GEOMETRIE NASTAVENÍ KOTOUÈOVÉ FRÉZY PRO VÝROBU TVAROVÉ PLOCHY NA TØÍOSÉ FRÉZCE

Jaromír Zahrádka
Ústav matematiky, Fakulta ekonomicko-správní, Univerzita Pardubice

This paper presents a method of determining the shape of the surface swept by a disc cutter with straight teeth during three-axis machining. A suitable application of this proposed method can be the rough cutting of curved surfaces that do not have radical forms. The mathematical formulas for calculating cutterlocation data are presented for instances when the compound surface is explicitly defined and parametrically defined by Cartesian coordinates.

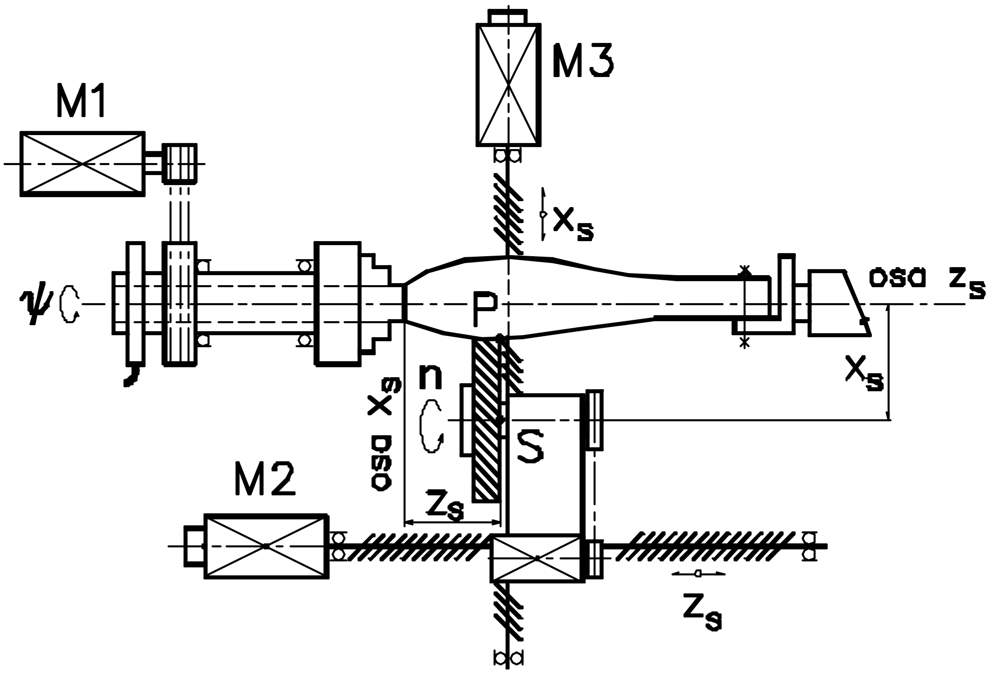
Tøíosý frézovací stroj

Tøíosým frézovacím strojem (tøíosou frézkou) se v tomto èlánku rozumí obrábìcí centrum, kde probíhá obrábìní rotující kotouèovou frézou s pøímými zuby. Konstrukèní uspoøádání tohoto obrábìcího stroje je patrné ze schématu na obr. 1.

Vzájemné nastavení obrobku a rotující kotouèové frézy je na frézovacím stroji vyèerpávajícím zpùsobem urèeno pomocí tøí na sobì nezávislých parametrù ψ, x_S, z_S .

Poloha obrobku je dána úhlem otoèení ø upnutého obrobku kolem vodorovné osy z_s (viz obr. 1 a 3). Na obr. 3 se osa z_s promítá do bodu O.

Poloha frézy na obrábìcím stroji je dána dvojicí pravoúhlých souøadnic x_S , z_S .



Obr. 1 : Tøíosý frézovací stroj s kotouèovou frézou s pøímými zuby

Pøi urèování parametrù ψ, x_S, z_S je tøeba vycházet z toho, jakým zpùsobem je tvarová plocha vyjádøena a tedy i zadána.

Explicitní vyjádøení tvarové plochy kartézskými souøadnicemi

Pro vyjádøení tvarové plochy je použita kartézská soustava souøadnic Oxyz pevnì spojená s obrobkem, na nìmž má být plocha vyrobena.

Explicitním vyjádøením tvarové plochy kartézskými souøadnicemi se zde rozumí to, že jedna kartézská souøadnice libovolného bodu P tvarové plochy je vyjádøena jako funkce zbývajících dvou kartézských souøadnic. V tomto èlánku je použito vyjádøení y-ové souøadnice bodu P pomocí jeho x-ové a z-ové souøadnice, to znamená, že y-ová souøadnice je funkcí dvou promìnných x a z, tj. y = y(x,z).
Bod P tvarové plochy je v kartézské soustavì pevnì spojené s obrobkem vyjádøen jako $P = P(x, z) = [\ x\ ,\ y(x, z)\ ,\ z\ ]$. Znázornìní bodu P na z-køivce tvarové plochy je na obr. 2, osa z se zde promítá do bodu O. O funkci y(x,z) se pøedpokládá, že je spojitì diferencovatelná na urèité oblasti roviny x - z, která obsahuje množinu, nad níž má být tvarová plocha vyrobena. Takovou množinou je v technické praxi obvykle obdélník $< x_{min}\ , x_{max} > \times < z_{min}\ , z_{max} >$, tvarová plocha v tomto pøípadì tvoøí kartézský plát.

Vyjádøení tvarové plochy v kartézských souøadnicích pomocí parametrù t a z

Pro vyjádøení tvarové plochy je i v tomto pøípadì použita kartézská soustava souøadnic Oxyz pevnì spojená s obrobkem, na nìmž má být plocha vyrobena.

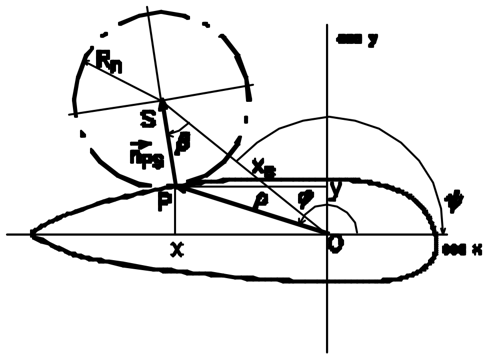
Vyjádøením tvarové plochy v kartézských souøadnicích pomocí parametrù t a z se zde rozumí to, že x-ová a y-ová souøadnice bodu P tvarové plochy jsou funkcemi dvou spoleèných promìnných. Jednou promìnnou je parametr t, druhou promìnnou je pøímo z-ová souøadnice bodu P.

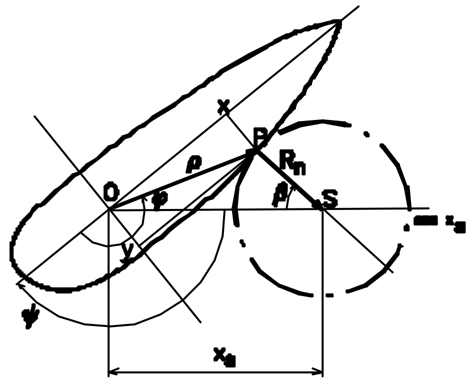
Bod P je v kartézské soustavì pevnì spojené s obrobkem vyjádøen jako $P = P(t, z) = [\ x(t, z)\ ,\ y(t, z)\ ,\ z\ ]$. K ilustraci polohy bodu P na z-køivce tvarové plochy je možno opìt využít obr. 2, kde se osa z promítá do bodu O. Protože parametr t nemá specifický geometrický význam, není na obrázku vyznaèen.

O funkcích x(t,z), y(t,z) se pøedpokládá, že jsou spojitì diferencovatelné na urèité spoleèné oblasti roviny t – z. Z praktického hlediska je vhodné se omezit s hodnotami t a z na obdélník $< t_{min}\ , t_{max} > \times < z_{min}\ , z_{max} >$, který je obsažen ve spoleèné oblasti definièního oboru obou funkcí.

Geometrie nastavení kotouèové frézy pro tvarovou plochu zadanou explicitnì v kartézských souøadnicích

Pøi urèení parametrù nastavení polohy obrobku a nástroje na tøíosé frézce (ψ, x_S , z_S) je možno vyjít z jejich geometrické konfigurace znázornìné na obr. 2. a 3. Na obrázcích je znázornìna èerchovanì obvodová kružnice bodù kotouèe frézy, které se pøi otáèení frézy postupnì dotýkají vyrábìné tvarové plochy vbodì P. Nastavení kotouèové frézy je øešeno pro pøípad, kdy $z = z_S$ = konst. Tím se úloha zredukuje na rovinný problém. Souøadnici y lze chápat jako funkci jedné promìnné, tj. $y = y(x)$, kde $y(x) = y(x, z_S)$.





Obr. 2 : Nastavení dotykové kružnice frézy vùèi obrobku – projekce z boku

Obr. 3 : Konfigurace obrobku a dotykové kružnice na frézce – projekce z boku

Bod $P = [\ x\ ,\ y(x, z_S)\ ,\ z_S\ ]$ lze ve sledované rovinì $z = z_S$ = konst. vyjádøit pomocí dvou souøadnic $P = [\ x\ ,\ y(x)\ ]$.

Vektorem normály k rovinné køivce $y = y(x)$ v bodì P je vektor $\vec{n} = (-y'\ ; 1)$, kde y' je derivace funkce y(x) podle x, tj. $y' = \frac{dy}{dx}$. Zmìníme-li normu tohoto vektoru na R_n, kde R_n je polomìr kotouèe frézy, dostaneme vektor $\vec{n}_{PS} = (-y'\ ; 1)\frac{R_n}{\sqrt{1+y'^2}}$.

Pøiètením složek vektoru $\vec{n}_{PS}$ k souøadnicím bodu P v rovinì $z = z_S$ = konst. se získají souøadnice støedu S obvodové kružnice frézy, jež se v bodì P dotýká tvarové plochy,

$$S = \left[\ x - \frac{y' R_n}{\sqrt{1+y'^2}}\ ;\ y + \frac{R_n}{\sqrt{1+y'^2}}\ \right].$$

Vzdáleností bodu S od prùseèíku roviny $z = z_S$ = konst. s osou z_S je urèena souøadnice x_S pro nastavení frézy,

$$x_S = \sqrt{x^2 + y^2 + R_n^2 + \frac{2R_n(y - xy')}{\sqrt{1+y'^2}}}\ .$$

Úhel natoèení obrobku kolem osy z_S pro obrábìní v bodì P je dán vztahem

$$\psi = \operatorname{atan2}\left(y + \frac{R_n}{\sqrt{1+y'^2}} ; x - \frac{y' R_n}{\sqrt{1+y'^2}} \right) \text{ pro } y + \frac{R_n}{\sqrt{1+y'^2}} \geq 0$$

a

$$\psi = 2\pi + \operatorname{atan2}\left(y + \frac{R_n}{\sqrt{1+y'^2}} ; x - \frac{y' R_n}{\sqrt{1+y'^2}} \right) \text{ pro } y + \frac{R_n}{\sqrt{1+y'^2}} < 0 .$$

Úhel ψ se počítá pomocí funkce $\operatorname{atan2}(y;x)$, tj. arkustangens dvou proměnných, která přiřazuje kartézsky zadanému bodu $[x;y]$ v rovině jeho polární souřadnici φ, tj. jeho poziční orientovaný úhel z intervalu $(-\pi;\pi\rangle$, viz též [2].

Tvarová plocha může být vyráběna tak, že se obráběcí nástroj bude svým bodem dotyku pohybovat po jednotlivých parametrických x–křivkách. Pro dosažení stejné kvality obrobeného povrchu podél celé parametrické x–křivky je potřebné, aby se dotykový bod P frézy a tvarové plochy pohyboval po této křivce rovnoměrně.

Protože pohyb obrobku a nástroje je realizován nastavováním jejich přesných poloh v krocích s odstupem hodnot Δx, je třeba měnit hodnoty Δx tak, aby přírůstek dráhy Δs bodu P měl konstantní, předem určenou hodnotu.

Z diferenciálního vztahu pro přírůstek dráhy $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$, je možno odvodit prakticky dobře použitelný diferenční vztah pro přírůstek proměnné x, $\Delta x = \dfrac{\Delta s}{\sqrt{1+y'^2}}$.

Tím jsou určeny všechny potřebné parametry pro tříosé frézování tvarové plochy zadané kartézskými souřadnicemi explicitně.

Geometrie nastavení kotoučové frézy pro tvarovou plochu zadanou v kartézských souřadnicích pomocí parametrů t a z

Určení parametrů nastavení polohy obrobku a nástroje na tříosé frézce (ψ, x_S, z_S) je možno řešit zcela analogicky jako pro tvarovou plochu zadanou v kartézských souřadnicích explicitně. Při odvození vztahů je možno využívat znázornění na obrázcích 2 a 3.

Nastavení kotoučové frézy je opět řešeno pro případ, kdy $z = z_S =$ konst. Úloha se tím převede opět na rovinný problém. Souřadnice x i y mohou být chápány jako funkce jedné proměnné, tj. funkce parametru t, tedy x = x(t) a y = y(t), kde x(t) = x(t, z_S) a y(t) = y(t, z_S).

Vektorem normály k rovinné křivce v bodě P je vektor $\vec{n} = (\dot{y}; -\dot{x})$, kde $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ a. $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$. Změnou normy vektoru $\vec{n}$ na R_n, kde R_n je poloměr kotouče frézy, se získá vektor

$$\vec{n}_{PS} = (\dot{y}; -\dot{x}) \frac{R_n}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} .$$

Přičtením složek vektoru $\vec{n}_{PS}$ k souřadnicím bodu P v rovině $z = z_S =$ konst. se získají souřadnice středu S obvodové kružnice frézy, jež se v bodě P dotýká tvarové plochy,

$$S = \left[\; x(t) + \frac{\dot{y}\, R_n}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\; ;\; y(t) - \frac{\dot{x}\, R_n}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \;\right].$$

Vzdáleností bodu S od prùseèíku osy z_S s rovinou $z = z_S =$ konst. je urèena souøadnice x_S pro nastavení polohy frézy,

$$x_S = \sqrt{x^2 + y^2 + R_n^2 + \frac{2R_n\,(x.\dot{y} - \dot{x}.y)}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}}\;.$$

Úhel potøebného natoèení obrobku kolem osy z_S pro dotykový bod P je dán výrazem

$$\psi = \operatorname{atan2}\left(y - \frac{\dot{x}\, R_n}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} ; x + \frac{\dot{y}\, R_n}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \text{ pro } y - \frac{\dot{x}\, R_n}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \geq 0 \text{, resp.}$$

$$\psi = 2\pi + \operatorname{atan2}\left(y - \frac{\dot{x}\, R_n}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} ; x + \frac{\dot{y}\, R_n}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \text{ pro } y - \frac{\dot{x}\, R_n}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} < 0\,.$$

Protože pohyb obrobku a nástroje je realizován nastavováním jejich pøesných poloh v krocích s odstupem hodnot Ät, je tøeba mìnit hodnoty Ät tak, aby pøírùstek dráhy Äs bodu P mìl konstantní, pøedem urèenou hodnotu.

Z diferenciálu $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$, je možno odvodit diferenèní vztah pro pøírùstek parametru t, $\Delta t = \frac{\Delta s}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$.

Tím jsou urèeny všechny potøebné kinematické parametry pro tøíosé frézování tvarové plochy, zadané v kartézských souøadnicích pomocí parametrù t a z.

Literatura

[1] Kargerová, M., Kopincová, E., Mertl, P. : Geometrie pro CAD, Vydavatelství ÈVUT Praha, 1998, 90s.

[2] Hanselman, D., Littlefield, B.: The Student Edition of MATLAB, Version 5, User´s Guide, The Math Works, 1997, 429s.

Kontaktní adresa:

RNDr. Jaromír Zahrádka
Univerzita Pardubice, Fakulta ekonomicko-správní, Ústav matematiky,
Studentská 84, 532 10 Pardubice
tel: 466 036 047
e-mail: jaromir.zahradka@upce.cz

Recenzovala: doc. RNDr. Ludmila Machaèová, CSc., ÚM, FES, Univerzita Pardubice