní komunikací

Pokud se výše zmíněný model křižovatky upraví o deklaraci hlavní pozemní komunikace (viz Obrázek 36), lze dosáhnout živé sítě, na které již jdou provádět analýzy spojené s výpočtem neurčitosti a spravedlivosti. Obrázek 37 znázorňuje model této sítě, který vznikne úpravou modelu křižovatky se zákonem pravé ruky úpravou orientovaných hran ve středu modelu, které řídí možnost či nemožnost provedení dané operace, např. odbočení doprava. Hlavní pozemní komunikace je reprezentována vertikálním směrem, tj. shora dolů, resp. zdola nahoru.



Obrázek 36 - Křižovatka s hlavní pozemní komunikací. Zdroj vlastní



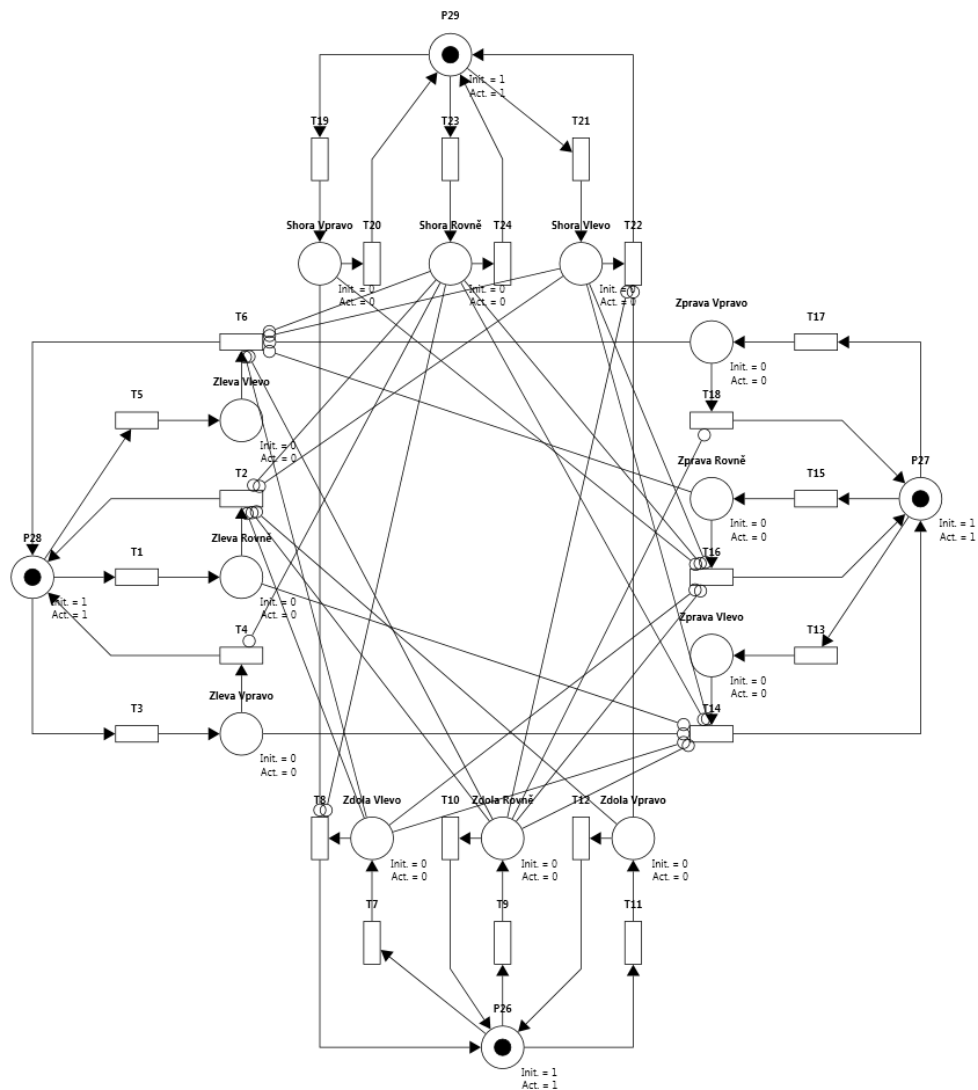
Obrázek 37 - Model křižovatky s hlavní pozemní komunikací (vertikální směr). Zdroj vlastní

Síť se skládá z 28 míst, 24 přechodů a 126 orientovaných hran a lze jej nalézt v příloze 8. Stejně jako v předchozím typu křižovatky, síť generuje 256 dosažitelných značení (v tomto případě jsou však všechna značení živá). Řídící logika tohoto modelu je rozdílná pro vozidla na hlavní pozemní komunikaci a pro vozidla na vedlejší pozemní komunikaci následovně:

- Řidič na hlavní pozemní komunikaci může odbočit **vlevo**, pokud na protilehlé straně křižovatky nestojí vozidlo, které chce odbočit vpravo (vlevo pro řidiče původního vozu) nebo rovně.
- Řidič na hlavní pozemní komunikaci může vždy pokračovat **rovně** nebo odbočit **vpravo**.
- Řidič na vedlejší pozemní komunikaci může odbočit **vlevo**, pokud:

- na hlavní pozemní komunikaci (v obou směrech, tj. nahoře a dole) se nenachází vozidlo, které chce pokračovat rovně nebo odbočit vlevo (z pohledu řidiče na hlavní pozemní komunikaci),
- na protilehlé straně křižovatky se nenachází vozidlo, které chce pokračovat rovně nebo odbočit vpravo (z pohledu řidiče v protilehlé straně křižovatky).
- Řidič na vedlejší pozemní komunikaci může pokračovat **rovně**, pokud:
 - na levé straně křižovatky se nenachází vozidlo, které chce pokračovat rovně nebo odbočit vlevo (z pohledu řidiče na hlavní pozemní komunikaci),
 - na pravé straně křižovatky se nenachází vozidlo.
- Řidič na vedlejší pozemní komunikaci může odbočit **vpravo**, pokud se v levé části křižovatky nenachází vozidlo, které chce pokračovat rovně.

Z důvodu horší čitelnosti je možné využít orientovaných hran typu inhibitor, které v řadě případů umožňují zjednodušit model a tím daný model zpřehlednit a zároveň zefektivnit výpočty verifikačních (popř. výkonnostních) analýz. Obrázek 38 ilustruje model křižovatky s hlavní pozemní komunikací, který je izomorfní k původnímu modelu (Obrázek 37). Model obsahuje 16 míst (původní model 24 míst), 24 přechodů (původní model také 24 přechodů) a 76 orientovaných hran (původní model 126 orientovaných hran) a lze jej nalézt v příloze 9. Střed modelu je vyplněn 28 hranami typu inhibitor, které pouze kontrolují možnost vykonání průjezdu vozidla z libovolného směru (nepřenášejí tokeny).



Obrázek 38 - Model křižovatky s hlavní pozemní komunikací s využitím hran typu Inhibitor. Zdroj vlastní

Jelikož je tato síť živá, lze na ni provádět libovolnou analýzu spojenou s neurčitostí či spravedlivostí. V následujícím je prezentována jedna z možných analýz spravedlivosti.

Jako první lze analyzovat spravedlivost jednotlivých směrů (12 směrů, 4x3, [zleva, zprava, zdola, shora] x [vlevo, rovně, vpravo]). Obrázek 39 ilustruje stacionární pravděpodobnosti (seřazené od největší po nejmenší) jednotlivých směrů (místa, která reprezentují stav, kdy chce dopravní prostředek v dané části křižovatky provést průjezd křižovatkou v dané trajektorii).

	Stationary Probabilities	%
Zleva Vlevo	0,11378849	11,38%
Zprava Vlevo	0,11378849	11,38%
Zleva Rovně	0,11269901	11,27%
Zprava Rovně	0,11269901	11,27%
Zdola Vlevo	0,09140649	9,14%
Shora Vlevo	0,09140649	9,14%
Zleva Vpravo	0,07678483	7,68%
Zprava Vpravo	0,07678483	7,68%
Zdola Vpravo	0,05461908	5,46%
Shora Vpravo	0,05461908	5,46%
Zdola Rovně	0,05070211	5,07%
Shora Rovně	0,05070211	5,07%

Obrázek 39 - Stacionární pravděpodobnosti vybraných míst. Zdroj vlastní

Z obrázku je patrné, že nejnižší stacionární pravděpodobnosti jsou spojeny s průjezdem křižovatkou po hlavní pozemní komunikaci a operací „vpravo“ na vedlejší pozemní komunikaci. Tyto operace jsou tedy prováděny častěji, tj. dopravní prostředek nečeká (token se nenachází) v daném místě tak dlouho jako v ostatních. Hodnota spravedlivosti je pro tento případ rovna 0.90854 (90,85%).

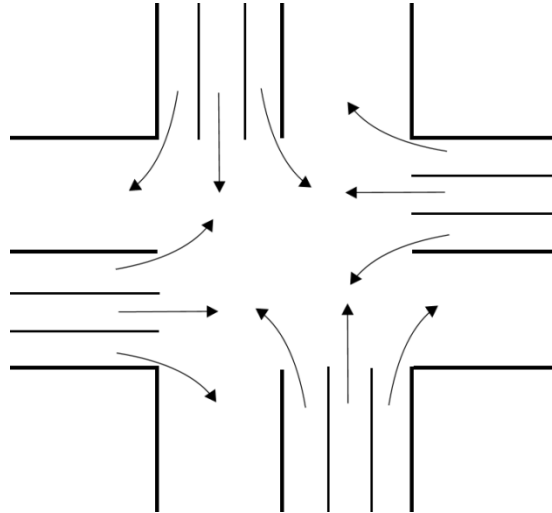
Další možností je výpočet spravedlivosti pro čtyři části křižovatkou nebo pro hlavní a vedlejší pozemní komunikaci, viz Tabulka 4. Z tabulky je patrné, že propustnost hlavní pozemní komunikace je přibližně 1.5 krát větší než propustnost vedlejší pozemní komunikace. To samé platí pro jednotlivé části křižovatkou. Pokud by tedy byl provoz na hlavní pozemní komunikaci 1.5 krát větší než na vedlejší pozemní komunikaci, jednalo by se o optimální variantu dopravního uzlu.

Tabulka 4 - Stacionární pravděpodobnosti jednotlivých směrů/typů komunikace. Zdroj vlastní

Směr	Stac. pravděpodobnosti	Stac. pravděpodobnosti v %
Zleva	0,30233855	30,23%
Zdola	0,19766145	19,77%
Zprava	0,30233855	30,23%
Shora	0,19766145	19,77%
Spravedlivost	0,984074416	98,41%
Hlavní	0,3953229	39,53%
Vedlejší	0,6046771	60,47%
Spravedlivost	0,968148831	96,81%

Toto by však platilo pouze v případě, že pravděpodobnost jednotlivých směrů v dané části křižovatkou je rovnoměrná (uniformní), což v praxi neplatí. Z tohoto důvodu je možné zavést

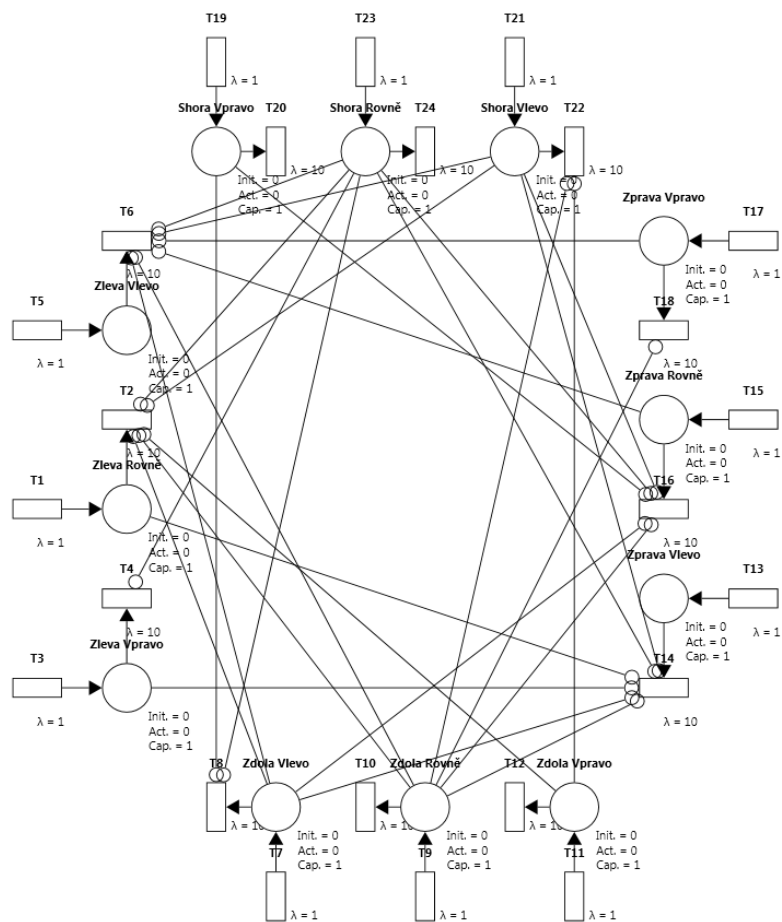
exponenciální rozdělení jednotlivým přechodům, tj. použít stochastickou Petri síť. Pro zjednodušení je odstraněna restrikce pro přítomnost pouze jednoho vozidla v dané části křižovatky v daný okamžik, tj. každá část křižovatky má tři příjezdové pruhy, viz Obrázek 40. Tím je umožněno nastavovat exponenciální rozdělení příjezdu vozů v daném směru bez nutnosti předpokladu, že je křižovatka (v dané části) volná.



Obrázek 40 - Křižovatka s hlavní pozemní komunikací (víceproudový vjezd do křižovatky). Zdroj vlastní

Obrázek 41 reprezentuje stochastický Petri model, ve kterém jsou všechny přechody ohodnoceny parametrem λ (v modelu $\lambda = 1$, pro všechny směry). Každý z dvanácti směrů obsahuje jedno místo a dva přechody. Místo reprezentuje přítomnost vozidla v daném směru, které požaduje průjezd křižovatkou. Vstupní přechod ohodnocený parametrem λ , reprezentuje příjezd vozidel do daného místa s průměrnou délkou intervalu mezi příjezdy $1/\lambda$. Výstupní přechod reprezentuje projetí vozidla křižovatkou. Projetí křižovatkou (resp. opuštění křižovatky) je obecně podmíněno pouze aktuálním stavem dopravní situace, tj. přítomnosti (popř. nepřítomnosti) vozidel v rozhodujících částech (směrech) křižovatky, a tudíž by dané místo nemělo obsahovat exponenciální rozdělení. Takovýto typ problémů dalo za vznik tzv. generalizovaných stochastických Petri sítí [55, 56], které definují jak stochastické přechody, tak i přechody bez zpoždění (deterministického či stochastického). Generalizované stochastické Petri sítě rozšiřují modelovací schopnosti Petri sítí, ale za cenu nižší formálnosti a s tím spojené nemožnosti (popř. zkomplikování) provádět analýzy jako v klasických stochastických Petri sítích. Jedná se především o nemožnosti přímého mapování množiny všech dosažitelných značení do Markovova řetězce. Z tohoto důvodu je tento přístup pro účely kvantifikace neurčitosti či spravedlivosti nepoužitelný, a proto je nutné všechny přechody sítě ohodnotit parametrem λ i za cenu snížené přesnosti modelu (popř. pokud to

model umožňuje, upravit strukturu sítě, tak aby neobsahovala žádné přechody bez zpoždění). Pro účely ukázkové analýzy je všem výstupním přechodům přidělen parametr exponenciálního rozdělení $\lambda = 10$, který může reprezentovat exponenciální rozdělení času potřebného pro opuštění křižovatky. Další možností je nastavení parametrů exponenciálního rozdělení výstupních přechodů na základě pravidel silničního provozu, tj. odstranit všechny orientované hrany typu inhibitor a jejich činnost promítnout do hodnot parametrů λ (více viz následující podkapitola). Uživatel poté může v modelu měnit parametry λ příjezdů vozidel do jednotlivých směrů (např. podle reálně naměřených dat určité konkrétně křižovatky) a usuzovat o výsledcích analýzy (stacionární pravděpodobnosti, neurčitost nebo spravedlivost). Příklad takovéto analýzy ve stochastických sítích bude ilustrována v následující podkapitole.



Obrázek 41 - Stochastický model křižovatky s hlavní pozemní komunikací. Zdroj vlastní

Další možností je použít generalizované Petri sítě (popř. časované Petri sítě) a aproximovat stacionární pravděpodobnosti na základě simulace. Tímto způsobem lze překonat omezení způsobené restrikcemi definice klasické P/T nebo stochastické Petri sítě. Obrázek 42 ilustruje porovnání výsledků stacionárních pravděpodobnosti stochastické Petri sítě a jejich aproximaci

na základě simulace. Z obrázku je patrné, že výsledné hodnoty jsou porovnatelné a výsledné hodnoty spravedlivosti jsou shodné (relativně vůči zaokrouhlování).

	Stationary probabilities	%
Zdola Rovně	0,06461715	6,46%
Zdola Vpravo	0,06461715	6,46%
Shora Vpravo	0,06461715	6,46%
Shora Rovně	0,06461715	6,46%
Zleva Vpravo	0,08449935	8,45%
Zprava Vpravo	0,08449935	8,45%
Zdola Vlevo	0,09243842	9,24%
Shora Vlevo	0,09243842	9,24%
Zleva Rovně	0,09690286	9,69%
Zprava Rovně	0,09690286	9,69%
Zleva Vlevo	0,09692507	9,69%
Zprava Vlevo	0,09692507	9,69%

	Stationary probabilities	%
Zdola Vpravo	0,06455159	6,46%
Shora Vpravo	0,06460763	6,46%
Zdola Rovně	0,06464986	6,46%
Shora Rovně	0,06474685	6,47%
Zleva Vpravo	0,08434645	8,43%
Zprava Vpravo	0,08457824	8,46%
Shora Vlevo	0,09237709	9,24%
Zdola Vlevo	0,09242138	9,24%
Zprava Rovně	0,09691853	9,69%
Zleva Rovně	0,09691986	9,69%
Zleva Vlevo	0,09694063	9,69%
Zprava Vlevo	0,09694189	9,69%

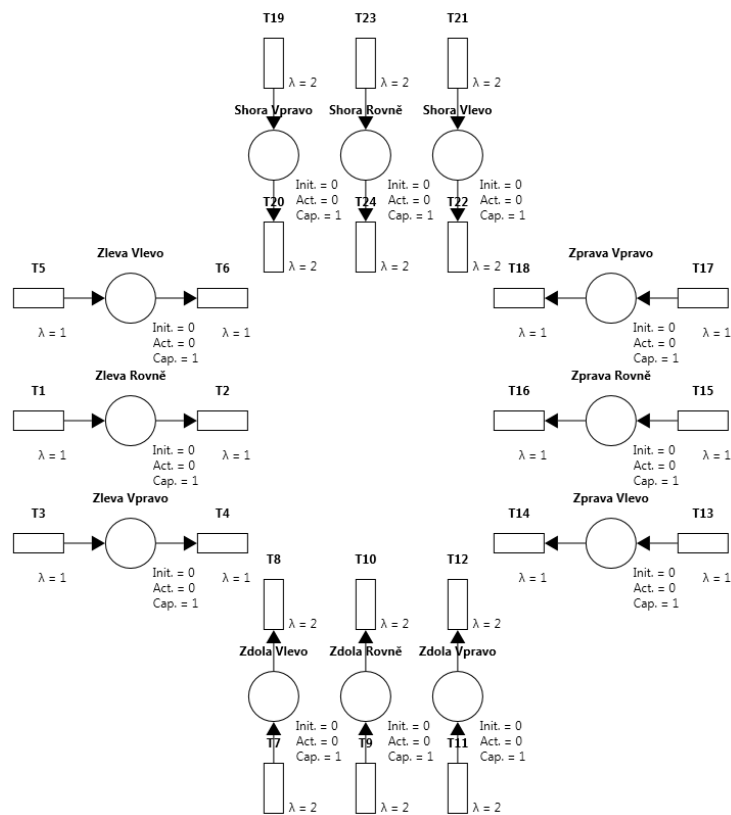
Obrázek 42 - Porovnání stacionárních pravděpodobností (vlevo) a jejich aproximací (vpravo). Zdroj vlastní

Ve většině dopravních uzlů je vytíženost jednotlivých částí křižovatky různá jak svou podstatou (v závislosti na umístění), tak podle času (podle denní doby, dne v týdnu, ročního období apod.). Z tohoto důvodu se na vytížených komunikačních uzlech (hlavně ve městech) používají semaforey, které umožňují specifikovat interval a pravidla pro projetí křižovatky z různých směrů.

5.1.3 Křižovatka se semaforem

Posledním typem křižovatky prezentované v této práci je křižovatka se semaforem, která umožňuje blíže specifikovat pravidla pro průjezd křižovatkou. V následujícím je prezentován příklad křižovatky s více vstupními jízdními pruhy (viz Obrázek 40), kde každá směr v každé části křižovatky obsahuje semafor (dohromady 12 semaforů). Dále se předpokládá, že nastavení semaforu plně nahrazuje pravidla silničního provozu, tj. nemůže nastat nejednoznačná situace (např. dvě vozidla v různých částech křižovatky, která chtějí projet křižovatkou do stejného směru, nemohou dostat signál pro vjetí do křižovatky ve stejný okamžik). Na základě toho předpokladu lze odmyslet pravidla silničního provozu (orientované hrany typu inhibitor) a ponechat řízení provozu semaforům. Obrázek 43 ilustruje model křižovatky se semaforem, který se skládá z 12 samostatných sítí, viz příloha 10. Poté každé místo má jeden vstupní přechod, který reprezentuje interval příjezdů vozidel v daném

směru (a části křižovatky) a jeden výstupní přechod, který reprezentuje interval semaforu v daném směru (a části křižovatky).

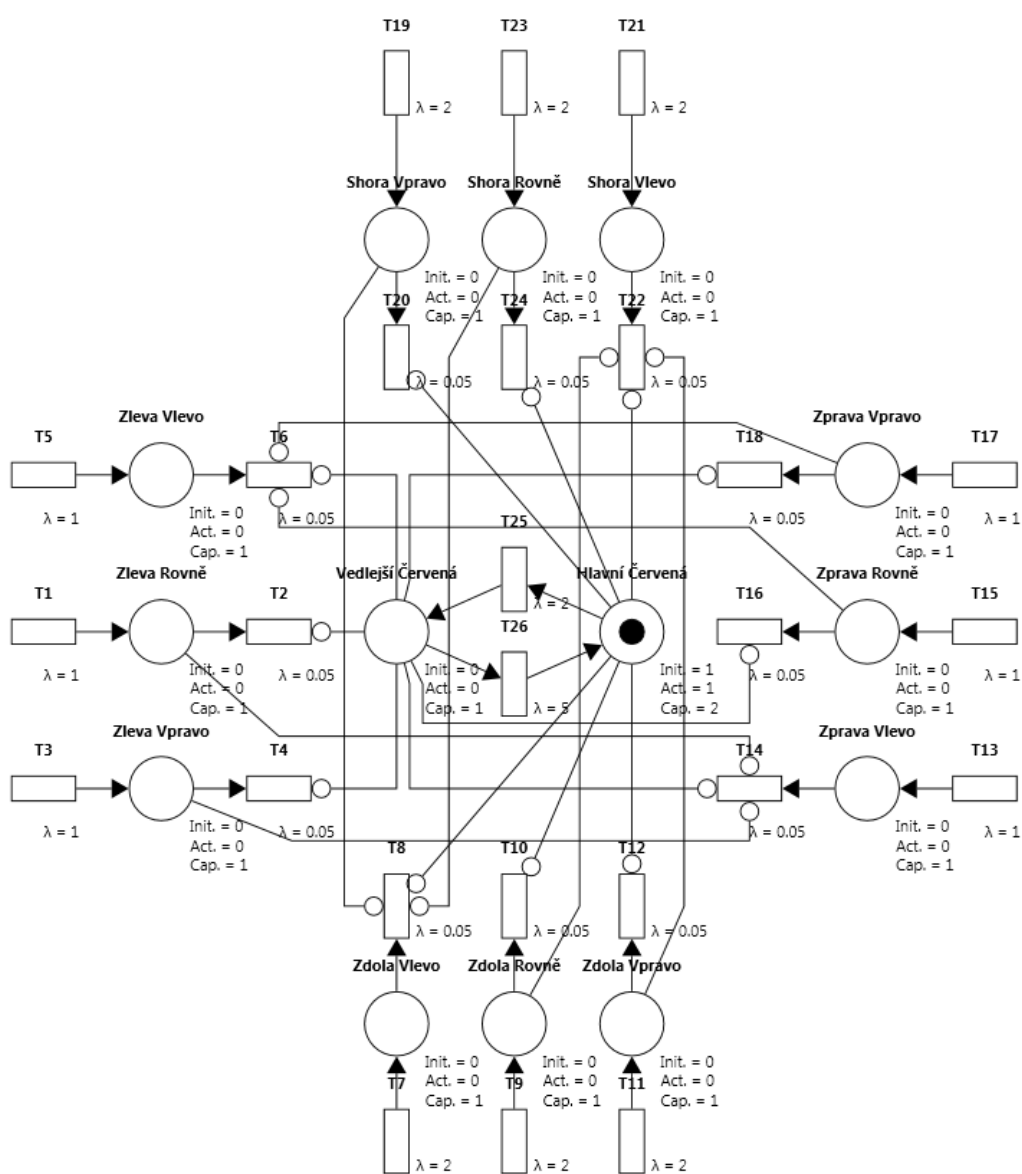


Obrázek 43 - Model křižovatky se semaforem. Zdroj vlastní

V takto navrženém modelu jsou jednotlivé směry nezávislé na ostatních směrech, a tudíž lze odmyslet od jakékoli pomocné logiky, která by využívala v modelu přechodů bez zpoždění (immediate) a tím znemožňovala mapování do Markovových řetězců. Pro dosažení absolutní spravedlivosti poté stačí nastavit zpoždění semaforů na stejnou hodnotu parametru λ jako u vstupních přechodů (interval příjezdu vozidel).

V praxi však nelze semaforům libovolně přidělovat zpoždění (parametr exponenciálního rozdělení), jelikož jejich hodnoty přímo reflektují přepínací logiku jednotlivých semaforů tak, aby byla zajištěna plynulost a bezpečnost provozu. Tímto je problematika analýzy spravedlivosti nad dopravním uzlem typu křižovatka přenesena na problematiku analýzy spravedlivosti různých přepínacích logik semaforů. Hodnoty zpoždění semaforů (popř. hodnoty intervalu příjezdů) lze získat např. na základě výsledků simulace v určitém nástroji, který se specializuje na simulaci dopravy. Poté je možné tyto hodnoty zanechat do modelu a vyčíslit spravedlivost běžným způsobem.

Obrázek 44 ilustruje model křižovatky se semaforey (viz příloha 11) včetně zjednodušené přepínací logiky, která zajišťuje průjezd křižovatkou výlučně pouze vertikálně nebo horizontálně v daný okamžik, tj. dvě sady semaforů (jedna sada pro vedlejší a jedna pro hlavní pozemní komunikaci). Analýza spravedlivosti či neurčitosti je poté obdobná výše zmíněným typům křižovatky, tj. je možné přechody reprezentující odjezd z křižovatky (T6, T2, T4, T8, T10, T12, T14, T16, T18, T22, T24 a T20) ohodnotit stochasticky nebo deterministicky a poté řešit stanovení stacionárních pravděpodobností analyticky, resp. simulací. Přechody T25 a T26 v tomto modelu reprezentují intervaly mezi přepínáním sad semaforů mezi hlavním (vertikálním) a vedlejším (horizontálním) směrem.



Obrázek 44 - Model křižovatky se semaforey vč. zjednodušené přepínací logiky. Zdroj vlastní

V této podkapitole byl prezentován příklad analýzy spravedlivosti nad modely různých typů dopravních komunikačních uzlů. Na jednotlivých typech uzlů byly nastíněny možné analýzy spravedlivost (popř. neurčitosti) spolu s omezeními, které skýtají různé typy Petri sítí. Hlavní omezení při modelování a analýze stochastických Petri sítí spočívá v nutnosti ohodnotit všechny přechody parametrem exponenciálního rozdělení λ , a tím spojené problémy při modelování. Jedním z možných řešení jak obejít toto omezení je potřebné veličiny (stacionární pravděpodobnosti) aproximovat simulací.

5.2 Plánování vláken a procesů v operačním systému

Další s široce používanou oblastí, v kterých se využívá Petri sítí, je plánování (diskrétních) procesů v operačním systému (popř. v jiných systémech) [79]. Mimo plánování procesů (popř. vláken) lze dále v operačních systémech modelovat např. synchronizaci procesů (vláken), sdílené zdroje, logický či fyzický paralelismus aj [80]. V následujícím bude ilustrována analýza neurčitosti a spravedlivosti na stavovém modelu procesů (vláken) v operačním systému.

Každý proces v operačním systému musí nějakým způsobem vzniknout (inicializace) a skončit (terminace). Vznik procesu může být uvozen jednou z následujících událostí [81, 82]:

- **systémová inicializace** (při startu systému),
- **systémové volání z jiného procesu** (běžící proces vytvoří nový proces),
- **uživatelská interakce** (uživatel spustí proces, např. příkazový řádek, ikona),
- **dávková inicializace** (aktuální dávka byla zpracována a může začít nová).

Ukončení procesů je uvozováno jednou z následujících událostí:

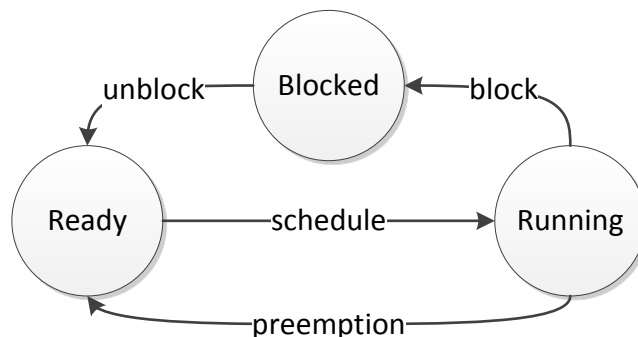
- **standardní ukončení** (proces vykonal práci, pro kterou byl vytvořen),
- **chybové ukončení** (proces nedostal vstupní data ve vhodné formě),
- **fatální chybové ukončení** (zdrojový kód, který zaštiťuje proces, obsahuje chybu),
- **systémové volání** (jiný běžící proces ukončí daný proces).

Standardní a chybové ukončení je řízeno uživatelem (popř. procesem samotným). Ostatní typy terminace jsou inicializovány operačním systémem, tj. nezávisle na uživateli či procesu samotném. Mimo vznik a ukončení, se proces může nacházet v dalších možných stavech, které reprezentují jeho kontext vůči procesoru. V základu jsou rozlišovány tři stavy:

- **Running** (proces je přidělen procesoru, tj. běží),
- **Ready** (proces čeká na přidělení procesoru),
- **Blocked** (proces čeká na vstupně výstupní událost).

Obrázek 45 ilustruje možné přechody mezi těmito třemi stavy. Těmito přechody jsou:

- **block** (proces je zablokován z důvodu čekání na vstupně výstupní operaci),
- **unblock** (vstupně výstupní operace nastala, tj. proces je odblokován),
- **schedule** (proces je přidělen procesoru),
- **preemption** (proces je odňat procesoru, pozn. pouze u preemptivních operačních systémů).

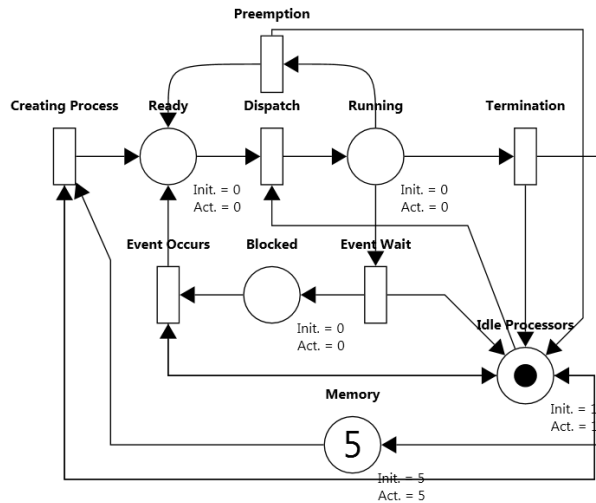


Obrázek 45 - Stavy procesů. Zdroj vlastní

Výše zmíněné stavy procesů lze stejným způsobem aplikovat na vlákna procesu, tj. pokud je proces vícevláknový:

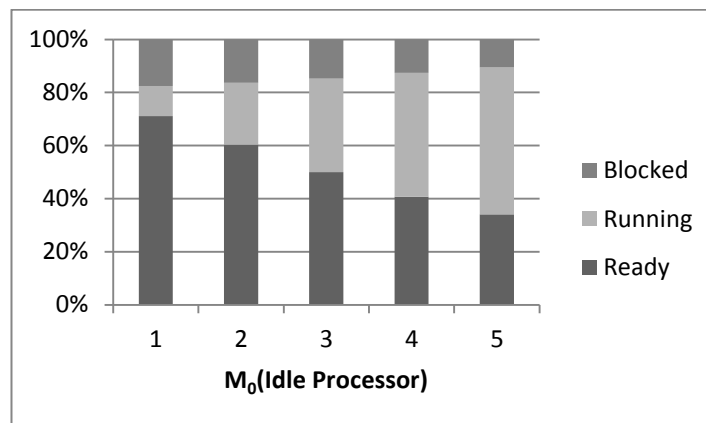
- proces, který obsahuje vlákna je přidělován procesoru,
- jednotlivá vlákna jsou přidělována jádrům procesoru.

Obrázek 46 ilustruje třístavový model procesů v Petri sítích, který lze nalézt v příloze 12. Tři stavy procesu v modelu reprezentují místa „Ready“, „Running“ a „Blocked“. Model dále obsahuje místo, které reprezentuje počet dostupných (nezaneprázdněných) procesorů (jader) a místo, které reprezentuje počet procesů, které se mohou zároveň nacházet v operační paměti.



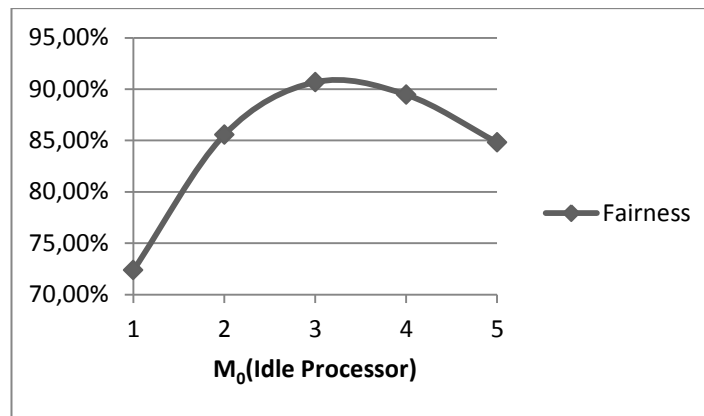
Obrázek 46 - Model procesních stavů v operačním systému. Zdroj vlastní

V takto navrženém modelu, lze pouze analyzovat spravedlivost (popř. neurčitost) ve spojitosti se změnou počátečního značení v místech „Memory“ a „Idle Processor“. Obrázek 47 znázorňuje distribuci stacionárních pravděpodobností tří stavů procesu při změně počtu tokenů počátečního značení v místě „Idle Processors“ (ostatní parametry počátečního značení jsou nezměněny, tj. $M_0(\text{Memory}) = 5$ a ostatní místa neobsahují žádné tokeny). Z obrázku vyplývá, že s rostoucím počtem dostupných procesorů, klesá doba čekání a zároveň roste doba jejich běhu (přítomnost v místě „Running“).



Obrázek 47 - Distribuce stacionárních pravděpodobností v třístavovém modelu procesů. Zdroj vlastní

Vývoj hodnot spravedlivosti, který odpovídá této situaci, znázorňuje Obrázek 48. Z obrázku je patrné, že nejspravedlivější situace nastane při použití 3 procesorů, tj. stav kdy jsou stacionární pravděpodobnosti všech tří stavů nejrovnoměrnější.

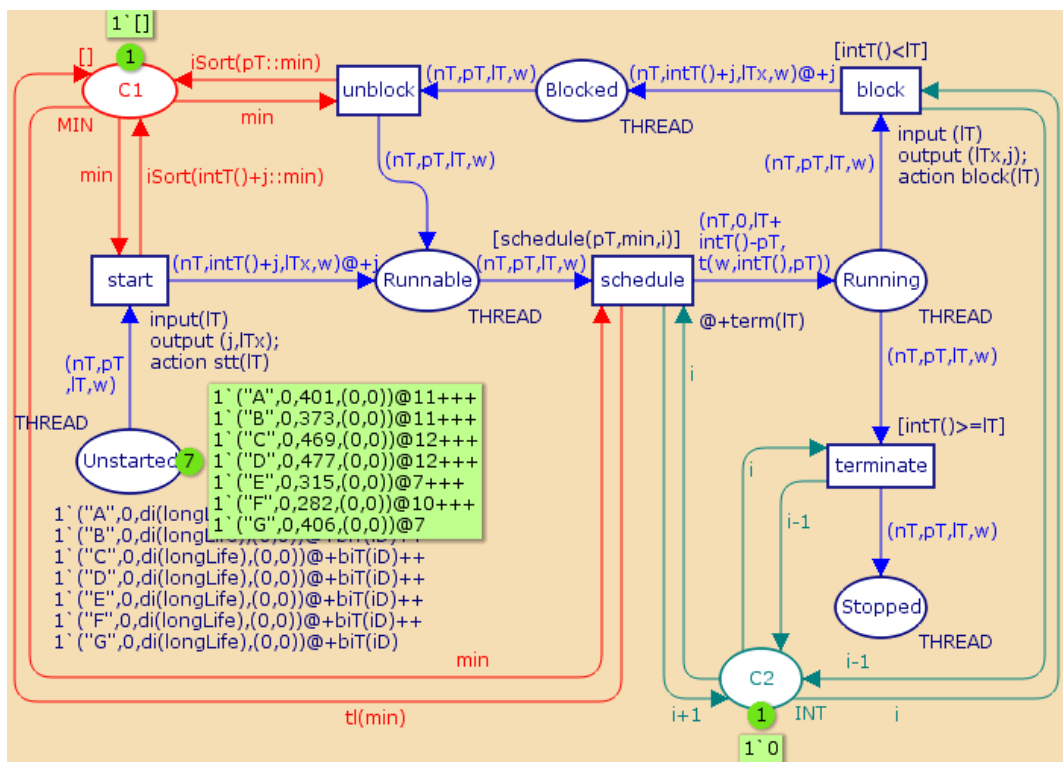


Obrázek 48 - Vývoj spravedlivosti s rostoucím počtem procesorů. Zdroj vlastní

Pro praktické využití jsou tyto výsledky irelevantní, a proto je v praxi nutné stanovit kontext pro určitý typ analýzy. Příkladem kontextu může být situace, kdy je definován určitý index, který definuje např. zátěž (operační paměti, procesoru, sběrnice apod.), uživatelskou přívětivost a další zájmové charakteristiky. Poté může být každý stav procesu ohodnocen vůči danému indexu (např. jakou měrou proces přispívá k zatížení počítače v daném stavu) a výsledná analýza spravedlivosti (popř. neurčitosti) bude spojena s tímto indexem (namísto počtu výskytu procesů v daném stavu). Nejedná se o nic jiného, než váhování stacionárních pravděpodobností hodnotami daného indexu a poté zpětná normalizace váhovaných hodnot, tak aby byl splněn vztah $\sum(\text{váhované hodnoty}) = 1$. Jedná se o podobný přístup, který se využívá při určování výkonnostních charakteristik, kde se volí tzv. hodnotící funkce (reward function) [56].

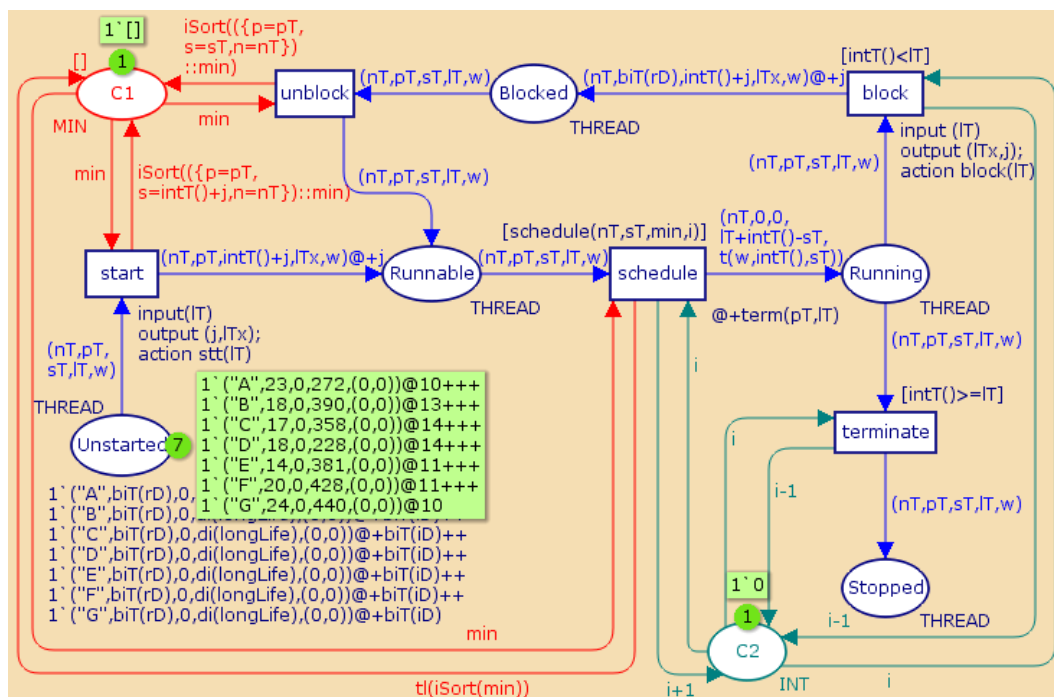
V případě modelování stavů procesů (popř. vláken) je vhodné analyzovat spravedlivost jednotlivých stavů ve spojitosti s určitým procesem (vlákem). Toho lze dosáhnout s využitím vyššího typu Petri sítí (např. barvených Petri sítí) pomocí diferenciací tokenů, tj. stacionární pravděpodobnosti jsou měřeny pro jednotlivé typy tokenů v daném stavu (místě). Další možností je analyzovat spravedlivost ve spojitosti s využitím jednotlivých procesorů (popř. jader procesoru), které lze realizovat také pomocí např. barvených Petri sítí (každý procesor / jádro reprezentuje jiný typ tokenu). V následujícím je prezentován příklad analýzy spravedlivosti vláken v operačním systému pro různé plánovací algoritmy. Analýza je založena na simulaci modelů (v barvených Petri sítí) definovaných v [79]. Jedná se o stavové modely vláken, které využívají různé plánovací algoritmy pro přidělování vláken procesoru. Těmito algoritmy jsou:

- First Come First Serve (FCFS) – vlákna jsou přidělována procesoru podle času, kdy o přidělení vlákno požádalo, viz Obrázek 49.
- Shortest Job First (SJF) – vlákno s nejnižší požadovanou časovou náročností je přiděleno procesoru jako první, viz Obrázek 50.
- Round Robin (RR) – každému vláknu je přiděleno konstantní časové kvantum, po jehož uplynutí je vlákno automaticky odňato procesoru, viz Obrázek 51.
- Prioritní plánování – každé vlákno má určitou prioritu, vlákno s vyšší prioritou má přednost před vlákny s nižší prioritou. Vlákna se stejnou prioritou jsou přidělována podle FCFS algoritmu, viz Obrázek 52.



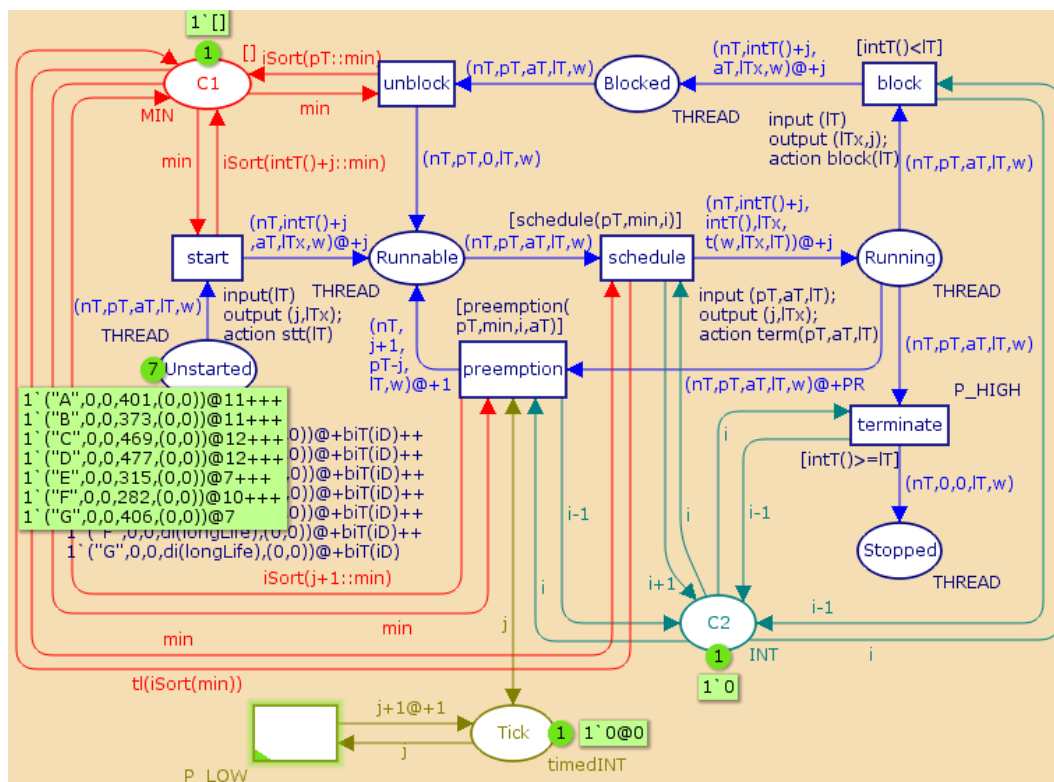
Obrázek 49 - Model stavů vláken při využití FCFS algoritmu pro plánování. Zdroj převzato z [79]

Tvorba a simulace výše zmíněných modelů proběhla v aplikaci CPN Tools [83]. Jednotlivé modely obsahuje příloha 13. Z důvodu použití barvených Petri sítí je nutné všechny stacionární pravděpodobnosti aproximovat pomocí simulace.



Obrázek 50 - Model stavů vláken při využití SJF algoritmu pro plánování. Zdroj převzato z [79]

Barvené Petri sítě (resp. nástroj CPN Tools) nabízejí komplexní aparát pro podporu simulace, které vycházejí z přidruženého modelovacího jazyka, který umožňuje zpřesňovat definice tokenů, přechodů, hran a míst. Podrobný popis všech vlastností barvených Petri sítí lze nalézt např. v [19, 20, 79].

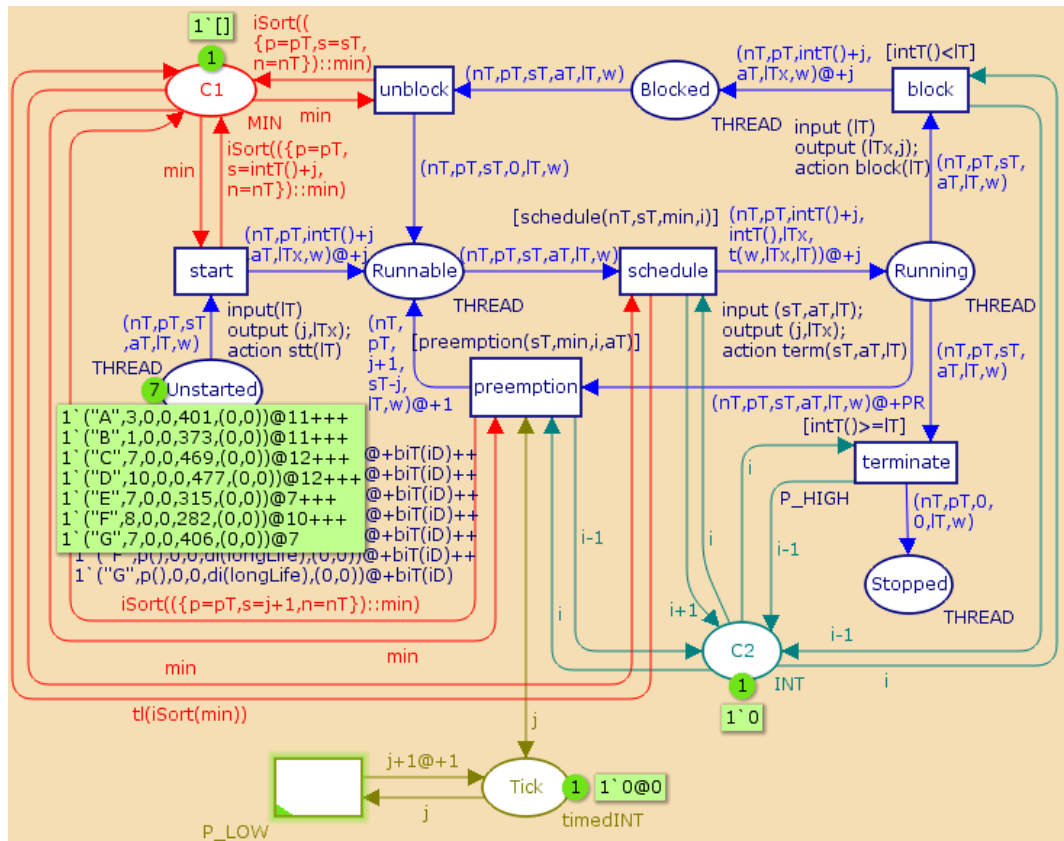


Obrázek 51 - Model stavů vláken při využití RR algoritmu pro plánování. Zdroj převzato z [79]

Z výše zmíněných důvodů (využití simulace a rozšířené možnosti modelování o modelovací jazyk) je možné aproximovat stacionární pravděpodobností řady skutečností, např.:

- celková doba životního cyklu vlákna,
- doba strávená v určitém stavu (např. čekání na přidělení procesoru),
- hodnota specifického parametru přidruženému k vláknu (tokenu).

Hlavní předností barvených Petri sítí (resp. nástroje CPN Tools) je možnost všechny výše zmíněné skutečnosti přidružit proměnné, kterou nese token. Po provedení simulace je získána aproximace stacionárních pravděpodobností normalizací dané proměnné (hodnota proměnné každého vlákna je dělena sumou hodnot všech proměnných). V následujícím bude porovnána spravedlivost různých plánovacích algoritmů ve spojitosti s dobou čekání vláken na přidělení procesoru.



Obrázek 52 - Model stavů vláken při využití prioritního plánování. Zdroj převzato z [79]

Po provedení simulace každé vlákno (token) obsahuje hodnotu proměnné „w“, která uchovává celkovou dobu strávenou vláknem v místě „Runnable“, tj. dobu čekání na přidělení procesoru.

Normalizací těchto hodnot lze získat aproximaci stacionárních pravděpodobností výskytu vláken v místě „Runnable“. Tabulka 5 ilustruje výsledné hodnoty aproximovaných stacionárních pravděpodobností a výslednou hodnotu spravedlivosti při použití různých plánovacích algoritmů. Z výsledků je parné, že nejspravedlivější je algoritmus Round Robin, zatímco nejméně spravedlivý je prioritní plánování. Hodnota spravedlivosti všech algoritmů je však velice vysoká, a to hlavně z důvodu, že většina plánovacích algoritmů je navržena s požadavkem na spravedlivost.

Tabulka 5 - Aproximace stacionárních pravděpodobností doby čekání. Zdroj vlastní

Vlákno	Stacionární pravděpodobnosti			
	FCFS	SJF	RR	Prioritní plan.
A	0,1347	0,1289	0,4926	0,1926
B	0,1502	0,1328	0,5074	0,1755
C	0,1700	0,1892	0,7228	0,1647
D	0,1347	0,1745	0,6668	0,1186
E	0,1372	0,1159	0,4430	0,1253
F	0,1196	0,1227	0,4689	0,1350
G	0,1536	0,1359	0,5192	0,0883
Maximální entropie	2,8074	2,8074	2,8074	2,8074
Výsledná entropie	2,7993	2,7850	2,8071	2,7663
Hodnota spravedlivosti	0,9971	0,9920	0,9999	0,9854

Hodnoty spravedlivosti (resp. aprox. stacionárních pravděpodobností) jsou (mimo použitý algoritmus) závislé na řadě dalších faktorů, které lze pro tento konkrétní model shrnout následovně:

- Nastavení typu vlákna, tj. zda vlákno v rámci svého životního cyklu vyžaduje více přidělení procesoru (CPU-bound) nebo více čeká na vstupně výstupní událost (I/O-bound).
- Nastavení délky životního cyklu vlákna, popř. tvar a parametry pravděpodobnostního rozdělení, z něhož je délka životního cyklu v modelu určována.
- Počet vláken v modelu, tj. počáteční značení.

V této podkapitole byla předvedena aplikace principů pro výpočet spravedlivosti v barvených Petri sítích s využitím aproximace stacionárních pravděpodobností s využitím simulace. Možnost využití barvených Petri sítí značně rozšiřuje modelovací schopnosti Petri sítí jakožto nástroj a navíc rozšiřuje možnosti analýzy neurčitosti či spravedlivosti o další rozměr (není nutné počítat tyto vlastnosti pouze ze stacionárních pravděpodobností, které reprezentují přítomnost tokenů v určitém místě).

5.3 Elektrárenská síť České Republiky

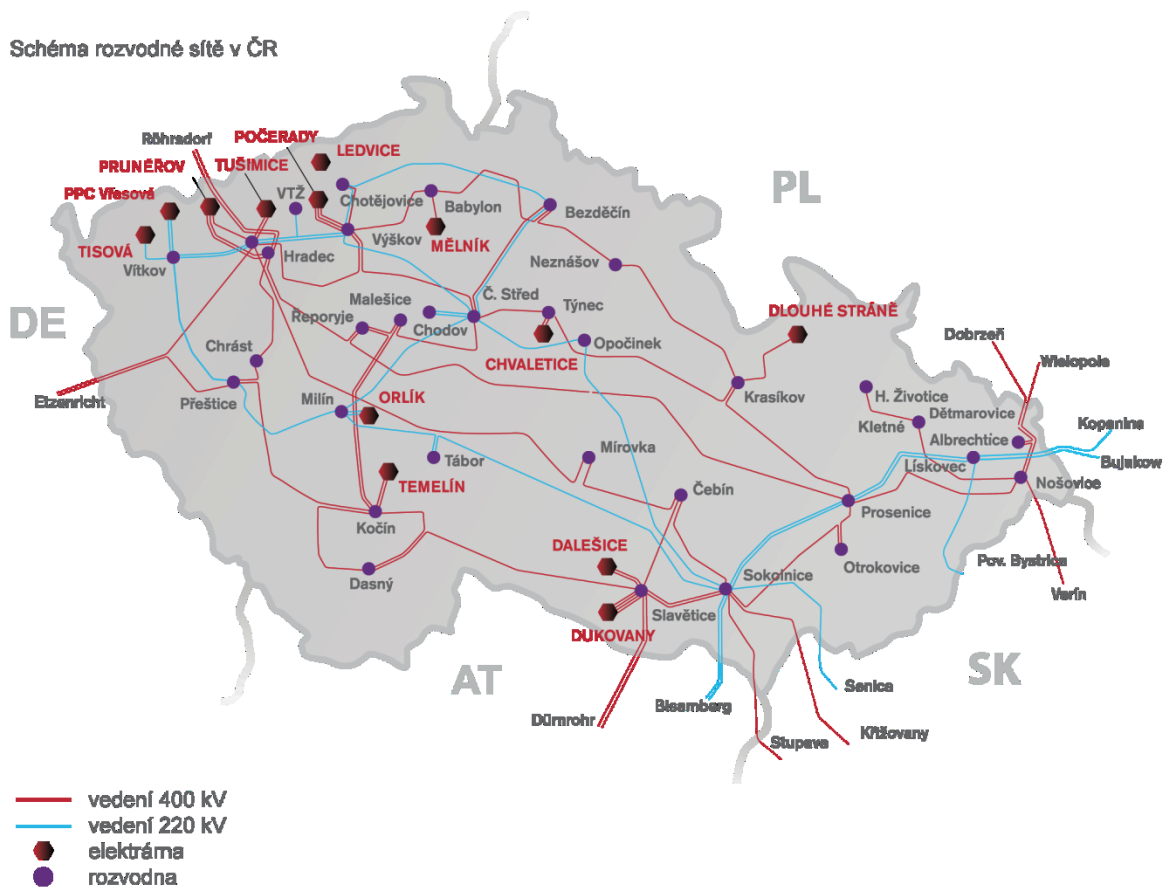
Dalším systémem, který byl modelován a analyzován převážně z důvodu výpočtu spravedlivosti je elektrárenská síť České Republiky. Podklady pro modelování byly získány od společnosti ČEPS, a. s., která zajišťuje provozování a rozvoj vysokonapěťové přenosové soustavy ČR (400 kV a 220 kV). V následujícím je modelováno pouze elektrické vedení

s napětíovou hladinou 400 kV. Elektrárenská síť se svojí podstatou na první pohled nehodí na modelování pomocí Petri sítí, jelikož jsou modelované veličiny (spotřeba, resp. výkon v MWh - megawatt hodiny) spojitého charakteru. V prvním kroku je tedy nutné dané veličiny diskretizovat, např. zobrazením spojitého intervalu do intervalu celých kladných čísel. Hodnoty výroby (spotřeby) jednotlivých elektráren (rozvoděn) shrnuje Tabulka 6.

Tabulka 6 - Přehled výroby a spotřeby elektrické energie v ČR. Zdroj Čeps, a. s.

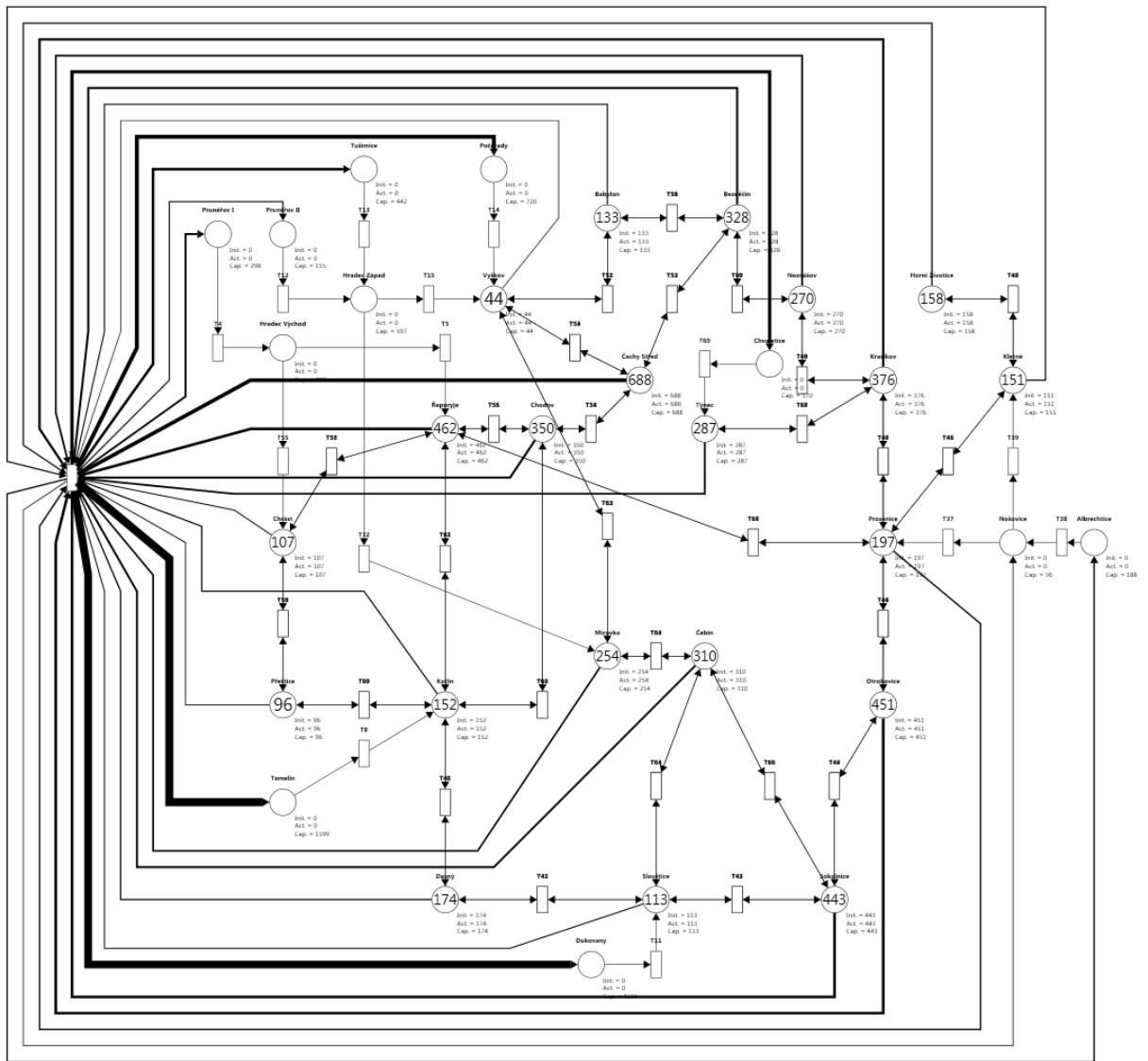
Výroba v MWh		Spotřeba v MWh	
Temelín	1599	Albrechtice	-188
Dukovany	1516	Babylon	133
Počerady	720	Bezděčín	328
Chvaletice	570	Čebín	310
Pruněřov I	298	Čechy Střed	688
Pruněřov II	155	Dasný	174
Tušimice	442	Horní Životice	158
		Chodov	350
		Chrást	107
		Kletné	151
		Kočín	152
		Krasíkov	376
		Mírovka	254
		Neznášov	270
		Nošovice	-56
		Otrokovice	451
		Prosenice	197
		Přeštice	96
		Řeporyje	462
		Slavětice	113
		Sokolnice	443
		Týnec	287
		Výškov	44

Rozvržení jednotlivých výrobních a spotřebních míst spolu s jejich propojením ilustruje Obrázek 53.



Obrázek 53 - Schéma rozvodné sítě v ČR. Zdroj Čeps, a.s.

Výsledný Petri model (viz příloha 14), vytvořený v nově implementovaném editoru, ilustruje Obrázek 54. Model se skládá z 32 míst (7 elektráren + 23 rozvoden se spotřebou + 2 rozvodny bez spotřeby), 69 přechodů (68 přechodů reprezentuje tok energie + 1 synchronizační přechod) a 166 orientovaných hran. Při analýze takto namodelovaného systému se však vyskytla řada problémů, spojených se složitostí. Počet všech dosažitelných značení při nejpesimističtější scénáři je dán vztahem $|R(M_0)| = \prod C(p)$, tj. součin všech kapacit (počet všech značení sítě, nezávisle na počátečním značení). Pro model elektrárenské sítě počet všech možných značení odpovídá číslu $2,34411E+78$, tj. číslo se 78 číslicemi. Pro srovnání vygenerování 1 miliónu značení může v editoru trvat (v závislosti na počtu míst) od jedné minuty do několika hodin (pro velký počet míst). Analyzovat modely, které mají více, než např. 10 miliónů značení již ztrácí prakticky smysl (jak z hlediska času, tak i omezení z hlediska velikosti operační paměti). Jednou z možností jak se pokusit snížit komplexitu navrženého modelu je zvýšení stupně diskretizace, tj. rozdělení spojitého intervalu na menší počet diskrétních hodnot.



Obrázek 54 - Model elektrárenské sítě České republiky. Zdroj vlastní

Tohoto lze dosáhnout např. vydělením všech hodnot určitým číslem, tak aby nedošlo k výrazné ztrátě informace. Odpovídající počty možných značení modelu pro různé dělitele shrnuje Tabulka 7.

Tabulka 7 - Přehled počtu značení pro daného dělitele. Zdroj vlastní

Dělitel	Počet značení
10	4,73E+46
20	2,07E+37
30	1,16E+32
40	1,91E+28
50	2,29E+25
60	9,89E+22
70	2,27E+21
80	4,02E+19
90	2,48E+18
100	6,16E+16
110	1,24E+16
120	9,86E+14
130	2,41E+14
140	5,68E+13
150	4,62E+12
160	8,96E+10
170	5,37E+10
180	1,29E+10
190	2,29E+09
200	7,64E+08

Z tabulky je patrné, že i při použití dělitele 200 (kdy dojde ke ztrátě většiny informace) je stále počet značení v rámci stovek miliónů. Nutno dodat, že při velikosti dělitele 50 a větší, dochází k výrazné ztrátě informace, tj. velký počet rozvoden bude mít stejný počet diskretizovaných hodnot spotřeby (mají stejnou spotřebu), což snižuje přesnost modelu a navíc znehodnocuje případnou použitelnost výsledků analýz nad tímto modelem. Výsledky takového zjištění vnesou otázku nad použitelností Petri sítě pro modely s počtem míst větším než několik desítek. Problémy týkající se složitosti v Petri sítích jsou diskutovány např. v pracích [84, 85].

Z důvodu nemožnosti vygenerovat množinu všech dosažitelných značení je přistoupeno k aproximaci potřebných veličin na základě simulace. Obrázek 55 znázorňuje hodnoty stacionárních pravděpodobností pro 100 tisíc simulačních kroků (vlevo), 1 milión simulačních kroků (uprostřed) a 10 miliónů simulačních kroků (vpravo). Z výsledků je patrné, že výsledné aproximace se s rostoucím počtem simulačních kroků relativně ustálí. Pro potřeby analýzy spravedlivosti je nutné uvedené aproximace stacionárních pravděpodobností vydělit spotřebou elektrické energie v daném místě (standardizace hodnot) a poté výsledné hodnoty zpětně normalizovat.

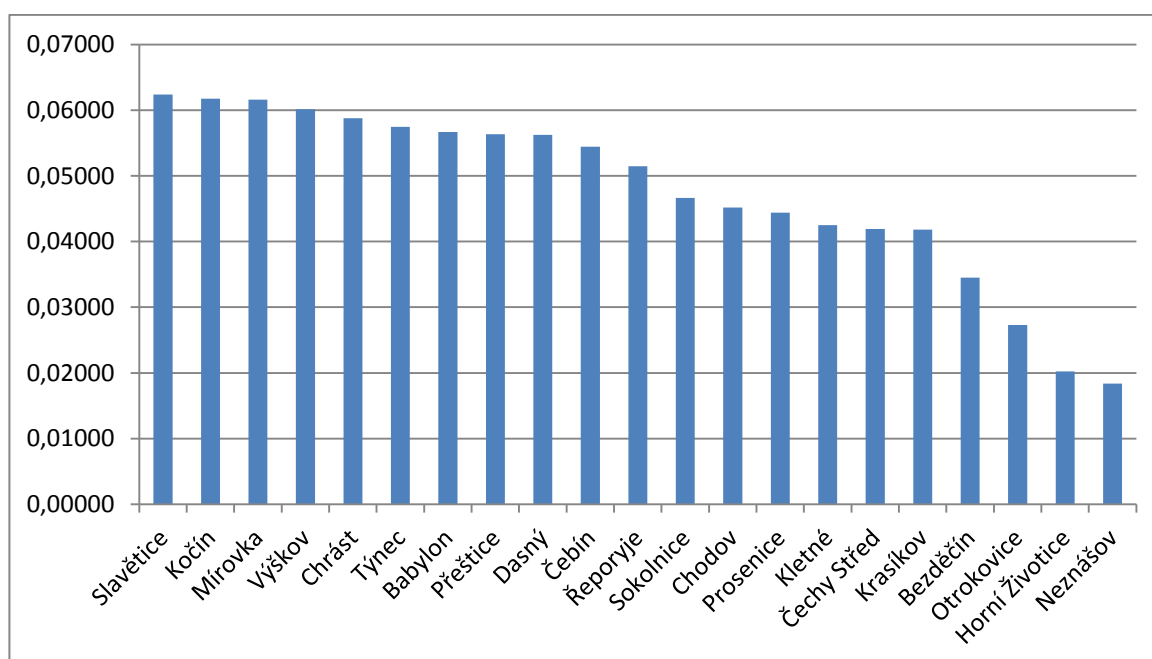
Stationary probabilities of Places	Stationary probabilities of Places	Stationary probabilities of Places
Stationary probabilities	Stationary probabilities	Stationary probabilities
%	%	%
Čechy Střed	0,1088811	10,89%
Řeponyje	0,10684319	10,68%
Sokolnice	0,08299457	8,3%
Týnec	0,07544765	7,54%
Čebín	0,07500512	7,5%
Mírovka	0,07105973	7,11%
Chodov	0,06535096	6,54%
Krasikov	0,05750703	5,75%
Prosenice	0,04449743	4,45%
Kočín	0,04239528	4,24%
Dasný	0,04172272	4,17%
Babylon	0,0340122	3,4%
Otrokovice	0,03345222	3,35%
Slavětice	0,03184464	3,18%
Chrást	0,02944004	2,94%
Bezděčín	0,02792973	2,79%
Kletné	0,02569966	2,57%
Přeštice	0,0245165	2,45%
Vyškov	0,01213575	1,21%
Neznašov	0,00551667	0,55%
Horní Životice	0,0037478	0,37%

Stationary probabilities of Places	Stationary probabilities of Places	Stationary probabilities of Places
Stationary probabilities	Stationary probabilities	Stationary probabilities
%	%	%
Čechy Střed	0,10971304	10,97%
Řeponyje	0,09739063	9,74%
Sokolnice	0,07906755	7,91%
Čebín	0,06954329	6,95%
Týnec	0,06750411	6,75%
Krasikov	0,06552016	6,55%
Chodov	0,06454056	6,45%
Mírovka	0,06363597	6,36%
Otrokovice	0,0484955	4,85%
Bezděčín	0,04752397	4,75%
Dasný	0,03992228	3,99%
Kočín	0,03815774	3,82%
Prosenice	0,03648965	3,65%
Babylon	0,03100327	3,1%
Slavětice	0,02874024	2,87%
Chrást	0,02535713	2,54%
Kletné	0,02376172	2,38%
Přeštice	0,02190685	2,19%
Neznašov	0,01922596	1,92%
Horní Životice	0,01174054	1,17%
Vyškov	0,01075984	1,08%

Stationary probabilities of Places	Stationary probabilities of Places	Stationary probabilities of Places
Stationary probabilities	Stationary probabilities	Stationary probabilities
%	%	%
Čechy Střed	0,11586896	11,59%
Řeponyje	0,09557468	9,56%
Sokolnice	0,0830496	8,3%
Čebín	0,0678254	6,78%
Týnec	0,06623959	6,62%
Chodov	0,06354166	6,35%
Krasikov	0,0631562	6,32%
Mírovka	0,06289059	6,29%
Otrokovice	0,04941977	4,94%
Bezděčín	0,04546	4,55%
Dasný	0,03932523	3,93%
Kočín	0,03769982	3,77%
Prosenice	0,03513606	3,51%
Babylon	0,03028353	3,03%
Slavětice	0,02832073	2,83%
Kletné	0,02578021	2,58%
Chrást	0,02526424	2,53%
Přeštice	0,02173558	2,17%
Neznašov	0,01995392	2%
Horní Životice	0,01284414	1,28%
Vyškov	0,01063009	1,06%

Obrázek 55 - Aproximace stacionárních pravděpodobností rozvoden se spotřebou (100 tisíc simulačních kroků vlevo a 1 milión simulačních kroků uprostřed a 10 miliónů simulačních kroků vpravo). Zdroj vlastní

Obrázek 56 znázorňuje standardizované (a normalizované) stacionární pravděpodobnosti jednotlivých rozvoden se spotřebou (od největší po nejmenší). Výsledná hodnota spravedlivosti je v tomto případě 98,6 %. Z obrázku vyplývá, že rozvodny Horní Životice, Neznašov a Otrokovice mají nejnižší hodnoty, tj. jejich stacionární pravděpodobnost je na základě simulace výrazně nižší než u ostatních rozvoden s podobnou spotřebou.



Obrázek 56 - Standardizované stacionární pravděpodobnosti rozvoden se spotřebou. Zdroj vlastní

To může být způsobeno např. větší vzdáleností (vzhledem k struktuře vedení a rozvodu) od nejbližší elektrárny. Naopak největší hodnoty standardizovaných stacionárních pravděpodobností dosahují rozvodny Slavětice a Kočín, tj. rozvodny přímo napojené na jaderné elektrárny Dukovany a Temelín. Z tohoto zjištění lze vyvodit závěry, že rozvodny blíže k výrobnám dosahují (relativně vůči své spotřebě) vyšších hodnot stacionárních pravděpodobností. Je nutné dodat, že výsledné hodnoty neuvažují dodávku elektrické energie ze zahraničí, tj. výsledné hodnoty jsou od reality zkresleny.

6 Hodnocení výsledků výzkumu

Přínos práce pro rozvoj vědního oboru

Teoretickým přínosem této práce jsou nově nadefinované vlastnosti Petri sítí, a to neurčitosti a spravedlivost. Tyto nově definované vlastnosti rozšiřují dosavadní soubor strukturálních a behaviorálních vlastností. V práci je definován analytický přístup pro výpočet neurčitosti a spravedlivosti v klasických P/T Petri sítích a stochastických Petri sítích. Navíc je v práci ilustrován příklad výpočtu (aproximace) těchto vlastností na základě simulace, a to v generalizovaných stochastických Petri sítích, časovaných Petri sítích a barvených Petri sítích.

Přínos práce pro společenskou praxi

Přínosem této práce pro společenskou praxi je možnost aplikovat definované postupy pro výpočet neurčitosti a spravedlivosti v široké oblasti oborů, které využívají Petri sítě jako modelovací či verifikační nástroj. Na řadě příkladů (dopravní komunikační uzly, plánování vláken v operačním systému, elektrárenská síť ČR) byla předvedena aplikovatelnost navržených postupů na různých definicích Petri sítí. Dále byly prezentovány základní problémy při modelování pomocí Petri sítí v souvislosti s analýzou neurčitosti či spravedlivosti. Tyto problémy jsou spojeny s omezením modelovacích schopností Petri sítě při analytickém řešení výpočtu neurčitosti a spravedlivosti, tj. např. nutnost přidělit parametr exponenciálního rozdělení všem přechodům, což v praxi není vždy vhodné či žádoucí. V práci je navíc ukázán přístup pro výpočet neurčitosti a spravedlivosti na základě simulačních výsledků (stacionární pravděpodobnosti jsou aproximovány průměrnými hodnotami pravděpodobností v určitém simulačním čase). S využitím simulace byl prezentován přístup pro výpočet neurčitosti a spravedlivosti v barvených Petri sítích, časovaných Petri sítích a generalizovaných stochastických Petri sítích.

Přínos práce pro pedagogickou činnost

V rámci implementace navržených analytických postupů řešení definovaných vlastností byl vytvořen editor Petri sítí, který umožňuje modelovat klasické P/T Petri sítě (s kapacitami nebo bez nich), stochastické Petri sítě, časované Petri sítě a generalizované stochastické Petri sítě. Editor byl implementován s ohledem na jednoduchost uživatelského rozhraní a vizuální reprezentaci simulace dynamického chování modelů (např. animace tokenů, zvýraznění

proveditelných přechodů v průběhu simulace či možnosti podmíněného obarvování tokenů apod.). S těchto důvodů, tj. uživatelské přívětivosti (jednoduchost, vizuální reprezentace dynamiky apod.) a modelovacích schopností, je implementovaný editor vhodný pro využití v rámci pedagogické činnosti spojené s výukou Petri sítí nebo modelováním diskretních procesů. Editor navíc umožňuje provádět analýzy spojené s klasickými behaviorálními vlastnostmi Petri sítí (např. živost, ohraničenost, množina všech dosažitelných značení, mrtvá značení apod.) a zároveň kvantifikovat neurčitosti a spravedlivost. V editoru lze hodnoty neurčitosti a spravedlivosti získat jak na základě analytického přístupu (sít' musí být stochastická nebo P/T) nebo simulací (libovolná sít'). Při určování neurčitosti a spravedlivosti editor poskytuje možnost opakovaných výpočtů při automatické inkrementaci libovolného parametru sítě (počáteční značení, kapacity či parametry exponenciálního rozdělení přechodů), čímž je umožněno generovat vstupy pro grafickou reprezentaci vývoje hodnot sledované veličiny (spravedlivost, neurčitost či distribuce stacionárních pravděpodobností) na základě měnícího se parametru.

Výhody navržených přístupů pro měření neurčitosti a spravedlivosti v Petri sítích

- Univerzální metriky pro měření neurčitosti a spravedlivosti v souběžných a reaktivních systémech. Jedinou podmínkou je nutnost modelování systému pomocí P/T (nebo stochastických) Petri sítích (popř. jiného typu sítě, ale nutné využití simulaci).
- Přesně definované hranice neurčitosti a spravedlivosti (interval $\langle 0,1 \rangle$).
- Možnosti využití verifikační možnosti Petri sítí.
- Možnost simulace různých parametrů sítě (např. počet tokenů, parametr λ exponenciálního rozdělení u přechodů) a sledovat vývoj neurčitosti a spravedlivosti, tj. možnost hledání lokálního optima kolem určitého pracovního bodu (původní hodnoty parametru modelu).

Nevýhody navržených přístupů pro měření neurčitosti a spravedlivosti v Petri sítích

- Základní nedostatky Petri sítí obecně, tj. stavová exploze, restriktce vycházející z definice apod. Obecně lze kvantifikaci spravedlivosti a neurčitosti považovat za smysluplnou, pokud je velikost množiny všech dosažitelných značení v rámci tisíců, maximálně desetitisíců značení.

7 Závěr

V této práci byly nadefinovány dvě behaviorální vlastnosti Petri sítí, a to neurčitost a spravedlivost v Petri sítích (P/T a stochastických). Na neurčitost a spravedlivost v Petri sítích lze nahlížet jako na nové vlastnosti, které rozšiřují verifikační (popř. validační) schopnosti Petri sítí. Na rozdíl od klasických (kategorizačních) vlastností Petri sítí jako je např. živost, „klasická“ spravedlivost (spojena s přechody), ohraničenost apod., jsou tyto nové vlastnosti kvantifikačního typu, což umožňuje provádění přesnějších analýz např. pomocí simulace (hledání optima, porovnávání modelů, analýza chování apod.). Využití takto definovaných vlastností lze využít v řadě odvětví, v kterých se využívá modelování pomocí Petri sítí (kritické infrastruktury, procesní modelování, teorie hromadné obsluhy, telekomunikační a počítačové sítě, apod.). Např. analýza neurčitosti procesních modelů přináší hodnotné informace o jejich použitelnosti, predikovatelnosti či uživatelské přívětivosti [4]. Analýzou spravedlivosti v modelech lze nalézt např. nerovnoměrné vytížení určitých uzlů sítě.

Postup výpočtu pro kvantifikaci spravedlivosti a neurčitosti lze dále rozšířit do dalších typů Petri sítí. Tím může být umožněno měření neurčitosti a spravedlivosti na problematikách blíže realitě, což spočívá převážně v možnosti diverzifikaci jednotlivých tokenů sítě. Diverzifikováním tokenů lze předpokládat možnost kvantifikovat neurčitost a spravedlivost komplexnějších modelů, jež jsou založené na diverzifikaci entit (např. procesní mapy). Toho lze dosáhnout například použitím barvených Petri sítí, které umožňují přiřadit jednotlivým tokenům vektor hodnot.

Cílem disertační práce bylo nadefinovat neurčitost a spravedlivost v Petri sítích (P/T a stochastických) jakožto nové vlastnosti. Součástí cíle bylo nastínit možné typy analýz, které lze provádět ve spojitosti s kvantifikací spravedlivosti a neurčitosti. Cíl práce byl splněn. Z důvodu špatné realizovatelnosti modelování a analýzy, byl navíc implementován editor Petri sítí, který umožňuje modelovat klasické P/T Petri sítě, časované Petri sítě, stochastické Petri sítě a generalizované stochastické Petri sítě. U klasických P/T a stochastických Petri sítí umožňuje implicitně kvantifikovat spravedlivosti a neurčitost pro danou síť, popř. podsíť. U ostatních typů sítě editor umožňuje aproximaci těchto vlastností na základě provedené simulace.

Seznam zkratek a pojmů

- PN (Petri Net) – Petri síť
- TPN (Timed Petri Net) – Časovaná Petri síť
- SPN (Stochastic Petri Net) – stochastická Petri síť
- $GSPN$ (Generalized Stochastic Petri Net) – generalizovaná stochastická Petri síť
- CPN (Coloured Petri Net) – barvená Petri síť
- P/T (Place/Transition) – základní typ Petri sítě, která obsahuje místa a přechody (ustálené názvosloví)
- $I(s)$ – množství informace přijaté zprávy o tom, že se systém nachází ve stavu s
- $H(S)$ – entropie systému S
- $H(PN)$ – entropie Petri sítě
- $Uncertainty(PN)$ – neurčitost Petri sítě
- $H_p(PN)$ – entropie míst Petri sítě
- $Fairness(PN)$ – spravedlivost Petri sítě

Seznam obrázků

Obrázek 1 - Příklad Petri sítě. Zdroj vlastní	16
Obrázek 2 - Stavový graf ukázkové Petri sítě. Zdroj vlastní	17
Obrázek 3 - Stavový graf ukázkové stochastické Petri sítě. Zdroj vlastní	17
Obrázek 4 - Ukázka Markovova řetězce s diskretním časem. Zdroj vlastní	18
Obrázek 5 - Ukázka Markovova řetězce se spojitým časem. Zdroj vlastní.....	19
Obrázek 6 - Spravedlivost vs. počet tokenů v místě p_1 . Zdroj vlastní.....	33
Obrázek 7 - Distribuce pravděpodobnosti mezi místy při změně počtu tokenů v místě p_1 . Zdroj vlastní.....	34
Obrázek 8 - Struktura ukázkové Petri sítě zadána v maticovém tvaru formou incidenčních matic. Zdroj vlastní	37
Obrázek 9 - Vektory definující kapacitu míst a počáteční značení sítě. Zdroj vlastní	38
Obrázek 10 - Výpočet množiny všech dosažitelných značení matice intenzity u stochastických Petri sítí. Zdroj vlastní	38
Obrázek 11 - Výpočet spravedlivosti v stochastických Petri sítích v prostředí Matlab. Zdroj vlastní.....	39
Obrázek 12 - Grafické uživatelské rozhraní nově implementovaného editoru Petri sítí. Zdroj vlastní.....	41
Obrázek 13 - Možnosti editace sítě. Zdroj vlastní	43
Obrázek 14 - Možnosti editace místa. Zdroj vlastní	44
Obrázek 15 - Možnosti editace přechodu pro stochastické sítě. Zdroj vlastní	44
Obrázek 16 - Možnosti editace přechodu pro nestochastické sítě. Zdroj vlastní.....	44
Obrázek 17 - Možnosti editace orientované hrany. Zdroj vlastní.....	46
Obrázek 18 - Hladké Bézierovy křivky. Zdroj vlastní.....	47
Obrázek 19 - Vizuální reprezentace hrany typu Inhibitor. Zdroj vlastní.....	47
Obrázek 20 - (a) Editace výchozích hodnot (b) Editace vybraných objektů (multiselection). Zdroj vlastní.....	48
Obrázek 21 - Možnosti simulace dynamického chování sítě. Zdroj vlastní	49
Obrázek 22 - Příklad "obarvujícího tokenu" semafor. Zdroj vlastní	50
Obrázek 23 - Animace - Token je přenášen z místa P_1 k přechodu T_1 . Zdroj vlastní.....	50
Obrázek 24 - Vliv vizuální reprezentace multiplicity hrany na její tloušťku a velikost tokenu (vpravo). Zdroj vlastní	51
Obrázek 25 - Možnosti analýzy behaviorálních vlastností v editoru Petri sítí. Zdroj vlastní...52	

Obrázek 26 - Model ukázkové sítě v editoru Petri sítí. Zdroj vlastní.....	52
Obrázek 27 - Výstup analýz. Zdroj vlastní	53
Obrázek 28 - Otevřená okna všech výsledků analýzy. Zdroj vlastní.....	54
Obrázek 29 - Příklad neohraničené sítě. Zdroj: převzato z [68].....	56
Obrázek 30 - Značení, závislosti a ohraničenost příkladu neohraničené sítě. Zdroj vlastní.....	56
Obrázek 31 - Možnosti nastavení rozsahu simulace. Zdroj vlastní	57
Obrázek 32 - Výstup simulace. Zdroj vlastní	57
Obrázek 33 - Možnosti cyklického výpočtu spravedlivosti a neurčitosti při změně parametrů. Zdroj vlastní.....	58
Obrázek 34 - Příklad výstupu při využití cyklické inkrementace. Zdroj vlastní	59
Obrázek 35 - Model křižovatky s pravidlem pravé ruky. Zdroj vlastní	62
Obrázek 36 - Křižovatka s hlavní pozemní komunikací. Zdroj vlastní	63
Obrázek 37 - Model křižovatky s hlavní pozemní komunikací (vertikální směr). Zdroj vlastní	64
Obrázek 38 - Model křižovatky s hlavní pozemní komunikací s využitím hran typu Inhibitor. Zdroj vlastní.....	66
Obrázek 39 - Stacionární pravděpodobnosti vybraných míst. Zdroj vlastní	67
Obrázek 40 - Křižovatka s hlavní pozemní komunikací (víceproudový vjezd do křižovatky). Zdroj vlastní.....	68
Obrázek 41 - Stochastický model křižovatky s hlavní pozemní komunikací. Zdroj vlastní	69
Obrázek 42 - Porovnání stacionárních pravděpodobností (vlevo) a jejich aproximací (vpravo). Zdroj vlastní.....	70
Obrázek 43 - Model křižovatky se semaforem. Zdroj vlastní	71
Obrázek 44 - Model křižovatky se semaforem vč. zjednodušené přepínací logiky. Zdroj vlastní	72
Obrázek 45 - Stavy procesů. Zdroj vlastní	74
Obrázek 46 - Model procesních stavů v operačním systému. Zdroj vlastní.....	75
Obrázek 47 - Distribuce stacionárních pravděpodobností v třístavovém modelu procesů. Zdroj vlastní.....	75
Obrázek 48 - Vývoj spravedlivosti s rostoucím počtem procesorů. Zdroj vlastní	76
Obrázek 49 - Model stavů vláken při využití FCFS algoritmu pro plánování. Zdroj převzato z [79].....	77
Obrázek 50 - Model stavů vláken při využití SJF algoritmu pro plánování. Zdroj převzato z [79].....	78

Obrázek 51 - Model stavů vláken při využití RR algoritmu pro plánování. Zdroj převzato z [79].....	79
Obrázek 52 - Model stavů vláken při využití prioritního plánování. Zdroj převzato z [79]	80
Obrázek 53 - Schéma rozvodné sítě v ČR. Zdroj Čeps, a.s.	83
Obrázek 54 - Model elektrárenské sítě České Republiky. Zdroj vlastní	84
Obrázek 55 - Aproximace stacionárních pravděpodobností rozvoden se spotřebou (100 tisíc simulačních kroků vlevo a 1 milión simulačních kroků uprostřed a 10 miliónů simulačních kroků vpravo). Zdroj vlastní	86
Obrázek 56 - Standardizované stacionární pravděpodobnosti rozvoden se spotřebou. Zdroj vlastní.....	86

Seznam tabulek

Tabulka 1 - Seznam hlavních vlastností, které jsou verifikovány v Petri sítích. Zdroj [15]	13
Tabulka 2 - Stručný popis využití dříve definovaných behaviorálních vlastností. Zdroj vlastní	14
Tabulka 3 - Souhrn vlastností editoru Petri sítí. Zdroj vlastní	60
Tabulka 4 - Stacionární pravděpodobnosti jednotlivých směrů/typů komunikace. Zdroj vlastní	67
Tabulka 5 - Aproximace stacionárních pravděpodobností doby čekání. Zdroj vlastní	81
Tabulka 6 - Přehled výroby a spotřeby elektrické energie v ČR. Zdroj Čeps, a. s.	82
Tabulka 7 - Přehled počtu značení pro daného dělitele. Zdroj vlastní	85

Použitá literatura a zdroje

- [1] Lassen, K.B., W.M.P. van der Aalst. Complexity metrics for Workflow nets. *Information and Software Technology*. 2009, vol. 51, no. 3, pp. 610-626.
- [2] Rolón, E., et al. Analysis and Validation of Control-Flow Complexity Measures with BPMN Process Models. In: Halpin, T., et al. (Eds.) *Enterprise, Business-Process and Information Systems Modeling*, Springer Berlin Heidelberg, 2009, pp. 58-70.
- [3] Cardoso, J., 2005. Evaluating the process control-flow complexity measure. In: *ICWS 2005: IEEE International Conference on Web Services*. pp. 804-805.
- [4] Jung, J.-Y., et al. An entropy-based uncertainty measure of process models. *Information Processing Letters*. 2011, vol. 111, no. 3, pp. 135-141.
- [5] Reijers, H.A., I.T.P. Vanderfeesten. Cohesion and Coupling Metrics for Workflow Process Design. In: Desel, J., et al. (Eds.) *Business Process Management*, Springer Berlin Heidelberg, 2004, pp. 290-305.
- [6] Shield, J., et al., 2011. Asymmetric cache coherency: Improving multicore performance for non-uniform workloads. In: *6th International Workshop on Reconfigurable Communication-centric Systems-on-Chip (ReCoSoC)*. pp. 1-8.
- [7] Trautmann, S.T., P.P. Wakker. Process fairness and dynamic consistency. *Economics Letters*. 2010, vol. 109, no. 3, pp. 187-189.
- [8] Trautmann, S.T. A tractable model of process fairness under risk. *Journal of Economic Psychology*. 2009, vol. 30, no. 5, pp. 803-813.
- [9] Collins, B.J., et al. Does process fairness affect job performance? It only matters if they plan to stay. *Journal of Organizational Behavior*. 2012, vol. 33, no. 7, pp. 1007-1026.
- [10] González, L.S., et al. Measurement in business processes: a systematic review. *Business Process Management Journal*. 2010, vol. 16, no. 1, pp. 114 - 134.
- [11] "Fairness", 2011. *Oxford Advanced American Dictionary for learners of English*
- [12] Völzer, H., D. Varacca. Defining Fairness in Reactive and Concurrent Systems. *Journal of the ACM*. 2012, vol. 59, no. 3, pp. 13-37.

- [13] Baier, C., J.-P. Katoen, 2008. *Principles of model checking*. Cambridge, Mass.: The MIT Press.
- [14] Petri, C.A. *Kommunikation mit Automaten*. Bonn: Institut für Instrumentelle Mathematik, Schriften des IIM Nr. 2. 1962.
- [15] Murata, T. Petri nets: Properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*. 1989, vol. 77, no. 4, pp. 541-580.
- [16] Zuberek, W.M. Timed Petri nets definitions, properties, and applications. *Microelectronics Reliability*. 1991, vol. 31, no. 4, pp. 627-644.
- [17] Holliday, M.A., M.K. Vernon. A Generalized Timed Petri Net Model for Performance Analysis. *IEEE Transactions on Software Engineering*. 1987, vol. SE-13, no. 12, pp. 1297-1310.
- [18] Ajmone Marsan, M. Stochastic Petri nets: an elementary introduction. In: Grzegorz, R. (Ed.) *Advances in Petri nets 1989*, Springer-Verlag New York, Inc., 1990, pp. 1-29.
- [19] Jensen, K., 2009. *Coloured Petri nets : modeling and validation of concurrent systems*. New York: Springer. 1st ed.
- [20] Jensen, K., et al., 2009. *Transactions on petri nets and other models of concurrency III*. Berlin ; London: Springer.
- [21] Genrich, H.J., K. Lautenbach. System modelling with high-level Petri nets. *Theoretical Computer Science*. 1981, vol. 13, no. 1, pp. 109-135.
- [22] Diaz, M., 2009. *Petri nets : fundamental models, verification and applications*. London: ISTE.
- [23] Ezpeleta, J., et al. A Petri net based deadlock prevention policy for flexible manufacturing systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 1995, vol. 11, no. 2, pp. 173-184.
- [24] Zhi Wu, L., et al. A Survey and Comparison of Petri Net-Based Deadlock Prevention Policies for Flexible Manufacturing Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*. 2008, vol. 38, no. 2, pp. 173-188.

- [25] Kindler, E., W.v.d. Aalst. Liveness, fairness, and recurrence in Petri nets. *Inf. Process. Lett.* 1999, vol. 70, no. 6, pp. 269-274.
- [26] Molloy, M.K. Performance Analysis Using Stochastic Petri Nets. *IEEE Transactions on Computers.* 1982, vol. C-31, no. 9, pp. 913-917.
- [27] Molloy, M.K., 1981. *On the integration of delay and throughput measures in distributed processing models.*
- [28] Ciardo, G., et al. A characterization of the stochastic process underlying a stochastic Petri net. *IEEE Transactions on Software Engineering.* 1994, vol. 20, no. 7, pp. 506-515.
- [29] Haas, P.J., 2002. *Stochastic Petri nets : modelling, stability, simulation.* New York: Springer.
- [30] Gray, R.M., 2009. *Probability, random processes, and ergodic properties.* Dordrecht New York: Springer. 2nd ed.
- [31] Gallager, R.G., 2012. *Stochastic Processes: Theory for Applications.* Massachusetts Institute of Technology.
- [32] Anderson, D.F. *Introduction to Stochastic Processes with Applications in the Biosciences.* University of Wisconsin at Madison. 2011.
- [33] Lukasiewicz, T., U. Straccia. Managing uncertainty and vagueness in description logics for the Semantic Web. *Journal of Web Semantics.* 2008, vol. 6, no. 4, pp. 291-308.
- [34] Helton, J.C. Uncertainty and sensitivity analysis in the presence of stochastic and subjective uncertainty. *Journal of Statistical Computation and Simulation.* 1997, vol. 57, no. 1-4, pp. 3-76.
- [35] Zadeh, L.A. Fuzzy Sets. *Information and Control.* 1965, vol. 8, no. 3, pp. 338-353.
- [36] Lee, C.C. Fuzzy-Logic in Control-Systems - Fuzzy-Logic Controller .1. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics.* 1990, vol. 20, no. 2, pp. 404-418.
- [37] Kotek, Z., et al., 1990. *Kybernetika.* Praha: SNTL.
- [38] Gray, R.M., 2011. *Entropy and information theory.* New York: Springer.

- [39] Dudík, M., et al. Maximum Entropy Density Estimation with Generalized Regularization and an Application to Species Distribution Modeling. *J. Mach. Learn. Res.* 2007, vol. 8, pp. 1217-1260.
- [40] Shannon, C.E. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*. 1948, vol. 27, no. 3, pp. 379-423.
- [41] Watson, J.F., III, A.A. Desrochers, 1992. Entropy analysis of generalized stochastic Petri net s-transitions. In: *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 1204-1209.
- [42] Van Der Aalst, W.M.P. The Application of Petri Nets to Workflow Management. *The Journal of Circuits, Systems and Computers*. 1998, vol. 8, no. 1, pp. 21-66.
- [43] Xiaojuan, H., et al., 2008. Petri nets modeling of condenser fault diagnosis based on information entropy. In: *WCICA 2008. 7th World Congress on Intelligent Control and Automation*. pp. 6021-6026.
- [44] Francez, N., 1986. *Fairness*. Springer-Verlag New York, Inc.
- [45] Kwiatkowska, M.Z. Survey of fairness notions. *Information and Software Technology*. 1989, vol. 31, no. 7, pp. 371-386.
- [46] Larson, R.C. Perspectives on Queues - Social-Justice and the Psychology of Queuing. *Operations Research*. 1987, vol. 35, no. 6, pp. 895-905.
- [47] Palm, C. Methods of Judging the Annoyance Caused By Congestions. *TELE (English ed.)*. 1953, no. No. 2, pp. 1-20.
- [48] Wierman, A. Fairness and scheduling in single server queues. *Surveys in Operations Research and Management Science*. 2011, vol. 16, no. 1, pp. 39-48.
- [49] Raz, D., et al. A resource-allocation queueing fairness measure. *SIGMETRICS Perform. Eval. Rev.* 2004, vol. 32, no. 1, pp. 130-141.
- [50] Zhu, Y.Q., H.G. Chen. Service fairness and customer satisfaction in internet banking Exploring the mediating effects of trust and customer value. *Internet Research*. 2012, vol. 22, no. 4, pp. 482-498.

- [51] Medernach, E. Workload Analysis of a Cluster in a Grid Environment. In: Feitelson, D., et al. (Eds.) *Job Scheduling Strategies for Parallel Processing*, Springer Berlin Heidelberg, 2005, pp. 36-61.
- [52] Ibl, M., 2014. An alternative view of fairness in petri nets. In: *ACM International Conference Proceeding Series*. pp. 130-133.
- [53] Ibl, M., 2014. Measurement of Fairness in Process Models using Entropy and Stochastic Petri Nets. In: *ICSOF 2014 - Proceedings of the 9th International Joint Conference on Software Technologies*. pp. 115-120.
- [54] Ibl, M., 2013. Uncertainty measure of process models using entropy and petri nets. In: *ICSOF 2013 - Proceedings of the 8th International Joint Conference on Software Technologies*. pp. 542-547.
- [55] Chiola, G., et al. Generalized stochastic Petri nets: a definition at the net level and its implications. *IEEE Transactions on Software Engineering*. 1993, vol. 19, no. 2, pp. 89-107.
- [56] Ajmone Marsan, M., et al., 1995. *Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets* Wiley-Blackwell.
- [57] Howell, R.R., et al. A taxonomy of fairness and temporal logic problems for Petri nets. In: Chytil, M., et al. (Eds.) *Mathematical Foundations of Computer Science 1988*, Springer Berlin Heidelberg, 1988, pp. 351-359.
- [58] Howell, R.R., et al. A taxonomy of fairness and temporal logic problems for Petri nets. *Theoretical Computer Science*. 1991, vol. 82, no. 2, pp. 341-372.
- [59] Silva, M., T. Murata. B-fairness and structural B-fairness in Petri net models of concurrent systems. *Journal of Computer and System Sciences*. 1992, vol. 44, no. 3, pp. 447-477.
- [60] Carstensen, H. Decidability Questions for Fairness in Petri Nets. *Lecture Notes in Computer Science*. 1987, vol. 247, pp. 396-407.
- [61] Carstensen, H., R. Valk. Infinite Behavior and Fairness in Petri Nets. *Lecture Notes in Computer Science*. 1985, vol. 188, pp. 83-100.

- [62] Best, E. Fairness and conspiracies. *Information Processing Letters*. 1984, vol. 18, no. 4, pp. 215-220.
- [63] Anschuetz, H. *HPSim*. 2003.
- [64] *WoPeD*. <http://sourceforge.net/projects/woped/>:
- [65] *TimeNET (timed net evaluation tool)*. Technische Universität Ilmenau: System and Software Engineering group.
- [66] *PIPE2: Platform-Independent Petri net Editor*. <http://pipe2.sourceforge.net>:
- [67] Albahari, J., et al., 2012. *C# 5.0 in a nutshell*. Beijing ; Sebastopol: O'Reilly. 5th ed.
- [68] Češka, M., et al. *Petriho síť*. Studijní opora, Brno: Vysoké učení technické v Brně. 2009.
- [69] Tzes, A., et al. Applications of Petri Networks to Transportation Network Modeling. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. 1996, vol. 45, no. 2, pp. 391-400.
- [70] Gallego, J.L., et al. Design by Petri nets of an intersection signal controller. *Transportation Research Part C-Emerging Technologies*. 1996, vol. 4, no. 4, pp. 231-248.
- [71] Huang, Y.S., T.H. Chung. Modeling and analysis of urban traffic lights control systems using timed CP-nets. *Journal of Information Science and Engineering*. 2008, vol. 24, no. 3, pp. 875-890.
- [72] List, G.F., M. Cetin. Modeling traffic signal control using Petri nets. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. 2004, vol. 5, no. 3, pp. 177-187.
- [73] Dotoli, M., M.P. Fanti. An urban traffic network model via coloured timed Petri nets. *Control Engineering Practice*. 2006, vol. 14, no. 10, pp. 1213-1229.
- [74] Van Der Aalst, W.M.P., M.A. Odijk. Analysis of Railway Stations by Means of Interval Timed Colored Petri Nets. *Real-Time Systems*. 1995, vol. 9, no. 3, pp. 241-263.
- [75] Giua, A., C. Seatzu. Modeling and supervisory control of railway networks using Petri nets. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*. 2008, vol. 5, no. 3, pp. 431-445.

- [76] Giua, A., C. Seatzu. Supervisory control of railway networks with Petri nets. In: *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Vols 1-5*, New York: IEEE, 2001, pp. 5004-5009.
- [77] Werther, B., et al. Colored Petri net based formal airport control model for simulation and analysis of airport control processes. In: Duffy, V.G. (Ed.) *Digital Human Modeling*, Berlin: Springer-Verlag Berlin, 2007, pp. 1027-1036.
- [78] Davidrajuh, R., B. Lin. Exploring airport traffic capability using Petri net based model. *Expert Systems with Applications*. 2011, vol. 38, no. 9, pp. 10923-10931.
- [79] Ibl, M. *Modelování činnosti vláken v operačním systému*. Pardubice, Czech Republic: University of Pardubice. 2011.
- [80] Silberschatz, A., et al., 2005. *Operating System Concepts*. Hoboken, NJ: J. Wiley & Sons. 7th ed.
- [81] Tanenbaum, A.S., A.S. Woodhull, 2006. *Operating Systems : Design and Implementation*. Upper Saddle River, N.J.: Pearson/Prentice Hall. 3rd ed.
- [82] Stallings, W., 2009. *Operating Systems : Internals and Design Principles*. Upper Saddle River, N.J.: Pearson/Prentice Hall. 6th ed.
- [83] Jensen, K., et al. *CPN Tools*. Eindhoven University of Technology, The Netherlands. 2012.
- [84] Jones, N.D., et al. Complexity of some problems in Petri nets. *Theoretical Computer Science*. 1977, vol. 4, no. 3, pp. 277-299.
- [85] Esparza, J. Decidability and complexity of Petri net problems — An introduction. In: Reisig, W., G. Rozenberg (Eds.) *Lectures on Petri Nets I: Basic Models*, Springer Berlin Heidelberg, 1998, pp. 374-428.

Přílohy

Přiložené DVD:

Složka Aplikace:

1. Implementace výpočtu spravedlivosti a neurčitosti v prostředí Matlab (Matlab.zip).
2. Framework 4.5 (dotNetFx45_Full_setup.exe).
3. 64 bit verze editoru Petri sítí (PetriNetsIbl64.exe).
4. 32 bit verze editoru Petri sítí (PetriNetsIbl32.exe).
5. Zdrojový kód editoru v prostředí Visual Studio 2013 (PetriNetsIbl.zip).

Složka Modely:

6. Model ukázkového příkladu Petri sítě v editoru Petri sítí (Network.pti).
7. Model křižovatky se zákonem pravé ruky (Křižovatka pravá ruka.pti).
8. Model křižovatky s hlavní silnicí (Křižovatka hlavní vedlejší.pti).
9. Model křižovatky s hlavní silnicí inhibitor (Křižovatka hlavní vedlejší (inhibitor).pti).
10. Model křižovatky s využitím semaforu (Semafor 1.pti).
11. Model křižovatky s využitím semaforu, vč. prepínací logiky (Semafor 2.pti).
12. Model stavů procesů (Třístavový model procesů.pti).
13. Modely vláken pro různé plánovací algoritmy (Složka CPN).
14. Model elektrárenské sítě ČR (Čeps.pti).

Pozn.: před použitím je nutné přesunout obsah DVD na pevný disk počítače.