

UNIVERZITA PARDUBICE
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY
A INFORMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2010

Peter Majerík

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Numerické řešení Poissonovy rovnice popisující rozložení potenciálu
elektrického pole

Peter Majerík

Bakalářská práce

2010

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Peter MAJERÍK**
Osobní číslo: **I07559**
Studijní program: **B2612 Elektrotechnika a informatika**
Studijní obor: **Komunikační a mikroprocesorová technika**
Název tématu: **Numerické řešení poissonovy rovnice popisující rozložení potenciálu elektrického pole**
Zadávací katedra: **Katedra elektrotechniky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Rozdělení potenciálu elektrického pole je popsáno poissonovou diferenciální rovnicí ($\Delta u = f$). Pro řešení lze použít analytickou nebo numerickou metodu. Použití analytických metod je jen velmi omezené pro jednoduché oblasti s jednoduchými okrajovými podmínkami. Ve většině reálných případů musíme použít vhodnou numerickou metodu. Jedna z numerických metod je metoda konečných diferencí. Je založená na náhradě parciálních derivací diferencemi na obdélníkové síti. Její aplikací se soustava převede na soustavu lineárních rovnic. Pro její řešení lze použít různé přibližné metody.

Teoretická část:

- popis způsobů řešení problému
- popis možností využití komerčního softwaru pro řešení
- popis metody konečných diferencí
- popis přibližných metod k řešení vzniklé soustavy lineárních rovnic

Aplikační část:

- výpočet rozložení potenciálu vlastním programem na následujících příkladech:
- pole rovinného kondenzátoru
- pole mezi elektrodami (dvojměrný případ)
- srovnání výsledků analytických a přibližných metod
- vizualizace výsledků - spojení vlastního programu s jiným softwarem

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

E. Vitásek: Numerické metody. SNTL, Praha 1987.

Sedlák, Bedřich Štoll, Ivan - Elektřina a magnetismus (Praha: Karolinum, 1993)

Vedoucí bakalářské práce:

RNDr. Josef Rak

Katedra informačních technologií

Datum zadání bakalářské práce:

15. ledna 2010

Termín odevzdání bakalářské práce:

14. května 2010



prof. Ing. Simeon Karamazov, Dr.

děkan



Ing. Zdeněk Němec, Ph.D.

vedoucí katedry

V Pardubicích dne 31. března 2010

Prohlášení autora

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 20. 5. 2010

Peter Majerík

Poděkování:

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu bakalářské práce, RNDr. Josefu Rakovi, za poskytnuté odborné rady a připomínky během zpracování této práce a všem ostatním lidem, kteří mě podporovali.

ANOTACE

Předmětem této bakalářské práce je popis řešení Poissonovy rovnice, která popisuje rozložení elektrického potenciálu v elektrickém poli, pomocí numerické metody. Pro přesné řešení slouží analytické metody, které jsou omezené jen pro jednoduché oblasti, proto je potřeba zvolit vhodnou numerickou metodu i když poskytuje jenom přibližné řešení. Touto numerickou metodou je metoda konečných diferencí. Cílem této práce je porovnat řešení analytické metody s numerickou metodou a pomocí numerické metody vyřešit Poissonovu rovnici.

KLÍČOVÁ SLOVA

řešení, rovnice, matice, metody, podmínky

TITLE

The numerical solving of the Poisson equation describing the distribution of the potential of the electric field

ANNOTATION

A point of this bachelor thesis is to describe the solving of the Poisson equation, which describes the distribution of the electric potential in the electric field by numerical method. For the correct solving we are using analytical methods, which are limited only for simply solutions, which are why we need to choose some fitting numerical method even if it provides us only approximately solving. This numerical method is the finite difference method. The point of this work is to compare the solving of analytical method with numerical method and by numerical method resolve the Poisson equation.

KEYWORDS

solving, equations, matrixes, methods, conditions

Obsah

Úvod	10
1. Potenciál elektrostatického pole	11
2. Metoda konečných diferencí (metoda sítí)	13
2.1 Dirichletova okrajová podmínka.....	17
2.2 Neumannova okrajová podmínka	17
2.3 Sestavení matice	18
2.4 Algoritmus na sestavení matice	20
3. Řešení matic	24
3.1 Iterační metody	24
3.1.1 Jacobiova iterační metoda	25
3.1.2 Gassova-Seidelova metoda	28
3.2 Gaussova eliminační metoda	30
3.3 Porovnání výsledků iteračních a eliminačních metod	34
4. Porovnání metody konečných diferencí s analytickou metodou	38
5. Numerické řešení Poissonovy rovnice	43
5.1 Příklad 1	43
5.2 Příklad 2.....	45
Závěr.....	48
Použitá literatura.....	49

Seznam obrázků

Obrázek 1 Obdélník představující elektrostatické pole.....	12
Obrázek 2 Zobrazení uzlu sítě a jeho sousedních uzlů.....	16
Obrázek 3 Příklad sítě.....	16
Obrázek 4 Příklad sítě s určením neznámých.....	19
Obrázek 5 Příklad sítě.....	36
Obrázek 6 graf funkce $f(x, y)$ vytvořený v Maple	39

Obrázek 7 Graf průběhu potenciálu mezi deskami rovinného kondenzátoru	44
Obrázek 8 Uzemněné rovinné rovnoběžné polonekonečné vodivé desky s kolmou rovinnou deskou.....	45

Seznam tabulek

Tabulka 1 Porovnání největších rozdílů mezi analytickou metodou a metodou konečných diferencí pro různé velikosti kroků sítě	42
Tabulka 2 Potenciál mezi deskami rovinného kondenzátoru	44
Tabulka 3 Potenciál mezi dvěma rovnoběžnými uzemněnými elektrodami, ukončenými rovinnou elektrodou.....	47
Tabulka 4 Příklad vypočtený pomocí tabulkového procesoru	47

Úvod

Elektrický potenciál je skalární fyzikální veličina, která popisuje potenciální energii jednotkového elektrického náboje v neměnném elektrickém poli. Jedná se tedy o potenciál elektrického pole, tzn. množství práce potřebné pro přenesení jednotkového elektrického náboje ze vztažného bodu, kterému je přisouzen nulový potenciál, do daného místa. Za místo s nulovým potenciálem (tzn. vztažný bod) se obvykle bere buď nekonečně vzdálený bod (běžné u jiných potenciálů, u elektřiny obvykle pouze v teoretických úlohách), nebo povrch Země. Ze vztahu mezi intenzitou elektrického pole a elektrickým potenciálem a podle Gaussova zákona elektrostatiky pro spojitě rozložený náboj vyplývá Poissonova rovnice

$$\Delta^2 \varphi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Pro řešení lze použít analytickou nebo numerickou metodu. Použití analytických metod je jen velmi omezené pro jednoduché oblasti s jednoduchými okrajovými podmínkami. Ve většině reálných případů musíme použít vhodnou numerickou metodu. Jedna z numerických metod je metoda konečných diferencí. Je založená na aproximaci parciálních derivací diferencemi na obdélníkové síti. Její aplikací se soustava převede na soustavu lineárních rovnic. Pro její řešení lze použít různé přibližné metody.

1. Potenciál elektrostatického pole

Poissonova rovnice

$$\Delta^2 \varphi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad 1.1$$

ε_0 – permitivita vakua ($\varepsilon_0 = 8,854187817 \times 10^{-12}$ F/m)

σ - plošná hustota náboje je fyzikální veličina, která je definována vztahem:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS}$$

kde Q je náboj a S je plocha a jednotkou plošné hustoty náboje je coulomb na metr

čtvoreční $\left[\frac{C}{m^2} \right]$

V případě, že $\sigma = 0$ vzniká Laplaceova rovnice:

$$\Delta^2 \varphi = 0 \quad 1.2$$

Poissonova rovnice vyplývá ze vztahu mezi intenzitou elektrického pole \vec{E} a elektrickým potenciálem φ :

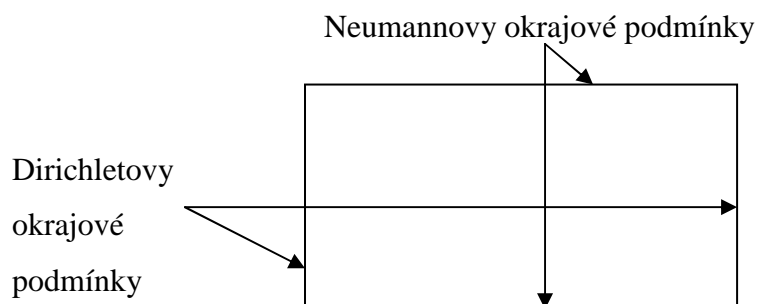
$$\vec{E} = -grad\varphi \quad 1.3$$

Intenzitou elektrického pole \vec{E} podle Gaussovy věty v diferenciálním tvaru pro spojitě rozložený elektrický náboj:

$$div\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad 1.4$$

Budeme řešit plošné rozložení potenciálu v elektrostatickém poli rovinného kondenzátoru.

Obrázek 1 Obdélník představující elektrostatické pole



Pro určení okrajových hodnot použijeme Dirichletovy a Neumannovy okrajové podmínky podle Obrázek 1.

Pro Dirichletovu okrajovou podmínku je známa hodnota okrajové funkce

$$f : \varphi(x) = f(x).$$

Pro Neumannovu okrajovou podmínku je známa derivace normály okrajové funkce.

2. Metoda konečných diferencí (metoda sítí)

Je to metoda pro řešení parciálních diferenciálních rovnic, zvláště eliptického typu. Spočívá v tom, že v oblasti, ve které hledáme řešení, zvolíme nějakou konečnou množinu bodů, kterou nazveme sítí a příslušné body jejími uzly. Potom nahradíme derivace hledané funkce, které se vyskytují v dané diferenciální rovnici a v okrajových podmínkách, lineárními kombinacemi funkčních hodnot v těchto uzlech. Tím dostaneme místo původního problému soustavu konečně mnoha rovnic pro hodnoty hledané funkce v uzlech.

Příklad budeme počítat pomocí programu, který vytvoříme v programovacím jazyku C#. Je vysokoúrovňový objektově orientovaný programovací jazyk vyvinutý firmou Microsoft. Microsoft založil C# na jazycích C++ a Java (a je tedy nepřímým potomkem jazyka C, ze kterého čerpá syntaxi). C# lze využít k tvorbě databázových programů, webových aplikací a stránek, webových služeb, formulářových aplikací ve Windows, softwaru pro mobilní zařízení (PDA a mobilní telefony) atd.

Řešení Poissonovy rovnice metodou konečných diferencí (metoda sítí):

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad 2.1$$

Tuto funkci můžeme rozvinout jako nekonečnou mocninnou řadu, která se nazývá Taylorova řada. Toto vyjádření funkce pomocí Taylorovy řady se nazývá Taylorův rozvoj.

Věta 2.1¹: Necht' funkce f je diferencovatelná až do řádu $n+1$ v bodě x_0 a jeho okolí $U(x_0)$. Potom pro každé $x \in U(x_0)$ platí:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \quad 2.2$$

Existuje $\xi = \xi(x)$ ležící mezi x a x_0 (a závislé na x) takové, že:

¹ *Matematická analýza* [online]. 2007 [cit. 2010-05-04]. Taylorova formule. Dostupné z WWW: <http://analyza.kma.zcu.cz/PREDMETY/M1_MA1/materialy/MA1_7_Taylorova_formule.pdf>.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad 2.3$$

kde

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = T_n(x) \quad 2.4$$

a

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = R_{n+1}(x_0, x) \quad 2.5$$

Polynom $T_n(x)$ nejvýše n -tého stupně se nazývá Taylorův polynom funkce f v bodě x_0 . Rozdíl $f(x) - T_n(x) = R_{n+1}(x_0, x)$ se nazývá chyba aproximace funkce f Taylorovým polynomem.

Vztah:

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x_0, x) \quad 2.6$$

se nazývá Taylorovým rozvojem nebo Taylorovou formulí (v bodě x_0).

Věta 2.2²: Nechť funkce f má v bodě x_0 a jeho okolí $U(x_0)$ derivace všech řádů a existuje číslo $M > 0$ takové, že $|f^{(n)}(x)| \leq M$ pro všechna $n \geq 0$ a pro libovolné $x \in U(x_0)$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n+1}(x_0, x) = 0 \quad 2.7$$

Pro řešení Poissonovy rovnice aproximujeme parciální derivace diferenčními kvocienty. Přitom vyjdeme z Věty 2.1 a sestavíme Taylorovu formuli:

$$\varphi(x + h, y) = \varphi(x, y) + h \cdot \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + R_n \quad 2.8$$

$$\varphi(x - h, y) = \varphi(x, y) - h \cdot \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + R_n \quad 2.9$$

² *Matematická analýza* [online]. 2007 [cit. 2010-05-04]. Taylorova formule. Dostupné z WWW: <http://analyza.kma.zcu.cz/PREDMETY/M1_MA1/materialy/MA1_7_Taylorova_formule.pdf>.

Protože Taylorův rozvoj je rozvoj funkce v nekonečnou řadu, teda $n \rightarrow \infty$, tak můžeme podle Věty 2.2 zanedbat chybu R_n a odečteme-li rovnici 2.9 od rovnice 2.8, obdržíme:

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \approx \frac{1}{2h} [\varphi(x+h, y) - \varphi(x-h, y)] \quad 2.10$$

Podobně podle y dostaneme Taylorovou formuli:

$$\varphi(x, y+k) = \varphi(x, y) + k \cdot \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} + \frac{k^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + R_n \quad 2.11$$

$$\varphi(x, y-k) = \varphi(x, y) - k \cdot \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} + \frac{k^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + R_n \quad 2.12$$

Po odečtení dostaneme:

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \approx \frac{1}{2k} [\varphi(x, y+k) - \varphi(x, y-k)] \quad 2.13$$

Sečtením rovnic 2.8 a 2.9 dostaneme výraz pro druhou derivaci hledané funkce φ podle x :

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \approx \frac{[\varphi(x-h, y) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x+h, y)]}{h^2} \quad 2.14$$

Podobně podle y :

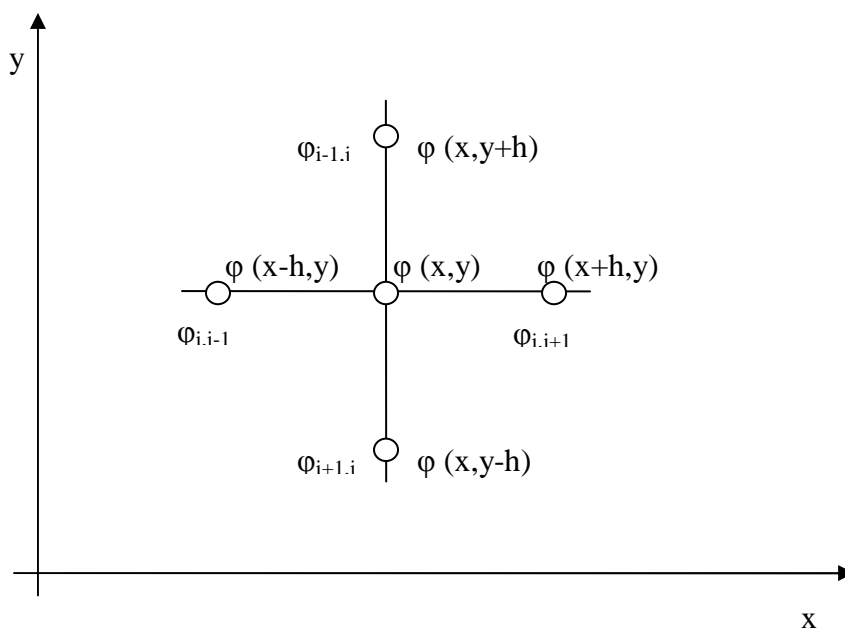
$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} \approx \frac{[\varphi(x, y-k) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x, y+k)]}{k^2} \quad 2.15$$

Parametry h a k se nazývají krokem sítě a za předpokladu, že $h = k$ vyplývá:

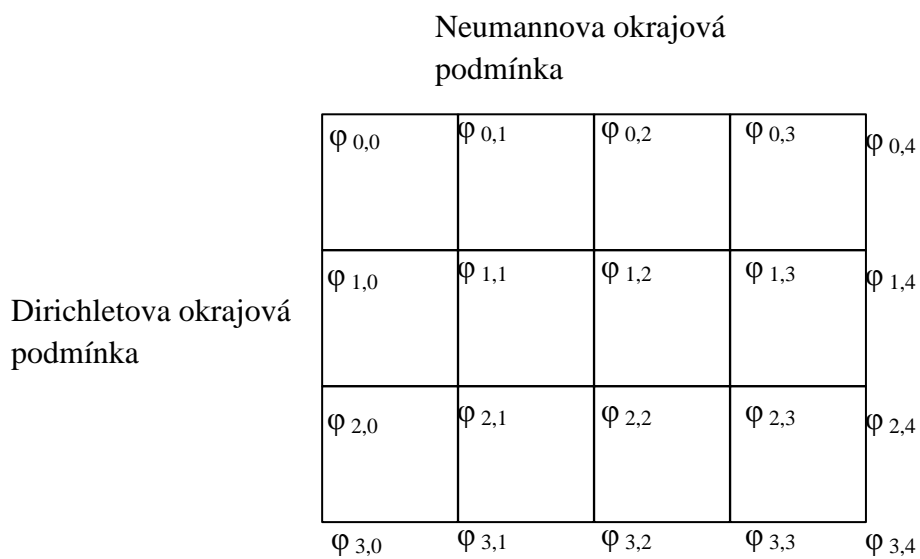
$$\varphi(x-h, y) + \varphi(x+h, y) + \varphi(x, y+h) + \varphi(x, y-h) - 4\varphi(x, y) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} h^2 \quad 2.16$$

Tato metoda vede na řešení soustavy lineárních. Tato rovnice se nazývá pětibodovou aproximací.

Obrázek 2 Zobrazení uzlu sítě a jeho sousedních uzlů



Obrázek 3 Příklad sítě



Rovnice 2.16 zobrazena podle uzlů sítě:

$$\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} - 4\varphi_{i,j} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} h^2 \tag{2.17}$$

2.1 Dirichletova okrajová podmínka

Tu platí, že část hranice elektrostatického pole je tvořena součástí vodiče a proto

$$\varphi = konst.$$

Z Obrázku 3 vyplývá:

$$\varphi_{i,j} = konst.$$

$$\text{kde } i = (0, \dots, 3) \text{ a } j = (0, 4)$$

2.2 Neumannova okrajová podmínka

Pro tuto podmínku je známá derivace:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = f(x, y) \tag{2.18}$$

n – vektor vnější normály.

$f(x, y)$ – známá funkce, nebo hodnota

Vztah 2.18 můžeme upravit do tvaru:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dn} = f(x, y) \tag{2.19}$$

$\frac{dx}{dn} = \cos \alpha$, $\frac{dy}{dn} = \sin \alpha$, kde α je směrový úhel. Protože v našem případě jsou směrové

úhly $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$, tak $\frac{dx}{dn} = 0$, $\frac{dy}{dn} = 1$ a $\frac{dy}{dn} = -1$. $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ a pro výpočet $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ použijeme vztah

2.13.

Pro hranici, s kterou svírá vektor vnější normály n směrový úhel $\alpha = \pi/2$, platí:

$$\frac{1}{2h} [\varphi(x, y+h) - \varphi(x, y-h)] = f(x, y) \tag{2.20}$$

Protože $\varphi(x, y+h)$ je neznámé, tak to vyjádříme:

$$\varphi(x, y+h) = 2h \cdot f(x, y) + \varphi(x, y-h) \tag{2.21}$$

Tohle potom dosadíme do rovnice 2.16 pro daný okrajový uzel:

$$\varphi(x-h, y) + \varphi(x+h, y) + 2h \cdot f(x, y) + \varphi(x, y-h) + \varphi(x, y+h) - 4\varphi(x, y) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} h^2 \quad 2.22$$

Pro hranici, s kterou svírá vektor vnější normály n směrový úhel $\alpha = 3\pi/2$, to platí podobně:

$$\varphi(x, y-h) = 2h \cdot f(x, y) + \varphi(x, y+h) \quad 2.23$$

$$\varphi(x-h, y) + \varphi(x+h, y) + \varphi(x, y+h) + 2h \cdot f(x, y) + \varphi(x, y-h) - 4\varphi(x, y) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} h^2 \quad 2.24$$

Z Obrázku 3 vyplývá:

Pro hranici, s kterou svírá vektor vnější normály n směrový úhel $\alpha = \pi/2$:

$$\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} + 2h \cdot f(x, y) + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} - 4\varphi_{i,j} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} h^2 \quad 2.25$$

kde $i = 0$ a $j = (1, \dots, 3)$

Pro hranici, s kterou svírá vektor vnější normály n směrový úhel $\alpha = 3\pi/2$:

$$\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j} + 2h \cdot f(x, y) + \varphi_{i+1,j} - 4\varphi_{i,j} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} h^2 \quad 2.26$$

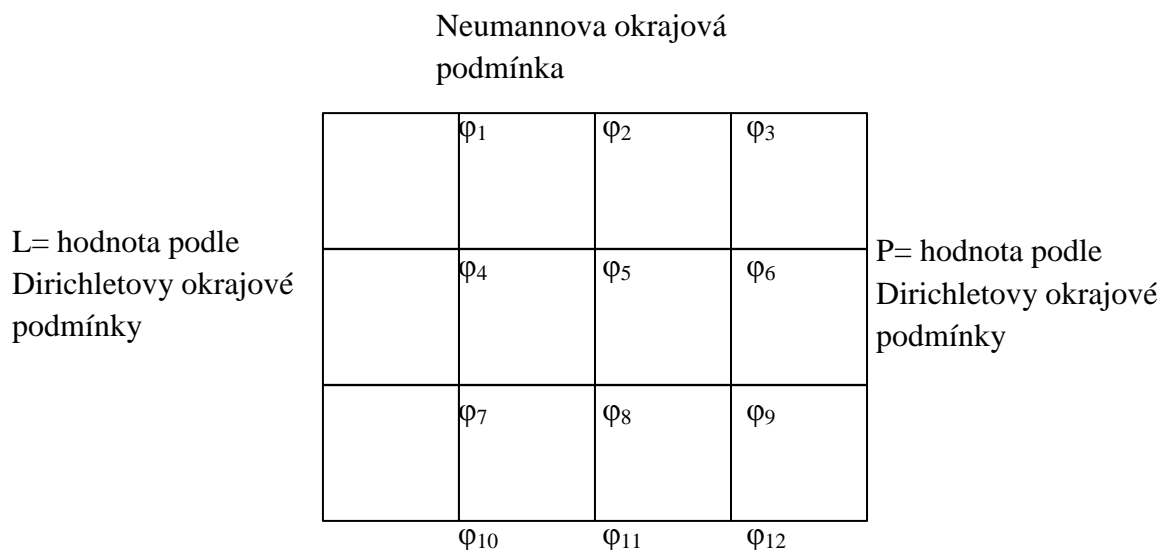
kde $i = 4$ a $j = (1, \dots, 3)$

2.3 Sestavení matice

Pro některé okrajové uzly je určena hodnota Dirichletovou okrajovou podmínkou. Proto si nejdřív určíme neznámé uzly v síti. Uzly, pro které platí Neumannova okrajová podmínka, nepočítáme jako neznámé pro sestavení matice. Pro všechny neznámé φ sestavíme rovnice podle 2.16 a vznikne nám soustava se stejným počtem rovnic, jako je počet neznámých. Pro získání hodnot v uzlech, pro které platí Neumannova okrajová podmínka, použijeme po vypočtení matice vztahy 2.21 a 2.23.

Počet neznámých v síti podle Obrázku 3:

Obrázek 4 Příklad sítě s určením neznámých



Na Obrázku 4 jsme určili v síti neznámé uzly podle Obrázku 3 pro $\varphi_{i,j}$, kde $i = (0, \dots, 4)$ a $j = (1, \dots, 3)$. Označili jsme je φ_a , kde $a = (1, \dots, 12)$ vyjadřuje počet neznámých. Teda uzel $\varphi_{0,1}$ jsme označili jako φ_1 , stejným způsobem jsme určovali všechny neznámé až po uzel $\varphi_{4,3} = \varphi_{12}$. Protože pro neznámé $\varphi_{1, \dots, 3}$ a $\varphi_{10, \dots, 12}$ platí Neumannova okrajová podmínka, sestavíme soustavu 6 rovnic pro 6 neznámých φ_4 až φ_9 . Vzniklá matice a její pravá strana $A\varphi = b$ mají tvar:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma/\varepsilon_0 - 2h \cdot f(x, y) - L \\ -\sigma/\varepsilon_0 - 2h \cdot f(x, y) \\ -\sigma/\varepsilon_0 - 2h \cdot f(x, y) - P \\ -\sigma/\varepsilon_0 - 2h \cdot f(x, y) - L \\ -\sigma/\varepsilon_0 - 2h \cdot f(x, y) \\ -\sigma/\varepsilon_0 - 2h \cdot f(x, y) - P \end{pmatrix}$$

Definice 2.1³: Matice se nazývá řídká matice, pokud v ní převládají převážně nulové prvky.

³ MOŠOVÁ, Vratislava. *Numerické metody*. Vyd. 1. Olomouc : Univerzita Palackého, 2003. 147s. ISBN 80-244-0620-9.

Definice 2.2⁴: Matice je ostře diagonálně dominantní, když platí:

$$\sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

kde $\forall j = (1, \dots, n)$

Definice 2.1 dokazuje, že v našem případě se jedná o řídkou matici a Definice 2.2, že matice je ostře diagonálně dominantní.

2.4 Algoritmus na sestavení matice

Program jsme sestavili pro elektrostatické pole podle Obrázku 1. Nejdřív jsme zadali počet uzlů na ose $x = m$ a na ose $y = n$. Potom podle Dirichletovy okrajové podmínky jsme určili hodnoty pro uzly $\varphi_{i,0}$ a $\varphi_{i,m-1}$, kde $i = (0, \dots, n-1)$.

Potom jsme určili počet neznámých $a = (m-2) * (n-2)$, teda rozměry matice budou $a * a$. Dále jsme sestavili matici pomocí následujícího algoritmu:

Vstupy: a, m, n

pro $i = 0, 1, \dots, a-1$

| pro $j = 0, 1, \dots, a-1$

| | $A[i, j] = 0$

| | když $j = i$

| | |_ $A[i, j] = -4$

| | když $j + 1 = i$

| | |_ $A[i, j] = 1$

| | když $j - 1 = i$

| | |_ $A[i, j] = 1$

| | když $j - m - 2 = i$

⁴ MOŠOVÁ, Vratislava. *Numerické metody*. Vyd. 1. Olomouc : Univerzita Palackého, 2003. 147s. ISBN 80-244-0620-9.

$$\begin{array}{l}
| \quad | \quad | \quad A[i, j] = 1 \\
| \quad | \quad | \quad \text{když } i < m - 2 \\
| \quad | \quad | \quad \text{-----} \quad A[i, j] = 2 \\
| \quad | \quad | \quad \text{když } j + m - 2 = i \\
| \quad | \quad | \quad A[i, j] = 1 \\
| \quad | \quad | \quad \text{když } i > a - m - 3 \\
| \quad | \quad | \quad \text{-----} \quad A[i, j] = 2 \\
| \quad | \quad \text{-----} \\
| \quad \text{-----} \\
\text{pro } i = 0, 1, \dots, a - 3 \\
| \quad A[i * m - 3, i * m - 2] = 0 \\
| \quad \text{-----} \quad A[i * m - 2, i * m - 3] = 0
\end{array}$$

Výstup: $A[i, j]$, kde $i = 0, 1, \dots, a - 1$ a $j = 0, 1, \dots, a - 1$

Vstupy:

a je počet neznámých

$m - 2$ je počet neznámých na ose x

$n - 2$ je počet neznámých na ose y

První cyklus nejdřív načte pro celou matici hodnoty 0, protože matice je řídká, co podle Věty 2.3 znamená, že v ní převládají nulové prvky. V dalším kroku pomocí podmínky přiřadíme do všech bodů hlavní diagonály hodnoty -4. Potom následují podmínky pomocí, kterých přiřadíme hodnoty 1 pro všechny sousední uzly a ještě podmínky pomocí, kterých přiřadíme navíc hodnotu 2 podle Neumannovy okrajové podmínky, u horních okrajových uzlů k spodním sousedním uzlům a u spodních okrajových uzlů k horním sousedním uzlům. Nesmíme zapomenout, že pro uzly $\varphi_{i,0}$ a $\varphi_{i,m-1}$, kde $i = (0, 1, \dots, n - 1)$ platí Dirichletova okrajová podmínka a proto pro uzly $\varphi_{i,1}$ platí, že jejich levé sousední uzly jsou známé hodnoty, které se přesouvají na pravou stranu a jejich hodnoty v matici jsou

nulové, stejně to platí pro pravé sousední uzly uzlů $\varphi_{i,m-2}$. Tento problém řeší druhý cyklus, který tyto nulové hodnoty načte do matice. Ve výstupu nám vyšla matice A .

V následujícím kroku sestavíme algoritmus pro pravou stranu matice:

Vstupy: $a, h, \sigma, \varepsilon_0, L, P, \frac{\partial \varphi}{\partial n_H}, \frac{\partial \varphi}{\partial n_D}, m, n$

pro $i = 0, 1, \dots, a-1$

$$| \quad b[i] = -\frac{h^2 \cdot \sigma}{\varepsilon_0}$$

pro $i = 0, 1, \dots, m-2$

$$| \quad b[i] = b[i] - 2 \cdot h \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n_H}$$

$$| \quad b[a-1-i] = b[a-1-i] - 2 \cdot h \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n_D}$$

pro $i = 0, 1, \dots, n-2$

$$| \quad b[(m-2) \cdot i] = b[(m-2) \cdot i] - L$$

$$| \quad b[(m-2) \cdot i + (m-3)] = b[(m-2) \cdot i + (m-3)] - P$$

Výstup: $b[i]$, kde $i = 0, 1, \dots, a-1$

Vstupy:

a je počet neznámých

h je krok sítě

σ je plošná hustota náboje

ε_0 je permitivita vakua

L, P jsou hodnoty podle Dirichletovy podmínky pro hranici na levé a pravé straně

$\frac{\partial \varphi}{\partial n_H}, \frac{\partial \varphi}{\partial n_D}$ jsou hodnoty pro derivaci vnější normály pro horní a dolní hranici

$m-2$ je počet neznámých na ose x

$n-2$ je počet neznámých na ose y

Vypočetli jsme hodnotu podle

$$-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} h^2$$

a dosadili ji do všech bodů na pravé straně. Potom jsme v dalším cyklu podle Neumannovy okrajové podmínky odečetli pro horní okrajové uzly

$$2 \cdot h \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n_H}$$

a spodní okrajové uzly

$$2 \cdot h \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n_D} .$$

V posledním cyklu jsme odečetli hodnoty podle Dirichletovy okrajové podmínky pro levou a pravou hranici sítě. Ve výstupu nám vyšla pravá strana b .

3. Řešení matic

Obecně nelze říci, kterou metodu, pro který okruh řešených úloh je nejvýhodnější použít. Metody přímé (Gaussova eliminační metoda). Tyto metody poskytují přesné řešení v konečném počtu kroků, pokud během výpočtu nezaokrouhlujeme.

Metody nepřímé tzv. iterační (Gaussova-Seidelova metoda, Jacobiova metoda). Těmito metodami získáme pouze aproximační řešení.

Lze uvést, že pro řešení soustavy s plnou maticí je výhodnější použít spíš přímou metodu a s řídkou maticí iterační metodu. Iterační metoda je taky výhodnější v tom, že klade menší nároky na paměť počítače.

U iteračních metod je potřebná podmínka konvergence a Jacobiova a Gaussova-Seidelova iterační metoda je konvergentní, pokud je matice ostře diagonálně dominantní, co jsme si dokázali podle Definice 2.2.

3.1 Iterační metody

Konstrukce iterační metody je následující:

Z každé rovnice soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$ vyjádříme právě jednu neznámou v závislosti na zbývajících neznámých. Soustava $A\vec{x} = \vec{b}$ tak přejde na tvar:

$$\vec{x} = H\vec{x} + g \quad 3.1$$

Odtud získáme iterační formuli:

$$\vec{x}^{(k+1)} = H\vec{x}^{(k)} + g \quad 3.2$$

Vlastní iterační proces probíhá tak, že:

- 1) zvolíme počáteční iteraci $\vec{x}^{(0)}$
- 2) prostřednictvím iterační formule $\vec{x}^{(k+1)} = H\vec{x}^{(k)} + g$ určíme další vektory

řešení $\vec{x}^{(k+1)}$; $k = 0;1;2;\dots$;

- 3) proces ukončíme, když bude splněna zastavovací podmínka:

$$\left| \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)} \right| \leq \delta \quad 3.3$$

(řešení \vec{x} je určeno s přesností δ)

3.1.1 Jacobiova iterační metoda

Z každé i-té rovnice soustavy:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \tag{3.4}$$

Vyjádříme i-tou neznámou. Vznikne iterační rovnice v kroku $k + 1$, kde $k = 0;1;2;\dots$:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)})$$

...

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) \tag{3.5}$$

Jacobiova iterační formule:

$$\bar{x}^{(k+1)} = H_j \bar{x}^{(k)} + g_j \tag{3.6}$$

$$H_j = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

$$g_j = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

3.8

Na konci zvolíme počáteční iteraci $\bar{x}^{(0)}$, pak prostřednictvím iterační formule určíme další iterace, dokud nebude splněna zastavovací podmínka $|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}| \leq \delta$

Ted' si zobrazíme algoritmus pro výpočet matice pomocí Jacobiovy iterační metody:

Vstupy: a, A, b

pro $i = 0, 1, \dots, a - 1$

$$| \quad \quad \quad g_j[i] = \frac{b[i]}{A[i, i]}$$

pro $i = 0, 1, \dots, a - 1$

| pro $j = 0, 1, \dots, a - 1$

| | když $i \neq j$

$$| | | \quad \quad \quad H_j[i, j] = -\frac{A[i, j]}{A[i, i]}$$

| | když $i = j$

$$| | | \quad \quad \quad H_j[i, j] = 0$$

| | | \quad \quad \quad _____

| \quad \quad \quad _____

Výstupy: $g_j[i], H_j[i, j]$, kde $i = 0, 1, \dots, a - 1$ a $j = 0, 1, \dots, a - 1$

Vstupy:

Matice A

Pravá strana b

Počet neznámých a

Nejdřív jsme sestavili matice H_j a g_j . Teď potřebujeme zvolit počáteční iteraci a pomocí iterační formule $\vec{x}^{(k+1)} = H_j \vec{x}^{(k)} + g_j$, kterou jsme dostali v předchozím algoritmu, určit další iterace, až dokud nebude splněna zastavovací podmínka $|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}| \leq \delta$.

Algoritmus pro další iterace má tvar:

Vstupy: a, H_j, g_j, δ

pro $i = 0, 1, \dots, a - 1$

| _____ $x[i] = konst.$

$y = 0$

dělej

| pro $i = 0, 1, \dots, a - 1$

| | pro $j = 0, 1, \dots, a - 1$

| | | $z = y + H_j[i, j] \cdot x[j]$

| | | | _____ $y = z$

| | $k[i] = y + g_j[i]$

| | _____ $y = 0$

| pro $i = 0, 1, \dots, a - 1$

| | $l[i] = x[i]$

| | _____ $x[i] = k[i]$

dokud pro $i = 0, 1, \dots, a - 1$

| _____ $|l[i] - k[i]| < \delta$

Výstup: $x[i]$, kde $i = 0, 1, \dots, a - 1$

Vstupy:

Iterační matice H_j a g_j

Počet neznámých a

Zastavovací podmínka δ

Ve výstupu jsme dostali výsledek x .

3.1.2 Gassova-Seidelova metoda

Od Jacobiovy se liší tím, že všechny vypočtené hodnoty okamžitě používáme v dalším iteračním kroku. To znamená, že v kroku $k+1$, kde $k=0;1;2;\dots$ obdržíme iterační formule:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)})$$

...

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \quad 3.9$$

Iterační formule:

$$\bar{x}^{(k+1)} = H_{GS}\bar{x}^{(k)} + g_{GS} \quad 3.10$$

$$H_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{H_{GS12}}{a_{22}} & \dots & -\frac{H_{GS1n} + a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{H_{GS,n-1,2} + a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & -\frac{H_{GS,n-1,n}}{a_{nn}} \end{pmatrix} \quad 3.11$$

$$g_{GS} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2 - g_{GS1}}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n - g_{GS,n-1}}{a_{nn}} \end{pmatrix} \quad 3.12$$

Na konci stejně jako u Jacobiovy metody zvolíme počáteční iteraci $\bar{x}^{(0)}$, pak prostřednictvím iterační formule určíme další iterace, dokud nebude splněna zastavovací podmínka $|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}| \leq \delta$

Algoritmus pro Gaussovu-Seidelovu iterační metodu:

Vstupy: a, A, b

pro $i = 0, 1, \dots, a-1$

| $y = 0$

| pro $i = 0, 1, \dots, i-1$

| | $z = y - A[i, j] \cdot g_{GS}[j]$

| | $y = z$

| $g_{GS}[i] = \frac{y + b[i]}{A[i, i]}$

pro $i = 0, 1, \dots, a-1$

| pro $j = 0, 1, \dots, a-1$

| | $y = 0$

| | když $j = 0$

| | $H_{GS}[i, j] = 0$

| | když $j > i$

| | | pro $k = 0, 1, \dots, i-1$

| | | | $z = H_{GS}[k, j] \cdot (-A[i, k]) + y$

| | | $y = z$

$$\begin{aligned}
& \underline{\hspace{1cm}} H_{GS}[i, j] = \frac{y - A[i, j]}{A[i, i]} \\
& \text{když } j < i \\
& \text{pro } k = 0, 1, \dots, i-1 \\
& z = H_{GS}[k, j] \cdot (-A[i, k]) + y \\
& \underline{\hspace{1cm}} y = z \\
& \underline{\hspace{1cm}} H_{GS}[i, j] = \frac{y}{A[i, i]} \\
& \underline{\hspace{1cm}} \\
& \underline{\hspace{1cm}}
\end{aligned}$$

Výstupy: $g_{GS}[i]$, $H_{GS}[i, j]$, kde $i = 0, 1, \dots, a-1$ a $j = 0, 1, \dots, a-1$

Vstupy:

Matice A

Pravá strana b

Počet neznámých a

Ve výstupu jsme dostali matice H_{GS} a g_{GS}

Pro další iterace jsme použili stejný algoritmus jako u Jacobiovy iterační metody.

3.2 Gaussova eliminační metoda

Je to přímá metoda. Jedná se o standardní postup řešení soustavy lineárních rovnic, při němž vhodnými úpravami (eliminacemi) převádíme soustavu rovnic s obecnou maticí na soustavu s horní trojúhelníkovou maticí. Eliminujeme soustavu:

$$a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + \dots + a_{1n}^0 x_n = a_{1,n+1}^0$$

$$a_{21}^0 x_1 + a_{22}^0 x_2 + \dots + a_{2n}^0 x_n = a_{2,n+1}^0$$

...

$$a_{n1}^0 x_1 + a_{n2}^0 x_2 + \dots + a_{nn}^0 x_n = a_{n,n+1}^0$$

3.13

Eliminace neznámé x_1 z rovnic $2, \dots, n$, čehož se dosáhne odečtením vhodných násobků první rovnice (tato rovnice se nazývá pivotní rovnice a prvek a_{11} se nazývá pivotní prvek) od dalších rovnic. První rovnice během celé operace zůstává nezměněna, další se mění. Vynásobíme ji číslem

$$-\frac{a_{21}^0}{a_{11}^0}$$

a přičteme k druhé rovnici. Potom ji vynásobíme číslem

$$-\frac{a_{31}^0}{a_{11}^0}$$

a přičteme k třetí rovnici, takto pokračujeme až do konce, když první rovnici vynásobíme číslem

$$-\frac{a_{n1}^0}{a_{11}^0}$$

a přičteme k poslední a pak dostaneme soustavu:

$$a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + \dots + a_{1n}^0 x_n = a_{1,n+1}^0$$

$$a_{22}^1 x_2 + \dots + a_{2n}^1 x_n = a_{2,n+1}^1$$

...

$$a_{n2}^1 x_2 + \dots + a_{nm}^1 x_n = a_{n,n+1}^1$$

3.14

Obecně v k -tém kroku ($k = 1; 2; \dots; n-1$) vynulujeme prvky v k -tém sloupci tím, že k -tý řádek vynásobený multiplikátorem

$$-\frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}$$

přičteme k i -tému řádku ($i = k+1; \dots; n$). Matici tak převedeme na horní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{aligned}
a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + \dots + a_{1n}^0 x_n &= a_{1,n+1}^0 \\
a_{22}^1 x_2 + \dots + a_{2n}^1 x_n &= a_{2,n+1}^1 \\
a_{33}^2 x_3 + \dots + a_{3n}^2 x_n &= a_{3,n+1}^2 \\
&\dots \\
a_{nn}^{n-1} x_n &= a_{n,n+1}^{n-1}
\end{aligned}
\tag{3.15}$$

Z tyhle soustavy zpětnou eliminací získáme hodnoty neznámých

$$x_n, x_{n-1}, \dots, x_1.$$

Při řešení soustavy pomocí Gaussovy eliminační metody může nastat případ, kdy v k -tém kroku je hlavní prvek $a_{kk}^{k-1} = 0$. Pokud taková situace nastane, musíme použít Gaussovu eliminační metodu s výběrem hlavního prvku. Máme tři možnosti:

Gaussova eliminační metoda se sloupcovým výběrem – za hlavní prvek v k -tém kroku bereme největší prvek v k -tém sloupci. Vybíráme mezi řádky, z nichž jsme dosud nevzali vedoucí prvek. Hlavní prvek je v řádku p a platí pro něj:

$$|a_{pk}| = \max_i |a_{ik}^{k-1}|$$

Gaussova eliminační metoda s řádkovým výběrem – za hlavní prvek v k -tém kroku bereme největší prvek v k -tém řádku. Vybíráme mezi sloupci, z nichž jsme dosud nevzali vedoucí prvek. Hlavní prvek je ve sloupci q a platí pro něj:

$$|a_{kq}| = \max_j |a_{kj}^{k-1}|$$

Gaussova eliminační metoda s úplným výběrem - za hlavní prvek v k -tém kroku bereme největší prvek v tom řádku a sloupci, ve kterém jsme dosud nevybrali vedoucí prvek. Hlavní prvek se nachází v p -tém řádku a q -tém sloupci a platí pro něj:

$$|a_{pq}| = \max_{ij} |a_{ij}^{k-1}|$$

V našem případě je podle Definice 2.2 matice ostře diagonálně dominantní a proto předchozí případ, kdy v k -tém kroku je hlavní prvek $a_{kk}^{k-1} = 0$, nenastane.

Algoritmus pro výpočet Gaussovy eliminační metody:

Vstupy: a, A, b

pro $i = 0, 1, \dots, a - 2$

| pro $j = i + 1, i + 2, \dots, a - 1$

| | $b[j] = b[j] - \frac{A[j, i]}{A[i, i]} \cdot b[i]$

| | pro $m = i, i + 1, i + 2, \dots, a - 1$

| | | $Y[i, m] = \frac{A[j, i]}{A[i, i]} \cdot A[i, m]$

| | pro $n = i, i + 1, i + 2, \dots, a - 1$

| | | $A[j, n] = A[j, n] - Y[i, n]$

| | | _____

| | | _____

$b[a - 1] = \frac{b[a - 1]}{A[a - 1, a - 1]}$

pro $i = a - 2, a - 3, \dots, 0$

| $y = 0$

| pro $i = a - 1, a - 2, \dots, i$

| | $A[i, j] = A[i, j] \cdot b[j]$

| | | $y = y + A[i, j]$

| | | _____ $b[i] = \frac{b[i] - y}{A[i, i]}$

Výstup: $b[i]$, kde $i = 0, 1, \dots, a - 1$

Vstupy:

Matice A

Pravá strana b

Počet neznámých a

První cyklus, ve kterém jsou vloženy další tři cykly, slouží na úpravu matice A do tvaru horní trojúhelníkové matice podle soustavy 3.15. Potom vypočteme poslední rovnici a v posledních cyklech vypočteme zpětnou eliminací zbylé hodnoty. Ve výstupu dostaneme vypočtenou pravou stranu b .

3.3 Porovnání výsledků iteračních a eliminačních metod

Pro porovnání výsledků iteračních a eliminačních metod použijeme Laplaceovu rovnici, když pravá strana bude rovna 0:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Příklad uvedeme podle Obrázku 3, kde desky kondenzátoru budou mít šířku 3 mm, vzdálenost mezi nimi budou 4mm a krok sítě $h = 1mm$. Podle Dirichletových okrajových podmínek budeme uvádět hodnoty na desce vlevo 100V a vpravo 0V a podle Neumannovy okrajové podmínky bude derivace vnější normály

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Vznikne matice:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jacobiova iterační metoda:

Proces jsme ukončili po 85. iteraci, když byla splněna zastavovací podmínka $|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}| \leq \delta$, podle které jsme stanovili přesnost $\delta = 0,0001$:

$$\varphi_1 = 74,99994; \varphi_2 = 49,99992; \varphi_3 = 24,99994$$

$$\varphi_4 = 74,99994; \varphi_5 = 49,99992; \varphi_6 = 24,99994$$

$$\varphi_7 = 74,99994; \varphi_8 = 49,99992; \varphi_9 = 24,99994$$

$$\varphi_{10} = 74,99994; \varphi_{11} = 49,99992; \varphi_{12} = 24,99994$$

Gaussova-Seidelova iterační metoda:

Proces jsme ukončili po 43. iteraci, když, stejně jako u Jacobiovy iterační metody, byla splněna zastavovací podmínka $|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}| \leq \delta$, s přesností $\delta = 0,0001$:

$$\varphi_1 = 74,99994; \varphi_2 = 49,99992; \varphi_3 = 24,99994$$

$$\varphi_4 = 74,99994; \varphi_5 = 49,99992; \varphi_6 = 24,99994$$

$$\varphi_7 = 74,99994; \varphi_8 = 49,99992; \varphi_9 = 24,99994$$

$$\varphi_{10} = 74,99994; \varphi_{11} = 49,99992; \varphi_{12} = 24,99994$$

Gaussova eliminační metoda:

$$\varphi_1 = 75; \varphi_2 = 50; \varphi_3 = 25$$

$$\varphi_4 = 75; \varphi_5 = 50; \varphi_6 = 25$$

$$\varphi_7 = 75; \varphi_8 = 50; \varphi_9 = 25$$

$$\varphi_{10} = 75; \varphi_{11} = 50; \varphi_{12} = 25$$

Pomocí eliminačních metod získáme správné řešení, kdyžto u iteračních metod se k správnému řešení jen blížíme. Uvedeme si ještě jeden příklad, kde použijeme hustější síť (viz Obrázek 5)

Obrázek 5 Příklad sítě

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8
	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}
	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}
	φ_{17}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{20}

Jacobiova iterační metoda:

Proces jsme ukončili po 130. iteraci, když byla splněna zastavovací podmínka $|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}| \leq \delta$, podle které jsme stanovili přesnost $\delta = 0,0001$:

$$\varphi_1=79,99992; \varphi_2=59,99988; \varphi_3=39,99988; \varphi_4=19,99992;$$

$$\varphi_5=79,99992; \varphi_6=59,99988; \varphi_7=39,99988; \varphi_8=19,99992;$$

$$\varphi_9=79,99992; \varphi_{10}=59,99988; \varphi_{11}=39,99988; \varphi_{12}=19,99992;$$

$$\varphi_{13}=79,99992; \varphi_{14}=59,99988; \varphi_{15}=39,99988; \varphi_{16}=19,99992;$$

$$\varphi_{17}=79,99992; \varphi_{18}=59,99988; \varphi_{19}=39,99988; \varphi_{20}=19,99992;$$

Gaussova-Seidelova iterační metoda:

Proces jsme ukončili po 67. iteraci, když, stejně jako u Jacobiovy iterační metody, byla splněna zastavovací podmínka $|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}| \leq \delta$, s přesností $\delta = 0,0001$ a výsledek vyšel téměř shodný s výsledkem Jacobiovy iterační metody:

$\varphi_1=79,99993$ $\varphi_2=59,99990$ $\varphi_3=39,99991$ $\varphi_4=19,99995$
 $\varphi_5=79,99994$ $\varphi_6=59,99991$ $\varphi_7=39,99992$ $\varphi_8=19,99996$
 $\varphi_9=79,99995$ $\varphi_{10}=59,99992$ $\varphi_{11}=39,99993$ $\varphi_{12}=19,99996$
 $\varphi_{13}=79,99995$ $\varphi_{14}=59,99993$ $\varphi_{15}=39,99994$ $\varphi_{16}=19,99996$
 $\varphi_{17}=79,99996$ $\varphi_{18}=59,99994$ $\varphi_{19}=39,99994$ $\varphi_{20}=19,99997$

Gaussova eliminační metoda:

$\varphi_1=80,00000$ $\varphi_2=60,00000$ $\varphi_3=40,00000$ $\varphi_4=20,00000$
 $\varphi_5=80,00000$ $\varphi_6=60,00000$ $\varphi_7=40,00000$ $\varphi_8=20,00000$
 $\varphi_9=80,00000$ $\varphi_{10}=60,00000$ $\varphi_{11}=40,00000$ $\varphi_{12}=20,00000$
 $\varphi_{13}=80,00000$ $\varphi_{14}=60,00000$ $\varphi_{15}=40,00000$ $\varphi_{16}=20,00000$
 $\varphi_{17}=80,00000$ $\varphi_{18}=60,00000$ $\varphi_{19}=40,00000$ $\varphi_{20}=20,00000$

4. Porovnání metody konečných diferencí s analytickou metodou

Pro výpočet analytické metody jsme použili program Maple. Je to program pro řešení matematických problémů. Stejně tak jako matematik, Maple ovládá pravidla algebry a matematické analýzy. Například ví, jak řešit rovnice, zjednodušovat výrazy, vykreslovat grafy a počítat derivace či integrály. Pracuje přímo se symboly, kterými jsou rovnice tvořeny, což znamená, že zachovává obecnost, dokud nepotřebujeme číselnou odpověď. Umí vykreslovat dvojrozměrné i trojrozměrné grafy, dále v něm lze také tvořit pokročilejší grafiku, jako animace, pole vektorů, parametrické křivky nebo dynamické systémy.

Protože analytické metody jsou omezené pouze pro jednoduché oblasti, použijeme pro výpočet Laplaceovu rovnici a okrajové podmínky stanovíme podle Dirichletovy metody:

$$f(x,0) = 0 \quad 4.1$$

$$f(x,1) = 0 \quad 4.2$$

$$f(0, y) = 0 \quad 4.3$$

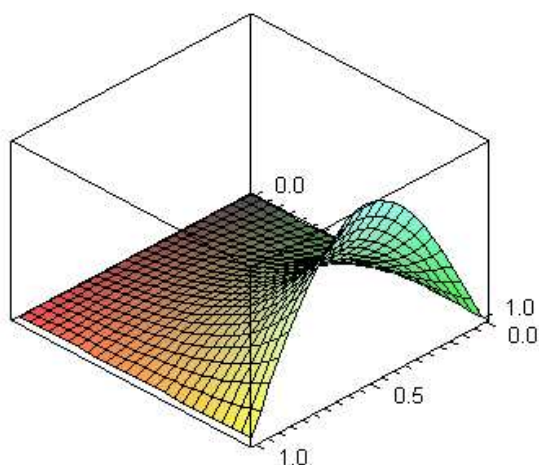
$$f(1, y) = \sin(\pi y) \quad 4.4$$

V programu Maple vyšel výsledek:

$$f(x, y) = \frac{\sin(\pi x) \sinh(\pi y)}{\sinh(\pi)} \quad 4.5$$

Využijeme i možnosti Maple a zobrazíme graf funkce $f(x, y)$:

Obrázek 6 graf funkce $f(x, y)$ vytvořený v Maple



Použili jsme krok 0,2 a po dosažení jsme dostali matici přesné analytické funkce $f(x, y)$:

```
0.03412498922  0.08217106922  0.1637383584  0.3121017577
0.05521539243  0.1329555829  0.2649342291  0.5049912520
0.05521539243  0.1329555829  0.2649342291  0.5049912520
0.03412498922  0.08217106922  0.1637383584  0.3121017577
```

Výsledek podle Gauss-Seidelovy iterační metody vyšel po 26. iteraci, když byla splněna zastavovací podmínka $|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}| \leq \delta$, s přesností $\delta = 0,0001$:

```
0.03636  0.08660  0.16990  0.31810
0.05883  0.14012  0.27491  0.51469
0.05883  0.14012  0.27490  0.51469
0.03636  0.08659  0.16990  0.31809
```

Porovnání přesné analytické metody $f(x, y)$ s přibližnou metodou konečných diferencí $p(x, y)$, kde pro výpočet matice byla použita Gauss-Seidelova iterační metoda:

```
0.00223501078  0.00442893078  0.0061616416  0.0059982423
0.00361460757  0.0071644171  0.0099757709  0.0096987480
0.00361460757  0.0071644171  0.0099657709  0.0096987480
0.00223501078  0.00441893078  0.0061616416  0.0059882423
```

kde $\max|f(x, y) - p(x, y)| = 0,0099757709$

Výsledek podle Jacobiovy iterační metody vyšel po 46. iteraci, když byla splněna zastavovací podmínka $|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}| \leq \delta$, s přesností $\delta = 0,0001$:

0.03637	0.08662	0.16993	0.31811
0.05885	0.14016	0.27495	0.51472
0.05885	0.14016	0.27495	0.51472
0.03637	0.08662	0.16993	0.31811

Porovnání přesné analytické metody $f(x, y)$ s přibližnou metodou konečných diferencí $p(x, y)$, kde pro výpočet matice byla použita Jacobiova iterační metoda:

0.00224501078	0.00444893078	0.0061916416	0.0060082423
0.00363460757	0.0072044171	0.0100157709	0.0097287480
0.00363460757	0.0072044171	0.0100157709	0.0097287480
0.00224501078	0.00444893078	0.0061916416	0.0060082423

kde $\max|f(x, y) - p(x, y)| = 0,0100157709$

Výsledek podle Gaussovy eliminační metody:

0.03635	0.08658	0.16989	0.31809
0.05882	0.14010	0.27489	0.51468
0.05882	0.14010	0.27489	0.51468
0.03635	0.08658	0.16989	0.31809

Porovnání přesné analytické metody $f(x, y)$ s přibližnou metodou konečných diferencí $p(x, y)$, kde pro výpočet matice byla použita Gaussova eliminační metoda:

0.00222501078	0.00440893078	0.0061516416	0.0059882423
0.00360460757	0.0071444171	0.0099557709	0.0096887480
0.00360460757	0.0071444171	0.0099557709	0.0096887480
0.00222501078	0.00440893078	0.0061516416	0.0059882423

kde $\max|f(x, y) - p(x, y)| = 0,0099557709$

Pro lepší porovnání si uvedeme stejný příklad s hustější sítí. Abychom toho dosáhli, zmenšíme krok sítě na 0,1.

Dále si uvedeme jenom maximální rozdíly:

Porovnání přesné analytické metody $f(x, y)$ s přibližnou metodou konečných diferencí $p(x, y)$, kde pro výpočet matice byla použita Gauss-Seidelova iterační metoda:

$$\max|f(x, y) - p(x, y)| = 0,0029012764$$

Porovnání přesné analytické metody $f(x, y)$ s přibližnou metodou konečných diferencí $p(x, y)$, kde pro výpočet matice byla použita Jacobiova iterační metoda:

$$\max|f(x, y) - p(x, y)| = 0,0029912764$$

Porovnání přesné analytické metody $f(x, y)$ s přibližnou metodou konečných diferencí $p(x, y)$, kde pro výpočet matice byla použita Gaussova eliminační metoda:

$$\max|f(x, y) - p(x, y)| = 0,0028212764$$

Uvedeme si ještě jeden příklad hustější sítě, kdy opět zmenšíme krok sítě na 0,05.

Porovnání přesné analytické metody $f(x, y)$ s přibližnou metodou konečných diferencí $p(x, y)$, kde pro výpočet matice byla použita Gauss-Seidelova iterační metoda:

$$\max|f(x, y) - p(x, y)| = 0,0010516663$$

Porovnání přesné analytické metody $f(x, y)$ s přibližnou metodou konečných diferencí $p(x, y)$, kde pro výpočet matice byla použita Jacobiova iterační metoda:

$$\max|f(x, y) - p(x, y)| = 0,0014316663$$

Porovnání přesné analytické metody $f(x, y)$ s přibližnou metodou konečných diferencí $p(x, y)$, kde pro výpočet matice byla použita Gaussova eliminační metoda:

$$\max|f(x, y) - p(x, y)| = 0,0007112764$$

Tabulka 1 Porovnání největších rozdílů mezi analytickou metodou a metodou konečných diferencí pro různé velikosti kroků sítě

Krok:	0,2	0,1	0,05
Gauss-Seidelova iterační metoda	0,0099757709	0,0029012764	0,0010516663
Jacobiova iterační metoda	0,0100157709	0,0029912764	0,0014316663
<i>Gaussova eliminační metoda</i>	<i>0,0099557709</i>	<i>0,0028212764</i>	<i>0,0007112764</i>

Podle tabulky můžeme říct:

Gaussova eliminační metoda je přesnější od iteračních metod

metoda konečných diferencí je tím přesnější, čím je menší krok sítě a teda síť je hustější.

5. Numerické řešení Poissonovy rovnice

5.1 Příklad 1⁵

V příkladu vypočteme pole mezi deskami rovinného kondenzátoru s napětím $U = 100V$, které jsou od sebe vzdáleny 8mm. Šířka desek je 8mm. Mezi deskami se nachází náboj o hustotě $\sigma = 5 \cdot 10^{-4} C/m^2$. Krok sítě zvolíme $h = 1 \cdot 10^{-3} m$. Pro Dirichletovu podmínku platí na levé desce kondenzátoru $\varphi = 100V$ a na pravé $\varphi = 0V$. Podle Neumannovy podmínky určíme derivaci vnější normály $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$.

Podle Gaussovy-Seidelovy iterační metody jsme dostali výsledek po 198. iteraci, když byla splněna zastavovací podmínka $|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}| \leq \delta$, s přesností $\delta = 0,0001$:

$\varphi_1=285,15$ $\varphi_2=413,82$ $\varphi_3=486,03$ $\varphi_4=501,76$ $\varphi_5=461,03$ $\varphi_6=363,82$ $\varphi_7=210,15$

$\varphi_8=285,15$ $\varphi_9=413,82$ $\varphi_{10}=486,03$ $\varphi_{11}=501,76$ $\varphi_{12}=461,03$ $\varphi_{13}=363,82$ $\varphi_{14}=210,15$

$\varphi_{15}=285,15$ $\varphi_{16}=413,82$ $\varphi_{17}=486,03$ $\varphi_{18}=501,76$ $\varphi_{19}=461,03$ $\varphi_{20}=363,82$ $\varphi_{21}=210,15$

$\varphi_{22}=285,15$ $\varphi_{23}=413,82$ $\varphi_{24}=486,03$ $\varphi_{25}=501,76$ $\varphi_{26}=461,03$ $\varphi_{27}=363,82$ $\varphi_{28}=210,15$

$\varphi_{29}=285,15$ $\varphi_{30}=413,82$ $\varphi_{31}=486,03$ $\varphi_{32}=501,76$ $\varphi_{33}=461,03$ $\varphi_{34}=363,82$ $\varphi_{35}=210,15$

$\varphi_{36}=285,15$ $\varphi_{37}=413,82$ $\varphi_{38}=486,03$ $\varphi_{39}=501,76$ $\varphi_{40}=461,03$ $\varphi_{41}=363,82$ $\varphi_{42}=210,15$

$\varphi_{43}=285,15$ $\varphi_{44}=413,82$ $\varphi_{45}=486,03$ $\varphi_{46}=501,76$ $\varphi_{47}=461,03$ $\varphi_{48}=363,82$ $\varphi_{49}=210,15$

$\varphi_{50}=285,15$ $\varphi_{51}=413,82$ $\varphi_{52}=486,03$ $\varphi_{53}=501,76$ $\varphi_{54}=461,03$ $\varphi_{55}=363,82$ $\varphi_{56}=210,15$

$\varphi_{57}=285,15$ $\varphi_{58}=413,82$ $\varphi_{59}=486,03$ $\varphi_{60}=501,76$ $\varphi_{61}=461,03$ $\varphi_{62}=363,82$ $\varphi_{63}=210,15$

Na příkladu vidíme, když je derivace vnější normály

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

⁵ HENZL, Ctibor. *Elektrorevue : časopis pro elektrotechniku* [online]. VŠB-TU Ostrava : 1.9.2000 [cit.

2010-05-04]. Použití EXCELU při řešení Poissonovy rovnice. Dostupné z WWW:

<http://www.elektrorevue.cz/clanky/00033/index.html#numericke_reseni#numericke_reseni>. ISSN 1213-1539.

tak platí, že $\varphi_{i,j} = \varphi_{i-1,j} = \varphi_{i+1,j}$. Proto si u dalších příkladů uvedeme hodnoty jenom v jednom řádku. Podle Jacobiovy iterační metody jsme po 375. iteraci dostali výsledek, když byla splněna zastavovací podmínka $|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}| \leq \delta$, s přesností $\delta = 0,0001$:

$\varphi_1=285,15$ $\varphi_2=413,82$ $\varphi_3=486,03$ $\varphi_4=501,76$ $\varphi_5=461,03$ $\varphi_6=363,82$ $\varphi_7=210,15$

Výsledek podle Gaussovy eliminační metody:

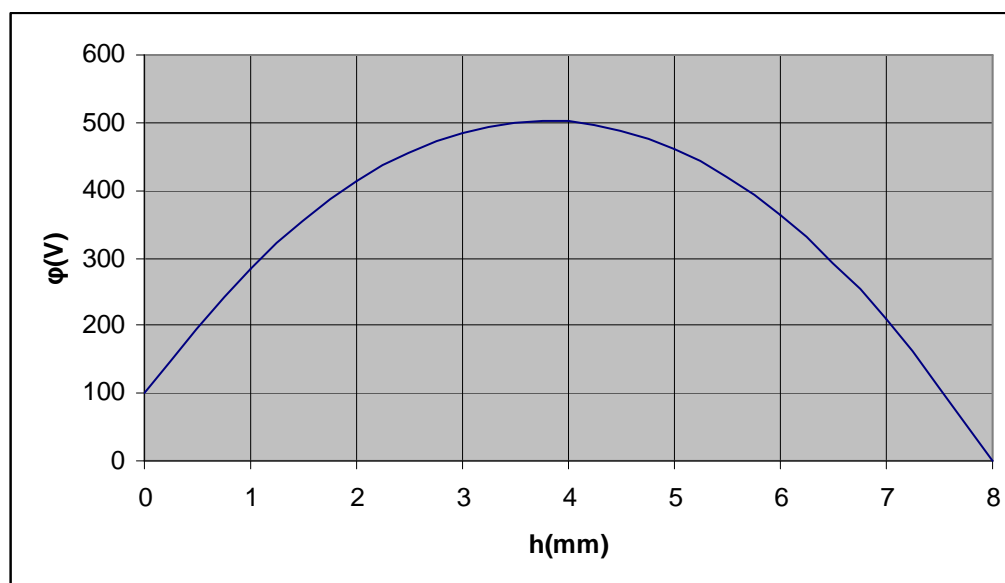
$\varphi_1=285,15$ $\varphi_2=413,82$ $\varphi_3=486,03$ $\varphi_4=501,76$ $\varphi_5=461,03$ $\varphi_6=363,82$ $\varphi_7=210,15$

Tabulka 2 Potenciál mezi deskami rovinného kondenzátoru

$h(mm)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(V)$	100	285,15	413,8	486,03	501,76	461,03	363,82	210,15	0

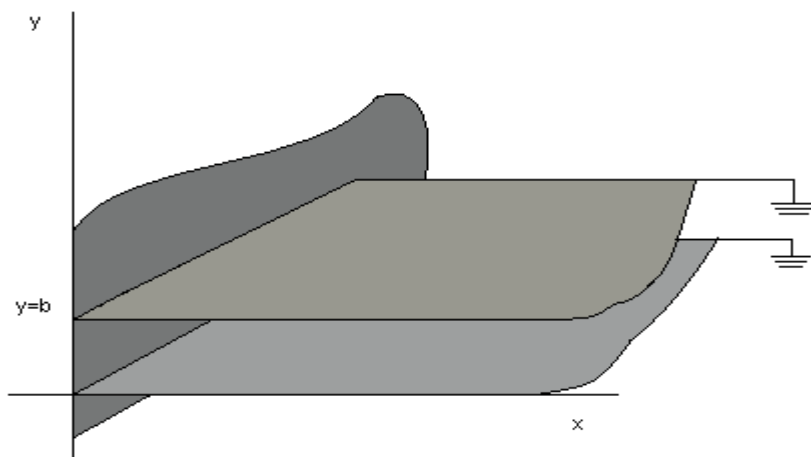
Podle Tabulky 2 si vytvoříme graf pro průběh potenciálu mezi deskami:

Obrázek 7 Graf průběhu potenciálu mezi deskami rovinného kondenzátoru



5.2 Příklad 2⁶

Obrázek 8 Uzemněné rovinné rovnoběžné polonekonečné vodivé desky s kolmou rovinnou deskou



V příkladu určíme potenciály mezi dvěma rovnoběžnými uzemněnými elektrodami, ukončenými rovinnou elektrodou, která se udržuje na konstantním potenciálu podle Obrázku 8. Pole ve směru osy z se nemění, a tedy derivace podle z je nulová, takže můžeme uvažovat dvojrozměrný případ. Podle Dirichletovy okrajové podmínky určíme pro $x = 0$ $\varphi = 100V$, pro $y = 0$ a pro $y = b = 5mm$ $\varphi = 0$. Protože nekonečnou vzdálenost neumíme určit, tak určíme si $x = 15mm$ a pro tuhle vzdálenost přiřadíme hodnotu derivace vnější normály podle Neumannovy podmínky

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 1.$$

Před počítáním si ještě musíme vyjádřit Neumannovu okrajovou podmínku. Nejdřív si upravíme rovnici 2.20

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dn} = f(x, y).$$

$$\frac{dx}{dn} = \cos \alpha, \frac{dy}{dn} = \sin \alpha$$

kde α je směrový úhel. Protože v našem případě je směrový úhel $\alpha = 0$, tak

$$\frac{dx}{dn} = 1$$

⁶ BEZOUŠEK, Pavel; SCHEJBAL, Vladimír; ŠEDIVÝ, Pavel. *Elektrotechnika*. Vyd. 1. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2003. vi, 214 s. ISBN 80-7194-620-6.

a

$$\frac{dy}{dn} = 0$$

takže

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

a pro výpočet

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

použijeme vztah 2.10.

$$\frac{1}{2h} [\varphi(x+h, y) - \varphi(x-h, y)] = f(x, y)$$

protože $\varphi(x+h, y)$ je neznámé, tak to vyjádříme:

$$\varphi(x+h, y) = 2h \cdot f(x, y) + \varphi(x-h, y) \quad 5.1$$

Vztah 5.1 dosadíme do rovnice 2.16 pro daný okrajový uzel:

$$\varphi(x-h, y) + 2h \cdot f(x, y) + \varphi(x-h, y) + \varphi(x, y+h) + \varphi(x, y-h) - 4\varphi(x, y) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} h^2 \quad 5.2$$

Potom sestavíme matici.

Teď si uvedeme příklad pro Laplaceovu rovnici, teda $\sigma = 0C/m^2$, když bude krok sítě $h = 1 \cdot 10^{-3} m$. Protože výsledky metod pro výpočet matic jsme už porovnali v několika příkladech a dokázali jsme, že jsou téměř shodné, tak pro znázornění výpočtu použijeme jenom Gaussovu eliminační metodu.

Tabulka 3 Potenciál mezi dvěma rovnoběžnými uzemněnými elektrodami, ukončenými rovinnou elektrodou

$h(mm)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	100	45,67	22,86	11,98	6,42	3,47	1,88	1,02	0,56	0,30	0,17	0,03
2	100	59,81	33,78	18,66	10,22	5,57	3,04	1,65	0,90	0,49	0,27	0,05
3	100	59,81	33,78	18,66	10,22	5,57	3,04	1,65	0,90	0,49	0,27	0,05
4	100	45,67	22,86	11,98	6,42	3,47	1,88	1,02	0,56	0,30	0,17	0,03
5	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Výsledek ještě srovnáme s příkladem vypočteným pomocí tabulkového procesoru.

Tabulka 4⁷ Příklad vypočtený pomocí tabulkového procesoru

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Y
1	100	75.13	54.04	37.87	26.15	17.91	12.21	8.31	5.64	0
2	100	73.24	51.59	35.65	24.40	16.63	11.31	7.68	5.22	0
3	100	66.25	43.41	28.72	19.19	12.91	8.72	5.90	4.00	0
4	100	48.34	27.10	16.64	10.73	7.10	4.76	3.21	2.17	0
5	100	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0

V příkladu je vypočítaná jenom spodní polovina tabulky, protože ta horní je stejná. Příklad se liší jen proto, že byla v něm použita vzdálenost mezi rovnoběžnými deskami 8 mm.

⁷ BEZOUŠEK, Pavel; SCHEJBAL, Vladimír; ŠEDIVÝ, Pavel. *Elektrotechnika*. Vyd. 1. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2003. vi, 214 s. ISBN 80-7194-620-6.

Závěr

V práci jsem vyřešil Poissonovu rovnici, která popisuje rozložení elektrického potenciálu v elektrostatickém poli, pomocí programu, který jsem sestavil v programovacím jazyku C#. Na začátku jsem zadal elektrostatické pole mezi deskami rovinného kondenzátoru. Okrajové hodnoty potenciálu elektrostatického pole na deskách kondenzátoru jsou určeny Dirichletovou okrajovou podmínkou a okrajové hodnoty mezi deskami vyplývají z Neumannové okrajové podmínky. Jako numerickou metodu jsem použil metodu konečných diferencí, podle které jsem sestavil síť v elektrostatickém poli. Podle toho se tato metoda nazývá i metodou sítí a uzly této sítě znázorňují právě rozložení elektrického potenciálu. Potom jsem nahradil derivace hledané funkce lineárními kombinacemi funkčních hodnot v těchto uzlech a dostal jsem soustavu se stejným počtem rovnic, jako je počet neznámých uzlů.

Pro výpočet soustav slouží metody přímé a metody nepřímé, kterým se taky říká iterační. Jako přímou metodu jsem použil Gaussovu eliminační metodu a nepřímé metody jsem použil Jacobiovu iterační metodu a Gaussovu-Seidelovu iterační metodu.

Potom jsem porovnal výsledky numerické metody s analytickou metodou, a protože analytickou metodu je možné použít jenom pro jednodušší výpočty, počítal jsem řešení pro zjednodušenou Laplaceovu rovnici, které pravá strana je nulová a všechny okrajové hodnoty jsem určil pomocí Dirichletovy okrajové podmínky. Analytickou metodu jsem vyřešil pomocí programu Maple, který slouží na řešení matematických problémů. Při porovnání jsem zjistil, že přibližné řešení metody konečných diferencí se přibližuje tím víc tomu reálnému řešení, čím víc zmenšujeme vzdálenost mezi uzly a tím je ta síť hustější.

Dalším řešením jsem dokázal, že v porovnání se složitým analytickým řešením, je numerické řešení dobrou alternativou.

Použitá literatura

- [1] BEZOUŠEK, Pavel; SCHEJBAL, Vladimír; ŠEDIVÝ, Pavel. *Elektrotechnika*. Vyd. 1. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2003. vi, 214 s. ISBN 80-7194-620-6.
- [2] Vitásek, Emil. *Numerické metody [Vitásek, 1987]*. 1. vyd. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1987. 512 s.
- [3] MOŠOVÁ, Vratislava. *Numerické metody*. Vyd. 1. Olomouc: Univerzita Palackého, 2003. 147s. ISBN 80-244-0620-9.
- [4] ARCHEM, Tom. *Myslíme v jazyku C#*. Praha: Grada Publishing, 2000. 308 s. ISBN 80-247-0301-7.
- [5] *Katedra elektroenergetiky [online]*. 2008 [cit. 2010-05-04]. Numerické metody III. Dostupné z WWW: <<http://k315.feld.cvut.cz/download/ape1/numerika3.pdf>>.
- [6] *Matematická analýza [online]*. 2007 [cit. 2010-05-04]. Taylorova formule. Dostupné z WWW: <http://analyza.kma.zcu.cz/PREDMETY/M1_MA1/materialy/MA1_7_Taylorova_formule.pdf>.
- [7] HENZL, Ctibor. *Elektrorevue : časopis pro elektrotechniku [online]*. VŠB-TU Ostrava : 1.9.2000 [cit. 2010-05-04]. Použití EXCELU při řešení Poissonovy rovnice. Dostupné z WWW: <http://www.elektrorevue.cz/clanky/00033/index.html#numericke_reseni#numericke_reseni>. ISSN 1213-1539.