Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Řešení simultánních rovnic

Bc. Barbora Pilná

Diplomová práce

2024

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	**Bc. Barbora Pilná**
Osobní číslo:	**I20213**
Studijní program:	**N0613A140007 Informační technologie**
Téma práce:	**Řešení simultánních rovnic**
Zadávající katedra:	**Katedra softwarových technologií**

Zásady pro vypracování

Pro vysvětlení vztahů mezi ekonomickými veličinami se v ekonometrii využívají simultánní rovnice. Typickým případem jsou rovnice pro poptávku a pro nabídku. Velmi často mají maticovou podobu. V těchto rovnicích vystupují proměnné endogenní a exogenní. Proměnná se tak v jedné rovnici může stát proměnnou vysvětlující a v jiné být proměnnou vysvětlovanou. Základem práce bude prostudování metod pro řešení simultánních rovnic. Nejčastěji se řešení hledají zobecněnou metodou nejmenších čtverců nebo metodou maximální věrohodnosti. Hlavním cílem práce je naprogramovat aplikaci, která umožní soustavu simultánních rovnic zadat a vyřešit. Součástí numerického výpočtu odhadu neznámých parametrů je také odhad jejich přesnosti. Výpočty v modelech simultánních rovnic budou demonstrovány na vybraném zvoleném příkladu s reálnými daty. Součástí práce bude uživatelská příručka.

Rozsah pracovní zprávy:
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

HUŠEK, Roman. *Ekonometrická analýza.* Praha: Oeconomica, 2007. ISBN 978-80-245.
JABLONSKÝ, Josef. *Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování.* Brno: Professional Publishing, 2002. ISBN 80-86419-23-1.
WOOLDRIDGE, Jeffrey M. *Introductory econometrics: a modern approach.* Sixth edition. Boston: Cengage Learning, [2016]. ISBN 130527010x.

Vedoucí diplomové práce:	**Mgr. Alena Pozdílková, Ph.D.** Katedra matematiky a fyziky
Datum zadání diplomové práce:	**8. listopadu 2021**
Termín odevzdání diplomové práce:	**20. května 2022**

L.S.

Ing. Zdeněk Němec, Ph.D. v.r.
děkan

prof. Ing. Antonín Kavička, Ph.D. v.r.
vedoucí katedry

V Pardubicích dne 30. listopadu 2021

Prohlašuji:

Práci s názvem řešení simultánních rovnic jsem vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 7/2019 Pravidla pro odevzdávání, zveřejňování a formální úpravu závěrečných prací, ve znění pozdějších dodatků, bude práce zveřejněna prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 22. 8. 2024

Barbora Pilná v. r.

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych poděkovala Mgr. Aleně Pozdílkové, Ph.D. za její ochotu, věnovaný čas, cenné rady, připomínky, a především trpělivost v průběhu zpracování této práce. Také bych chtěla poděkovat svým kolegům za přínosné konzultace při psaní a svým rodičům za jejich podporu během celého studia.

ANOTACE

Cílem této práce je vysvětlení a aplikování analytických metod na problematiku modelu simultánních rovnic, které se v ekonometrii používají pro analýzu vztahů mezi ekonomickými veličinami. V teoretické části jsou popsané základní koncepty, které zahrnují endogenní a exogenní proměnné a výběr nejpoužívanějších analytických metod.

Praktická část aplikuje a zužitkovává teoretické poznatky pro vytvoření aplikace s uživatelským rozhraním. Aplikace demonstruje užití zobecněné metody nejmenších čtverců, dvoustupňové MNČ, třístupňové MNČ a metody maximální věrohodnosti nad reálnými daty Kleinova modelu. Součástí práce je i uživatelská příručka, která obsahuje návod na používání vyvinuté aplikace.

KLÍČOVÁ SLOVA

MNČ, Dvoustupňová MNČ, Třístupňová MNČ, Metoda maximální věrohodnosti, Newton-Raphson, model simultánních rovnic, Kleinův model I

TITLE

Solving of simultaneous equations.

ANNOTATION

This thesis explains and applies analytical methods to the problem of simultaneous equations models, which are used in econometrics for the analysis of relationships between economic variables. The theoretical part describes the basic concepts, including endogenous and exogenous variables, and a selection of the most commonly used analytical methods.

The practical part applies and builds on the theoretical knowledge to create a user interface application. The application demonstrates the use of the generalized least squares method, 2SLS, 3SLS, and MLE using real Klein model I data. The thesis also includes a user manual that provides instructions for the use of the developed application.

KEYWORDS

OLS, 2SLS, 3SLS, MLE, Newton-Raphson, simultaneous equations, Klein model I

OBSAH

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM TABULEK

SEZNAM ZKRATEK

MNČ – Metoda nejmenších čtverců

MSR – Model simultánních rovnic

OLS – Ordinary Least Squares (Metoda nejmenších čtverců)

2SLS – Two-stage least-squares (Dvoustupňová metoda nejmenších čtverců)

3SLS – Three-Stage Least Squares (Třístupňová metoda nejmenších čtverců)

MLE – Maximum likelihood estimation (Metoda maximální věrohodnosti)

USA – Spojené státy americké

ÚVOD

V současné době je analýza vztahů mezi různými ekonomickými veličinami klíčová pro pochopení komplexních interakcí, které ovlivňují ekonomické systémy. Simultánní rovnice představují důležitý nástroj v ekonometrii, který umožňuje modelovat a analyzovat tyto vztahy v rámci dynamických ekonomických systémů. Tento přístup je zvláště užitečný v případech, kdy jsou proměnné navzájem provázány a každá z nich může být zároveň vysvětlovanou i vysvětlující proměnnou.

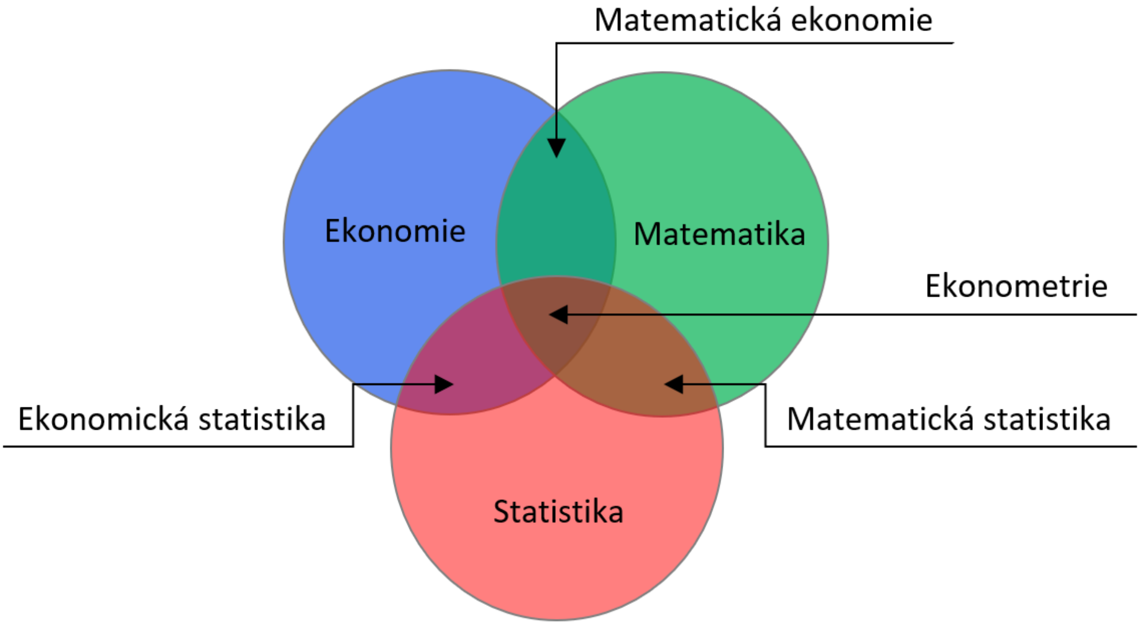
Práce se zaměřuje na vysvětlení a aplikaci analytických metod pro řešení modelu simultánních rovnic. V teoretické části jsou představeny základní ekonometrické pojmy, jako jsou endogenní a exogenní proměnné, metody odhadu a specifikace modelů. Zvláštní pozornost je věnována metodám, které se běžně používají pro řešení simultánních rovnic, včetně zobecněné metody nejmenších čtverců, dvoustupňové a třístupňové metody nejmenších čtverců a metody maximální věrohodnosti.

V praktické části je teoretický rámec přenesen do tvorby aplikace s uživatelským rozhraním, která umožňuje řešení modelu simultánních rovnic nad reálnými daty. Aplikace bude demonstrována na známém Kleinově modelu, který představuje klasický příklad ekonomického modelu využívajícího simultánní rovnice. Součástí této práce je také uživatelská příručka, která poskytuje návod k používání vyvinuté aplikace.

Cílem této práce je přispět k lepšímu pochopení a využití modelu simultánních rovnic v ekonometrické praxi a nabídnout nástroj, který demonstruje jejich aplikaci v reálných ekonomických analýzách.

1 ZÁKLADNÍ POJMY

Tato kapitola se zabývá ekonometrií jakožto oborem, ve kterém se prolíná matematika, statistika a ekonomie. V první části je uveden historický vývoj ekonometrie, její počátky a uplatnění celého oboru. Zabývá se také klíčovými pojmy, které jsou důležité pro pochopení tématu práce. Dále objasňuje význam vysvětlujících a vysvětlovaných proměnných v modelu a věnuje pozornost i reziduální složce. Později se v kapitole zmiňují nejčastější metody používané k odhadu parametrů modelů a zároveň jsou okrajově poznamenány různé formulace ekonometrických modelů se zřetelem na jejich hodnocení a interpretaci.



Obrázek 1: Obory prolínající se do ekonometrie

Zdroj: vlastní

1.1 Definice a význam ekonometrie

Ekonometrie jako obor spojuje ekonomickou teorii, matematiku a statistiku právě za účelem analýzy ekonomických dat. Účelem ekonometrie je tedy potvrzovat platnost teoretických tvrzení v ekonomii a kvantitativně studovat a předpovídat ekonomické události. Tento obor pomáhá analytikům a výzkumníkům získat přehled o ekonomických interakcích a dělat rozhodnutí na základě možných dostupných údajů. [6]

Jedná se o důležitý prvek ekonomického výzkumu, neboť umožňuje vyhodnocovat ekonomické hypotézy a měřit parametry ekonomických modelů. Umožňuje definovat a kvantifikovat vliv některých faktorů na jiné ekonomické ukazatele, což je zásadní pro vypracování vhodných ekonomických směrnic například pro tvorbu efektivní hospodářské politiky. [6] Aplikace ekonometrie v ekonomickém výzkumu umožňuje testovat formulované teorie na reálných datech, proto je tato disciplína považována za nezbytný nástroj ekonomického výzkumu. [2]

Ekonometrie se zabývá možnostmi analýzy složitých ekonomických systémů a vztahů mezi ekonomickými subjekty. Navíc ekonometrické metody umožňují nejen identifikovat přímý vliv jedné proměnné na druhou, ale také jejich dynamickou interakci v čase. Toto je důležité pro analýzu ekonomických procesů a prognózu trendů [2].

Hlavní výhodou ekonometrie je, že tato metoda umožňuje kvantifikovat ekonomické vztahy a testovat hypotézy. Ekonometrické modely umožňují ekonomovi definovat hypotézu o vztahu chování, který by mohl existovat mezi dvěma nebo více proměnnými, a poté s pomocí statistických metod odhadnout, jak tyto vztahy fungují při aplikaci na data. Tato metoda odhadu a testování modelu, se užívá pro ověření platnosti studie provedené v rámci ekonomického výzkumu. [2]

Důležitou část ekonometrie tvoří schopnost stanovit ekonomickou prognózu do budoucna. Předpověď ekonometrických modelů lze provést na základě údajů z minulosti a ukazuje směr kolísání časových řad v ekonomických cyklech. Prognózování hraje významnou roli při tvorbě hospodářské politiky a při plánování a rozhodování podniků, neboť umožňuje tvůrcům politik a manažerům získat informace týkající se nejpravděpodobnějšího průběhu událostí, které by mohly ovlivnit jejich rozhodnutí a plány. [3]

Tento obor nachází své uplatnění v rozsáhlém spektru ekonomiky, jako je makroekonomie, mikroekonomie, finance a veřejná politika. V makroekonomii se ekonometrické modely používají při studiu obecných ekonomických veličin, mezi které patří hrubý domácí produkt (HDP), inflace, nebo například úroveň nezaměstnanosti. Mikroekonomie zase prostřednictvím ekonometrie analyzuje vzorce chování spotřebitelů a firem, jež jsou důležité pro pochopení tržních struktur a rozhodovacího procesu. Ve financích se ekonometrie uplatňuje při modelování cen finančních aktiv, hodnocení rizik a výnosů investičních portfolií. [4]

Nicméně ekonometrie je velmi důležitá i pro formulování a měření účinnosti opatření v hospodářské politice. Ekonometrické testy nabízejí reálné tendence týkající se politických opatření a umožňují kvantifikovat jejich dopady v ekonomice. To je nezbytné pro popis a hodnocení politiky a pro tvorbu strategií, protože ekonometrie umožňuje vládám a dalším institucím odhalit dopady jejich činnosti a upravit aktuální program tak, aby sledoval konkrétní ekonomické cíle. [5]

Ekonometrie stojí také před mnoha moderními výzvami a trendy, například před zpracováním velkých objemů dat a využitím strojového učení v ekonometrické analýze. Tyto trendy vyvolávají potřebu různých metod a přístupů k pochopení složitých ekonomických vztahů. Budoucnost ekonometrie je tedy záleží na její schopnosti se adaptovat na tyto nové technologické a metodologické výzvy. Sem bychom mohli zahrnout pokročilé statistické techniky a metody a aktivní propojování obsahů vícero oborů za účelem hledání řešení různých ekonomických problémů. [1]

Můžeme shrnout, že ekonometrie poskytuje zásadní metodologii při měření, analýze a prognózování ekonomických jevů. Její význam spočívá v poskytování empirických závěrů, které jsou potřebné k přijímání efektivních rozhodnutí v ekonomice, financích a veřejné politice. Ekonometrické metody totiž umožňují hlubší vhled do podstaty ekonomických vztahů a předpovídají budoucí trendy, čímž pomáhají lepšímu porozumění a řízení ekonomických systémů.

1.2 Historický vývoj ekonometrie

Ekonometrie jako akademický obor vznikla na základě snahy měřit sílu souvislostí mezi ekonomickými proměnnými a schopnosti analyzovat navržené ekonomické hypotézy. Historie ekonometrie sahá až do 19. století, kdy se objevily práce Williama Stanleyho Jevonse a Léona Walrase, kteří mimo jiné zavedli matematiku do ekonomie. Tito autoři připravili půdu pro pozdější vznik pokročilejších ekonometrických technik. [6]

Co se týče přímo ekonometrie, tak ta byla zdokonalena až ve dvacátém století. Vznik samostatného vědního oboru ekonometrie se datuje od roku 1930, kdy byla založena Econometrics society v USA a je jedním z nejzásadnějších mezníků ve vývoji této disciplíny. Tuto ekonometrickou společnost založili ekonomové Ragnar Frisch a Jan Tinbergen, a významně tak přispěli k rozvoji ekonometrie jako vědního oboru. Frisch a Tinbergen také zavedli aplikování statistických přístupů k analýze ekonomických dat a některé Frischovy poznatky se staly základem dnešní ekonometrie. [2]

V roce 1944 vydal Trygve Haavelmo článek „The Probability Approach in Econometrics“ (Pravděpodobnostní přístup v ekonometrii), v němž přikládal velký význam koncepci pravděpodobnosti, na níž jsou založeny ekonometrické modely, a koncept testování hypotéz. Tato práce měla značný význam pro rozvoj ekonometrie a Haavelmo za ni v roce 1989 obdržel Nobelovu cenu v oblasti ekonomie. [2]

Dřívější ekonometrická metoda byla na cestě k posílení a rozšíření svých odvětví v 70. a 80. letech 20. století. K modelování dynamického systému a vztahů mezi proměnnými se začaly používat nové techniky, jako jsou údaje v časových řadách a soubory panelových dat. Robert Engle a Clive Granger získali v roce 2003 Nobelovu cenu za ekonomii, která byla udělena za metody v oblasti analýzy časových řad. [3]

V posledních několika desetiletích se ale objevily nové výzvy a trendy týkající se ekonometrie v důsledku rozsáhlosti a rostoucí dostupnosti dat spojených se složitostí studia oboru. Příležitosti a výzvy v ekonometrickém výzkumu vyplývají z velkých metodologických rozvojů, jako jsou pokroky v oblasti velkých dat a efektivních výpočtů, jako je strojové učení. Tyto nové trendy předpokládají změny v samotné aplikaci tradičních ekonometrických metod a potřebu vytvořit nové techniky pro analýzu velkých a komplikovaných datových souborů. [1]

Ekonometrie má tedy dlouhou historii plnou vývoje, o němž lze říci, že přivedl tento obor do dnešní podoby. Lze předpokládat, že od počátku sledování ekonomie se k analýze ekonomických jevů používaly matematické taktiky. Se vznikem Ekonometrické společnosti, až po současnou dobu velkých dat a strojového učení, ekonometrie stále postupuje s novým vědeckým a technologickým vývojem. Protože se ekonometrie vyznačuje neustálou dynamikou, zůstává aktuální a je nepostradatelná pro studium a pochopení ekonomických systémů současného světa. [6]

1.3 Základní pojmy v ekonometrii

Tato kapitola identifikuje a vysvětluje hlavní pojmy v ekonometrii, které pomáhají pochopit tuto oblast studia a poukazuje na to, jak používat ekonometrické přístupy při analýze ekonomických dat. Některé z těchto segmentů jsou ekonometrické modely, endogenní a exogenní proměnné, metody odhadu, specifikace modelu a hodnocení modelů.

1.3.1 Ekonometrické modely

Ekonometrický model lze definovat jako ekonomický model formulovaný kvantitativně a ve většině případů jako matematický model, který podává popis vztahu mezi různými proměnnými. Tyto modely jsou stylizované teoretické konstrukce, jejich účelem je dát vztahu mezi různými proměnnými ekonomiky kvantitativní hodnotu. Poměrně typická struktura ekonometrického modelu obsahuje definicí závislé proměnné (vysvětlovaná proměnná), nezávislých proměnných (vysvětlující proměnné) a náhodného šumu (reziduální složka), což je proměnná obsahující nemodelované a náhodné efekty. [6]

1.3.2 Endogenní a exogenní proměnné

V ekonometrických modelech se proměnné dělí na dvě, a to na endogenní a exogenní proměnné. Jedná se o proměnné, které jsou vysvětlovány modelem a počítány z interakcí v modelu. Na druhé straně exogenní proměnné jsou ty, které se skládají z proměnných, o nichž se předpokládá, že jsou určeny mimo kontext tohoto modelu a rozhodujícím způsobem ovlivňují endogenní proměnné. Například v modelu nabídky a poptávky může být endogenní proměnnou cena, zatímco exogenní proměnnou může být příjem spotřebitele nebo výrobní náklady. [1]

Jinak řečeno proměnné, které ovlivňují model se označují jako endogenní, zatímco proměnné, které nemají na model žádný vliv se označují jako exogenní. Toto rozlišení má zásadní význam pro správnou formulaci modelu a pro korelaci a interpretaci ekonomické analýzy.

Endogenní proměnné jsou tedy definovány v rámci modelu a působí jako závislé proměnné, jejichž změny jsou vyvolány změnami ostatních proměnných v konkrétním modelu.

Příklad: V jednoduchém modelu nabídky a poptávky na trhu zboží můžeme definovat následující rovnice:

1. Rovnice poptávky: $Q_d = \alpha - \beta P + \gamma Y$,
2. Rovnice nabídky: $Q_s = \delta + \varepsilon P$,

kde:

- Q_d je množství poptávaného zboží (endogenní proměnná),
- Q_s je množství nabízeného zboží (endogenní proměnná),
- P je cena zboží (endogenní proměnná),
- Y je příjem spotřebitelů (exogenní proměnná),
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ jsou parametry modelu.

V tomto modelu jsou Q_d, Q_s a P endogenními proměnnými, protože jejich hodnoty jsou určeny rovnováhou mezi poptávkou a nabídkou na trhu. Změny v těchto proměnných jsou výsledkem interakcí mezi rovnicemi poptávky a nabídky. [6]

Exogenní proměnné jsou striktně považovány za vysvětlující a jsou ovlivňovány pouze vnějšími vlivy. Tyto proměnné ovlivňují ty endogenní, avšak jejich hodnoty se nemění s výkyvy endogenních proměnných. Exogenní proměnné jsou tedy proměnné, které jsou mimo systém a fungují jako měřítka poskytující modelu určité informace.

Příklad: Ve výše uvedeném modelu nabídky a poptávky je Y příjem spotřebitele a vystupuje jako exogenní proměnná. Tato proměnná je vůči uvažovanému systému vnější a nezávisí na žádných jiných proměnných v rámci modelu. Příjem je totiž mimo model poptávky a nabídky, ale ovlivňuje výši poptávky po daném zboží. Například pokud se zvýší příjem spotřebitelů, znamená to, že se zvýší i poptávka po zboží, což je vyjádřeno změnou hodnoty Q_d při dané ceně P. [1]

Pokud bychom uvažovali makroekonomický model jako je model investičně-úsporného a likviditně-preferenčního modelu, můžeme identifikovat například následující proměnné:

- Endogenní proměnné:
  - úroková míra,
  - ekonomický produkt,
- Exogenní proměnné:
  - vládní výdaje,
  - nabídka peněz.

V tomto případě je úroková míra a hospodářský produkt určován rovnováhou mezi trhy s investicemi a spořením (IS křivka) a trhy s penězi a preferencí likvidity (LM křivka). Naopak vládní výdaje a peněžní nabídka jsou považovány za exogenní, protože jejich hodnoty jsou stanoveny mimo model, a proto se při změně úrokové míry nebo ekonomického produktu nemění. [3]

Může také uvažovat model spotřebitelské poptávky, kde se hodí následující rovnice:

$$Q = \alpha + \beta P + \gamma Y + \varepsilon,$$

kde:

- Q je množství spotřebovaného zboží (endogenní proměnná),
- P je cena zboží (endogenní proměnná),
- Y je příjem spotřebitele (exogenní proměnná),
- ε je náhodná složka (endogenní proměnná).

Zde jsou cena i množství spotřebovávaného zboží endogenní v tom smyslu, že jsou určeny vnitřními vztahy modelu. Příjem je vnějším faktorem, který ovlivňuje spotřebitelskou poptávku, ale není vysvětlována samotným modelem poptávky. [5]

Tento poznatek je zásadní, protože specifikace ekonometrických modelů a interpretace výsledků závisí na rozdílu mezi endogenními a exogenními proměnnými. Nesprávná definice těchto proměnných vede k nesprávné klasifikaci a ekonometrické odhady následně trpí zkreslením a dochází k neplatným závěrům, což podtrhuje potřebu jasně a přesně definovat tyto pojmy při každé ekonometrické analýze.

1.3.3 Metody odhadu

V ekonometrických analýzách se k odhadu parametrů modelu používají různé techniky odhadů. Mezi nejznámější patří metoda nejmenších čtverců, jejímž cílem je minimalizovat součet čtvercových reziduí (zbytků) mezi pozorovanými a predikovanými hodnotami závislé proměnné. Jedná se o jednoduchou a efektivní metodu, která může být neefektivní nebo zkreslená, v případě, kdy jsou přítomny problémy jako heteroskedasticita nebo endogenita. [2]

Vzhledem k problémům s endogenitou, lze uvažovat o metodě instrumentálních proměnných, která zahrnuje použití exogenní proměnné jakožto nástroje k odhadu parametrů. Další pokročilé metody zahrnují zobecněnou metodu momentů a metodu maximální věrohodnosti, které jsou vhodné pro složitější modely a situace s různými typy datových struktur. [3]

1.3.4 Specifikace modelu

Správná formulace ekonometrického modelu je nezbytná, pokud chceme dosáhnout přesných a spolehlivých odhadů. Proces specifikace modelu zahrnuje správný výběr proměnných, určení jejich funkční povahy a především kontrolu, zda jsou v modelu obsaženy všechny relevantní faktory. Pokud jsou některé kritické proměnné vynechány nebo naopak jsou některé irelevantní proměnné zahrnuty do modelu, je pravděpodobné, že výsledkem bude zkreslený odhad a nesprávná hypotéza. [4]

1.3.5 Hodnocení modelů

V procesu hodnocení ekonometrického modelu se používají diagnostické testy a kritéria pro kontrolu platnosti a spolehlivosti modelu. Takovými testy jsou například testy heteroskedasticity, autokorelace a multikolinearity. Také se často používají kritéria, která pomáhají při výběru nejlepší specifikace modelu. Sem řadíme například koeficient determinace R^2, který měří, jak dobře model vysvětluje variabilitu závislé proměnné, Akaikovo informační kritérium, nebo Bayesovo informační kritérium. [5]

Další metodou hodnocení je testování hypotéz, které umožňuje vyhodnotit statistickou významnost jednotlivých koeficientů modelu a celkovou vhodnost modelu. Konkrétním příkladem je třeba t-test a F-test, které se běžně používají k měření významnosti proměnných a vhodnosti použití modelu. [2]

2 MODELY SIMULTÁNNÍCH ROVNIC

Tato kapitola se soustředí na problematiku modelů simultánních rovnic, které hrají klíčovou roli v ekonometrii, zejména při analýze ekonomických systémů, kde se vzájemně ovlivňuje více proměnných současně. Začátek kapitoly představuje základy simultánních rovnic a vysvětluje jejich význam. Následně jsou rámcově rozebrány různé metody odhadů, které se používají k řešení těchto rovnic. Tyto metody jsou významné pro odhad parametrů modelů a umožňují získat co nejpřesnější výsledky z dat. Kapitola přináší komplexní přehled metod od metody nejmenších čtverců až po Newtonovu metodu tečen, včetně moderních přístupů jako jsou bayesovské metody. Konec kapitoly se věnuje shrnutí klíčových poznatků a zhodnocení jednotlivých metod při práci s ekonomickými daty.

2.1 Představení simultánních rovnic

Simultánní rovnice jsou systémem více rovnic, které společně popisují souběžné vztahy mezi několika ekonomickými proměnnými. V ekonometrii jsou tyto modely klíčové pro pochopení a analýzu situací, kde je vzájemná závislost mezi proměnnými silná a nelze ji adekvátně popsat jednou rovnicí. Například modely poptávky a nabídky na trzích, kde cena a množství zboží jsou určovány současně, vyžadují použití simultánních rovnic pro správné zachycení dynamiky trhu.

Simultánní rovnice jsou charakterizovány tím, že proměnná, která je závislá (endogenní) v jedné rovnici, může být nezávislá (exogenní) v jiné rovnici v rámci systému. Tento vzájemně závislý vztah mezi proměnnými je to, co odlišuje simultánní rovnice od běžných modelů s jednou rovnicí. [1]

Typický stav modelu simultánních rovnic:

- vyskytují se zde vzájemné vazby mezi endogenními proměnnými,
- endogenní proměnné mohou vystupovat v některých rovnicích jako vysvětlující a v jiných jako proměnné vysvětlované (některé tedy mají v modelu stochastický charakter),
- nejméně jedna endogenní proměnná je obsažena v alespoň jedné z rovnic,
- počet lineárně nezávislých simultánních rovnic je roven celkovému počtu endogenních proměnných,

- v modelu simultánních rovnic neposkytuje klasická metoda nejmenších čtverců nestranné a konzistentní odhady (není splněn předpoklad nezávislosti vysvětlujících proměnných na náhodné složce),
- v praxi se využívá redukovaného a strukturního tvaru modelu simultánních rovnic. [7]

2.2 Metody řešení simultánních rovnic

V ekonometrii se simultánní rovnice používají v situacích, kdy se o ekonomických proměnných říká, že jsou endogenní a vzájemně se přímo ovlivňují. Tato strategie se obvykle používá například v modelech poptávky a nabídky, které zahrnují simultánní určení cen a množství. V této kapitole se zabýváme pouze základními technikami řešení simultánních rovnic.

2.2.1 Zobecněná metoda nejmenších čtverců

Zobecněná metoda nejmenších čtverců rozšiřuje klasickou metodu nejmenších čtverců, která zohledňuje případné problémy s heteroskedasticitou (rozptyl chybových složek neboli reziduí, není konstantní, ale mění se v závislosti na hodnotách nezávislých proměnných) a autokorelací (chyby v různých časových obdobích jsou korelované) reziduí. Tato metoda poskytuje efektivnější a přesnější odhady parametrů, když jsou předpoklady klasické metody nejmenších čtverců porušeny. Zobecněná metoda nejmenších čtverců je vhodná především pro případy, kdy jsou rezidua nekonstantní nebo jsou mezi nimi závislosti. [1]

Klasická metoda nejmenších čtverců odhaduje parametry regresního modelu minimalizací součtu čtverců reziduí [6]. Tato metoda předpokládá, že chyby mají nulovou střední hodnotu, konstantní rozptyl, a jsou vzájemně nezávislé [4]. Matematicky je odhad parametrů vyjádřen vztahem:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y,$$

kde X je matice nezávislých proměnných, y je vektor závislých proměnných a $\hat{\beta}$ je vektor odhadnutých parametrů.

Zobecněná metoda nejmenších čtverců přistupuje k problému odlišně tím, že se snaží upravit model tak, aby odpovídal předpokladům klasické metody nejmenších čtverců. Základní myšlenkou zobecněné metody nejmenších čtverců je tedy transformace modelu tak, aby se vyrovnala heteroskedasticita a autokorelace v chybách [1]. Postup pří řešení zahrnuje následující kroky:

1. **Odhad struktury rozptylu a kovariance chyb:** Matice Σ, která reprezentuje strukturu rozptylu a kovariance chyb, musí být nejprve odhadnuta nebo známa. Tato matice může být například odhadnuta pomocí robustních metod nebo na základě teoretických předpokladů [1].
2. **Transformace modelu:** Použitím například Choleského rozkladu nebo jiných metod transformace upravíme model tak, aby chyby měly konstantní rozptyl a nebyly korelované. To se obvykle provádí násobením obou stran rovnice inverzní maticí $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$. [1]
3. **Aplikace MNČ na transformovaný model:** Po transformaci modelu použijeme klasický model nejmenších čtverců na model, který jsme právě transformovali a chyby zde již splňují předpoklady klasického modelu nejmenších čtverců. V tomto transformovaném modelu se potom použije standardní postup aplikovaný při řešení klasického modelu nejmenších čtverců pro odhad parametrů [1].

Příklad: Máme systém dvou simultánních rovnic, kde se poptávka Q_d a nabídka Q_s určují současně:

$$Q_d = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 Y + \varepsilon_1,$$
$$Q_s = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 W + \varepsilon_2,$$

kde:

- Q_d je poptávané množství,
- Q_s je nabízené množství,
- P je cena,
- Y je příjem,
- W jsou výrobní náklady,
- ε_1 a ε_2 jsou chybové členy,
- zároveň je určena rovnovážná podmínka $Q_d = Q_s = Q$.

Předpokládáme, že chyby ε_1 a ε_2 nejsou nezávislé a mají následující matici kovariance:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

kde:

- σ_1^2 a σ_2^2 jsou rozptyly chybových členů ε_1 a ε_2,
- σ_{12} je kovariance mezi ε_1 a ε_2.

Vypočítáme inverzní matici: $\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2}\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ a následně vypočítáme odhady parametrů podle vzorce: $\hat{\beta} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}Q$, kde je nejdříve nutné vypočítat maticový součin $X'\Sigma^{-1}X$, který se následně invertuje a vynásobí s maticovým součinem $X'\Sigma^{-1}Q$.

Zobecněná metoda nejmenších čtverců poskytuje efektivnější odhady parametrů než klasická metoda nejmenších čtverců, pokud v modelu existuje heteroskedasticita nebo autokorelace. Použití zobecněné metody nejmenších čtverců však předpokládá znalost nebo odhad struktury rozptylů a kovariancí reziduí, což může být problematické. Je nutno také poznamenat, že pokud odhady matice Σ nejsou přesné, výsledky mohou být zkreslené. [5]

2.2.2 Dvoustupňová metoda nejmenších čtverců

Dvoustupňová metoda nejmenších čtverců je statistická metoda používaná v ekonometrii pro odhad modelů simultánních rovnic nebo v případech, kdy jsou některé vysvětlující proměnné v modelu endogenní. Tato metoda se hojně používá, když klasická metoda nejmenších čtverců selže při poskytnutí odhadů parametrů regresního modelu (nezávislé proměnné jsou korelovány s chybovým členem). [1] Dvoustupňová metoda nejmenších čtverců odstraňuje tento problém pomocí dvou kroků:

- **První krok (odhad prvního stupně)**: Nejprve se každá z endogenních proměnných regresuje na všechny dostupné exogenní proměnné v modelu. Tím se získají predikované hodnoty endogenních proměnných, které jsou očištěny od vlivu korelací s chybovým členem v původním regresním modelu. [2]
- **Druhý krok (odhad druhého stupně)**: Predikované hodnoty z prvního kroku se použijí na nahrazení endogenních proměnných v původním regresním modelu. Tento postup zajišťuje, že výsledné odhady jsou konzistentní, i když jsou exogenní proměnné korelované s chybovým členem.

Příklad: Máme model, kde ‚y' je závislá proměnná a ‚x' je endogenní proměnná ovlivněná chybou, modeluje se ‚x' proti všem exogenním proměnným ‚z':

$$x = \Pi z + \varepsilon,$$

kde:

- Π jsou parametry regrese (koeficienty, které jsou odhadnuty v prvním kroku regrese),
- ε jsou chyby, které by neměly být korelované s proměnnými ‚z'.

Následně vypočítáme predikované hodnoty $\hat{x}$, učiní se tak bez zahrnutí chybových členů ε. Vypočítané hodnoty reprezentují odhad ‚x' založený pouze na informacích poskytnutých exogenními a nástrojovými proměnnými ‚z'. Takže predikovaná hodnota $\hat{x}$ je vyjádřena jako: $\hat{x} = \Pi z$. Tyto predikované hodnoty $\hat{x}$ se ve druhém kroku používají místo původních endogenních proměnných ‚x' ve vzorci:

$$y = \beta\hat{x} + \varepsilon,$$

kde:

- y je závislá proměnná,
- β jsou parametry zájmu,
- ε je chybový člen, který by neměl být korelovaný s predikovanými hodnotami $\hat{x}$.

Koeficienty β, které jsou odhadnuty ve druhém kroku dvoustupňové metody nejmenších čtverců, vyjadřují kvantitativní vztah mezi predikovanou hodnotou endogenní proměnné $\hat{x}$ a závislou proměnnou ‚y'. Pokud jsou tyto koeficienty statisticky významné, ukazuje to na přítomnost silného a věrohodného vztahu mezi ‚x' a ‚y', který je zbaven zkreslení způsobeného možnou korelací mezi původními hodnotami ‚x' a chybovým členem v modelu.

2.2.3 Třístupňová metoda nejmenších čtverců

Třístupňová metoda nejmenších čtverců je sofistikovanější technika, která rozšiřuje koncept dvoustupňové metody nejmenších čtverců na systémy rovnic, kde se může objevit vzájemná závislost mezi více endogenními proměnnými napříč různými rovnicemi. Tato metoda se využívá pro odhad modelu simultánních rovnic, kde je přítomna korelace mezi chybovými členy různých rovnic a kde každá rovnice může obsahovat jednu nebo více endogenních proměnných, které jsou vysvětlovány ostatními rovnicemi v modelu. Každá rovnice tedy může obsahovat proměnné, které jsou endogenní v jiných rovnicích modelu. To znamená, že odhad každé rovnice je vzájemně ovlivněn odhady ostatních rovnic. [1]

Při řešení modelu simultánních rovnic nejprve použijeme dvoustupňovou metodu nejmenších čtverců na každou rovnici samostatně [2]. Takto se v každé rovnici odstraní endogenita tím, že se získají predikované hodnoty pro endogenní proměnné [2]. Následně je s pomocí třístupňové metody nejmenších čtverců odhadnuta kovariance mezi chybovými členy napříč různými rovnicemi [3]. Tím se získá společný odhad chybových kovariancí [3]. Nakonec je třístupňová metoda nejmenších čtverců znovu použita k odhadu parametrů modelu pro celý systém rovnic, tentokrát je použit společný odhad chybových kovariancí z předchozího kroku, což vede k získání konzistentních a efektivnějších odhadů pro celý systém rovnic [4].

Příklad: Máme následující model, kde chceme zkoumat vztahy mezi spotřebou C, investicemi I, a hrubým domácím produktem Y:

$$C = \alpha_0 + \alpha_1 Y + \varepsilon_C,$$
$$I = \beta_0 + \beta_1 Y + \varepsilon_I,$$
$$Y = \gamma_0 + \gamma_1 C + \gamma_2 I + \varepsilon_Y,$$

každá rovnice obsahuje proměnné, které jsou endogenní v jiných rovnicích, například Y v rovnicích pro C a I, a C s I v rovnici pro Y. Postupuje se tak, že se použije dvoustupňová metoda nejmenších čtverců na každou rovnici za účelem odhadnutí predikovaných hodnot $\hat{C}, \hat{I}\ a\ \hat{Y}$. Následně se odhaduje kovariance mezi rezidui $\varepsilon_C, \varepsilon_I\ a\ \varepsilon_Y$. Nakonec se za použití výsledků předchozích kroků provedou finální odhady parametrů α, β a γ pro celý systém rovnic.

Tato metoda poskytuje efektivnější a konzistentnější odhady parametrů tím, že zohledňuje korelace mezi chybovými členy napříč různými rovnicemi. Takový přístup umožňuje přesněji odhadovat vliv endogenních proměnných, protože se omezuje zkreslení způsobené jejich vzájemným ovlivňováním.

2.2.4 Metoda maximální věrohodnosti

Metoda maximální věrohodnosti je statistický přístup používaný k odhadu parametrů pravděpodobnostního modelu, který nejlépe vysvětluje pozorovaná data. Tento postup spočívá ve hledání hodnoty parametrů, které maximalizují funkci věrohodnosti. Cílem je nalezení takového pravděpodobnostního modelu, jehož pozorovaná data jsou nejpravděpodobnější [8].

Postup při použití metody maximální věrohodnosti:

- **Definice modelu**: Nejprve je třeba specifikovat pravděpodobnostní model, který zahrnuje jednu nebo více neznámých parametrů. Tento model určuje pravděpodobnostní rozdělení závislé proměnné vzhledem k těmto parametrům. [9]
- **Funkce věrohodnosti**: Funkce věrohodnosti $L(\theta \mid x)$ je definována jako pravděpodobnost pozorovaných dat ‚x' za předpokladu určitých hodnot parametrů θ. Jinak řečeno, vyjadřuje, jak pravděpodobná jsou pozorovaná data ‚x', když jsou parametry modelu nastaveny na specifické hodnoty θ. Pro nezávislá a rovnoměrně rozdělená pozorování se funkce věrohodnosti obvykle tvoří jako součin jednotlivých hustot pravděpodobnosti. [9]

- **Maximalizace věrohodnosti**: Odhad parametrů θ se získá maximalizací funkce věrohodnosti. V praxi se často používá logaritmická transformace funkce věrohodnosti, protože logaritmická funkce je rostoucí a transformovaná funkce je často jednodušší k optimalizaci. [1]
- **Výpočet a interpretace**: Po nalezení maximálních hodnot θ jsou tyto hodnoty interpretovány jako nejvěrohodnější odhady parametrů daného statistického modelu. Tyto odhady jsou považovány za nestranné a konzistentní, pokud jsou splněny regulární podmínky. [4]

Příklad: Chceme odhadnout parametry normálního rozdělení (průměr μ a rozptyl σ^2). Model je definován normálním rozdělením, kde $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Zvolíme tedy model, kde každé měření X_i je normálně rozdělené s neznámým průměrem μ a rozptylem σ^2. Následná funkce věrohodnosti pro vzorek $x = (x_1, \dots, x_n)$ je:

$$L(\mu, \sigma^2 \mid x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Logaritmická funkce věrohodnosti, která je vhodnější pro analýzu a výpočet, se získá logaritmováním funkce věrohodnosti:

$$\log L(\mu, \sigma^2 \mid x) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Nyní potřebujeme maximalizovat logaritmickou funkci věrohodnosti abychom nalezli odhady parametrů μ a σ^2. Derivujeme tedy logaritmickou funkci věrohodnosti podle μ a σ^2 a derivace nastavíme na nulu:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log L(\mu, \sigma^2 \mid x) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log L(\mu, \sigma^2 \mid x) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0 \Rightarrow \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2$$

Získané odhady $\hat{\mu}$ a $\widehat{\sigma}^2$ jsou maximálně věrohodné hodnoty parametrů normálního rozdělení pro daná data. Průměrná hodnota dat je $\hat{\mu}$ a odhad rozptylu dat okolo střední hodnoty je $\widehat{\sigma}^2$.

Tyto parametry poskytují klíčové informace o umístění a šíření dat v rámci normálně rozdělené populace. [8]

2.2.5 Zobecněná metoda momentů

Zobecněná metoda momentů je statistická metoda odhadu parametrů v ekonometrických modelech, která je široce užívána kvůli své flexibilitě a robustnosti. Tato metoda rozšiřuje tradiční metodu nejmenších čtverců a metodu maximální věrohodnosti. Umožňuje efektivní odhad i v případě, kdy jsou distribuční chyby komplikované, nebo nedostatečně specifikované. [10]

V případě, že jsou některé proměnné endogenní (ovlivněné faktory souvisejícími s chybami v modelu), Zobecněná metoda momentů umožňuje použití instrumentálních proměnných. Tyto proměnné jsou korelované s endogenními proměnnými, ale nekorelované s chybovými členy, čímž pomáhají odstranit zkreslení v odhadech. [10]

Postup použití zobecněné metody momentů:

1. **Specifikace modelu a momentových rovnic**: Nejprve je třeba specifikovat ekonometrický model a identifikovat momentové rovnice, které budou použity k odhadu parametrů. Momentové rovnice jsou založeny na předpokladu, že určité funkce dat a neznámých parametrů budou nulové pod konkrétním modelem. Tyto rovnice jsou formulovány jako $E\,[g_i(X, \theta)] = 0$, kde g_i jsou funkce kombinující pozorovaná data X a parametry modelu θ. [10]
2. **Dvoustupňový odhad**: Často se používá dvoustupňový odhad, kde první krok zahrnuje jednoduché odhady pomocí počáteční matice váhových koeficientů a druhý krok využívá rafinovanější matice váhových koeficientů získané z prvního kroku k určení konečných odhadů. [1]
3. **Minimalizace kvadratické formy**: Tento krok využívá výsledky z předchozích kroků a zaměřuje se na optimalizaci parametrů modelu tak, aby byla minimalizována suma kvadrátů reziduí odhadů. Kvadratická forma je definována jako:
$$Q\,(\theta) = g(\theta)'Wg(\theta)$$
kde g(θ) je vektor momentů, W je matice váhových koeficientů, a ′ představuje transpozici. Matice váhových koeficientů se obvykle volí tak, aby reflektovala inverzi odhadu kovarianční matice momentů z prvního kroku. Následně se minimalizací kvadratické formy Q(θ) odhadnou parametry θ. To se obvykle provádí pomocí numerických metod, jako jsou gradientní metody nebo Newtonova metoda, které hledají hodnoty θ, při kterých je Q(θ) minimální. [10]

4. **Ověření modelu**: Po získání odhadů je důležité ověřit, zda model správně specifikován. To zahrnuje test nadbytečných momentů (J-test), který zjišťuje, zda je některý vektor momentů statisticky významně odlišný od nuly, což by naznačovalo, že byla špatně provedena specifikace modelu. [10]

2.2.6 Bayesovské metody

Bayesovské metody se používají pro odhad parametrů v komplexních statistických modelech, včetně těch, které zahrnují modely simultánních rovnic. Tyto metody se uplatňují v situacích, kde existují silné vzájemné závislosti mezi proměnnými. Bayesovská statistika kombinuje informace získané z dat s předchozími znalostmi, které jsou reprezentovány pomocí apriorních rozdělení pravděpodobnosti. S pomocí výsledného Bayesovského odhadu se aktualizuje apriorní rozdělení na základě pozorovaných dat, čímž se získá aposteriorní rozdělení parametrů. [11]

Příklad: Máme jednoduchý ekonomický model, kde se pokusíme odhadnout vztahy mezi spotřebou domácností (C), příjmy domácností (Y), a úrokovými sazbami (R). Tyto vztahy budou reprezentovány dvěma simultánními rovnicemi:

- Rovnice spotřeby: $C = \alpha + \beta Y + \gamma R + \varepsilon$,
- Rovnice příjmu: $Y = \delta + \theta R + \eta$,

kde ε a η jsou chybové členy, které předpokládáme, že jsou normálně distribuované.

1. Nejprve specifikujeme simultánní rovnice modelu. V tomto případě máme dvě, výše uvedené rovnice. Tyto rovnice ukazují, že spotřeba C závisí na příjmu Y a úrokových sazbách R, zatímco příjmy Y jsou funkcí úrokových sazeb R.
2. Dále pro každý z parametrů modelu $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta)$ definujeme apriorní rozdělení. Tyto distribuce mohou být založeny na historických datech, literatuře nebo subjektivních odhadech. Například pro β a θ, které reprezentují kladné vztahy, bychom mohli zvolit apriorní rozdělení jako logaritmicko-normální, zatímco pro α a δ bychom mohli použít normální rozdělení.
3. Věrohodnostní funkce pro tento model bude záviset na distribuci chybových členů ε a η. Předpokládáme, že oba jsou nezávisle normálně distribuované s nulovou

střední hodnotou a danou variancí. Věrohodnostní funkce pro celý model bude součinem pravděpodobností pro každé pozorování dat: $L(\theta \mid X) = \prod_{i'1}^{n} P(X_i \mid \theta)$, kde P je hustota pravděpodobnosti z normální distribuce.

4. Následně se s pomocí Bayesovy věty vypočítá aposteriorní rozdělení. Vzorec Bayesovy věty: $P(\theta \mid X) = \frac{P(X \mid \theta)\, P(\theta)}{P(X)}$ kde:

    - $P(\theta|X)$ je aposteriorní rozdělení parametrů θ po zohlednění dat,
    - $P(X \mid \theta)$ je věrohodnostní funkce, hodnotící pravděpodobnost pozorovaných dat za předpokladu specifických hodnot parametrů θ,
    - $P(\theta)$ je apriorní rozdělení parametrů, které odráží naše znalosti nebo přesvědčení před zohledněním nových dat,
    - $P(X)$ je marginalizovaná pravděpodobnost dat, sloužící jako normalizační konstanta. Aposteriorní rozdělení je díky ní správně normalizované.

5. Poté se vypočítá střední hodnota, medián a intervaly spolehlivosti pro aposteriorní rozdělení parametrů. To poskytne odhady parametrů a míru jejich nejistoty. Výsledky se často vizualizují pomocí histogramů nebo grafů hustoty.
6. Nakonec se provede se kontrola modelu, aby se ověřilo, že odpovídá datům. To se provede například metodou Markov Chain Monte Carlo, nebo porovnání modelových predikcí s pozorovanými daty. [11]

2.2.7 Newtonova metoda tečen (Newton-Raphson)

Newtonova metoda tečen, známá také jako Newton-Raphsonova metoda, je numerická technika, která se používá pro nalezení kořenů diferencovatelné funkce. Tato metoda se uplatňuje i při řešení modelu simultánních rovnic, kde není možné efektivně využít standardní analytické metody. [12]

Newtonova metoda využívá první derivaci funkce k postupnému zlepšování odhadů kořenů funkce. Nejprve se vybere počáteční odhad x_0 pro kořen funkce. Následně se pro tento odhad x_i spočítá hodnota funkce $f(x_i)$ a její první derivace $f'(x_i)$. Tyto hodnoty se použijí k výpočtu směrnice tečny k funkci v bodě x_i. Dále se určí průsečík tečny s osou x, což poskytne nový odhad kořene x_{i+1}. Tento nový odhad se vypočítá podle vzorce: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ a stane se vstupem další iterace metody, kde se opět vypočte funkční hodnota a derivace. Takto se proces opakuje, dokud nejsou splněna kritéria pro zastavení. Příkladem takového kritéria je třeba dostatečně malý rozdíl mezi po sobě jdoucími odhady nebo absolutní hodnota funkce f(x) blížící se nule (to by naznačovalo, že byl kořen nalezen). [12]

Pro modely simultánních rovnic, který obnáší více rovnic a proměnných, se proces komplikuje. Je zde potřeba Newtonovu metodu rozšířit tak, aby zahrnula výpočet Jacobiho matice (matice prvních parciálních derivací systému rovnic) a jejího inverzního tvaru.

Příklad: Předpokládejme, že máme dva trhy, kde je nabídka a poptávka na každém trhu určena těmito simultánními rovnicemi:

$$q_1 = \alpha_1 p_1 + \beta_1 p_2 + \gamma_1,$$

$$q_2 = \alpha_2 p_1 + \beta_2 p_2 + \gamma_2,$$

kde q_1, q_2 představují množství, p_1, p_2 jsou ceny a α, β, γ jsou parametry modelu. Poté je potřeba přeformulovat tento systém do formy nulové funkce, což znamená, že převedeme každou rovnici na formát $f_i(p_1, p_2) = 0$ a vznikne:

$$f_1(p_1, p_2) = \alpha_1 p_1 + \beta_1 p_2 + \gamma_1 - q_1,$$

$$f_2(p_1, p_2) = \alpha_2 p_1 + \beta_2 p_2 + \gamma_2 - q_2.$$

Následně je potřeba vypočítat Jakobiho matici. Ta se provede parciální derivací funkcí f_1 a f_2 podle proměnných p_1 a p_2:

$$J(p_1, p_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \frac{\partial f_2}{\partial p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Dále zvolíme počáteční hodnoty p_1^0 a p_2^0, od kterých začneme iterace. Hledáme takové hodnoty p_1 a p_2, pro které jsou obě rovnice nabídky a poptávky splněny. Při hledání těchto hodnot je vhodné si pomoci například historickými daty nebo předběžnou analýzou trhu. Následně použijeme Newtonův iterační vzorec k postupnému zlepšování odhadu řešení:

$$\begin{pmatrix} p_1^{n+1} \\ p_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^n \\ p_2^n \end{pmatrix} - J(p_1^n, p_2^n)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(p_1^n, p_2^n) \\ f_2(p_1^n, p_2^n) \end{pmatrix},$$

kde $J(p_1^n, p_2^n)^{-1}$ je Jacobiho inverzní matice vyhodnocená v bodě $[p_1^n, p_2^n]$. Iterace pokračují, dokud není dosaženo požadované úrovně přesnosti, což se stane v případě, když absolutní nebo relativní změna v p_1 a p_2 mezi iteracemi bude menší než předem stanovená tolerance.

2.2.8 Shrnutí

Výběr vhodné metody pro řešení modelu simultánních rovnic zahrnuje pochopení základních charakteristik každé metody. Tato kapitola zahrnuje základní souhrn, kdy je každá metoda vystižena v šesti hlavních bodech. Tyto body jsou následující:

- **Použití**: specifikuje typy problémů nebo situací, pro které je daná metoda nejvhodnější.
- **Konvergence**: hodnotí, jak rychle metoda konverguje k řešení.
- **Výpočetní náročnost**: ukazuje, jak náročná je metoda na výpočetní zdroje, což zahrnuje čas a potřebnou paměť.
- **Robustnost**: odrazuje odolnost metody vůči chybám v datech nebo specifikacích modelu.
- **Software**: nabízí přehled softwarových nástrojů (případně jazyků), které jsou vhodné pro implementaci dané metody.
- **Apriorní znalost**: naznačuje, zda metoda vyžaduje nebo může začlenit předem získané znalosti či informace.

Zobecněná metoda nejmenších čtverců

- Použití: efektivní pro MSR s heteroskedasticitou nebo korelacemi chyb.
- Konvergence: rychlejší než MNČ v případech heteroskedasticity.
- Výpočetní náročnost: vyšší, vyžaduje znalost kovarianční matice.
- Robustnost: vysoká proti korelacím v datech, ale citlivá na správný odhad kovariancí.
- Software: MATLAB, R, Python.
- Apriorní znalost: není potřeba, závisí na předpokladech o chybách.

Dvoustupňová metoda nejmenších čtverců

- Použití: ideální pro MSR endogenní proměnné v regresních modelech.
- Konvergence: efektivní, pokud jsou instrumenty validní.
- Výpočetní náročnost: střední, závisí na správné volbě instrumentů.
- Robustnost: dobrá, pokud jsou instrumenty správně zvoleny.
- Software: Stata, EViews, MATLAB, R.
- Apriorní znalost: vyžaduje znalost vhodných instrumentálních proměnných.

Třístupňová metoda nejmenších čtverců

- Použití: užitečná pro MSR s korelovanými chybami.
- Konvergence: rychlejší než dvoustupňová MNČ, zahrnuje simultánní odhad.
- Výpočetní náročnost: vysoká, vyžaduje komplexní modelování.
- Robustnost: vysoká při správně specifikovaném modelu.
- Software: SAS, MATLAB, R.
- Apriorní znalost: není potřeba, ale model musí správně specifikovat strukturu chyb.

Metoda maximální věrohodnosti

- Použití: široce používána pro odhad parametrů v MSR a statistických modelech.
- Konvergence: velmi rychlá při správném specifikování modelu a počátečních hodnot.
- Výpočetní náročnost: může být vysoká, zvláště u složitých modelů.
- Robustnost: vysoce přesná, pokud jsou předpoklady modelu splněny.
- Software: MATLAB, R, Python.
- Apriorní znalost: může být ovlivněna předem získaným odhadem parametrů.

Zobecněná metoda momentů

- Použití: efektivní pro odhady MSR, kde jsou chybějící nebo neúplná data.
- Konvergence: stabilní s dobrými momentovými podmínkami.
- Výpočetní náročnost: střední až vysoká, závisí na volbě momentů.
- Robustnost: dobrá, pokud jsou momentové podmínky správně zvoleny.
- Software: MATLAB, Stata, R.
- Apriorní znalost: momentové podmínky vyžadují znalost charakteristik dat.

Bayesovské metody

- Použití: flexibilní ve využití apriorních znalostí pro aktualizaci odhadů MSR.
- Konvergence: závisí na algoritmu (Markov chain Monte Carlo může být pomalá).
- Výpočetní náročnost: vysoká, zejména s komplexními apriorními rozděleními.
- Robustnost: velmi robustní, zahrnuje nejistotu v odhadech.
- Software: WinBUGS, JAGS, Stan, R.
- Apriorní znalost: klíčový prvek, apriorní distribuce formují výsledky.

Newtonova metoda tečen (Newton-Raphson)

- Použití: rychlé nalezení kořenů funkcí.
- Konvergence: rychlá, pokud je blízko skutečného řešení.
- Výpočetní náročnost: střední, vyžaduje derivace.
- Robustnost: může selhat bez dobrého počátečního odhadu.
- Software: MATLAB, R, Python.
- Apriorní znalost: není potřeba, závisí na dobrém počátečním odhadu.

Tabulka 1: Základní souhrn metod pro řešení simultánních rovnic

Metoda	Použití	Výpočetní náročnost	Robustnost	Apriorní znalost
Zobecněná MNČ	Heteroskedasti-cita, korelace chyb	Rychlejší než MNČ	Vysoká	Nepotřebuje
Dvoustupňová MNČ	Endogenní proměnné	Efektivní	Dobrá	Vyžaduje instrumenty
Třístupňová MNČ	Propojené rovnice s korelacemi	Rychlejší než dvoustupňová MNČ	Vysoká	Nepotřebuje
Metoda maximální věrohodnosti	Široká škála modelů	Velmi rychlá	Vysoce přesná	Závisí na modelu
Zobecněná metoda momentů	Robustní odhady	Stabilní	Dobrá	Vyžaduje momenty
Bayesovské metody	Flexibilní začlenění znalostí	Závisí na algo-ritmu	Velmi robustní	Klíčový prvek
Newtonova metoda tečen	Rychlé nalezení kořenů funkcí	Rychlá	Může selhat	Vyžaduje dobrý odhad

Zdroj: vlastní

3 APLIKACE PRO ŘEŠENÍ SOUSTAVY SIMULTÁNNÍCH ROVNIC

3.1 Návrh aplikace

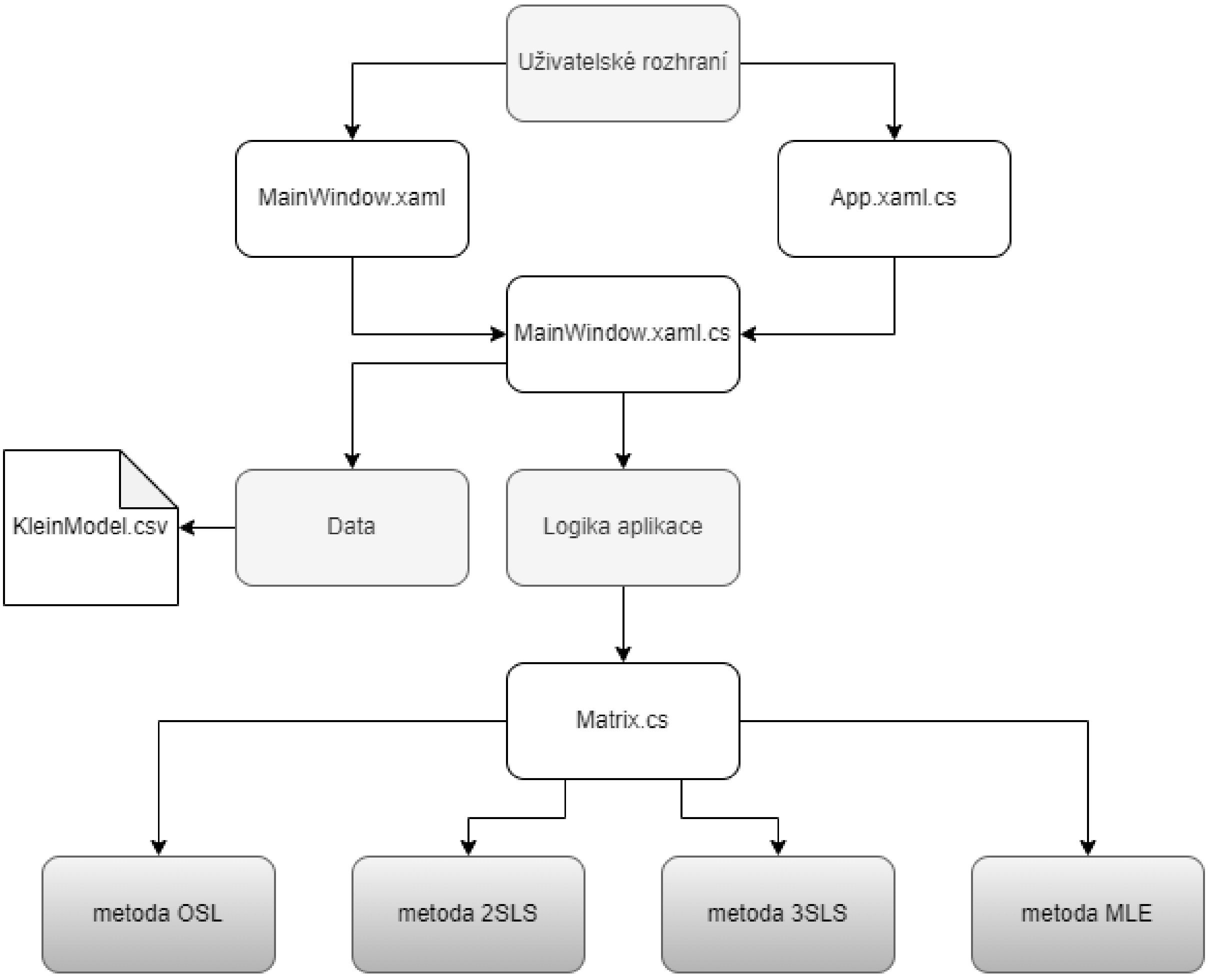
Aplikace bude určena k řešení simultánních rovnic ekonomického modelu Klein Model I, který byl poprvé představen v roce 1950. Bude umožňovat uživatelům pomocí různých metod odhadu (OLS, 2SLS, 3SLS a MLE) vypočítat koeficienty pro jednotlivé rovnice modelu. Výsledky poté budou prezentovány v tabulkové podobě. Aplikace bude obsahovat uživatelské rozhraní, které zobrazí načtená data z csv souboru a po provedení výpočtů znázorní odhady koeficientů daných rovnic.

3.1.1 Popis funkcionalit

- Načítání dat: Aplikace načte uložená data z integrovaného csv souboru. Ty obsahují historické údaje potřebné pro odhadování koeficientů modelu „Klein Model I".
- Výpočet koeficientů:
  - metodou nejmenších čtverců (OLS),
  - dvoustupňovou metodou nejmenších čtverců (2SLS),
  - třístupňovou metodou nejmenších čtverců (3SLS),
  - metodou maximální věrohodnosti (MLE).
- Zobrazení výsledků: výsledky jsou zobrazeny v tabulce, která obsahuje koeficienty pro jednotlivé rovnice a jejich odhadované hodnoty pomocí výše zmíněných metod.
- Export dat: možnost exportovat výsledky a načtená data do externího csv souboru pro další analýzu.

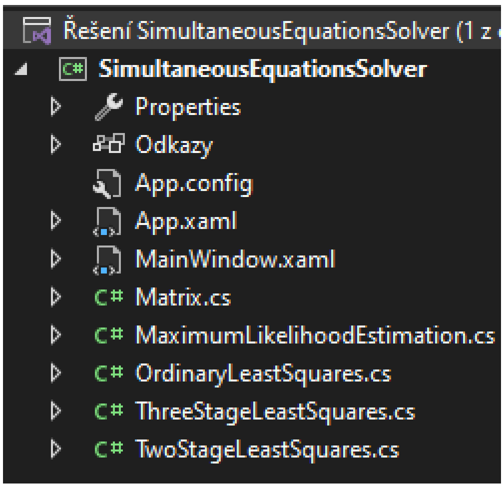
3.1.2 Struktura aplikace

Obrázek níže obsahuje diagram, který vizualizuje vztahy mezi jednotlivými komponentami, včetně uživatelského rozhraní, logiky aplikace, dat a výpočetních modulů.



Obrázek 2: Digram struktury aplikace

Zdroj: vlastní



Obrázek 3: Struktura aplikace

Zdroj: vlastní

Na výše uvedeném obrázku je vidět, jak je aplikace strukturovaná. Jsou zde třídy pro řešení jednotlivých metod (OSL, 2SLS, 3SLS, MLE) a třída Matrix, která řeší maticové operace. Uživatelské rozhraní je definováno v souboru MainWindow.xaml. Csv soubor obsahující data, je pojmenován KleinModel.csv a je integrován do aplikace.

Aplikace byla zpracována v jazyce C# s využitím knihovny Windows Presentation Foundation pro tvorbu grafického rozhraní. Tato knihovna je součástí .NET frameworku.

3.2 Kleinův model

Kleinův model I je jedním z prvních ekonometrických modelů, který byl vytvořen Laurencem R. Kleinem v roce 1950. Tento model představuje jeden z prvních pokusů o kvantitativní analýzu ekonomických vztahů v rámci národní ekonomiky pomocí ekonometrie. Klein model I je dynamický model, obsahující několik rovnic, které popisují vztahy mezi klíčovými makroekonomickými proměnnými, jako:

- hrubý národní produkt,
- spotřeba,
- investice,
- zaměstnanost,
- cenová hladina,
- mzdy.

Model se zaměřuje na kvantifikaci vztahů mezi těmito proměnnými, což umožňuje simulovat a předpovídat makroekonomický vývoj. Model byl používán k analýze a predikci makroekonomických trendů, především pro simulaci ekonomických změn a vládních politik. Původně byl model vytvořen pro ekonomiku v USA, ale jeho metodika inspirovala další výzkumy a rozšířila se i na jiné země a ekonomiky.

Kleinův model se skládá z několika simultánních rovnic, které popisují vztahy mezi různými ekonomickými proměnnými. Na obrázku níže jsou vidět zobrazené rovnice pro Klein model I a vysvětlení a identifikace jejích proměnných se nachází v dalších dvou podkapitolách.

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 P_{t-1} + \alpha_3 \left(W_t^p + W_t^g\right) + \varepsilon_{1t}$$

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + \beta_3 K_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$

$$W_i^p = \gamma_0 + \gamma_1 X_t + \gamma_2 X_{t-1} + \gamma_3 A_t + \varepsilon_{3t}$$

$$X_t = C_t + I_t + G_t$$

$$P_t = X_t - T_t - W_t^p$$

$$K_t = K_{t-1} + I_t$$

Obrázek 4: Rovnice pro Kleinův model

Zdroj: [1]

3.2.1 Exogenní proměnné

Jak již bylo zmíněno v předchozích kapitolách, exogenní proměnné jsou ty, které nejsou určeny v rámci modelu a jejich hodnoty jsou dané a nezávislé. V modelu simultánních rovnic se používají jako vysvětlující proměnné pro endogenní proměnné. Podle daných rovnic byly identifikovány následující exogenní proměnné:

- zisky (P_t a P_{t-1}) – aktuální zisky a zisky z předchozího období vysvětlují spotřebu a investice,
- mzdy ($W_t^p + W_t^g$) – součet veřejných a soukromých mezd se používá při vysvětlování spotřeby.
- kapitál (K_{t-1}) – kapitál minulého období je použit při vysvětlení investic,
- výstup (X_t a X_{t-1}) – aktuální a předchozí celkový výstup vysvětluje mzdy,
- časový trend (A_t) – časový trend vysvětluje mzdy a může reprezentovat například technologický pokrok nebo jiný časově závislý efekt.

3.2.2 Endogenní proměnné

Endogenní proměnné jsou oproti těm exogenním určovány v rámci modelu a jsou závislé na ostatních proměnných v modelu. Tyto proměnné jsou tedy vysvětlované v modelu simultánních rovnic. Na základě těchto rovnic byly určeny následující endogenní proměnné:

- spotřeba (C_t) – závisí na aktuálních a předchozích ziscích a mzdách,
- investice (I_t) – jsou podmíněny aktuálními a předchozími příjmy a kapitálu,
- mzdy (W_t^p) – jsou vysvětleny přechozím a aktuálním výstupem a časovém trendu.

3.2.3 Data

Data představují analýzu ekonomiky USA během meziválečného období. Původně byly poprvé publikovány ve studii "Economic Fluctuations in the United States, 1921–1941", která se právě tímto tématem zabývala. Pro účely této práce byly hodnoty získány z knihy „Econometric analysis“ uvedené v použité literatuře pod odkazem [1].

Tabulka dat obsahuje jeden řádek pro každý rok analýzy příslušného sloupce, kde jednotlivé sloupce mají význam:

- **Year** (Rok): tento sloupec obsahuje roky 1920 až 1941.
- **C** (Spotřeba): představuje celkovou ekonomickou spotřebu v daném roce.
- **P** (Firemní zisky): zahrnují celkový zisk firem po odečtení všech nákladů.
- **Wp** (Soukromé mzdy): plat, který soukromé firmy vyplácejí svým zaměstnancům.
- **I** (Investice): obsahuje výdaje na nákup nového kapitálu.
- **K1** (Kapitál z předchozího roku): kapitál, který byl k dispozici v předchozím roce.
- **X** (Hrubý národní produkt): celková hodnota všech zboží a služeb.
- **Wg** (Vládní mzdy): plat, který vláda vyplácí svým zaměstnancům.
- **G** (Vládní výdaje): představuje všechny výdaje vlády na nákup zboží a služeb.
- **T** (Daně): peníze, které vláda vybere od domácností a firem.

Tabulka 2: Data (Klein Model I)

Year	C	P	Wp	I	K1	X	Wg	G	T
1920	39,8	12,7	28,8	2,7	180,1	44,9	2,2	2,4	3,4
1921	41,9	12,4	25,5	-0,2	182,8	45,6	2,7	3,9	7,7
1922	45	16,9	29,3	1,9	182,6	50,1	2,9	3,2	3,9
1923	49,2	18,4	34,1	5,2	184,5	57,2	2,9	2,8	4,7
1924	50,6	19,4	33,9	3	189,7	57,1	3,1	3,5	3,8
1925	52,6	20,1	35,4	5,1	192,7	61	3,2	3,3	5,5
1926	55,1	19,6	37,4	5,6	197,8	64	3,3	3,3	7
1927	56,2	19,8	37,9	4,2	203,4	64,4	3,6	4	6,7
1928	57,3	21,1	39,2	3	207,6	64,5	3,7	4,2	4,2
1929	57,8	21,7	41,3	5,1	210,6	67	4	4,1	4
1930	55	15,6	37,9	1	215,7	61,2	4,2	5,2	7,7
1931	50,9	11,4	34,5	-3,4	216,7	53,4	4,8	5,9	7,5
1932	45,6	7	29	-6,2	213,3	44,3	5,3	4,9	8,3
1933	46,5	11,2	28,5	-5,1	207,1	45,1	5,6	3,7	5,4
1934	48,7	12,3	30,6	-3	202	49,7	6	4	6,8
1935	51,3	14	33,2	-1,3	199	54,4	6,1	4,4	7,2
1936	57,7	17,6	36,8	2,1	197,7	62,7	7,4	2,9	8,3
1937	58,7	17,3	41	2	199,8	65	6,7	4,3	6,7
1938	57,5	15,3	38,2	-1,9	201,8	60,9	7,7	5,3	7,4
1939	61,6	19	41,6	1,3	199,9	69,5	7,8	6,6	8,9
1940	65	21,1	45	3,3	201,2	75,7	8	7,4	9,6
1941	69,7	23,5	53,3	4,9	204,5	88,4	8,5	13,8	11,6

Zdroj: [1]

3.2.4 Sestavení matic

Nejprve si vytvoříme matici X1 pro rovnici spotřeby, tato matice závisí na ziscích, minulých příjmech, mzdách a je vytvořena podle rovnice:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 P_{t-1} + \alpha_3 \left(W_t^p + W_t^g\right)$$

- První sloupec matice tvoří vektor jedniček pro konstantní člen α_0,
- druhý sloupec jsou aktuální ceny, které představují hodnoty P_t,
- třetí sloupec představují „zpožděné" ceny P_{t-1},
- čtvrtý sloupec je součet složek mezd: $W_t^p + W_t^g$.

Následně je potřeba vytvořit matici X2, která představuje investice. Investice závisí na aktuálních příjmech, příjmech z minulého období a kapitálu:

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + \beta_3 K_{t-1},$$

- zde je první sloupec tvořen vektorem jedniček pro β_0,
- aktuální ceny, které reprezentují druhý sloupec jsou hodnoty P_t,
- třetí sloupec obsahuje „zpožděné" ceny P_{t-1},
- čtvrtý sloupec představuje „zpožděný" kapitál K_{t-1}.

Matice X3, která představuje mzdu závisí na současném výstupu, výstupu z minulého období a časovém trendu. Jeho rovnice vypadá takto:

$$W_t^p = \gamma_0 + \gamma_1 X_{t-1} + \gamma_2 X_t + \gamma_3 A_t,$$

- první sloupec je vektor jedniček pro γ_0,
- druhý sloupec tvoří „zpožděný" celkový výstup X_{t-1},
- třetí sloupec reprezentuje aktuální celkový výstup X_t,
- čtvrtý sloupec představuje časový trend A_t.

Model simultánních rovnic se v tomto případě skládá i z identitních nebo definičních rovnic. Tyto rovnice nejsou odhadovány při analýze, ale používají se k definování vztahů mezi jednotlivými ekonomickými proměnnými. Tyto rovnice jsou v modelu tři:

- Celkový výstup (X_n), který je prezentován jako součet spotřeby (C_n), investic (I_n) a vládních výdajů (G_n). Tento vztah má rovnici: $X_n = C_n + I_n + G_n$.

- Zisky (P_i), jsou definovány jako rozdíl mezi celkovým výstupem (X_i), náklady na pracovní sílu (W_t^p) a daněmi (T_t). Rovnice tohoto vztahu vypadá takto: $P_t = X_t - W_t^p - T_t$.
- A nakonec rovnice pro kapitál (K_t), který představuje součet investic (I_t) a kapitál z předchozího období (K_{t-1}). Rovnice kapitálu: $K_t = I_t + K_{t-1}$.

3.3 Maticové operace

Tato kapitola obsahuje vybrané úryvky kódu, který implementuje maticové operace. Lze zde najít kód pro transponování matice, násobení matice maticí a převedení matice na její inverzní variantu.

```
public Matrix Transpose()
{
    Matrix result = new Matrix(Columns, Rows);
    for (int i = 0; i < Rows; i++)
    {
        for (int j = 0; j < Columns; j++)
        {
            result[j, i] = this[i, j];
        }
    }
    return result;
}
```

Obrázek 5: Kód pro transpozici matice

Zdroj: vlastní

```
public Matrix Multiply(Matrix other)
{
    if (Columns != other.Rows)
        throw new InvalidOperationException(
                              "Neslučitelné rozměry matic pro násobení.");

    Matrix result = new Matrix(this.Rows, other.Columns);
    for (int i = 0; i < this.Rows; i++)
    {
        for (int j = 0; j < other.Columns; j++)
        {
            for (int k = 0; k < this.Columns; k++)
            {
                result[i, j] += this[i, k] * other[k, j];
            }
        }
    }
    return result;
}
```

Obrázek 6: Kód pro násobení dvou matic

Zdroj: vlastní

```
public Matrix Inverse()
{
    if (Rows != Columns)
        throw new InvalidOperationException(
                               "Pouze čtvercové matice lze invertovat.");

    int n = Rows;
    Matrix result = new Matrix(n, n);
    Matrix temp = new Matrix(n, 2 * n);

    // Vytvoření rozšířené matice [A|I]
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        for (int j = 0; n > j; j++)
        {
            temp[i, j] = this[i, j];
            temp[i, j + n] = (i == j) ? 1 : 0;
        }
    }

    // Gaussova eliminace
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        if (temp[i, i] == 0)
            throw new InvalidOperationException("Matice je singulární.");

        for (int j = 0; j < n; j++)
        {
            if (i != j)
            {
                double ratio = temp[j, i] / temp[i, i];
                for (int k = 0; k < 2 * n; k++)
                {
                    temp[j, k] -= ratio * temp[i, k];
                }
            }
        }
    }

    // Normalizace řádků
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        double divisor = temp[i, i];
        for (int j = 0; j < 2 * n; j++)
        {
            temp[i, j] /= divisor;
        }
    }

    // Extrakce inverzní matice
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        for (int j = 0; j < n; j++)
        {
            result[i, j] = temp[i, j + n];
        }
    }

    return result;
}
```

Obrázek 7: Kód pro invertování matice

Zdroj: vlastní

Na obrázku výše je uveden kód pro invertování matice. Tento kód provede kontrolu, zda je matice čtvercová, následně se vytvoří rozšířená matice, kde levá polovina obsahuje původní matici a pravá polovina obsahuje jednotkovou matici (má na hlavní diagonále jedničky a na ostatních místech jsou nuly). Poté se provede Gaussova eliminace, kde se pro každý řádek kontroluje, zda je pivotní prvek nenulový, pokud není, je matice singulární a nelze invertovat. Pro všechny ostatní řádky se provede eliminace (odečte se násobek aktuálního řádku tak, aby se vynuloval prvek pod pivotní složkou). Po eliminaci přijde na řadu normalizace řádků, zde se každý řádek vydělí svým pivotním prvkem tak, aby na diagonále byly jedničky. Nakonec se z pravé poloviny rozšířené matice extrahuje inverzní matice do proměnné *result* a tím se získá výsledná invertovaná matice.

3.4 Zobecněná metoda nejmenších čtverců

Matice X1, X2 a X3 byly vytvořeny podle popisu v podkapitole 3.1.4 - Sestavení matic. Koeficienty pro regresi jsou odhadnuty pomocí vzorce:

$$\beta = (X'X)^{-1}X'Y,$$

kde:

- X je matice nezávislých proměnných,
- Y je vektor závislých proměnných (například C_i, I_i nebo W_i^p),
- X' je transponovaná matice X,
- $(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}$ je inverzní matice $\mathrm{X}'\mathrm{X}$.

Po aplikování vzorce na matici X se nejprve musí tato matice transponovat, následně se vynásobí obyčejnou maticí X. Výsledná matice se invertuje, aby vznikla inverzní matice $(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}$. Následně se transponovaná matice X' vynásobí vektorem závislých proměnných. V případě X1 se jedná o vektor C, pro matici X2 se jedná o vektor I a matice X3 se násobí vektorem Wp. Touto operací vznikne $X'Y$ z rovnice a tu vynásobíme s výsledkem předchozí inverzní matice $(X'X)^{-1}$. Výsledky jsou rozděleny do proměnných C_0, C_1, C_2, C_3 tvořících jeden vektor pro výpočet matice X1. Druhý vektor je složen z hodnot I_0, I_1, I_2, I_3, který je výsledkem výpočtu pro matici X2. Poslední vektor je tvořen zobrazenými hodnotami $W_0^p, W_1^p, W_2^p, W_3^p$ a obsahuje vypočítané hodnoty z matice X3.

3.4.1 Podoba matic a vektorů

Níže je možné vidět, jak vypadají matice a vektory z kterých se počítají koeficientyC_0, C_1, C_2, C_3. Pokud bychom uvažovali vzorec uvedený výše, tak β je vektor, který tvoří právě tyto koeficienty. Ostatní použité matice byly sestaveny stejnou metodou, proto zde již jejich obsah nebudu uvádět.

$$X1 = \begin{pmatrix} 1 & 12{,}7 & 12{,}7 & 31 \\ 1 & 12{,}4 & 12{,}7 & 28{,}2 \\ 1 & 16{,}9 & 12{,}4 & 32{,}2 \\ 1 & 18{,}4 & 16{,}9 & 37 \\ 1 & 19{,}4 & 18{,}4 & 37 \\ 1 & 20{,}1 & 19{,}4 & 38{,}6 \\ 1 & 19{,}6 & 20{,}1 & 40{,}7 \\ 1 & 19{,}8 & 19{,}6 & 41{,}5 \\ 1 & 21{,}1 & 19{,}8 & 42{,}9 \\ 1 & 21{,}7 & 21.1 & 45{,}3 \\ 1 & 15{,}6 & 21.7 & 42{,}1 \\ 1 & 11{,}4 & 15.6 & 39{,}3 \\ 1 & 7 & 11.4 & 34{,}3 \\ 1 & 11{,}2 & 7 & 34{,}1 \\ 1 & 12{,}3 & 11.2 & 36{,}6 \\ 1 & 14 & 12.3 & 39{,}3 \\ 1 & 17.6 & 14 & 44{,}2 \\ 1 & 17.3 & 17.6 & 47{,}7 \\ 1 & 15.3 & 17.3 & 45{,}9 \\ 1 & 19 & 15.3 & 49{,}4 \\ 1 & 21{,}1 & 19 & 53 \\ 1 & 23{,}5 & 21.1 & 61{,}8 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 39{,}8 \\ 41{,}9 \\ 45 \\ 49{,}2 \\ 50{,}6 \\ 52{,}6 \\ 55{,}1 \\ 56{,}2 \\ 57{,}3 \\ 57{,}8 \\ 55 \\ 50{,}9 \\ 45{,}6 \\ 46{,}5 \\ 48{,}7 \\ 51{,}3 \\ 57{,}7 \\ 58{,}7 \\ 57{,}5 \\ 61{,}6 \\ 65 \\ 69{,}7 \end{pmatrix}$$

$$X1'X1 = \begin{pmatrix} 22 & 367{,}4 & 356{,}6 & 902{,}1 \\ 367{,}4 & 6508{,}54 & 6231{,}42 & 15511{,}42 \\ 356{,}6 & 6231{,}42 & 6117{,}58 & 15011{,}65 \\ 902{,}1 & 15511{,}42 & 15011{,}65 & 38236{,}87 \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{X1'X1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}4479 & 0{,}0011 & -0{,}0164 & -0{,}0281 \\ 0{,}0011 & 0{,}079 & -0{,}005 & -0{,}0013 \\ -0{,}0164 & -0{,}005 & 0{,}0078 & -0{,}0006 \\ -0{,}0281 & -0{,}0013 & -0{,}0006 & 0{,}0015 \end{pmatrix}$$

$$X1'C = \begin{pmatrix} 1173{,}7 \\ 20071{,}81 \\ 19434{,}83 \\ 49287{,}91 \end{pmatrix}$$

Obrázek 8: Matice ve zobecněné metodě nejmenších čtverců

Zdroj: vlastní

3.4.2 Implementace v aplikaci

Na následujícím obrázku je vidět, jak je implementována zobecněná metoda nejmenších čtverců. Nejprve se vytvoří matice X1, na kterou se poté aplikuje vzorec $\beta_1 = (X1'X1)^{-1}X1'C$. Výsledem je vektor β_1, který se později ve výsledcích v aplikace zobrazuje jako C_{index}. Matice X2 používá vzorec $\beta_2 = (X2'X2)^{-1}X2'I$, kde se v následném zobrazení výsledky jednotlivých řádků vektoru β_2 mapují na jednotlivá čísla I_{index}. Poslední matice X3 využila vzorce $\beta_3 = (X3'X3)^{-1}X3'\mathrm{W}^p$. Výsledný vektor β_3 se zobrazuje v aplikaci jako W_{index}^p.

```
// Rovnice spotřeby: C_t = α_0 + α_1P_t + α_2P_{t-1} + α_3(W_t^p + W_t^g)
Matrix X1 = new Matrix(n, 4);
for (int i = 0; i < n; i++)
{
      X1[i, 0] = 1; // Konstanta
      X1[i, 1] = P[i, 0];
      X1[i, 2] = (i > 0) ? P[i - 1, 0] : P[i, 0];
      X1[i, 3] = Wp[i, 0] + Wg[i, 0]; // Celková mzda (soukromá + vládní)
}

Matrix beta1 =
(X1.Transpose().Multiply(X1)).Inverse().Multiply(X1.Transpose()).Multiply(C);

// Rovnice investic: I_t = β_0 + β_1P_t + β_2P_{t-1} + β_3K_{t-1}
Matrix X2 = new Matrix(n, 4);
for (int i = 0; i < n; i++)
{
      X2[i, 0] = 1; // Konstanta
      X2[i, 1] = P[i, 0];
      X2[i, 2] = (i > 0) ? P[i - 1, 0] : P[i, 0];
      X2[i, 3] = (i > 0) ? K[i - 1, 0] : K[i, 0];
}
Matrix beta2 =
(X2.Transpose().Multiply(X2)).Inverse().Multiply(X2.Transpose()).Multiply(I);

// Rovnice soukromých mezd: W_t^p = γ_0 + γ_1X_t + γ_2X_{t-1} + γ_3A_t
Matrix X3 = new Matrix(n, 4);
for (int i = 0; i < n; i++)
{
      X3[i, 0] = 1; // Konstanta
      X3[i, 1] = X[i, 0];
      X3[i, 2] = (i > 0) ? X[i - 1, 0] : X[i, 0];
      X3[i, 3] = A[i, 0];
}
Matrix beta3 =
(X3.Transpose().Multiply(X3)).Inverse().Multiply(X3.Transpose()).Multiply(Wp);
```

Obrázek 9: Implementace zobecněné metody nejmenších čtverců

Zdroj: vlastní

3.5 Dvoustupňová metoda nejmenších čtverců

V této metodě je nejdůležitější sestavit matici instrumentálních proměnných Z. Tyto proměnné nejsou korelované s chybovým členem, ale jsou korelované s vysvětlujícími proměnnými. Matice Z, kde každý rok odpovídá jednomu řádku, se skládá z:

- první sloupec jedniček,
- druhý sloupec obsahuje vládní výdaje (G),
- daně (T) jsou ve třetím sloupci,
- čtvrtý sloupec reprezentuje vládní mzdy (W^g),
- pátý sloupec se skládá z časového trendu (A),
- šestý sloupec představuje „zpožděný" kapitál (K_{t-1}),
- sedmý sloupec obsahuje „opožděnou" celkovou poptávku (X_{t-1}),
- v osmém sloupci jsou uloženy „opožděné" zisky (P_{t-1}).

Bylo potřeba také provést odhady endogenních proměnných pomocí instrumentálních proměnných. Odhad zisků byl proveden podle rovnice $\hat{P} = Z(Z'Z)^{-1}Z'P$. Odhad celkové poptávky byl proveden podobně jako odhad zisků, a to podle vzorce $\hat{X} = Z(Z'Z)^{-1}Z'X$. Nakonec byl proveden odhad soukromých mezd dle rovnice $\widehat{W^p} = Z(Z'Z)^{-1}Z'W^p$.

Následně byly vytvořeny matice X1, X2 a X3, kde každý řádek odpovídá jednomu roku a obsah sloupců je podle následující tabulky:

Tabulka 3: Obsah základních matic

Sloupec	Matice X1	Matice X2	Matice X3
První	Konstanta = 1	Konstanta = 1	Konstanta = 1
Druhý	$\hat{P}$	$\hat{P}$	$\hat{X}$
Třetí	P_{t-1}	P_{t-1}	X_{t-1}
Čtvrtý	$\widehat{W^p} + W^g$	K_{t-1}	A_{t-1}

Zdroj: vlastní

V tabulce proměnná $\hat{P}$ reprezentuje získaný odhad zisků a $\hat{X}$ představuje vypočítaný odhad celkové poptávky. Proměnná P_{t-1} je zisk z minulého roku, X_{t-1} prezentuje hodnotu poptávky z minulého období, K_{t-1} představuje kapitál z předchozího roku a proměnná A_{t-1} obsahuje předchozí časový trend. Součet mzdy z vládního sektoru a dříve získaného odhadu mzdy ze soukromého sektoru je značen $\widehat{W^p} + W^g$.

Nakonec byly provedeny stejné operace nad každou maticí X1, X2 a X3 jako je popsáno v kapitole 3.4.2 - Implementace v aplikaci. Bylo tedy třeba transponovanou matici vynásobit původní maticí a výslednou matici invertovat. Tuto inverzní matici vynásobit transponovanou verzí matice a výsledek matice vynásobit odpovídajícím vektorem endogenní proměnné. Tím vznikl vektor výsledků.

3.5.1 Podoba matice a implementace

V této podkapitole je zobrazena pouze matice instrumentálních proměnných, protože ostatní matice jsou již zmíněny v předchozí kapitole, kde je probírána podoba matic pro zobecněnou metodu nejmenších čtverců. Matice se budou lišit pouze hodnotami.

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 2{,}4 & 3{,}4 & 2{,}2 & 1 & 180{,}1 & 12{,}7 & 44{,}9 \\ 1 & 3{,}9 & 7{,}7 & 2{,}7 & 2 & 180{,}1 & 12{,}7 & 44{,}9 \\ 1 & 3{,}2 & 3{,}9 & 2{,}9 & 3 & 182{,}8 & 12{,}4 & 45{,}6 \\ 1 & 2{,}8 & 4{,}7 & 2{,}9 & 4 & 182{,}6 & 16{,}9 & 50{,}1 \\ 1 & 3{,}5 & 3{,}8 & 3{,}1 & 5 & 184{,}5 & 18{,}4 & 57{,}2 \\ 1 & 3{,}3 & 5{,}5 & 3{,}2 & 6 & 189{,}7 & 19{,}4 & 57{,}1 \\ 1 & 3{,}3 & 7 & 3{,}3 & 7 & 192{,}7 & 20{,}1 & 61 \\ 1 & 4 & 6{,}7 & 3{,}6 & 8 & 197{,}8 & 19{,}6 & 64 \\ 1 & 4{,}2 & 4{,}2 & 3{,}7 & 9 & 203{,}4 & 19{,}8 & 64{,}4 \\ 1 & 4{,}1 & 4 & 4 & 10 & 207{,}6 & 21{,}1 & 64{,}5 \\ 1 & 5{,}2 & 7{,}7 & 4{,}2 & 11 & 210{,}6 & 21{,}7 & 67 \\ 1 & 5{,}9 & 7{,}5 & 4{,}8 & 12 & 215{,}7 & 15{,}6 & 61{,}2 \\ 1 & 4{,}9 & 8{,}3 & 5{,}3 & 13 & 216{,}7 & 11{,}4 & 53{,}4 \\ 1 & 3{,}7 & 5{,}4 & 5{,}6 & 14 & 213{,}3 & 7 & 44{,}3 \\ 1 & 4 & 6{,}8 & 6 & 15 & 207{,}1 & 11{,}2 & 45{,}1 \\ 1 & 4{,}4 & 7{,}2 & 6{,}1 & 16 & 202 & 12{,}3 & 49{,}7 \\ 1 & 2{,}9 & 8{,}3 & 7{,}4 & 17 & 199 & 14 & 54{,}4 \\ 1 & 4{,}3 & 6{,}7 & 6{,}7 & 18 & 197{,}7 & 17{,}6 & 62{,}7 \\ 1 & 5{,}3 & 7{,}4 & 7{,}7 & 19 & 199{,}8 & 17{,}3 & 65 \\ 1 & 6{,}6 & 8{,}9 & 7{,}8 & 20 & 201{,}8 & 15{,}3 & 60{,}9 \\ 1 & 7{,}4 & 9{,}6 & 8 & 21 & 199{,}9 & 19 & 69{,}5 \\ 1 & 13{,}8 & 11{,}6 & 8{,}5 & 22 & 201{,}2 & 21{,}1 & 75{,}7 \end{pmatrix}$$

Obrázek 10: Matice instrumentálních proměnných

Zdroj: vlastní

Na následujícím obrázku je vidět, jak byla sestavena matice instrumentálních proměnných. Plnění řádků simuluje cyklus, který vždy načte hodnotu z odpovídajícího řádku původních dat uložených v csv souboru a zapíše ji do stejného řádky matice. Kód také zobrazuje operace nad maticemi při výpočtu jednotlivých proměnných $\hat{P}, \hat{X}$ a $\widehat{W^p}$.

```
// Vytvoření matice instrumentálních proměnných
Matrix Z = new Matrix(n, 8);
for (int i = 0; i < n; i++)
{
    Z[i, 0] = 1;           // Konstanta
    Z[i, 1] = G[i, 0];     // Vládní výdaje
    Z[i, 2] = T[i, 0];     // Daně
    Z[i, 3] = Wg[i, 0];    // Vládní mzdy
    Z[i, 4] = A[i, 0];     // Časový trend
    Z[i, 5] = (i > 0) ? K[i - 1, 0] : K[i, 0];  // Zpožděný kapitál
    Z[i, 6] = (i > 0) ? P[i - 1, 0] : P[i, 0];  // Zpožděné zisky
    Z[i, 7] = (i > 0) ? X[i - 1, 0] : X[i, 0];  // Zpožděná celková poptávka
}

// Projekce endogenních proměnných
Matrix Phat = Z.Multiply(
      (Z.Transpose().Multiply(Z)).Inverse()).Multiply(Z.Transpose()).Multiply(P);
Matrix Xhat = Z.Multiply(
      (Z.Transpose().Multiply(Z)).Inverse()).Multiply(Z.Transpose()).Multiply(X);
Matrix Wphat = Z.Multiply(
      (Z.Transpose().Multiply(Z)).Inverse()).Multiply(Z.Transpose()).Multiply(Wp);
```

Obrázek 11: Implementace matice a projekce endogenních proměnných

Zdroj: vlastní

3.6 Třístupňová metoda nejmenších čtverců

Nejdříve byla sestavena matice instrumentálních proměnných Z. Tyto proměnné jsou korelované s endogenními proměnnými a nejsou korelované s chybovým členem. Matice Z, kde každý rok odpovídá jednomu řádku, byla vytvořena stejně jako při analýze za pomocí dvoustupňové metody nejmenších čtverců. Poté byla stejným způsobem provedena projekce endogenních proměnných, což je také popsáno v přechozí kapitole. Cílem je provést stejné kroky jako při dvoustupňové metodě nejmenších čtverců. Po provedení těchto výpočtů je potřeba z výsledných odhadů vypočítat rezidua podle rovnic:

- $\varepsilon_{1t} = C_t - \widehat{C_t}$, která představuje rezidua pro rovnici spotřeby,
- $\varepsilon_{2t} = I_t - \widehat{I_t}$, představující rezidua pro rovnici investic,
- $\varepsilon_{3t} = W_t^p - \widehat{W_t^p}$, která počítá rezidua pro rovnici mezd soukromého sektoru.

Poté je potřeba vytvořit symetrickou kovarianční matici podle předpisu:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix},$$

kde:

- ε_{11} je variance reziduí rovnice spotřeby,
- ε_{22} představuje varianci reziduí rovnice investic,

- ε_{33} reprezentuje rozptyl reziduí mezd v soukromém sektoru,
- $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$ jsou kovariance mezi rezidui různých rovnic.

Příklad výpočtu rezidua $\varepsilon_{12} = \frac{1}{n-k}\sum_{t-1}^{n} \varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}$ kde n je počet pozorování a k je počet parametrů v rovnici. V případě použitých dat pro Kleinův model je n rovno 22 (počet pozorovaných let) a k = 4.

V dalším kroku byly vytvořeny blokové matice. Tyto matice kombinují informace ze všech rovnic modelu do jedné velké matice, což umožňuje provádět výpočty současně pro všechny rovnice. Matice X_{block} obsahuje všechny vysvětlující proměnné z každé rovnice a matice Y_{block} obsahuje všechny závislé (vysvětlované) proměnné z každé rovnice.

Matice X_{block} má dimenzi 3n × 12, tři pro každou z rovnic a n odpovídá 22 (pro každý rok pozorování). Zároveň má každá rovnice čtyři vysvětlující proměnné včetně konstanty, a protože máme tři rovnice, výsledná matice má 12 sloupců. Naplnění matice, kde každý řádek odpovídá jednomu pozorování:

- **prvních *n* řádků**: obsahuje vysvětlující proměnné pro rovnici spotřeby: $\begin{pmatrix}1 & \widehat{P_t} & P_{t-1} & \widehat{W_t^p} & W_t^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,
- **dalších *n* řádků**: představuje vysvětlující proměnné pro rovnici investic: $(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \widehat{P_t} \quad P_{t-1} \quad K_{t-1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$,
- **posledních *n* řádků**: prezentuje vysvětlující proměnné pro rovnici mezd v soukromém sektoru: $(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \widehat{X_t} \quad X_{t-1} \quad A_t)$.

Oproti tomu matice Y_{block} má dimenzi 3n × 1, tři pro každou z rovnic a jak již bylo uvedeno, n odpovídá 22. Jeden sloupec obsahuje skutečné hodnoty závislých proměnných z každé rovnice. Naplnění matice, kde každý řádek odpovídá jednomu pozorování:

- **prvních *n* řádků**: obsahuje skutečné hodnoty pro spotřebu C_t,
- **dalších *n* řádků**: představuje skutečné hodnoty pro investice I_t,
- **posledních *n* řádků**: prezentuje skutečné hodnoty pro soukromé mzdy W_t^p.

Nakonec byl proveden odhad koeficientů pomocí vzorce:

$$\hat{\beta} = (X_{block}'(\Sigma^{-1})X_{block})^{-1}X_{block}'(\Sigma^{-1})Y_{block},$$

kde:

- X_{block} je bloková matice vysvětlujících proměnných,
- Y_{block} je bloková matice závislých proměnných,
- Σ^{-1} je inverzní kovarianční matice.

3.6.1 Podoba matic

Na následujících obrázcích můžeme vidět nenulové části blokové matice X. Jak bylo popsáno v předchozí kapitole, celková matice se skládá z prvních 22 řádků matice $X_{block}C_t$ z obrázku a její dalších 8 sloupců je nulových, řádky 23 až 44 blokové matice X se skládají z prvních čtyř nulových sloupců a následují čtyři sloupce matice $X_{block}I_t$ z obrázků za kterými jsou další čtyři sloupce nulové. Posledních 22 řádku matice X_{block} má prvních osm sloupců nulových, následovaných obsahem matice $X_{block}W_t^p$.

$$X_{block}C_t = \begin{pmatrix} 1 & 13,046 & 12,7 & 31,022 \\ 1 & 12,931 & 12,7 & 29,452 \\ 1 & 16,079 & 12,4 & 31,609 \\ 1 & 18,925 & 16,9 & 35,668 \\ 1 & 20,695 & 18,4 & 39,094 \\ 1 & 19,471 & 19,4 & 39,008 \\ 1 & 17,554 & 20,1 & 39,193 \\ 1 & 17,249 & 19,6 & 40,108 \\ 1 & 19,685 & 19,8 & 42,352 \\ 1 & 21,574 & 21,1 & 44,217 \\ 1 & 18,286 & 21,7 & 43,96 \\ 1 & 13,693 & 15,6 & 39,66 \\ 1 & 9,593 & 11,4 & 35,144 \\ 1 & 8,812 & 7 & 32,762 \\ 1 & 13,129 & 11,2 & 37,672 \\ 1 & 13,154 & 12,3 & 39,977 \\ 1 & 16,146 & 14 & 41,97 \\ 1 & 18,403 & 17,6 & 47,677 \\ 1 & 19,942 & 17,3 & 49,479 \\ 1 & 16,849 & 15,3 & 48,198 \\ 1 & 19,42 & 19 & 53,098 \\ 1 & 22,754 & 21,1 & 60,772 \end{pmatrix} \quad X_{block}I_t = \begin{pmatrix} 1 & 13,046 & 12,7 & 180,1 \\ 1 & 12,931 & 12,7 & 180,1 \\ 1 & 16,079 & 12,4 & 182,8 \\ 1 & 18,925 & 16,9 & 182,6 \\ 1 & 20,695 & 18,4 & 184,5 \\ 1 & 19,471 & 19,4 & 189,7 \\ 1 & 17,554 & 20,1 & 192,7 \\ 1 & 17,249 & 19,6 & 197,8 \\ 1 & 19,685 & 19,8 & 203,4 \\ 1 & 21,574 & 21,1 & 207,6 \\ 1 & 18,286 & 21,7 & 210,6 \\ 1 & 13,693 & 15,6 & 215,7 \\ 1 & 9,593 & 11,4 & 216,7 \\ 1 & 8,812 & 7 & 213,3 \\ 1 & 13,129 & 11,2 & 207,1 \\ 1 & 13,154 & 12,3 & 202 \\ 1 & 16,146 & 14 & 199 \\ 1 & 18,403 & 17,6 & 197,7 \\ 1 & 19,942 & 17,3 & 199,8 \\ 1 & 16,849 & 15,3 & 201,8 \\ 1 & 19,42 & 19 & 199,9 \\ 1 & 22,754 & 21,1 & 201,2 \end{pmatrix}$$

Obrázek 12: Nenulové části blokové matice X

Zdroj: vlastní

Na dalším obrázku je vidět poslední část blokové matice X a jednotlivé části blokové matice Y. Matice Y_{block} má pouze jeden sloupec, a jeho prvních 22 řádků tvoří zobrazená matice $Y_{block}C_t$, dalších 22 řádků stejného sloupce obsahuje hodnoty z matice $Y_{block}C_t$ a posledních 22 řádků totožného sloupce má hodnoty matice $Y_{block}W_t^p$.

$$X_{block}W_t^p = \begin{pmatrix} 1 & 45{,}268 & 44{,}9 & 1 \\ 1 & 47{,}383 & 44{,}9 & 2 \\ 1 & 48{,}688 & 45{,}6 & 3 \\ 1 & 56{,}395 & 50{,}1 & 4 \\ 1 & 60{,}489 & 57{,}2 & 5 \\ 1 & 60{,}78 & 57{,}1 & 6 \\ 1 & 60{,}448 & 61 & 7 \\ 1 & 60{,}457 & 64 & 8 \\ 1 & 62{,}538 & 64{,}4 & 9 \\ 1 & 65{,}792 & 64{,}5 & 10 \\ 1 & 65{,}746 & 67 & 11 \\ 1 & 56{,}053 & 61{,}2 & 12 \\ 1 & 47{,}738 & 53{,}4 & 13 \\ 1 & 41{,}374 & 44{,}3 & 14 \\ 1 & 51{,}602 & 45{,}1 & 15 \\ 1 & 54{,}231 & 49{,}7 & 16 \\ 1 & 59{,}017 & 54{,}4 & 17 \\ 1 & 66{,}081 & 62{,}7 & 18 \\ 1 & 69{,}121 & 65 & 19 \\ 1 & 66{,}147 & 60{,}9 & 20 \\ 1 & 74{,}118 & 69{,}5 & 21 \\ 1 & 86{,}627 & 75{,}7 & 22 \end{pmatrix} \quad Y_{block}C_t = \begin{pmatrix} 39{,}8 \\ 41{,}9 \\ 45 \\ 49{,}2 \\ 50{,}6 \\ 52{,}6 \\ 55{,}1 \\ 56{,}2 \\ 57{,}3 \\ 57{,}8 \\ 55 \\ 50{,}9 \\ 45{,}6 \\ 46{,}5 \\ 48{,}7 \\ 51{,}3 \\ 57{,}7 \\ 58{,}7 \\ 57{,}5 \\ 61{,}6 \\ 65 \\ 69{,}7 \end{pmatrix} \quad Y_{block}I_t = \begin{pmatrix} 2{,}7 \\ -0{,}2 \\ 1{,}9 \\ 5{,}2 \\ 3 \\ 5{,}1 \\ 5{,}6 \\ 4{,}2 \\ 3 \\ 5{,}1 \\ 1 \\ -3{,}4 \\ -6{,}2 \\ -5{,}1 \\ -3 \\ -1{,}3 \\ 2{,}1 \\ 2 \\ -1{,}9 \\ 1{,}3 \\ 3{,}3 \\ 4{,}9 \end{pmatrix} \quad Y_{block}W_t^p = \begin{pmatrix} 28{,}8 \\ 25{,}5 \\ 29{,}3 \\ 34{,}1 \\ 33{,}9 \\ 35{,}4 \\ 37{,}4 \\ 37{,}9 \\ 39{,}2 \\ 41{,}3 \\ 37{,}9 \\ 34{,}5 \\ 29 \\ 28{,}5 \\ 30{,}6 \\ 33{,}2 \\ 36{,}8 \\ 41 \\ 38{,}2 \\ 41{,}6 \\ 45 \\ 53{,}3 \end{pmatrix}$$

Obrázek 13: Nenulová část blokové matice X a jednotlivé části blokové matice Y

Zdroj: vlastní

Obrázek níže obsahuje vytvořenou kovarianční matici. Můžeme si všimnout, že matice je opravdu symetrická. Zobrazená matice je ve stavu po vytvoření, takže zatím nebyla invertována.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4{,}114 & 2{,}51 & 8{,}394 \\ 2{,}51 & 21{,}832 & -28{,}401 \\ 8{,}394 & -28{,}401 & 1406{,}907 \end{pmatrix}$$

Obrázek 14: Kovarianční matice

Zdroj: vlastní

3.6.2 Implementace v aplikaci

Na následujících dvou obrázcích je vidět, jak byly vytvořeny matice X_{block} a Y_{block}. Proměnná Phat reprezentuje získaný odhad zisků a Xhat představuje vypočítaný odhad celkové poptávky. Proměnná Wphat značí vypočítaný odhad mzdy ze soukromého sektoru a ostatní proměnné jsou popsané v dřívějších kapitolách.

```
Matrix X_block = new Matrix(3 * n, 12);
for (int i = 0; i < n; i++)
{
    // Rovnice spotřeby
    X_block[i, 0] = 1;
    X_block[i, 1] = Phat[i, 0];
    X_block[i, 2] = (i > 0) ? P[i - 1, 0] : P[i, 0];
    X_block[i, 3] = Wphat[i, 0] + Wg[i, 0];

    // Rovnice investic
    X_block[i + n, 4] = 1;
    X_block[i + n, 5] = Phat[i, 0];
    X_block[i + n, 6] = (i > 0) ? P[i - 1, 0] : P[i, 0];
    X_block[i + n, 7] = (i > 0) ? K[i - 1, 0] : K[i, 0];

    // Rovnice soukromých mezd
    X_block[i + 2 * n, 8] = 1;
    X_block[i + 2 * n, 9] = Xhat[i, 0];
    X_block[i + 2 * n, 10] = (i > 0) ? X[i - 1, 0] : X[i, 0];
    X_block[i + 2 * n, 11] = A[i, 0];
}
return X_block;
```

Obrázek 15: Kód pro vytvoření blokové matice X

Zdroj: vlastní

```
Matrix Y_block = new Matrix(3 * n, 1);
for (int i = 0; i < n; i++)
{
    Y_block[i, 0] = C[i, 0];          // Spotřeba
    Y_block[i + n, 0] = I[i, 0];      // Investice
    Y_block[i + 2 * n, 0] = Wp[i, 0]; // Mzdy soukromého sektoru
}
return Y_block;
```

Obrázek 16: Kód pro vytvoření blokové matice Y

Zdroj: vlastní

```
Matrix Sigma = new Matrix(3, 3);
for (int i = 0; i < n; i++)
{
    Sigma[0, 0] += residuals1[i, 0] * residuals1[i, 0];
    Sigma[0, 1] += residuals1[i, 0] * residuals2[i, 0];
    Sigma[0, 2] += residuals1[i, 0] * residuals3[i, 0];
    Sigma[1, 1] += residuals2[i, 0] * residuals2[i, 0];
    Sigma[1, 2] += residuals2[i, 0] * residuals3[i, 0];
    Sigma[2, 2] += residuals3[i, 0] * residuals3[i, 0];
}
Sigma[1, 0] = Sigma[0, 1];
Sigma[2, 0] = Sigma[0, 2];
Sigma[2, 1] = Sigma[1, 2];

// Dělíme n-k, kde k je počet parametrů v každé rovnici (4)
return Sigma.MultiplyScalar(1.0 / (n - 4));
```

Obrázek 17: Kód pro vytvoření kovarianční matice

Zdroj: vlastní

Další obrázek zobrazuje výpočet pomocí třístupňové metody nejmenších čtverců. Nejprve je invertována kovarianční matice. Následně jsou v cyklu získány nenulové části blokových matic X_{block} a Y_{block} a byl na nich postupně proveden odhad koeficientů pomocí maticových operací. Tato část kódu odpovídá rovnici $\hat{\beta} = (X_{block}'(\Sigma^{-1})X_{block})^{-1}X_{block}'(\Sigma^{-1})Y_{block}$, která je blíže popsána na začátku kapitoly.

```
// Výpočet 3SLS odhadů
Matrix SigmaInverse = Sigma.Inverse(); // Kovarianční matice
Matrix XtSigmaInvX = new Matrix(12, 12);
Matrix XtSigmaInvY = new Matrix(12, 1);

for (int i = 0; i < n; i++)
{
    Matrix Xi = X_block.GetSubMatrix(3 * i, 3 * (i + 1), 0, 12);
    Matrix Yi = Y_block.GetSubMatrix(3 * i, 3 * (i + 1), 0, 1);

    Matrix XiTSigmaInv = Xi.Transpose().Multiply(SigmaInverse);
    XtSigmaInvX = XtSigmaInvX.Add(XiTSigmaInv.Multiply(Xi));
    XtSigmaInvY = XtSigmaInvY.Add(XiTSigmaInv.Multiply(Yi));
}

Matrix beta3SLS = XtSigmaInvX.Inverse().Multiply(XtSigmaInvY);
```

Obrázek 18: Implementace odhadů třístupňové metody nejmenších čtverců

Zdroj: vlastní

3.7 Metoda maximální věrohodnosti

Cílem metody je nalézt hodnoty parametrů, které maximalizují pravděpodobnost pozorovaných dat. Taková funkce vyjadřuje pravděpodobnost pozorování dat jako funkci parametrů modelu. Za počáteční hodnoty byly zvoleny výsledky dvoustupňové metody nejmenších čtverců. Poté byl na základě parametrů vypočítán gradient, kde každý prvek odpovídá derivaci logaritmické věrohodnostní funkce (log-likelihood funkce) podle jednoho z parametrů modelu. Tento vektor ukazuje směr, kterým by se měl každý parametr měnit tak, aby se maximalizovala (nebo minimalizovala) daná funkce. Velikost kroku h byla zvolena jako 1e-6 a maximální počet opakování byl nastaven na sto.

Následně byla pro každý parametr θ_i vytvořena kopie vektoru θ, kde k první kopii je připočteno h a od druhé kopie se h odečetlo. Nad každým takto získaným vektorem byla provedena aproximace logaritmické věrohodnostní funkce. Gradient se poté spočítá jako rozdíl těchto dvou log-likelihood hodnot vydělený dvojnásobkem kroku h. Tento postup je založen na metodě konečných diferencí pro derivaci funkce $L(\theta)$:

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} \approx \frac{L(\theta_i + h) - L(\theta_i - h)}{2h},$$

kde:

- $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}$ je derivace funkce $L(\theta)$ podle parametru θ_i,
- h představuje krok, který udává, jak daleko od bodu θ_i se pohybujeme,
- $L(\theta_i + h)$ prezentuje hodnotu funkce L v bodě $\theta_i + h$,
- $L(\theta_i - h)$ obsahuje hodnotu funkce L v bodě $\theta_i - h$.

Poté byl proveden výpočet Hesseho matice. Tato čtvercová matice o dimenzi 12×12 obsahuje druhé derivace věrohodnostní funkce podle dvojic všech parametrů a určuje změnu gradientu v závislosti na změně parametrů. Matice byla sestavena podle předpisu:

$$H(\mathrm{L}(\theta)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_{12}} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2 \partial \theta_{12}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_{12} \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_{12} \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_{12}^2} \end{pmatrix},$$

kde:

- $\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i^2}$ je druhá derivace funkce $L(\theta)$ podle proměnné θ_i,
- $\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ je smíšená druhá derivace funkce $L(\theta)$ podle proměnných θ_i a θ_j.

Dalším krokem byla aktualizace hodnot parametrů modelu tak, aby se maximalizovala (nebo minimalizovala) logaritmická věrohodnostní funkce dle vzorce:

$$\Delta\theta = -H^{-1} \cdot \nabla L,$$

kde:

- H^{-1} je inverzní varianta Hesseho matice,
- $\Delta\theta$ představuje vektor změn parametrů,
- ∇L obsahuje vektor gradientu logaritmické věrohodnostní funkce.

Vektor $\Delta\theta$ reprezentuje informaci o směru úpravě každého parametru, abychom se přiblížili k maximu (nebo minimu) dané logaritmická věrohodnostní funkce. Aktualizace byla provedena sečtením vektoru změn parametrů $\Delta\theta$ a vektoru parametrů před aktualizací θ. Touto operací vznikne aktualizovaný vektor parametrů θ, který byl posunut k maximu nebo minimu logaritmická věrohodnostní funkce o velikost, která byla určena výpočtem $\Delta\theta$. Výpočet gradientu, Hesseho matice a aktualizace hodnot parametrů probíhá, dokud není změna v parametrech menší než zvolená tolerance *1e-6* nebo dokud počet iterací nepřekročí hodnotu sto.

Pro výpočet metody maximální věrohodnosti byla použita Newtonova metoda (Newton-Raphson). Jakmile dojde ke konvergenci (ukončení iterativního cyklu), vektor θ obsahuje výsledné odhady parametrů rovnice.

3.7.1 Implementace v aplikaci

Na obrázku níže je vidět, že byl použit jako počáteční odhad parametrů výsledek z dvoustupňové metody nejmenších čtverců. Maximální počet iterací k dosáhnutí konvergence je roven stu a tolerance mezi změnou v parametrech je nastavena na hodnotu 0.000001. V každé iteraci se vypočítá gradient a Hesseho matice, provede se výpočet hodnoty Δθ, aktualizuje se hodnota parametrů θ a zkontroluje se, zda se má v cyklu pokračovat, nebo bylo dosaženo konvergence.

```
// Počáteční odhad parametrů (použijeme výsledky 2SLS jako počáteční bod)
double[] theta = new double[12];
for (int i = 0; i < 4; i++)
{
   theta[i] = coefficients2SLS[$"C_{i}"];
   theta[i + 4] = coefficients2SLS[$"I_{i}"];
   theta[i + 8] = coefficients2SLS[$"W^p_{i}"];
}

int maxIterations = 100;
double tolerance = 1e-6;
for (int iter = 0; iter < maxIterations; iter++)
{
   double[] gradient = CalculateGradient(theta, n, P, Wp, Wg, K, X, A, C, I);
   Matrix hessian = CalculateHessian(theta, n, P, Wp, Wg, K, X, A, C, I);

   // Řešení systému H * delta = -g
   Matrix deltaTheta = hessian.Inverse().Multiply(
                                new Matrix(gradient).MultiplyScalar(-1));

   // Aktualizace parametrů
   for (int i = 0; i < theta.Length; i++)
   {
       theta[i] += deltaTheta[i, 0];
   }

   // Kontrola konvergence
   if (gradient.Select(Math.Abs).Max() < tolerance)
   {
       break;
   }
}
return theta;
```

Obrázek 19: Implementace Newton-Raphson metody

Zdroj: vlastní

3.8 Výsledky

Následující tabulka obsahuje výsledky odhadů v aplikace. Jednotlivé sloupce obsahují vypočítané koeficienty dané metody. Šedě zvýrazněné sloupce obsahují výběr výsledků z knihy Econometric analysis.

Tabulka 4: Souhrnná tabulka všech výsledků

Koeficienty	OLS	OLS: Greene	2SLS	2SLS: Greene	3SLS	3SLS: Greene	MLE
α_0 (C)	14,4446	16,2	14,7305	16,6	12,7083	16,4	16,2366
α_1 (C)	0,1994	0,193	-0,1623	0,017	-0,1332	0,125	0,1929
α_2 (C)	0,0941	0,09	0,3408	0,216	0,642	0,163	0,0899
α_3 (C)	0,8304	0,796	0,8732	0,81	0,7697	0,79	0,7962
β_0 (I)	13,6585	10,1	18,132	20,3	29,3338	28,2	8,3646
β_1 (I)	0,4593	0,48	0,2441	0,15	0,0933	-0,013	0,5145
β_2 (I)	0,2407	0,333	0,4139	0,616	0,5917	0,756	0,2256
β_3 (I)	-0,1204	-0,13	-0,139	-0,158	-0,1974	-0,195	-0,0977
γ_0 (W^p)	0,8395	1,5	0,8121	1,5	1,8344	1,8	-0,0659
γ_1 (W^p)	0,4391	0,439	0,451	0,439	0,2374	0,4	0,4395
γ_2 (W^p)	0,1371	0,146	0,1259	0,147	0,2736	0,181	0,1461
γ_3 (W^p)	0,1081	0,13	0,1051	0,13	0,349	0,15	0,1302

Zdroj: Šedé sloupce zpracovány dle [1]

Na základě výsledných hodnot v tabulce lze konstatovat, že každá metoda odhadu poskytuje jiné výsledky pro parametry modelu, což by mohlo být důsledkem rozdílné schopnosti těchto metod řešit problémy, jako je endogenita a simultánnost v modelech s více rovnicemi. Metody OLS a MLE se zdají být stabilnější, zatímco 2SLS a 3SLS vykazují větší variabilitu, což může odrážet jejich citlivost na výběr instrumentů a specifikaci modelu.

ZÁVĚR

Tato práce se zaměřila na problematiku modelu simultánních rovnic, které jsou v ekonometrii klíčovým nástrojem pro analýzu vzájemných vztahů mezi ekonomickými veličinami. V teoretické části byly popsány základní koncepty spojené s tímto modelem, včetně endogenních a exogenních proměnných, a byly představeny hlavní analytické metody používané pro řešení těchto rovnic, jako je zobecněná metoda nejmenších čtverců, dvoustupňová a třístupňová metoda nejmenších čtverců a metoda maximální věrohodnosti.

Praktická část práce se zaměřila na vytvoření aplikace, která implementuje tyto analytické metody a umožňuje jejich použití na reálných datech, konkrétně na Kleinově modelu. Aplikace je navržena tak, aby byla uživatelsky přívětivá a poskytovala uživatelům možnost efektivně analyzovat a řešit daný model simultánních rovnic. V teoretické části se práce zabývá popisem jednotlivých výpočtů, klade důraz na ukázky vytvořených matic s reálnými daty v kritických krocích různých analytických metod. Výsledky získané pomocí aplikace potvrdily teoretická východiska a ukázaly praktickou využitelnost zvolených metod. Součástí práce je také uživatelská příručka, která poskytuje návod pro používání aplikace.

Celkově tato práce přispívá k lepšímu porozumění aplikování vybraných analytických metod nad modelem simultánních rovnic v ekonomické analýze. Vyvinutá aplikace představuje praktický nástroj, který pomáhá porozumět jednotlivým krokům implementace vybraných analytických metod.

POUŽITÁ LITERATURA

[1] GREENE, W. H. *Econometric analysis*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall. 2003. ISBN 0-13-066189-9.

[2] JOHNSTON, J. a DINARDO, J. *Econometric methods*. New York: McGraw-Hill Book, 1997. ISBN 0-07-913121-2.

[3] WOOLDRIDGE, J. M. *Econometric Analysis of Cross Section and panel data*. MIT Press, 2011. ISBN 9780262232586.

[4] BALTAGI, B. H. *Econometrics*. Springer. Berlin: Springer, 2008. ISBN 978-3-540-76515-8.

[5] JUDGE, G. G. a GRIFFITHS, W. E. a HILL, R. C. a LÜTKEPOHL, H. a LEE T.-C. *The theory and practice of Econometrics*. New York: Wiley, 1985. ISBN 0-471-89530-X.

[6] HUŠEK, Roman. *Ekonometrická analýza*: *[předmět a metody: simulační modely a techniky: ekonometrické prognózování]*. Praha: Ekopress, 1999. ISBN 80-86119-19-X.

[7] MAREK, Jaroslav a STRÁNSKÁ, Pavla. *Hradecké ekonomické dny: mezinárodní vědecká konference: [Simultánní rovnice a modelování poptávky po nových bytových jednotkách].* Hradec Králové: Gaudeamus, 2015. ISBN 978-80-7435-547-9.

[8] CASELLA, G. a BERGER, R. L. *Statistical inference*. Belmont, Ca: Brooks/Cole, 2002. ISBN 9780534243128.

[9] LEHMANN, E. L. a CASELLA, G. *Theory of Point Estimation.* New York: Springer, 1998. ISBN 0-387-98502-6.

[10] HANSEN, L. P. *Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators.* Econometrica, vol. 50, no. 4, 1982. https://doi.org/10.2307/1912775.

[11] BOLSTAD, W. M. *Introduction to Bayesian Statistics. Hoboken.* N.J.: WileyInterscience, 2004. ISBN 978-1-118-09315-8.

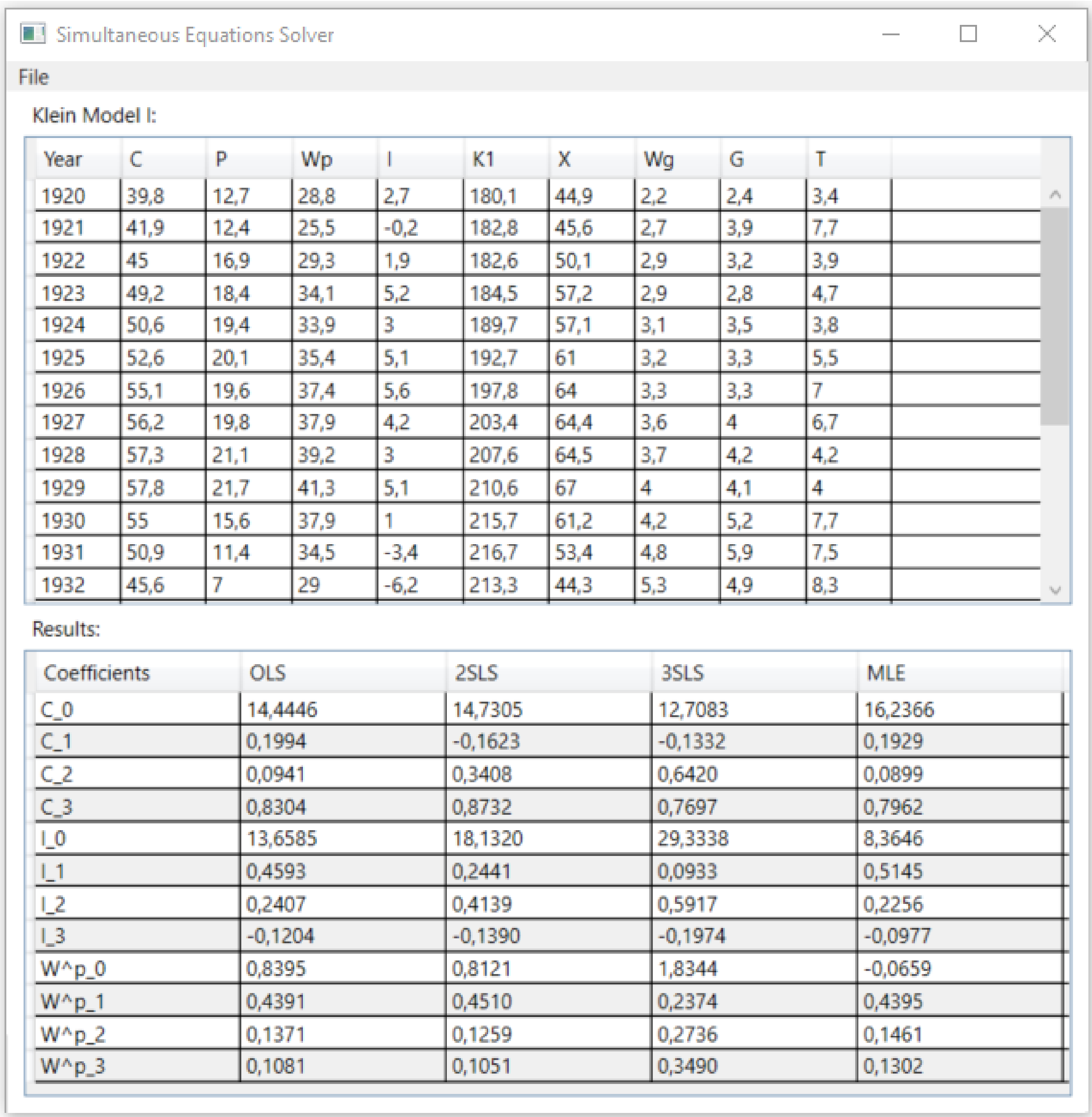
[12] CHAPRA, S. C. a CANALE, R. P. *Numerical methods for engineers*. New York: McGraw-Hill Education, 2015. ISBN 978–0–07–339792–4.

[13] NOCEDAL, J. a WRIGHT, S. J. *Numerical optimization, Springer series in operations research and financial engineering*. New York: Springer, 2006. ISBN 978-0387-30303-1.

PŘÍLOHY

Příloha A – Uživatelská příručka aplikace

Aplikace Simultaneous Equations Solver se skládá ze dvou hlavních částí, horní polovina tvoří tabulku, která obsahuje načtená data. Tato data představují Klein Model I, jehož hodnoty jsou zobrazeny v tabulkové formě. Tabulku lze třídit po kliknutí na libovolný sloupec, a to buď vzestupně nebo sestupně. Dolní polovina aplikace tvoří tabulka s odhady koeficientů. Tuto tabulku lze také třídit po kliknutí na kýžený sloupec.


Simultaneous Equations Solver

File

Klein Model I:

Year	C	P	Wp	I	K1	X	Wg	G	T
1920	39,8	12,7	28,8	2,7	180,1	44,9	2,2	2,4	3,4
1921	41,9	12,4	25,5	-0,2	182,8	45,6	2,7	3,9	7,7
1922	45	16,9	29,3	1,9	182,6	50,1	2,9	3,2	3,9
1923	49,2	18,4	34,1	5,2	184,5	57,2	2,9	2,8	4,7
1924	50,6	19,4	33,9	3	189,7	57,1	3,1	3,5	3,8
1925	52,6	20,1	35,4	5,1	192,7	61	3,2	3,3	5,5
1926	55,1	19,6	37,4	5,6	197,8	64	3,3	3,3	7
1927	56,2	19,8	37,9	4,2	203,4	64,4	3,6	4	6,7
1928	57,3	21,1	39,2	3	207,6	64,5	3,7	4,2	4,2
1929	57,8	21,7	41,3	5,1	210,6	67	4	4,1	4
1930	55	15,6	37,9	1	215,7	61,2	4,2	5,2	7,7
1931	50,9	11,4	34,5	-3,4	216,7	53,4	4,8	5,9	7,5
1932	45,6	7	29	-6,2	213,3	44,3	5,3	4,9	8,3

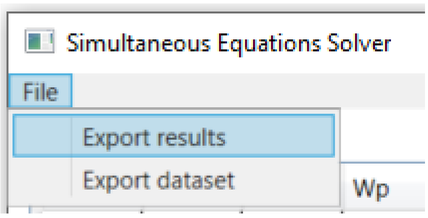
Results:

Coefficients	OLS	2SLS	3SLS	MLE
C_0	14,4446	14,7305	12,7083	16,2366
C_1	0,1994	-0,1623	-0,1332	0,1929
C_2	0,0941	0,3408	0,6420	0,0899
C_3	0,8304	0,8732	0,7697	0,7962
I_0	13,6585	18,1320	29,3338	8,3646
I_1	0,4593	0,2441	0,0933	0,5145
I_2	0,2407	0,4139	0,5917	0,2256
I_3	-0,1204	-0,1390	-0,1974	-0,0977
W^p_0	0,8395	0,8121	1,8344	-0,0659
W^p_1	0,4391	0,4510	0,2374	0,4395
W^p_2	0,1371	0,1259	0,2736	0,1461
W^p_3	0,1081	0,1051	0,3490	0,1302

Obrázek 20: Ukázka aplikace

Zdroj: vlastní

Zároveň je možné exportovat data zobrazená v horní polovině aplikace do cvs souboru. Zobrazí se kontextové okno, které umožní soubor uložit. Dolní tabulka lze také exportovat do csv souboru. Přístup k této funkci je umožněn kliknutím na kontextové menu „File“ v horním levém rohu. Pokud si přejete exportovat data, zvolte možnost „Export dataset“ a pokud si přejete exportovat odhady koeficientů rovnic, použijte „Export results“.



Obrázek 21: Ukázka exportu z aplikace

Zdroj: vlastní

Interpretace názvů sloupců dat

- **Year (Rok):** tento sloupec obsahuje roky 1920 až 1941. Jedná se o časovou osu, která udává, pro který rok jsou ostatní proměnné zaznamenány.
- **C (Consumption – Spotřeba):** představuje celkovou ekonomickou spotřebu v daném roce. Zahrnuje výdaje domácností na zboží a služby.
- **P (Corporate Profits – Firemní zisky):** zahrnují celkový zisk firem po odečtení všech nákladů, včetně mezd, materiálů a daní.
- **Wp (Private Wage Bill – Soukromé mzdy):** celková částka, kterou soukromé firmy vyplácejí svým zaměstnancům ve formě mezd.
- **I (Investment – Investice):** obsahuje výdaje na nákup nového kapitálu, jako jsou stroje, budovy a další vybavení, které firmy používají k výrobě zboží a služeb.
- **K1 (Previous Year's Capital Stock – Kapitál z předchozího roku):** reprezentuje hodnotu kapitálu, který byl k dispozici v předchozím roce.
- **X (GNP – Hrubý národní produkt):** je celková hodnota všech zboží a služeb vyrobených národním hospodářstvím za jeden rok. Zahrnuje spotřebu, investice, vládní výdaje a čistý export.
- **Wg (Government Wage Bill – Vládní mzdy):** zobrazuje částku, kterou vláda vyplácí svým zaměstnancům ve formě mezd.

- **G (Government Spending – Vládní výdaje):** představuje všechny výdaje vlády na nákup zboží a služeb, včetně výdajů na infrastrukturu, sociální programy a další vládní činnosti.
- **T (Taxes – Daně):** peníze, které vláda vybere od domácností a firem.

Použité rovnice

V aplikaci jsou použité rovnice z následujícího obrázku. Tyto rovnice byly získány společně s daty Kleinova modelu a nelze do nich nijak zasahovat.

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 P_{t-1} + \alpha_3 \left(W_t^p + W_t^g\right) + \varepsilon_{1t}$$
$$I_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + \beta_3 K_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$
$$W_i^p = \gamma_0 + \gamma_1 X_t + \gamma_2 X_{t-1} + \gamma_3 A_t + \varepsilon_{3t}$$
$$X_t = C_t + I_t + G_t$$
$$P_t = X_t - T_t - W_t^p$$
$$K_t = K_{t-1} + I_t$$

Obrázek 22: Použité rovnice v aplikaci odpovídající pro Kleinův model I

Zdroj: [1]

Interpretace výsledků

V rovnici spotřeby jsou odhadovány koeficienty $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Ve výsledcích jsou tyto odhady zobrazovány jako C_0, C_1, C_2, C_3. Podobně jsou ve výsledcích mapovány koeficienty beta na I_{index} a koeficienty gama na W_{index}^p.

Každý sloupec s odhady odpovídá jiné použité metodě odhadů.

- OLS – metoda nejmenších čtverců,
- 2SLS – dvoustupňová metoda nejmenších čtverců,
- 3SLS – třístupňová metoda nejmenších čtverců,
- MLE – metoda maximální věrohodnosti.

Pokud bychom chtěli interpretovat výsledky z metody nejmenších čtverců pro rovnici spotřeby, tak se podíváme do tabulky výsledků a zjistíme, že C_1= 0,1994, pokud se podíváme na rovnice, tak vidíme, že se koeficient α_1 násobí s P_t, což je proměnná symbolizující firemní zisky. Takže pokud firemní zisky vzrostou o jedna, spotřeba vzroste o 0,1994. Pokud by byl odhad koeficientu C_1 záporný (C_1 = 0,2), tak za předpokladu, že firemní zisky vzrostou o jedna, odpovídající proměnná (v tomto případě by to byla spotřeba) bude o 0,2 klesat.