

UNIVERZITA PARDUBICE

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A
INFORMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2024

Martin Pešout

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Derivace funkcí s podporou MATLABu
Bakalářská práce

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Akademický rok: 2024/2025

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Martin Pešout**
Osobní číslo: **I21212**
Studijní program: **B0688A140009 Informační technologie**
Téma práce: **Derivace funkcí s podporou Matlabu.**
Zadávající katedra: **Katedra informačních technologií**

Zásady pro vypracování

Uvést základní a alternativní definice pojmu první derivace funkce jedné reálné proměnné. Nastudovat a uvést numerické metody výpočtu prvních derivací. Vypracovat M-skripty pro řešení prvních a vyšších derivací prostředky Matlabu. Průběžně vytvářet ilustrativní příklady řešení derivací funkcí. Aplikace derivací funkce pro nahrazení funkce Taylorovým polynomem.

Rozsah pracovní zprávy: **30 – 60**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

1. Zahrádka, J. *Diskrétní matematika pro SII – diskretizační metody numerické matematiky*. Pardubice, 2014. ISBN 9788073958411.
2. Zahrádka, J. *Matematický seminář – MATLAB*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2013. ISBN 978-80-7395-691-2.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Jaromír Zahrádka, Ph.D.**
Katedra automatizace a matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **31. října 2024**
Termín odevzdání bakalářské práce: **17. prosince 2024**

prof. Ing. Petr Doležel, Ph.D. v.r.
děkan

L.S.

Ing. Jan Panuš, Ph.D. v.r.
vedoucí katedry

V Pardubicích dne 30. listopadu 2024

Prohlašuji:

Práci s názvem Derivace funkcí s podporou MATLABu jsem vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, (využité v práci), jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 7/2019 Pravidla pro odevzdávání, zveřejňování a formální úpravu závěrečných prací, ve znění pozdějších dodatků, bude práce zveřejněna prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 09.12.2024

Martin Pešout

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě rád poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce panu RNDr. Jaromírovi Zahradkovi, Ph.D. za vstřícný přístup, za ochotu kdykoliv konzultovat úpravy práce a za cenné rady ohledně bakalářské práce.

ANOTACE

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou derivací funkcí jedné reálné proměnné s využitím prostředí MATLAB. V práci jsou zahrnuty jak teoretické základy derivací, tak i jejich praktické výpočty, a to jak tradičním způsobem, tak i za pomoci MATLABu. Důraz je kladen na implementaci metod pomocí vytvoření a následného využití M-skriptů pro výpočet ilustračních příkladů.

KLÍČOVÁ SLOVA

derivace, diferenciál, analytické metody, numerické výpočty, Taylorův polynom, MATLAB

TITLE

Derivatives of Functions Using MATLAB

ANNOTATION

This bachelor's thesis focuses on the problematics of derivatives of single-variable functions using the MATLAB environment. The thesis includes both the theoretical foundations of derivatives and their practical calculations, performed manually as well as with the use of MATLAB. Emphasis is placed on the implementation of methods by creating and then using M-scripts for the computation of illustrative examples.

KEYWORDS

derivation, differential, analytical methods, numerical calculations, Taylor's polynomial, MATLAB

OBSAH

SEZNAM ILUSTRACÍ A TABULEK.....	10
ÚVOD.....	11
1 TEORETICKÁ ČÁST.....	12
1.1 Definice pojmu derivace funkce v bodě.....	12
1.2 Derivace funkce na intervalu.....	13
1.3 Odvození vztahů pro derivace funkcí pomocí limit.....	14
1.4 Diferenciál.....	15
1.5 Diferenciály vyšších řádů.....	16
1.6 Taylorův polynom funkce v daném bodě.....	17
1.7 Numerické aproximace derivací.....	18
1.7.1 Aproximace prvních derivací.....	18
1.7.2 Aproximace druhých derivací.....	20
1.7.3 Aproximace třetích derivací.....	21
1.7.4 Aproximace n-tých derivací.....	22
1.7.5 Aproximace derivací na intervalu.....	24
1.8 MATLAB.....	24
2 PRAKTICKÁ ČÁST.....	26
2.1 Derivace funkce jako limita diferenčního podílu.....	26
2.2 Symetrická definice derivace.....	27
2.3 Odvození vztahů pro derivace funkcí pomocí limit za pomoci MATLABu.....	28
2.4 Derivování pomocí příkazu <code>diff</code>	30
2.4.1 Parciální derivace pomocí příkazu <code>diff</code>	32
2.5 Derivování polynomů.....	33
2.6 Vytvoření Taylorova polynomu pomocí příkazu <code>taylor</code>	35
2.7 Numerické výpočty aproximací prvních derivací.....	38
2.8 Numerické výpočty aproximací druhých derivací.....	40
2.9 Numerické výpočty aproximací třetích derivací.....	41
2.10 Numerické výpočty aproximací n-tých derivací.....	42
2.11 Numerické aproximace derivací funkce na intervalu.....	45

ZÁVĚR	47
POUŽITÁ LITERATURA	48

SEZNAM ILUSTRACÍ A TABULEK

Obrázek 1: Obecná definice derivace (zdroj – vlastní).....	13
Obrázek 2: Symetrická definice derivace (zdroj – vlastní).....	13
Obrázek 3: Graf Taylorova polynomu (zdroj – vlastní)	37
Obrázek 4: Graf čtvrté derivace na intervalu (zdroj – vlastní)	46
Tabulka 1: Funkční hodnoty funkce f.....	45

ÚVOD

Derivace jsou jedním z klíčových pojmů matematické analýzy, mají význam nejen v matematice, ale i v celé řadě oborů, jako jsou fyzika, ekonomie, inženýrství a informatika. Tato bakalářská práce je zaměřena na výpočet derivací funkcí jedné reálné proměnné s využitím programového prostředí MATLAB, které poskytuje široké možnosti pro řešení derivací numericky i analyticky.

Práce je rozdělena na dvě části, a to na teoretickou a praktickou. V teoretické části jsou uvedeny základní definice derivace, a to konkrétně derivace v bodě, derivace jako funkce, diferenciálu, vyšší derivace a Taylorův polynom. Dále je vysvětlen význam derivací a jejich použití, jako je analýza rychlosti změn, nebo optimalizace a dynamika systémů.

V rámci úvodu do programového prostředí MATLABu jsou popsány jeho klíčové funkce a nástroje, které jsou využity v rámci výpočtů této práce. Zejména je zde popsán Symbolic Math Toolbox, který umožňuje snadno provádět analytické derivace, odvozování vzorců a usnadňuje práci s Taylorovými polynomy.

Praktická část obsahuje konkrétní metody výpočtu derivací v prostředí MATLABu. Zahrnuje analytické i numerické přístupy a pro každou metodu je zpracován M-skript s ilustračním příkladem, který ukazuje použití příslušného postupu. Jednodušší příklady jsou spočítány i tradičním výpočtem pro kontrolu správnosti výsledků a ilustraci rozdílu složitosti výpočtu mezi tradičním výpočtem a výpočtem pomocí MATLABu. Mezi zpracovávanými metodami jsou výpočty derivací pomocí limitní definice a využití příkazu `diff` pro analytické derivace. Nejsou zde ani opomenuty numerické výpočty prvních a vyšších derivací, včetně aproximace derivací na intervalu. Také je součástí aplikace derivace při nahrazování funkcí Taylorovými polynomy.

Studium derivací je nejen klíčové pro pochopení základních matematických konceptů, ale především v praktickém využití v reálném světě. Díky derivaci se ve fyzice dokáže popsat pohyb a síla, zatímco v ekonomii derivace slouží k analýze změn cen, produkce nebo poptávky. Další důležité využití derivací je optimalizace jako je například minimalizace nákladů nebo maximalizace zisku.

Cílem této práce je vytvořit komplexní přehled metod výpočtu derivací jedné reálné proměnné s využitím MATLABu, vytvořit praktické ukázky pro jejich implementaci a použití při praktických výpočtech.

1 TEORETICKÁ ČÁST

1.1 Definice pojmu derivace funkce v bodě

Derivace funkce v bodě je základním pojmem matematické analýzy. Definuje se jako okamžitá míra změny funkce v daném bodě. Je tedy důležitá pro pochopení lokálního chování funkcí. Lze zjistit, jak rychle se funkce mění v libovolném bodě svého definičního oboru. Má široké uplatnění jak v matematice, fyzice, biologii, ekonomice, zkrátka všude, kde je důležité sledovat míru změn procesu nebo jevu. Při výpočtech se používají různé techniky, například limitní definice, polynomy, exponenciální funkce nebo trigonometrické funkce. Limitní definice derivace funkce je klíčový krok k pochopení derivace v bodě. [3], [7]

Limitní derivace je jeden ze způsobů, jak matematicky definovat derivaci v bodě. Základní myšlenka spočívá v analyzování funkce $f(x)$, kdy je potřeba zjistit, jaká je míra změny funkce v konkrétním bodě x_0 . Pro zjištění míry změny se musí spočítat hodnoty funkce v bodě x_0 a v jeho blízkosti, tedy mezi dvěma body x_0 a $x_0 + h$, přičemž h je malé číslo. Díky tomu je zjištěna průměrná míra změny funkce mezi těmito body. Průměrnou míru změny funkce lze vyjádřit jako diferenční podíl: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Jedná se o diferenční podíl, který vyjadřuje míru narůstání, resp. poklesu funkce $f(x)$ na intervalu od x_0 do $x_0 + h$. [3], [7]

Pro získání derivace v bodě x_0 se musí diferenční podíl limitovat $h \rightarrow 0$, $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Příslušný diferenční podíl je zřejmý z trojúhelníka na Obrázku 1. [7]

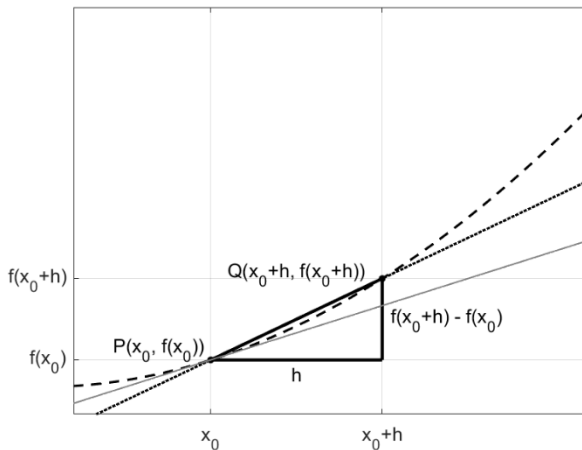
$f(x_0 + h) - f(x_0)$ udává změnu funkce mezi dvěma blízkými body. Poté, co se funkce vydělí h , se zjistí průměrná míra změny funkce na intervalu x_0 až $x_0 + h$. Nakonec když se pro $h \rightarrow 0$ použije: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, stane se taková hodnota derivací [7]

Jako příklad lze použít rychlost auta v konkrétním okamžiku. Pokud je známo, jak daleko auto dojelo za časový interval, dá to průměrnou rychlost. Pokud se bude tento časový interval bez omezení zmenšovat, bude se průměrná rychlost bez omezení blížit okamžité rychlosti v daném bodě.

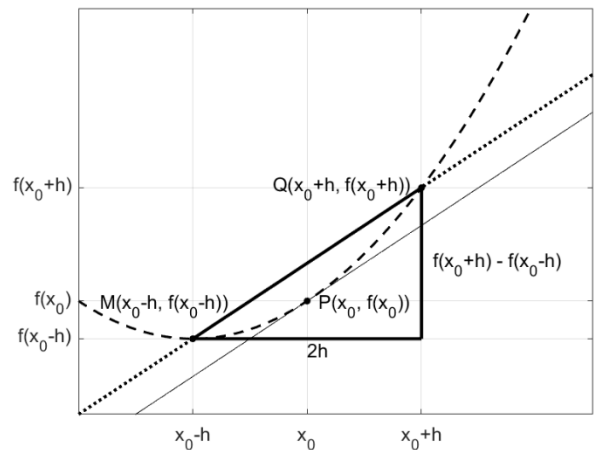
Existuje také ekvivalentní definice derivace, kterou je $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

Limitovaný diferenční podíl je zřejmý z příslušného trojúhelníku na Obrázku 2. [1]

Obrázek 1 ilustruje základní princip derivace funkce $f(x)$. Derivace je definována jako směrnice tečny, která je limitní sečnou při $h \rightarrow 0$. Funkce $f(x)$ je znázorněna čárkovaně, sečna tečkovaně a výsledná tečna je zobrazena slabou plnou čarou. Dále jsou zde popsány body P a Q , kterými sečna prochází a jako poslední je zde zobrazen diferenční trojúhelník, který je vyobrazen plnými silnými čarami. Na obrázku 2 je znázorněna ilustrace symetrické definice derivace, kde jsou stejným stylem jako na obrázku 1 znázorněny části grafu. Plnou černou silnou čarou je zobrazen diferenční trojúhelník, čárkovanou čarou funkce $f(x)$, tečkovanou sečna a slabou plnou čarou výsledná tečna.



Obrázek 1: Obecná definice derivace (zdroj – vlastní)



Obrázek 2: Symetrická definice derivace (zdroj – vlastní)

1.2 Derivace funkce na intervalu

Derivace funkce $f(x)$ je funkce $f'(x)$, která vyjadřuje, jak se mění funkce $f(x)$ v každém bodě definičního oboru funkce $f(x)$, kde je funkce diferencovatelná. Matematicky je vyjádřena jako limita v libovolném bodě x nějakého intervalu $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Derivaci lze chápat jako novou funkci odvozenou od $f(x)$ označenou jako $f'(x)$. Derivace $f'(x)$ říká, jak se mění $f(x)$ pro jakoukoliv hodnotu proměnné v definičním oboru derivace. Funkce $f'(x)$ udává, jaká je míra změny $f(x)$ pro každé x . [2], [3]

Mezi $f(x)$ a $f'(x)$ existuje několik vztahů, které popisují vlastnosti. Například růst a klesání funkce. Pokud je derivace $f'(x)$ kladná na nějakém otevřeném intervalu, funkce $f(x)$ roste na tomto intervalu, ale pokud je derivace $f'(x)$ záporná na nějakém otevřeném intervalu, funkce $f(x)$ klesá na tomto intervalu. Pokud je derivace $f'(x_0) = 0$, znamená to, že v tomto stacionárním bodě může být lokální extrém, a to buď minimum, nebo maximum. Pro zjištění, zda ve stacionárním bodě x_0 nastává maximum nebo minimum, se provede druhá derivace $f''(x_0)$, přičemž x_0 je stacionární bod. Pokud je $f''(x_0) > 0$, jedná se o minimum a když je

$f''(x_0) < 0$, jedná se o maximum. Dále lze zjistit charakter zakřivení funkce neboli jestli je konvexní nebo konkávní, to se zjistí následovně: pokud je $f''(x_0) > 0$, je funkce konvexní a pokud $f''(x_0) < 0$, funkce je konkávní. Pokud vyjde $f''(x_0) = 0$, znamená to, že se tu nachází inflexní bod a funkce zde mění svůj charakter zakřivení.[7]

Derivovanými funkcemi mohou být polynomy, což jsou funkce ve tvaru: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Derivace polynomů je součet násobků derivací mocninných funkcí $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$. Například když je funkce $f(x) = x^2$, derivace bude $f'(x) = 2x$. Pokud je funkce $f(x) = 2x^2 + 2x + 2$, derivace bude $f'(x) = 4x + 2$. Jako další funkce může být exponenciální funkce, která má tvar $f(x) = e^x$, kde e je iracionální Eulerovo číslo, které se rovná zaokrouhleně 2,718 a je základem přirozených logaritmů. Jeho derivace je $f'(x) = e^x$. Základní trigonometrické funkce mají derivace $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ a $(\tan x)' = \sec^2 x$. [8]

Pro analýzu dalších vlastností funkcí je nezbytné používat vyšší derivace. Vyšší derivace jsou další derivace předchozích derivací. Příklad vyšší derivace se dá ukázat na již zmíněném polynomu $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$. První derivace je $f'(x) = 6x^2 + 4x + 2$, druhá derivace je $f''(x) = 12x + 4$ a třetí derivace je $f^{(3)}(x) = 12$. Exponenciální funkce má vyšší derivace stejně jednoduché jako první derivaci, a to tedy že $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x \rightarrow f''(x) = e^x$. Derivace trigonometrické funkce *sinus* se periodicky opakují každou čtvrtou derivací $f(x) = \sin(x) \rightarrow f'(x) = \cos(x) \rightarrow f''(x) = -\sin(x) \rightarrow f^{(3)}(x) = -\cos(x) \rightarrow f^{(4)}(x) = \sin(x)$. [3], [7]

1.3 Odvození vztahů pro derivace funkcí pomocí limit

V libovolném bodě x definičního oboru funkce $f: y = f(x)$ je derivace funkce f definována pomocí limity: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Lze si povšimnout rozdílů mezi tímto vzorcem a vzorcem, který se používá k výpočtu definice derivace v bodě x_0 : $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Liší se právě bodem x_0 . Definice derivace v bodě je mírou změny funkce v bodě x_0 , ale v této části bude použit pro odvozování vztahů pro derivace funkcí obecný vzorec.[2], [6]

Jako příklad se odvodí vztah pro derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x}$. Jelikož druhá odmocnina neobsahuje ve svém definičním oboru záporná čísla, bude tento vztah platit pro $x \in (0; +\infty)$.

Odvození vztahu pro tuto derivaci tradičním postupem je provedeno následovně:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Nyní se odvodí vztah pro derivaci mocninné funkce $f(x) = x^n$, kde n je libovolné reálné číslo.

Začne se opět definicí derivace:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Pro výraz $(x+h)^n$ se použije binomická věta, což je matematické pravidlo, jak rozvinout mocniny dvojčlenů. Binomická věta je užitečná v oblastech matematiky, kdy je potřeba rozvinout výrazy členů tvaru $(a+b)^n$, kde n je celé číslo. [2], [6], [9]

Obecný tvar binomické věty je:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Rozvinutý tvar binomické věty pro $(x+h)^n$ se dosadí do limitní definice:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n) - x^n}{h}$$

Lze si povšimnout, že x^n se vyruší a po vydělení h vyjde:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1})$$

Když $h \rightarrow 0$, všechny členy, které obsahují h , mají limitu 0 a získá se:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

[9]

1.4 Diferenciál

Diferenciál je základním matematickým pojmem, který je úzce spojený s derivací. Slouží k přibližnému určení změny hodnoty funkce na základě malé změny její vstupní proměnné. Diferenciál je změna funkce, která je lineárně závislá i na malé změně vstupní proměnné. [3]

Definice diferenciálu dy je, pro funkci $y = f(x)$, definována vztahem $dy = f'(x)dx$. $f'(x)$ je derivace $f(x)$. dx je změna vstupní proměnné x a dy je odpovídající přibližná změna funkce y . Jedná se tedy o lineární aproximaci změny funkce v bodě x , kdy se x změní o dx . Nejlépe to funguje, když je dx co nejmenší, protože když je dx velké klesá přesnost aproximace. Pro příklad se dá použít funkce $f(x) = 2x^2$. Po derivaci vyjde $f'(x) = 4x$ a diferenciál bude $dy = 4xdx$. Pokud se za x dosadí 2 a za dx malá změna 0,1, má hodnotu $dy = 4 \cdot 2 \cdot 0,1$ a výsledný diferenciál funkce $f(x) = 2x^2$ bude $dy = 0,8$. Funkce $f(x) = 2x^2$ se tedy změní přibližně o 0,8, pokud se změní x z 2 na 2,1. [3]

Diferenciál má široké pole využití, a to v aplikacích, kde je potřeba analyzovat malé změny. Například ve fyzice se jedná o analýzu v malých změnách zrychlení rychlosti elektrických a magnetických veličin. V ekonomii v analýze marginálních změn v nabídce a poptávce, a v inženýrství při odhadech změn teploty, tlaku, napětí a dalších veličin. [10]

1.5 Diferenciály vyšších řádů

Diferenciál vyššího řádu popisuje změnu předchozího diferenciálu. Pokud máme funkci $y = f(x)$, její první diferenciál je dán derivací $f'(x)$ a tedy $dy = f'(x)dx$. Druhý diferenciál tedy popisuje změnu tohoto diferenciálu na základě vyšších derivací. Druhý diferenciál popisuje změnu prvního diferenciálu, třetí udává změnu druhého diferenciálu a takhle to jde až po n -tý diferenciál. Každý vyšší diferenciál poskytuje detailnější informace o chování funkce. Druhý diferenciál by byl $d^2y = f''(x)dx^2$, kde $f''(x)$ je druhá derivace $f(x)$ a dx^2 kvadratický přírůstek rozdílu x . Druhý diferenciál dává informaci o zakřivení grafu funkce a vyjadřuje míru změny funkce. Třetí diferenciál $d^3y = f^{(3)}(x)dx^3$ je třetí derivací funkce $f(x)$ a udává informace o míře změny zakřivení grafu funkce. Dále pokračují vyšší diferenciály až po n -tý diferenciál, který je dán vztahem $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$. Jako příklad funkce $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 2$. První derivace bude $f'(x) = 6x^2 + 4x$ a diferenciál $dy = (6x^2 + 4x)dx$. Druhá derivace $f''(x) = 12x + 4$, diferenciál $d^2y = (12x + 4)dx^2$, třetí derivace $f^{(3)}(x) = 12$ a diferenciál $d^3y = 12dx^3$. [7], [10], [11]

V pokročilejších aplikacích nestačí jen sledovat změny funkce, ale je potřeba i analyzovat dynamiku změn, a právě v tomto případě se hodí diferenciály vyšších řádů, které se uplatňují při tvorbě Taylorových polynomů a Taylorových řad. Ve fyzice se uplatňují diferenciály vyšších řádů například k studii pohybových zákonů. První derivace polohy podle času udává rychlost, druhá derivace charakterizuje zrychlení a třetí derivace vyjadřuje změnu tzv. rýv, což je veličina, která charakterizuje rázy. Pro přesnější aproximace funkcí v bodě slouží

Taylorovy polynomy, které jsou konstruovány pomocí diferenciálů vyšších řádů. [7], [10], [11]

1.6 Taylorův polynom funkce v daném bodě

Taylorův polynom pro funkci $f(x)$ v bodě x_0 je vytvořen z funkční hodnoty v bodě x_0 a derivací funkce v bodě x_0 a slouží k aproximaci funkce v bodě x_0 a jeho okolí. [2], [12]

Pokud funkce $f(x)$ má v bodě x_0 všechny derivace až do řádu n , Taylorův polynom n -tého řádu je definován:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Každý člen polynomu obsahuje derivaci určitého řádu v daném bodě x_0 a určitou mocninu vzdálenosti $x - x_0$, která určuje, jak daleko je x od bodu x_0 . $f(x_0)$ je hodnota funkce v bodě x_0 . $f'(x_0)$ je první derivace v bodě x_0 , $f''(x_0)$ je druhá derivace bodě x_0 atd. [2], [12]

Přesnost Taylorova polynomu závisí na počtu členů, které jsou zahrnuty do polynomu. Čím více členů bude polynom mít, tím přesnější bude aproximace v okolí daného bodu x_0 . Přesnost se ale zhoršuje, když se x vzdaluje od daného bodu x_0 , pro který byl polynom sestaven. Taylorův polynom prvního řádu má tvar:

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Jedná se o lineární funkci, jejímž grafem je přímka, která je tečnou ke grafu funkce v bodě x_0 . Taylorův polynom druhého řádu je:

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Taylorův polynom druhého řádu poskytuje kvadratickou aproximaci, která je přesnější než lineární. Taylorův polynom třetího řádu je:

$$T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

Taylorovy polynomy vyšších řádů poskytují přesnější přiblížení na větším okolí bodu x_0 . [2], [6], [12]

Pro příklad je použita funkce $f(x) = 2x^2 + 2x$ v bodě $x_0 = 1$. První derivace bude $f'(x) = 4x + 2$ po dosazení bodu x_0 se získá $f(1) = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 4$ a $f'(x_0) = 4 \cdot 1 + 2 = 6$. Po dosazení vzorce vyjde polynom $T_1(x) = 4 + 6(x - 1)$, který

vyjadřuje lineární aproximaci funkce. Nyní Taylorův polynom druhého řádu. Vypočítá se druhá derivace, která bude $f''(x_0) = 4$ a může se dosadit rovnou do vzorce na výpočet Taylorova polynomu druhého řádu: $T_2(x) = 4 + 6(x - 1) + \frac{4}{2}(x - 1)^2$. Výsledek je $T_2(x) = 4 + 6(x - 1) + 2(x - 1)^2$ a tento polynom poskytuje kvadratickou aproximaci funkce. Polynom třetího řádu bude stejný jako druhého řádu, protože třetí derivace je rovna 0. Přidáním vyšších derivací se zlepšuje přesnost přiblížení, ale pokud jsou vyšší derivace nulové, nemusí se polynomy vyššího řádu lišit od nižšího. [12]

1.7 Numerické aproximace derivací

1.7.1 Aproximace prvních derivací

Numerické výpočty derivací jsou důležitým nástrojem, když derivace nelze řešit analyticky prostřednictvím symbolických proměnných a když předpis funkce není vůbec znám a jsou známy jen diskrétní hodnoty derivované funkce. Cílem je tedy aproximovat hodnotu derivace, aniž by byla nutná znalost přesné funkční formy derivace. Používají se proto numerické výpočty, které odhadují hodnoty derivací pomocí hodnot funkce v okolí daného bodu.[1], [13]

V praxi je snaha zjistit, jak se mění funkční hodnota s malou změnou vstupu. Využívá se to nejen v matematice ale i ve vědeckých a inženýrských aplikacích a při analýze dat. Zkrátka všude kde je potřeba odhadnout změnu nějakého jevu na základě změřených hodnot.

Existuje několik metod pro numerické aproximace derivací. První z nich je dopředná aproximace derivace. Je to nejjednodušší metoda pro odhad derivace. Odhaduje derivaci v bodě pomocí hodnoty funkce a hodnoty v bodě $x_0 + h$, přičemž h je malý krok.

Matematicky je dopředná diference definována jako: $f'(x) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Vzorec může být

odvozen pomocí Taylorova vzorce, kdy se pomocí něj vyjádří funkční hodnota funkce f

v bodě $x_0 + h$, získá se $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + f''(\xi) \cdot \frac{h^2}{2}$, kde

$x_0 \leq (\xi) \leq x_0 + h$. Z této rovnice lze vyjádřit vztah pro první derivaci

$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + f''(\xi) \cdot \frac{h}{2}$. Aproximace derivace v bodě x_0 je

$y'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. tento vyraz se uplatňuje v definici derivace:

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Je tomu z důvodu, že v diferenciálním počtu funkcí reálné

proměnné je derivace funkce v bodě x_0 definována jako limita diferenčního podílu pro $h \rightarrow 0$.

Jeli vypočten diferenční podíl pro hodnotu přírůstku h , která je „dostatečně blízko“ nuly, je i

hodnota diferenciálního podílu „dostatečně blízko“ hodnotě derivace $f'(x_0)$ a je tedy numerickou metodou výpočtu první derivace $f'(x_0)$ výpočet diferenciálního podílu pro „dostatečně malé“ h . [1], [13], [14]

Zpětná aproximace derivace je podobná jako dopředná aproximace derivace s rozdílem, že místo hodnoty funkce v bodě $x_0 + h$ používá hodnotu $x_0 - h$. Právě touto změnou se derivace odhaduje jako: $f'(x) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$. Tento vzorec může být odvozen pomocí Taylorova vzorce, kde lze vyjádřit $x_0 - h$ jako funkční hodnotu $f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0) \cdot h + f''(\xi) \cdot \frac{h^2}{2}$, kde $x_0 - h \leq \xi \leq x_0$ a ze získané rovnice lze vyjádřit $f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + f''(\xi) \cdot \frac{h}{2}$ výrazem $y'0 = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$. Rozdíl mezi dopřednou a zpětnou je ten, že dopředná derivace je použitelná, pokud je známa hodnota funkce pouze pro body na pravé straně bodu x_0 a zpětná je použitelná, pokud je známa hodnota funkce pouze pro body na levé straně bodu x_0 . Nejpřesnější aproximací derivace je středová nebo také centrální aproximace. Příslušný vztah může být odvozen opět pomocí Taylorova vzorce za použití funkční hodnoty v bodech $x_0 - h$ a $x_0 + h$. Získá se:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot h^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi_1) \cdot h^3$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot h^2 - \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi_2) \cdot h^3$$

Kde $x_0 \leq \xi_1 \leq x_0 + h$ a $x_0 - h \leq \xi_2 \leq x_0$. Z této soustavy rovnic lze odvodit vztah pro derivaci v bodě x_0 : $f'(x_0) \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + f^{(3)}(\xi) \cdot \frac{h^2}{6}$ kde $x_0 - h \leq \xi \leq x_0 + h$. Středová aproximace derivace je funkcí druhého řádu, protože korekční člen $f^{(3)}(\xi) \cdot \frac{h^2}{6}$ je funkcí $O(h^2)$, píše se $f^{(3)}(\xi) \cdot \frac{h^2}{6} = O(h^2)$. Výsledný výraz tedy je $y'_0 = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$. Bod ξ se nachází mezi hodnotami x_0 a $x_0 + h$ nebo $x_0 - h$ a x_0 . $O(h^2)$ se používá k popisu chyby aproximace. O neboli „velké O“ označuje řád chyby. Vyjadřuje, jak rychle se chyba zmenšuje, když se krok h zmenšuje. V tomto případě $O(h^2)$ znamená, že je chyba úměrná druhé mocnině kroku h . Když se tedy krok h zmenší na polovinu, chyba se zmenší přibližně cca čtyřikrát. Zpětná a dopředná mají chybu $O(h)$, ale středová aproximace derivace má chybu $O(h^2)$ a je tedy dvakrát přesnější. Nemůže, ale být použita, pokud nejsou dostupné hodnoty funkce na obou stranách od bodu x_0 . [1], [13], [14]

1.7.2 Aproximace druhých derivací

Stejně jako numerické výpočty aproximací prvních derivací se používají k odhadu hodnot druhé derivace, když nelze použít analytické řešení nebo jsou k dispozici pouze diskrétní hodnoty. [1], [14]

Pro aproximace derivací vyšších řádů se může použít postupné výpočty aproximací. Lze tedy získat aproximace druhé derivace v bodě diferencním podílem aproximací prvních derivací v uzlových bodech. Aproximace třetích derivací lze získat diferencním podílem druhých derivací a pro získání aproximace n -tého řádu, je tedy možné použít diferencní podíl z aproximací derivací $(n-1)$ -ího řádu. Ovšem také lze pro aproximace vyšších derivací vztahy odvodit, a to díky jejich funkčním hodnotám v uzlových bodech $0 - nh, \dots, x_0 - 2h, x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh$ se dokáže vypočítat příslušná n -tá derivace v bodě. Funkční hodnoty v uzlových bodech se mohou označit symboly:

$$y_{-n} = f(x_0 - nh), \dots, y_{-1} = f(x_0 - h), y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_0 + h), \dots, y_{+n} = f(x_0 + nh).$$

Pro aproximace vyšších derivací funkcí se zaměříme jen na nejpřesnější metodu, a to na středovou aproximaci. Pro odvození středové aproximace druhé derivace funkce f a vztahu pro její chybu se bude uvažovat diskretizační krok h , přičemž ($h > 0$) a body $x_0 - h$, x_0 a $x_0 + h$ z definičního oboru funkce f . Pro odvození bude předpokládáno, že funkce f je spojitě diferencovatelná třídy C_4 v bodě x_0 a jeho okolí, do kterého patří výše zmíněné body $x_0 - h$ a $x_0 + h$. Nyní se středová aproximace druhé derivace odvodí pomocí Taylorova vzorce. Začne se tím, že se právě pomocí Taylorova vzorce vyjádří funkční hodnoty:

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot h^2 - \frac{1}{6} f^{(3)}(x_0) \cdot h^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi_1) \cdot h^4$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot h^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}(x_0) \cdot h^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi_2) \cdot h^4$$

kde $x_0 - h \leq \xi_1 \leq x_0$ a $x_0 \leq \xi_2 \leq x_0 + h$. Do výrazu $f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)$, se dosadí za funkční hodnoty vyjádřené Taylorovy vzorce, je tím získána rovnice:

$$f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h) = f''(x_0) \cdot h^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)}{2} \right) \cdot h^4$$

Pokud se nahradí na základě věty o střední hodnotě výraz $\frac{f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)}{2}$ hodnotou $f^{(4)}(\xi)$,

kde $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$, může se poté vyjádřit $f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} - f^{(4)}(\xi) \cdot \frac{h^2}{12}$

Středová diference pro aproximaci druhé derivace v bodě x_0 je určena prvním členem: $y''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$. Druhý člen, o který se jedná, je člen korekční neboli chybový a pro něj platí, že $-f^{(4)}(\xi) \cdot \frac{h^2}{12}$ je funkcí $O(h^2)$. Pokud je použita uvedená diferenční aproximace pro druhou derivaci dopustí se absolutní chyby, která může být odhadnuta shora jako $a_{max} = \frac{h^2}{12} \max_{x \in \langle x-h, x+h \rangle} |f^{(4)}(x)|$. Druhá derivace funkce v bodě x_0 se může v tomto případě vyjádřit jako $f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} \pm a_{max}$. Když se dosadí za $y_{-1} = f(x_0 - h)$, $y_0 = f(x_0)$ a za $y_1 = f(x_0 + h)$, může se nyní středová aproximace druhé derivace funkce f v bodě x_0 vyjádřit jednoduše jako $y''_0 = \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{h^2}$. [1], [14]

Diferenční vztah pro druhou derivaci v bodě x_0 lze i bez nároků na vyjádření zbytku a odhad chyby odvodit jako diferenční podíl, který je sestavený z numericky získaných hodnot středových aproximací prvních derivací v bodech $x_0 - \frac{h}{2}$ a $x_0 + \frac{h}{2}$ neboli z hodnot $f'(x_0 - \frac{h}{2})$ a $f'(x_0 + \frac{h}{2})$. Může se tedy vyjádřit jako:

$$\begin{aligned} y''_0 &= \frac{f'(x_0 + \frac{h}{2}) - f'(x_0 - \frac{h}{2})}{h} = \frac{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}}{h} = \\ &= \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} \end{aligned}$$

[1], [14]

1.7.3 Aproximace třetích derivací

Stejně jako u výpočtu aproximace druhých derivací se zde omezíme pouze na středové aproximace derivací. Je dána funkce f jedné reálné proměnné, diskretizační krok h a body $x_0 - 2h$, $x_0 - h$, $x_0 + h$ a $x_0 + 2h$ v okolí bodu x_0 . V tomto bodě je funkce f spojitě diferencovatelná třídy C_5 . [1], [14]

Nyní se vyjádří funkční hodnoty funkce f v bodech v okolí x_0 pomocí Taylorova vzorce:

$$\begin{aligned} f(x_0 + 2h) &= f(x_0) + 2f'(x_0) \cdot h + 2f''(x_0) \cdot h^2 + \frac{4}{3}f^{(3)}(x_0) \cdot h^3 + \frac{2}{3}f^{(4)}(x_0) \cdot h^4 + \frac{4}{15}f^{(5)}(\xi_1) \cdot h^5, \\ f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2}f''(x_0) \cdot h^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(x_0) \cdot h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0) \cdot h^4 + \frac{1}{120}f^{(5)}(\xi_2) \cdot h^5, \\ f(x_0 - h) &= f(x_0) - f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2}f''(x_0) \cdot h^2 - \frac{1}{6}f^{(3)}(x_0) \cdot h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0) \cdot h^4 - \frac{1}{120}f^{(5)}(\xi_2) \cdot h^5, \\ f(x_0 - 2h) &= f(x_0) - 2f'(x_0) \cdot h + 2f''(x_0) \cdot h^2 - \frac{4}{3}f^{(3)}(x_0) \cdot h^3 + \frac{2}{3}f^{(4)}(x_0) \cdot h^4 - \frac{4}{15}f^{(5)}(\xi_1) \cdot h^5, \end{aligned}$$

Kde $x_0 \leq \xi_1 < x_0 + 2h$, $x_0 \leq \xi_2 < x_0 + h$, $x_0 - h \leq \xi_3 \leq x_0$ a $x_0 - 2h \leq \xi_4 \leq x_0$. Když se do výrazu dosadí $f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + 2f(x_0 - h) - f(x_0 - 2h)$ vyjádřené vztahy, získá se rovnice:

$$f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + 2f(x_0 - h) - f(x_0 - 2h) = 2h^3 f^{(3)}(x_0) + a(h),$$

ve které

$$a(h) = \frac{1}{2} h^5 \left(\frac{f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_4)}{2} + \frac{f^{(5)}(\xi_1) - f^{(5)}(\xi_2)}{30} + \frac{f^{(5)}(\xi_4) - f^{(5)}(\xi_3)}{30} \right)$$

Lze si všimnout, že výraz $a(h)$ je poměrně složitý, může se však nahradit zjednodušeným výrazem $a(h) = \frac{1}{2} h^5 f^{(5)}(\xi)$, kde $x_0 - 2h \leq \xi \leq x_0 + 2h$. Díky tomu může být vyjádřena třetí derivaci funkce f v bodě x_0 jako:

$$f^{(3)}(x_0) = \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + 2f(x_0 - h) - f(x_0 - 2h)}{2h^3} - \frac{1}{4} f^{(5)}(\xi) \cdot h^2$$

V uvedeném vztahu pro třetí derivaci je následujícím výrazem určena středová diferenční aproximace třetí derivace funkce f v bodě x_0 .

$$y_0^{(3)} = \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + 2f(x_0 - h) - f(x_0 - 2h)}{2h^3}$$

A její korekční člen $-\frac{h^2}{4} f^{(5)}(\xi)$ je funkcí $O(h^2)$.

Pokud se použije pro vyjádření třetí derivace středová diferenční aproximace, dopustí se absolutní chyby, která může být shora odhadnuta hodnotou:

$a_{max} = \frac{h^2}{4} \max_{x \in \langle 0, x-2h, x+2h \rangle} |f^{(5)}(x)|$ a třetí derivaci funkce v bodě x_0 se může vyjádřit jako:

$$f^{(3)}(x_0) = \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + 2f(x_0 - h) - f(x_0 - 2h)}{2h^3} \pm a_{max}$$

Pokud se dosadí za $y_{-2} = f(x_0 - 2h)$, $y_{-1} = f(x_0 - h)$, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_0 + h)$ a za $y_2 = f(x_0 + 2h)$, dokáže se jednoduše vyjádřit středová aproximace třetí derivace funkce f v bodě x_0 a to jako: $y_0^{(3)} = \frac{y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2}}{2h^3}$. [1]

1.7.4 Aproximace n-tých derivací

Pokud se zobecní použité metody pro získání středových aproximací prvních, druhých a třetích derivací, lze získat obecný postup pro aproximaci derivací libovolného řádu n . Ovšem

při odvozování těchto vzorců se musí rozlišit přístupy pro sudé a pro liché hodnoty n . Tato kapitola se již nebude zabývat podrobným odhadem chyb aproximací vyšších derivací a bude se více soustředit na sudé derivace. [1], [13]

U aproximace liché n -té derivace uvažujme funkci f o jedné reálné proměnné, libovolné přirozené liché číslo n a diskretizační krok h . Bude se předpokládat, že funkce f je spojitě diferencovatelná třídy C_{n+1} v bodě x_0 a jeho okolí, ve kterém jsou obsaženy body $x_0 - \frac{n+1}{2}h, x_0 - \left(\frac{n+1}{2} - 1\right)h, \dots, x_0 - h, x_0 + h, \dots, x_0 + \left(\frac{n+1}{2} - 1\right)h, x_0 + \frac{n+1}{2}h$

Lze tedy odvodit vztah pro středovou aproximaci liché n -té derivace v bodě x_0 , který bude vypadat následovně:

$$y_0^{(n)} = \frac{1}{2h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n-1}{k} \left(f\left(x_0 + \left(\frac{n+1}{2} - k\right)h\right) - f\left(x_0 + \left(\frac{n-3}{2} - k\right)h\right) \right)$$

Tento vztah lze dále ještě zjednodušit, pokud se označí-li se:

$$y_{-\frac{n+1}{2}} = f\left(x_0 - \frac{n+1}{2}h\right), y_{-\frac{n+1}{2}+1} = f\left(x_0 - \left(\frac{n+1}{2} - 1\right)h\right), \dots, y_{-1} = f(x_0 - h),$$

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_0 + h), \dots, y_{\frac{n+1}{2}-1} = f\left(x_0 + \left(\frac{n+1}{2} - 1\right)h\right), y_{\frac{n+1}{2}} = f\left(x_0 + \frac{n+1}{2}h\right) \quad [1]$$

Lze vyjádřit aproximaci liché n -té derivace funkce f v bodě x_0 jednoduše:

$$y_0^{(n)} = \frac{1}{2h^n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \left(y_{\frac{n+1}{2}-k} - y_{\frac{n-3}{2}-k} \right)$$

[1]

Aproximace sudé n -té derivace lze obdobně jako u liché aproximace n -té derivace, uvažovat o funkci f jedné reálné proměnné, libovolné přirozené sudé číslo n a diskretizační krok h . Opět lze předpokládat, že funkce f je spojitě diferencovatelná třídy C_{n+1} v bodě x_0 a jeho okolí, ve kterém jsou obsaženy uzlové body $x_0 - \frac{n}{2}h, x_0 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)h, \dots, x_0 - h, x_0 + h, \dots, x_0 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)h, x_0 + \frac{n}{2}h$ [1]

Pro středovou aproximaci sudé n -té derivace se může v bodě x_0 odvodit vztah:

$$y_0^{(n)} = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f\left(x_0 + \left(\frac{n}{2} - k\right)h\right)$$

Tento vztah se může dále zjednodušit, pokud se označí funkční hodnoty funkce f v uzlových bodech jako: $y_{-\frac{n}{2}} = f\left(x_0 - \frac{n}{2}h\right)$, $y_{-\frac{n}{2}+1} = f\left(x_0 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)h\right)$, \dots , $y_{-1} = f(x_0 - h)$,

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_0 + h), \dots, y_{\frac{n}{2}-1} = f\left(x_0 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)h\right), y_{\frac{n}{2}} = f\left(x_0 + \frac{n}{2}h\right)$$

Získá se zjednodušený vztah vyjadřující aproximaci sudé n -té derivace funkce f v bodě x_0 :

$$y_0^{(n)} = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} y_{\frac{n}{2}-k}^{(n)}$$

[1]

1.7.5 Aproximace derivací na intervalu

V aplikacích numerické matematiky je občas třeba aproximovat derivace vyšších řádů funkce na určitém intervalu. Aproximace n -té derivace na intervalu je dána aproximacemi n -tých derivací v jednotlivých uzlových bodech. Výpočet se může provádět dvěma způsoby, a to buď přímým, nebo postupným výpočtem aproximací n -tých derivací v uzlových bodech. Přímý výpočet využívá známé vzorce, nebo jednorázové aproximační metody, které rovnou aproximují n -tou derivaci funkce v daném uzlovém bodě. Přímé vzorce jsou založeny na diferenčních vzorcích, které přímo počítají požadovanou derivaci. Tato metoda se používá v případech, kdy je potřeba rychle a jednorázově vypočítat derivaci bez nutnosti předchozích výpočtů. Na rozdíl od přímého výpočtu je postupný výpočet zaměřený na výpočet derivací krok za krokem. Často využívá předchozí výpočty nižších derivací. Postupný výpočet často kombinuje postupné aplikace diferenčních vzorců, nebo opakované diference. Každá hodnota se tedy vypočítá s pomocí již dříve vypočítaných hodnot. Tato metoda je užitečná v případech, kdy se vyšší derivace postupně odvozují z již vypočítaných hodnot anebo když se derivace vypočítávají opakovaně. [1], [14]

1.8 MATLAB

MATLAB je programovací prostředí a programovací jazyk, který je široce využíván v akademickém prostředí, průmyslu a výzkumu. Jeho flexibilita a široká škála vestavěných funkcí poskytují uživatelům mocné nástroje pro analýzu dat, numerické výpočty, vizualizaci,

modelování. MATLAB zvládá jak základní matematické operace, jako je sčítání, odčítání, tak i pokročilejší operace jako jsou: matice, derivace, integrály. MATLAB také poskytuje velkou flexibilitu při vytváření vlastních skriptů neboli programů, simulací, nebo analýz dat, a to díky programovacích konstrukcím, jako jsou příkazy, cykly a funkce definované uživatelem. Pomocí toho lze automatizovat i složitější matematické úlohy nebo výpočty. Díky těmto konstrukcím dokáže uživatel vytvářet vlastní algoritmy a řešit efektivně komplexní problémy. [2], [16]

Některé funkce má MATLAB obsažené v základním modulu, ale k používání mnoha dalších potřebuje knihovny neboli toolboxy. Díky tomu, že má MATLAB přístup k velkému množství knihoven, mohou být možnosti použití MATLABu rozšířeny o další funkce nebo nástroje. V této práci bude využíván nástroj Symbolic Math Toolbox, který rozšiřuje možnosti MATLABu o práci se symbolickými výrazy. Rozdíl mezi numerickými výpočty a symbolickými výpočty je ten, že numerické vrací konkrétní hodnoty proměnných, a druhé pracují se symbolickými proměnnými a symbolickými konstantami, díky tomu lze provádět operace jako jsou derivace, integrály nebo limity, a to je v této práci klíčové. [2]

V této práci budou používány funkce, které jsou součástí Symbolic Math Toolbox. Jako první bude využívána funkce `limit`. Tato funkce slouží pro výpočet derivace pomocí definice derivace. Funkce `limit` je klíčová pro analytický výpočet derivací a využívá se při odvozování vzorců pro derivaci funkcí. [2]

Dále se bude využívat funkce `diff`, která je využívána k derivování funkcí. Poskytuje možnost analytického výpočtu derivací a je základním nástrojem pro řešení úloh týkajících se derivací funkcí. Výhodou je, že funkce `diff` dokáže jednoduše spočítat derivace libovolného řádu, a kromě toho s její pomocí dokážeme počítat parciální derivace pro funkce více proměnných. [2]

Další funkcí, která je v práci využívána je funkce `taylor`, která slouží k Výpočtu několika prvních členů Taylorovy řady dané funkce v daném bodě. Tato funkce je užitečná pro aproximace funkcí a analýzu chování funkcí v okolí příslušných bodů. [2]

2 PRAKTICKÁ ČÁST

2.1 Derivace funkce jako limita diferenčního podílu

Zjednodušeně by se dalo říct, že derivace vyjadřuje okamžitou změnu funkce $f(x)$ v daném bodě x_0 , takže se jedná o rychlost míry narůstání, jakou se hodnota funkce mění, když se nepatrným způsobem změní její vstupní hodnota. Více do hloubky je tato definice vysvětlena v teoretické části. V této části bude ukázáno, jak ji lze vypočítat pomocí MATLABu s knihovnou Symbolic Math Toolbox a její funkcí `limit`. Pro tento výpočet je vytvořena následující M-funkce.

```
function df = derivace_limit(f, x0)
    syms x h;
    f_sym = f(x);
    df_limit = limit((subs(f_sym, x, x + h) - f_sym) / h, h, 0);
    df = double(subs(df_limit, x, x0));
end
```

Tato M-funkce slouží k vypočítání derivace v bodě x_0 pomocí definice derivace, která je vysvětlena v teoretické části. Nejprve se vytvoří funkce s výstupní proměnnou `df`. Řádek `syms x h` deklaruje symbolické proměnné, které budou použity pro algebraické manipulace. Na řádku `f_sym = f(x)` se převede funkce $f(x)$ na symbolický výraz pro výpočet derivací a `limit`. Na dalším řádku se volá funkce `limit`: `f_limit = limit((subs(f_sym, x, x + h) - f_sym) / h, h, 0)` tento řádek reprezentuje vzorec: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Vzorec je zde vysvětlen po částech. Nejprve část `subs(f_sym, x, x+h)`, která v symbolickém výrazu funkce $f(x)$ neboli `f_sym` nahradí každé `x`, `x + h`. Díky tomu se získá funkční hodnota v bodě `x + h`. `(subs(f_sym, x, x + h) - f_sym) / h` je rozdíl funkčních hodnot děleným rozdílem argumentů, který je v tomto případě `h`. Nakonec se vše vloží do funkce `limit(..., h, 0)`, která vypočítá limitu výrazu kdy `h` směřuje k 0. Tento krok simuluje nekonečně malý krok `h` bez omezení a díky tomu vypočítá přesnou derivaci. Výsledek je ale stále symbolický neboli matematický výraz. Proto je použita funkce `double`, která ho převede na konkrétní číselnou hodnotu. To se provede následovně: `df = double(subs(df_limit, x, x0))` na tomto řádku je dosazeno za proměnnou `x` `x0`, což je bod, ve kterém je derivace spočítána a následně se použije funkce `double`.

Pro ukázkový příklad se použije funkce $f(x) = x^2 + 2x + 2$ v bodě $x_0 = 1$. Nejprve se derivace pro kontrolu spočítá standartním způsobem. První derivace je $f'(x) = 2x + 2$. Nyní se za x dosadí x_0 , vyjde tedy $f'(x) = 2 \cdot 1 + 2$, tím vznikne výsledná derivace 4. Nyní se funkce spočítá pomocí funkce `derivace_limit` v MATLABu. Do příkazového řádku se vloží `f=@(x)x^2+2*x+2` čímž se vytvoří funkce která přijímá jeden vstupní argument a tím je x . Dále do příkazového řádku vloží `x0=1` a tím se vytvoří proměnná x_0 s hodnotou 1, která je bodem, ve kterém se bude derivace počítat. Jako poslední se vloží do příkazového řádku `df = derivace_limit(f, x0)`, to spustí M-funkci a do proměnné `df` uloží výsledek `df=4`.

2.2 Symetrická definice derivace

Symetrická definice derivace je alternativní definicí derivace, protože zahrnuje obě strany bodu x_0 , na rozdíl od jedné strany jako definice derivace. Podrobněji je vysvětlena v teoretické části. Jelikož se jedná v podstatě o rozšíření vzorce definice derivace

$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ na symetrickou definici derivace, která má vzorec:

$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ je tedy i M-funkce velmi podobná.

```
function df = derivace_limit_symetricka(f, x0)
    syms x h;
    f_sym = f(x);
    df_limit=limit((subs(f_sym,x,x+h)-subs(f_sym,x,x-h))/(2*h),h,0);
    df = double(subs(df_limit, x, x0));
end
```

Jelikož je M-funkce podrobně vysvětlena u definice derivace, projdou se jen kroky stručně a je tedy tahle část zaměřena jen na rozdíly mezi funkcemi. Nejprve se vytvoří funkce s výstupní proměnnou `df` a deklarují se symbolické proměnné x a h . Dále se převede funkce $f(x)$ na symbolický výraz. Změna přichází na řádku, kdy je použita funkce `limit` `df_limit=limit((subs(f_sym,x,x+h)-subs(f_sym,x,x-h))/(2*h),h,0)` kde se nahradí v druhé části `f_sym` výrazem `subs(f_sym,x,x-h)` a tím se přidá i druhá strana bodu x_0 . Pro tento postup je nutné přidat druhé h , protože je zohledněn jak posun zprava, tak posun zleva.

Jako příklad je použita stejná funkce jako u limitní definice derivace a to $f(x) = x^2 + 2x + 2$ v bodě $x_0 = 1$. Z předchozí části je již známo, že výsledek by měl být 4. Stejně jako v

předchozím příkladu je do příkazového řádku vložen příkaz $f=@(x)x^2+2*x+2$, čímž se vytvoří funkce. Následně je zadána hodnota $x_0=1$. Po spuštění M-funkce je zjištěno, že výsledek je opět 4.

2.3 Odvození vztahů pro derivace funkcí pomocí limit za pomoci

MATLABu

Tato část popisuje, jak podle této definice lze odvodit vztahy (vzorce) pro derivaci funkcí pomocí MATLABu. Tyto vztahy jsou odvozeny tradičním způsobem v teoretické části.

Stejně jako v teoretické části se jako první odvodí vztah pro derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x}$. Pro odvození vztahu pro tuto derivaci pomocí MATLABu bude potřeba si vytvořit následující M-funkci:

```
function df = odvozeni_vztahu_odmx()
    syms x h;
    df=limit((sqrt(x+h)-sqrt(x))/h,h,0);
end
```

Následně se do konzole vloží: `odvozeni_vztahu_odmx`, čímž se M-funkce zavolá. Lze vidět, že je dosaženo stejného výsledku: $1/(2*x^{(1/2)})$. Po převedení do standardní matematické formy se získá $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

K odvození vztahu pro derivaci mocninné funkce se vytvoří M-funkce:

```
function df = odvozeni_vztahu_mocnin()
    syms x h n;
    df = limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0);
end
```

V MATLABu se M-funkce zavolá: `odvozeni_vztahu_mocnin`. Výsledný výsledek bude $n*x^{(n - 1)}$ a to je po úpravě do matematické formy nx^{n-1} , což se rovná výsledku, který vyšel i po standardním odvození.

Další příklad se odvodí pouze pomocí MATLABu a to vztah pro funkci $f(x) = xe^{-\frac{a}{x^2}}$, kde a je volitelný parametr.

Je vytvořena M-funkce:

```
function df = odvozeni_vztahu_exp()
    syms x a h;
    df=limit((((x+h)*exp((-1)*a/(x+h)^2)-(x*exp((-1)*a/x^2)))/h),h,0);
end
```

Z toho vyjde výsledek $(\exp(-a/x^2)*(x^2+2a))/x^2$ po přepisu do matematické formy

je získán výraz: $\frac{e^{\left(-\frac{a}{x^2}\right)} \cdot (x^2 + 2a)}{x^2}$

Další vztah, který bude odvozen je vztah pro funkci $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ kde a, b, c, d jsou parametry. Je vytvořena M-funkce s názvem odvozeni_vztahu_parametry:

```
function df = odvozeni_vztahu_parametry()
    syms x a b c d h;
    df=limit((((a*(x+h)+b)/(c*(x+h)+d))-((a*x+b)/(c*x+d)))/h),h,0);
end
```

Po zavolání funkce vyjde výsledek $a/(d+c*x)-(c*(b+a*x))/(d+c*x)^2$. Tento výsledek může být upraven pomocí příkazu `simplify`, který slouží ke zjednodušení symbolických výrazů. Zavolá se pomocí `simplify(ans)`. V proměnné `ans` je výsledek, který vrátila naše M-funkce. Po provedení `simplify` příkazu vyjde zjednodušený výsledek $(a*d-b*c)/(d+c*x)^2$. V matematickém tvaru je to: $\frac{ad-bc}{(d+cx)^2}$.

Další odvození bude pro funkci $f(x) = \sin(x)$. K tomu je vytvořena M-funkce `odvozeni_vztahu_sin()`, která bude vypadat následovně:

```
function df = odvozeni_vztahu_sin()
    syms x h;
    df = limit((sin(x+h) - sin(x)) / h, h, 0);
end
```

M-funkce `odvozeni_vztahu_sin` se zavolá a získá se výsledek $\cos(x)$.

Poslední příklad řeší odvození vztahu pro funkci: $f(x) = \ln \ln \ln x$. Opět je vytvořena M-funkce s názvem `odvozeni_vztahu_ln`. Tato M-funkce bude vypadat takto:

```
function df = odvozeni_vztahu_ln()
    syms x h;
    df=limit((log(log(log(x+h))) - log(log(log(x)))) / h, h, 0);
end
```

Po zavolání M-funkce bude výsledek $1/(x \cdot \log(\log(x)) \cdot \log(x))$ a po přepisu do matematické podoby se získá $\frac{1}{x \ln x \ln \ln x}$. [2], [5]

2.4 Derivování pomocí příkazu `diff`

Derivace je jedním ze základních nástrojů matematické analýzy, vyjadřuje míru změny funkce vzhledem k její nezávislé proměnné. Pokud je dána funkce $f(x)$, její derivace $f'(x)$ říká, jak rychle se mění hodnota funkce, když se mění hodnota x . Podrobněji je derivace vysvětlena v teoretické části. Pro výpočet derivací pomocí MATLABu a Symbolic Math Toolboxu je použita tato M-funkce:

```
function df = odvozeni_vztahu(f)
    syms x
    df = diff(f, x);
end
```

Pro derivování existuje několik základních pravidel. První je na řadě derivace součtu dvou funkcí. Derivace součtu dvou funkcí je rovna součtu jejich jednotlivých derivací. Vzorec tedy bude pro derivaci dvou funkcí: $f(x) + g(x)$ je $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$. Pokud je dána funkce $f(x) = 2x^2 + x^3$, její derivace bude $f'(x) = 4x + 3x^2$. Pomocí MATLABu je možno tento vztah zjistit, pokud do funkce `vypocet_derivace_diff` je vložena funkce `f=@(x)2*x^2+x^3`. Výsledek je stejný, jen v opačném pořadí sčítanců $f'(x) = 3x^2 + 4x$. [7]

Podobně jako derivace součtu je i derivace rozdílu dvou funkcí rozdílem jejich derivací: $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$. Pro příklad je použita stejná funkce jako pro součet s jediným rozdílem, plus se zamění za mínus. Vznikne funkce $f(x) = 2x^2 - x^3$ a její derivace bude $f'(x) = 4x - 3x^2$. Pro výpočet derivace v MATLABu se použije stejná

M-funkce jako při součtu `vypocet_derivace_diff`. Může se použít stejná M-funkce díky příkazu `diff`, který sám použije derivační pravidlo na základě vložené funkce. V MATLABu je vložena funkce: `f=@(x)2*x^2-x^3` a je zavolána M-funkce `vypocet_derivace_diff(f)`. Vyjde $f'(x) = -3x^2 + 4x$. [7]

Derivace součinu funkcí se řídí součinným pravidlem, pokud tedy pro funkce $f(x)$ a $g(x)$ platí vztah $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. Derivace dvou funkcí není jen součin jejich derivací, ale zahrnuje i jejich původní funkce. Tato formulace zohledňuje vzájemný vliv změn obou složek v závislosti na proměnné x . Jako příklad je zde použita funkce s označením $h(x) = (2x^2 + 3) \cdot (x^3 - 5x)$, na niž je ilustrováno použití vzorce. Při klasickém derivování je výsledkem: $h'(x) = 4x(x^3 - 5) + (2x^2 + 3) \cdot (3x^2 - 5)$. Tato funkce je vložena do MATLABu `h=@(x)(2*x^2+3)*(x^3-5*x)` a je zavolána M-funkce `vypocet_derivace_diff(h)`, v konzoli se ukáže výsledek $h'(x) = (2x^2 + 3) \cdot (3x^2 - 5) - 4x(-x^3 + 5x)$ což je stejný výsledek jako při tradičním výpočtu jen v rozdílném pořadí členů. [7]

Pro derivaci podílu funkcí $f(x)$ a $g(x)$, kde $g(x) \neq 0$, platí: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$. Jako příklad je použit podíl funkcí $f(x) = e^{2x}$ a $g(x) = 3x + 1$. Derivace spočítána standartním způsobem je $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{2e^{2x}(3x+1) - 3e^{2x}}{(3x+1)^2}$, po roznásobení se získá $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{6xe^{2x} + 2e^{2x} - 3e^{2x}}{(3x+1)^2}$, po rozpočítání vyjde výsledek $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{6xe^{2x} - e^{2x}}{(3x+1)^2}$. Po konečné úpravě je výsledek $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{2xe^{2x}}{3} + \frac{e^{2x}}{3}$. Po vložení funkce do MATLABu `h=@(x)exp(2*x)/3*x+1` a následně se opět zavolá M-funkce `vypocet_derivace_diff(h)`. MATLAB vrátí výsledek `exp(2*x)/3+(2*x*exp(2*x))/3` v matematickém tvaru tedy $\frac{e^{2x}}{3} + \frac{2xe^{2x}}{3}$. MATLAB pomocí funkce `diff` sám použije vztah pro derivování podílu a výsledek je znám takřka ihned. [7]

Další jsou derivace elementárních funkcí, a ty se dělí na mocninné, exponenciální, logaritmické a trigonometrické funkce. Jejich derivace jsou důležitým základem pro výpočet složitějších derivací. [7]

Nejprve derivace mocninných funkcí. Pro mocninné funkce $f(x) = x^n$ platí pravidlo $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. Tomuto vztahu se říká pravidlo derivace mocninné funkce. Pokud je do MATLABu zadáno `f=@(x,n)x^n`. Jelikož je používána i proměnná n , musí se do parametru

přidat k parametru x , jinak by byla ohlášena chyba, když je zavolána M-funkce `vypocet_derivace_diff(f)`, je získáno $nx^n - 1$ v matematickém tvaru $nx^{(n-1)}$, což je i zároveň obecný vzorec pro derivaci mocninných funkcí. [7]

Jako další je na řadě exponenciální funkce. Exponenciální funkce $f(x) = e^x$ má derivaci $f'(x) = e^x$, její hodnota po derivaci zůstává stejná. Do MATLABu je vložena `f=@(x)exp(x)` a zavolána M-funkce `vypocet_derivace_diff(f)`. Výsledek je $\exp(x) = e^x$. [7]

Derivací logaritmické funkce $f(x) = \ln(x)$, je $f'(x) = \frac{1}{x}$. V MATLABu je vložena funkce `f=@(x)log(x)` a opět je zavolána M-funkce `vypocet_derivace_diff(f)`. MATLAB vrátí $1/x$, což je přesně vzorec $f'(x) = \frac{1}{x}$. [7]

Jako poslední tu jsou trigonometrické funkce, což jsou například $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Derivací $f(x) = \sin(x)$ se rovná $\cos(x)$ a derivací $f(x) = \cos(x)$ je $-\sin(x)$. Do MATLABu se vloží `f=@(x)sin(x)` a zavolá se M-funkce `vypocet_derivace_diff(f)`. Vyjde $\cos(x)$. Poté je vloženo `f=@(x)cos(x)` a opět zavolána funkce `vypocet_derivace_diff(f)`. MATLAB vrátí $-\sin(x)$. [7]

2.4.1 Parciální derivace pomocí příkazu `diff`

Parciální derivace jsou derivace funkcí, kde se derivuje pouze s ohledem na jednu proměnnou. Zbylé proměnné jsou považovány za konstanty. Parciální derivace ukazuje, jak se funkce mění, když se mění jen jedna proměnná a ostatní zůstávají stejné. Tyto derivace jsou důležité, protože jsou klíčovým nástrojem pro analýzu funkcí více proměnných. [7]

Je dána funkce $f(x, y)$, která je funkcí dvou proměnných x a y , která může mít parciální derivaci podle proměnné x , $\frac{\partial f}{\partial x}$. Parciální derivaci podle proměnné y , $\frac{\partial f}{\partial y}$. Funkce o n proměnných mohou mít podle jednotlivých proměnných celkem n parciálních derivací.

Funkce $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ má $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x$ a parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. Funkce $f(x, y) = 2x^2y + 3x^2y^2$ má derivaci podle x $\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 6xy^2$ a parciální derivaci podle y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 6x^2y$. [7]

Řešení parciálních derivací v MATLABu lze provést pomocí M-funkce

```
function [dfx,dfy] = parcialni_derivace(f)
    syms x y
    dfx = diff(f,x);
    dfy = diff(f,y);
    disp('Parciální derivace podle x:')
    disp(dfx)
    disp('Parciální derivace podle y:')
    disp(dfy)
end
```

M-funkce vrací dvě hodnoty, a to dfx a dfy , což jsou parciální derivace podle x a podle y . Funkce přijímá jeden vstupní argument a tím je symbolická funkce f . Ve funkci se nejprve deklarují symbolické proměnné: `syms x y` a poté se spočítá parciální derivace pomocí funkce `diff`: `dfx = diff(f,x)` a `dfy = diff(f,y)`. Do funkce `diff` vstupuje funkce f a proměnná, podle níž se parciální derivace počítá. Poté pomocí příkazu `disp` jsou vypsané výsledky parciálních derivací do konzole.

Při vlastním výpočtu se do MATLABu vloží funkce $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ příkazem: `f=@(x,y)2*x^2+y^2` a poté je zavolána M-funkce `parcialni_derivace(f)`. Výstupem jsou hlášení: Parciální derivace podle x : $4*x$ a parciální derivace podle y : $2*y$. Podobně pro druhou funkci $f(x,y) = 2x^2y + 3x^2y^2$ se v MATLABu vytvoří `f=@(x,y)2*x^2*y+3*x^2*y^2` opět se zavolá M-funkce `parcialni_derivace(f)`. V konzoli se vypíše výsledek: parciální derivace podle x : $6*x*y^2+4*x*y$ a Parciální derivace podle y : $6*x^2*y+2*x^2$.

2.5 Derivování polynomů

Tato část je zaměřena na to, jak lze pomocí MATLABu vyjádřit polynomy, když jsou zadány jako vektor koeficientů jednotlivých členů. Polynom je algebraický výraz, který je složený ze členů, přičemž každý člen je součinem konstanty a mocniny proměnné. Obecná forma polynomu je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. a_n, \dots, a_0 jsou koeficienty polynomu, x je proměnná, pro kterou chceme zjistit výsledek polynomu a n je stupeň polynomu. [7]

Pro ilustraci jsem vybral polynom $p(x) = 5x^3 - 2x^2 + x - 4$. Pro tento polynom je vektor koeficientů: $v = [5, -2, 1, -4]$. Derivace polynomu je $p'(x) = 15x^2 - 4x + 1$ a vektor koeficientů $v' = [15, -4, 1]$. Derivaci polynomu lze vypočítat pomocí MATLABu oběma způsoby. Derivaci polynomu lze provést pomocí již vytvořené M-funkce `vypocet_derivace_diff`. Výsledkem je polynom $15x^2 - 4x + 1$. Pro derivaci polynomu jako vektoru koeficientů si je vytvořena nová M-funkce s názvem `derivace_polynomu_vektor`, která bude vypadat následovně:

```
function df = derivace_polynomu_vektor(v)
    df = polyder(v);
end
```

V uvedené M-funkci je použita funkce `polyder`, která vypočítá derivaci polynomu zadaného jako vektor koeficientů. Nejprve se vytvoří vektor $v = [5 \ -2 \ 1 \ -4]$ poté je zavolána M-funkce `derivace_polynomu_vektor(v)` se vstupním parametrem v . Funkce vrátí výsledek: $15 \ -4 \ 1$, který vyjadřuje polynom $15x^2 - 4x + 1$.

Používání vektoru koeficientů má několik výhod. Vektor koeficientů polynomu se snadno zapisuje a čte. Díky tomu MATLAB provádí rychleji derivace, další operace a výpočet je tedy efektivnější. MATLAB nemusí provádět složité algebraické manipulace, protože vše probíhá přímo na koeficientech.

Poslední příklad bude polynom $p(x) = 4x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 2 + 5x^4 + x$. Pokud je potřeba s polynomem pracovat jako s vektorem koeficientů, musí se polynom seřadit od nejvyššího stupně po nejnižší, jinak by byl výpočet chybový. Po správném seřazení je získán polynom $p(x) = 4x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x - 2$. Nyní lze s polynomem p pracovat nejen jako s vektorem koeficientů, ale také přímo jako s polynomem. Nejprve se derivace polynomu spočítá standartním způsobem a vyjde $p'(x) = 20x^4 + 20x^3 - 6x^2 + 6x + 1$. V MATLABu se vytvoří polynom `p=@(x)4*x^5+5*x^4-2*x^3+3*x^2+x-2` a zavolá se M-funkce `vypocet_derivace_diff(p)`, výsledkem je polynom $20x^4 + 20x^3 - 6x^2 + 6x + 1$ v matematickém tvaru $20x^4 + 20x^3 - 6x^2 + 6x + 1$. Výsledky se shodují. Nyní se provede výpočet podle vektoru koeficientů. Pro výpočet podle vektoru koeficientů se vytvoří vektor v : $v = [4 \ 5 \ -2 \ 3 \ 1 \ -2]$ a je zavolána M-funkce `derivace_polynomu_vektor(v)`. MATLAB vrátí výsledek: $20 \ 20 \ -6 \ 6 \ 1$, což odpovídá $[20, 20, -6, 6, 1]$.

2.6 Vytvoření Taylorova polynomu pomocí příkazu `taylor`

Nejprve pro připomenutí, co je Taylorův polynom. Taylorův polynom $T_n(x)$ je aproximace funkce pomocí stupně n . Jde o přiblížení hodnoty funkce v okolí určitého bodu, který bude ve výpočtech nazýván x_0 . Vzorec Taylorova polynomu pro funkci $f(x)$ v bodě x_0 je definován:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Taylorův polynom je podrobněji vysvětlený v teoretické části.

Jako příklad je dána funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 2}$ v bodě x_0 . Pro ilustraci je vytvořen Taylorův polynom čtvrtého stupně $T_4(x)$ a následně nakreslen její průběh.

Vzorec bude vypadat následovně:

$$T_4(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 \quad [2], [12]$$

Pro výpočet je vytvořena M-funkce `vypocet_derivace_diffn`, která bude počítat derivaci vložené funkce určitého stupně na základě vloženého n . M-funkce bude vypadat takto:

```
function df = vypocet_derivace_diffn(f,n)
    syms x
    df = diff(f,x,n);
end
```

Nejprve jsou vypočítány všechny derivace funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 3$ až do čtvrtého řádu a poté jsou tyto hodnoty dosazeny do uvedeného vzorce pro výpočet Taylorova polynomu T_4 .

V MATLABu je jako první krok vytvořena funkce $f(x)$ příkazem `f=@(x)(x^2-x+2)^(1/3)`. Poté se začnou postupně vytvářet derivace. První derivace je vytvořena zavoláním M-funkce `df1=vypocet_derivace_diffn(f,1)`. Výsledek M-funkce je rovnou uložen do proměnné `df1`, aby se s ním lépe pracovalo. Výsledek se získá: `df1=(2*x-1)/(3*(x^2-x+2)^(2/3))`. Takto se vypočítá i derivace zbylých stupňů. Derivace druhého stupně bude `df2=vypocet_derivace_diffn(f,2)` s výsledkem:

$$df2=2/(3*(x^2-x+2)^(2/3)) - (2*(2*x-1)^2)/(9*(x^2-x+2)^(5/3))$$

Třetí stupeň se získá: $df3=vypocet_derivace_diffn(f,3)$, který bude:

$$df3=(10*(2*x-1)^3)/(27*(x^2-x+2)^{(8/3)})- \\ (2*(8*x-4))/(9*(x^2-x+2)^{(5/3)}) - (4*(2*x-1))/(9*(x^2-x+2)^{(5/3)})$$

Finální čtvrtý stupeň bude: $df4=vypocet_derivace_diffn(f,4)$ s výslednou hodnotou:

$$df4=(80*(2*x-1)^2)/(27*(x^2-x+2)^{(8/3)})- \\ (80*(2*x-1)^4)/(81*(x^2-x+2)^{(11/3)})-8/(3*(x^2-x+2)^{(5/3)})+ \\ (10*(2*x-1)*(8*x-4))/(27*(x^2-x+2)^{(8/3)})$$

Jako další krok je nahrazení symbolickou proměnnou x ve výsledcích, pro výpočet je použit bod $x_0 = 3$. Nejprve je vytvořen bod příkazem $x0=sym(3)$ a poté jsou do nových proměnných uloženy výpočty derivací v bodě x_0 . Nejprve se ale ještě musí vytvořit symbolická proměnná x jelikož je doposud jen vytvořená ve funkci $vypocet_derivace_diffn$ a nelze s ní pracovat v příkazovém řádku. Postupně se do příkazového řádku zadá: $x=sym('x')$, $df1x0=subs(df1,x,x0)$, $df2x0=subs(df2,x,x0)$, $df3x0=subs(df3,x,x0)$ a $df4x0=subs(df4,x,x0)$. Nyní jsou vytvořené všechny hodnoty derivací, které budou k finálnímu výpočtu potřeba. Ještě jako poslední část, než budou moct být hodnoty vloženy do vzorce, se vytvoří proměnná $fx=(x^2-x+2)^{(1/3)}$ a $fx0=double(subs(fx,x,x0))$ díky kterým bude funkční hodnota funkce $f(x)$ v bodě x_0 . Jako poslední krok se do příkazového řádku se vloží:

$$T4x0=fx0+df1x0/factorial(1)*(x-x0)+df2x0/factorial(2)*(x-x0)^2+df3x0/factorial(3)*(x-x0)^3+df4x0/factorial(4)*(x-x0)^4$$

Výsledkem je $T4x0=(5*x)/12-(x-3)^2/288-(95*(x-3)^3)/20736+(511*(x-3)^4)/248832+3/4$ a v matematické formě:

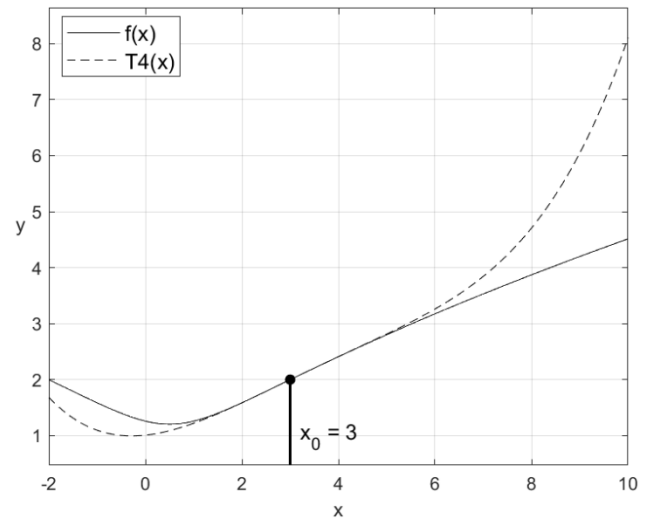
$$T_4(x) = \frac{3}{5} + \frac{5}{12} \cdot x - \frac{1}{288} \cdot (x-3)^2 + \frac{95}{20736} \cdot (x-3)^3 + \frac{511}{248832} \cdot (x-3)^4$$

Při výpočtu je pro $x_0 = 3$ použita symbolická konstanta $x0=sym(3)$. Proto jsou hodnoty derivací a koeficientů v Taylorově polynomu vyjádřeny jako podíl celých čísel neboli podílem symbolických konstant. Pokud se za x_0 dosadí číselná hodnota 3, získá se výsledek vyjádřený desetinnými čísly.

Grafy funkce a Taylorova polynomu se vytvoří a nakreslí v okně Figure pomocí příkazů:

```
ezplot(f, [-2,10]);hold on;
ezplot(T4x0, [-2,10]);grid;
```

hold off; Průběh funkce $f(x)$ i Taylorova polynomu $T_4(x)$ jsou na obrázku obr.3, plnou čarou je graf $f(x)$ a čárkovanou čarou je graf $T_4(x)$.



Obrázek 3: Graf Taylorova polynomu (zdroj – vlastní)

Tutéž úlohu lze vyřešit v MATLABu pomocí příkazu `taylor`. Je proto vytvořena M-funkce s názvem `taylor_polynom`, která vypadá následovně:

```
function df = taylor_polynom(f, n, x0)
    syms x
    df = taylor(f, x, 'ExpansionPoint', x0, 'Order', n+1);
    disp(['Taylorův polynom je:'])
    pretty(df)
end
```

M-funkce má jednu výstupní proměnnou `df` a tři vstupní proměnné, které jsou `f`, `n` a `x0`. `f` je funkce, z níž se vytváří Taylorův polynom, `n` je stupeň Taylorova polynomu a `x0` je střed polynomu. M-funkce tedy vrací Taylorův polynom až do zadaného `n` stupně, který aproximuje danou funkci `f` v okolí bodu `x0`. V M-funkci je nejprve vytvořena symbolická proměnná `x` pomocí příkazu `syms`. Dále se použije MATLAB funkce `taylor`, která má základní syntaxi `taylor(f, x, 'ExpansionPoint', x0, 'Order', n)`. `f` je symbolická funkce proměnné `x`. `'ExpansionPoint'`, `x0` určuje bod, okolo kterého se polynom vytvoří a `'Order'`, `n` určuje maximální stupeň Taylorova polynomu. Dále je zde výpis textu pomocí `disp()` a nakonec se vypíše výsledný Taylorův polynom pomocí příkazu `pretty`. Vypočtený Taylorův polynom v běžně užívaném matematickém tvaru.

Použití M-funkce `taylor_polynom` lze vidět na příkladu funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 2}$ pro $n = 4$ a $x_0 = 3$. Nejprve se funkce vytvoří tím, že se do příkazového řádku vloží: `f=@(x)(x^2-x+2)^(1/3)`. Poté se zavolá M-funkce `taylor_polynom(f, 4, x0)`.

Výsledek se vypíše jako:

$$(5*x)/12 - (x-3)^2/288 - (95*(x-3)^3)/20736 + (511*(x-3)^4)/248832 + 3/4$$

Provedením příkazu `pretty` se získá tvar: $\frac{5x}{12} - \frac{(x-3)^2}{288} - \frac{95(x-3)^3}{20736} + \frac{511(x-3)^4}{248832} + \frac{3}{4}$. Uvedený výsledek je totožný s výsledkem získaným výpočtem jednotlivých stupňů derivací.

2.7 Numerické výpočty aproximací prvních derivací.

Numerické aproximace prvních derivací slouží k přibližnému výpočtu hodnot derivace funkce v bodech, kde není možné nebo praktické použít analytické metody. Podrobně jsou popsány v teoretické části i s odvozením vzorců.

Jako příklad je nejprve spočítána zpětná a dopředná aproximaci první derivace beta funkce. Beta funkce je definována jako integrál: $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ přičemž $x > 0, y > 0$. Této integrál je známý jako Eulerova beta funkce. Pro ilustraci jsou vybrány body $x_0 = 3, y_0 = 2$ a jako hodnoty diskretizačního kroku jsou zvoleny $h = 0,01; 0,0001; 0,000001; 0,00000001$. Pro výpočet se použije MATLAB funkce `beta(x, y)`. [16]

Vytvoří se M-funkce `numericke_aproximace_prvni_derivaceDZ`, která bude vypadat:

```
function [df_d,df_z]=numericke_aproximace_prvni_derivaceDZ(x0,y0,h)
    df_d = (beta(x0 + h, y0) - beta(x0, y0)) ./ h;
    df_z = (beta(x0, y0) - beta(x0 - h, y0)) ./ h;
    fprintf('Dopředná %.8f\n', df_d)
    fprintf('Zpětná %.8f\n', df_z)
end
```

Funkce má 2 výstupní proměnné `df_d` a `df_z`, které jsou pro dopřednou a zpětnou aproximaci derivace a tři vstupní a to bod x_0, y_0 a h , který bude naplněn našimi diskretizačními kroky. M-funkce používá MATLAB funkci `beta`, která slouží k výpočtu hodnoty beta funkce, která počítá vztah mezi dvěma proměnnými a slouží k popisu pravděpodobností a vztahů v různých oblastech matematiky. Poté se použije funkce `fprintf`, která slouží k formátovanému výstupu a díky tomu se vypíšou výsledné hodnoty do konzole zaokrouhlené na 8 desetinných míst. Nejprve je vytvořen bod $x_0=3, y_0=2$ a poté vytvořeno pole diskretizačních hodnot $h=[0.01 \ 0.0001 \ 0.000001 \ 0.00000001]$.

Následně se zavolá M-funkce `numericke_aproximace_prvni_derivaceDZ(x0, y0, h)`.

M-funkce vypíše výsledek pro dopřednou a zpětnou aproximaci derivace:

Dopředná -0.04839783

Dopředná -0.04860897

Dopředná -0.04861109

Dopředná -0.04861111

Zpětná -0.04882608

Zpětná -0.04861325

Zpětná -0.04861113

Zpětná -0.04861111

Z porovnaných hodnot vyplývá, že:

$\beta'(3,2) \doteq -0,048$ pro $h = 0,01$.

$\beta'(3,2) \doteq -0,048\ 6$ pro $h = 0,000\ 1$.

$\beta'(3,2) \doteq -0,048\ 611$ pro $h = 0,000\ 001$.

$\beta'(3,2) \doteq -0,048\ 611\ 11$ pro $h = 0,000\ 000\ 01$.

Narůstání počtu platných číslic v aproximacích derivací v závislosti na použitém diskretizačním kroku h je lineární a odpovídá tomu, že zpětná i dopředná aproximace jsou funkcemi prvního řádu.

Nyní se tento příklad spočítá pomocí středové aproximace první derivace beta funkce $\beta(x,y)$ opět v bodě $x_0 = 3$ a $y_0 = 2$ ale jen pro $h = 0,01$ a $0,0001$. Pro výpočet se vytvoří M-funkce:

```
function [df_s] = numericke_aproximace_prvni_derivaceS(x0, y0, h)
    df_s = (beta(x0 + h, y0) - beta(x0 - h, y0)) ./ h/2;
    fprintf('Středová %.8f\n', df_s');
end
```

Jelikož body $x_0 = 3$ a $y_0 = 2$ již mám vytvořené v minulém příkladu, stačí nám jen upravit pole diskretizačních hodnot $h=[0.01, 0.0001]$ Nakonec je zavolána M-funkce `numericke_aproximace_prvni_derivaceS(x0,y0, h)`.

Získá se výsledek:

Středová -0.04861196

Středová -0.04861111

Vzhledem k tomu, že obě získané hodnoty aproximace téže derivace se shodují na šest desetinných míst, a že hodnota aproximace pro menší h je přesnější, může se odhadovat, že aproximace pro $h = 0,01$ je správná nejméně na šest desetinných míst, tedy $\beta'(3,2) \doteq -0.048611$.

Nyní se tyto výsledky porovnají s výsledky z dopředné a zpětné aproximace derivace. Lze si povšimnout, že hodnota derivace $\beta'(3,2)$ je spolehlivě odhadnuta na sedm desetinných míst a všechna se shodují s prvními osmi místy středové aproximace pro $h = 0,0001$. Lze tedy považovat za spolehlivou hodnotu $\beta'(3,2) \doteq -0.04861111$. Tato hodnota byla u dopředné a zpětné aproximace získána pro $h = 0,00000001$, ale při použití středové aproximace už při použití $h = 0,0001$. Díky tomuto zjištění se může potvrdit, že metoda středové aproximace je druhého řádu a tedy, že korekční člen, kterým je určena chyba aproximace je funkcí $O(h^2)$.

2.8 Numerické výpočty aproximací druhých derivací.

Obdobně jako numerické výpočty aproximací prvních derivací se používají i druhé k odhadu hodnot druhé derivace, když nelze použít analytické řešení nebo jsou k dispozici pouze diskrétní hodnoty. Numerické výpočty druhých derivací byly náležitě popsány v teoretické části včetně odvození vzorců.

Jelikož se bude s funkcí beta pracovat i v dalších částech, je dobré vytvořit M-funkci `f_beta(x,y)`, která vypadá následovně:

```
function f = f_beta(x,y)
    f=beta(x,y);
end
```

M-funkci pro výpočet středové aproximace druhé derivace s názvem `numericke_aproximace_druhe_derivaceS` se vytvoří takto:

```
function [df_s] = numericke_aproximace_druhe_derivaceS(x0,y0, h, f)
    df_s=(feval(f,x0+h,y0)-2*feval(f,x0,y0)+feval(f,x0-h,y0))./h.^2;
    fprintf('Středová druhá: %.10f\n', df_s);
end
```

V uvedené M.funkci je použita MATLAB funkce `feval`, díky které se dokáže vložit do této funkce jiná funkce nebo handler jako vstupní argument. První argument ve funkci `feval` je název funkce a další argumenty jsou vstupy pro tuto funkci. Například tedy bude `feval(f,x)` fungovat tak, že MATLAB zavolá funkci s názvem `f` a s argumentem `x`. Nejprve se vytvoří proměnné `x0=3`, `y0=2` a `h=[0.1 0.001 0.00001]` Poté se zavolá M-funkce:

```
numericke_aproximace_druhe_derivaceS(x0,y0,h,'f_beta').
```

Zde funkce `'f_beta'` vkládá jako řetězec neboli `string`. MATLAB v podstatě hledá funkci s tímto názvem v MATLAB adresáři. Funkce se může vkládat i jinak, a to pomocí anonymní funkce, jak byla používána v minulých příkladech. Anonymní funkce by se vytvořila takto: `f=@(x,y)beta(x,y)` a následně by byla zavolána takto:

```
numericke_aproximace_druhe_derivaceS(x0, y0 h, f)
```

Výsledek je v takovém případě totožný. Výsledek z funkce bude:

Středová druhá: 0.0428869267

Středová druhá: 0.0428240804

Středová druhá: 0.0428240776

Středové aproximace druhých derivací beta funkce $\beta(x,y)$ v bodě $x_0 = 3$ a $y_0 = 2$ jsou

$$\beta'(3,2) \approx 0.042\ 886\ 926\ 7 \quad \text{pro } h = 0,1.$$

$$\beta'(3,2) \approx 0.042\ 824\ 080\ 4 \quad \text{pro } h = 0,001.$$

$$\beta'(3,2) \approx 0.042\ 824\ 077\ 6 \quad \text{pro } h = 0,000\ 01$$

M-funkci pro výpočet aproximace druhé derivace `numericke_aproximace_druhe_derivaceS` lze snadno využít pro výpočet druhých derivací i jiných funkcí i pro jiné hodnoty x_0 , y_0 a diskretizačního kroku h .

2.9 Numerické výpočty aproximací třetích derivací.

Odvození vzorců pro aproximaci třetích derivací bylo provedeno v teoretické části 1.7.3.

Jako příklad opět použijí beta funkci $\beta(x,y)$ v bodě $x_0 = 3$ a $y_0 = 2$. Výpočet se provede pro stejné h jako při výpočtu středové aproximace druhé derivace, tedy pro $h = 0,1$, $h = 0,001$, a pro $h = 0,0001$. Pro výpočet se použije již vytvořená M-funkce `f_beta`, která byla vytvořena v předchozí části. Nyní se vytvoří M-funkce `numericke_aproximace_treti_derivaceS`.

M-funkce vypadá následovně:

```
function [df_s] = numericke_aproximace_treti_derivaceS(x0,y0,h,f)
    df_s=(feval(f,x0+2*h,y0)-2*feval(f,x0+h,y0)+2*feval(f,x0-h,y0)-
    feval(f,x0-2*h,y0))./(2*h.^3);
    fprintf('Středová třetí: %.12f\n', df_s);
end
```

Nejprve se zadá bod $x_0=3$, $y_0=2$ a diskretizační krok $h=[0.1 \ 0.001 \ 0.0001]$ Jako poslední se M-funkce zavolá:

`numericke_aproximace_treti_derivaceS(x0,y0,h,'f_beta')`. Výsledek je:

Středová třetí: -0.050976590887

Středová třetí: -0.050636723981

Středová třetí: -0.050681681074

Z výsledných hodnot vyplývá, že pro středové aproximace třetích derivací beta funkce v bodě x_0 a y_0 jsou:

$$\beta'(3,2) \approx -0.050\ 976\ 590\ 887 \quad \text{pro } h = 0,1.$$

$$\beta'(3,2) \approx -0.050\ 636\ 723\ 981 \quad \text{pro } h = 0,001.$$

$$\beta'(3,2) \approx -0.050\ 681\ 681\ 074 \quad \text{pro } h = 0,000\ 1$$

2.10 Numerické výpočty aproximací n-tých derivací.

Na základě odvozených vztahů v článku 1.7.4 se spočítá středová aproximace čtvrté derivace beta funkce v bodě $x_0 = 3$ a $y_0 = 2$ pro $h = 0,1; 0,001; 0,000\ 1$. Vztah pro středovou aproximaci sudé n-té derivace pro $n = 4$ plyne:

$$\begin{aligned} \beta^{(4)}(x_0, y_0) &\approx \frac{1}{h^4} \sum_{k=0}^4 (-1)^k \binom{4}{k} \beta(x_0 + (2-k)h, y_0) = \\ &= \frac{1}{h^4} (\beta(x_0 + 2h, y_0) - 4\beta(x_0 + h, y_0) + 6\beta(x_0, y_0) - 4\beta(x_0 - h, y_0) + \beta(x_0 - 2h, y_0)) \end{aligned}$$

[1], [16]

Pro výpočet se využije již vytvořená M-funkce `f_beta` a vytvoří se M-funkce pro výpočet středové aproximace čtvrté derivace s názvem:

`numericke_aproximace_ctvrte_derivaceS` takto:

```
function [df_s] = numericke_aproximace_ctvrte_derivaceS(x0,y0,h,f)
    df_s=(feval(f,x0+2*h,y0)-4*feval(f,x0+h,y0)+6*feval(f,x0,y0)-
    4*feval(f,x0-h,y0)+feval(f,x0-2*h,y0))./h.^4;
    fprintf('Středová čtvrtá: %.12f\n', df_s);
end
```

Do příkazové řádky se zadá nejprve bod $x_0=3$, $y_0=2$ a poté vektor diskretizačních kroků $h=[0.1 \ 0.001 \ 0.0001]$ a následně se zavolá M-funkce pro výpočet: `numericke_aproximace_ctvrte_derivaceS(x0, y0, h, 'f_beta')`. Získá se výsledek:

Středová čtvrtá: 0.075805766163

Středová čtvrtá: 0.075300876645

Středová čtvrtá: -2.775557561563

Z výsledků lze vyzorovat, že středové aproximace čtvrtých derivací gama funkce v bodě $x_0 = 3$ a $y_0 = 2$ jsou

$\beta'(3,2) \approx 0.075\ 805\ 766\ 163$ pro $h = 0,1$.

$\beta'(3,2) \approx 0.075\ 300\ 876\ 645$ pro $h = 0,001$.

$\beta'(3,2) \approx -2.775\ 557\ 561\ 563$ pro $h = 0,000\ 1$

Lze si všimnout, že výsledek středové aproximace čtvrté derivace beta funkce pro $h = 0,000\ 1$ je $-2.775\ 557\ 561\ 563$ a je velmi odlišný od ostatních výsledků pro jiné h . Tento výsledek naznačuje, že mohou být problémy s numerickou stabilitou neboli když je krok h příliš malý, mohou se objevit zaokrouhlovací chyby nebo chyby způsobené omezenou přesností výpočtů a nemusí se dostat validní data. Lze tedy odvodit, že výsledky pro $h = 0,1$ a $h = 0,001$ jsou pravděpodobně přesnější a spolehlivější než pro krok $h = 0,000\ 1$.

V praktických úlohách často nastává situace, kdy přesný analytický tvar funkce f není znám, ale jsou známy jen s určitou přesností naměřené funkční hodnoty v uzlových bodech. Pokud tento případ nastane, je diferenční aproximace derivace jednou z mála metod, jak získat kvalifikované odhady derivací na základě dostupných dat.

Bude se uvažovat, že byly zjištěny funkční hodnoty pro sudé n a diskretizační krok h v uzlových bodech $x_0 - \frac{n}{2}h, x_0 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)h, \dots, x_0 - h, x_0 + h, \dots, x_0 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)h, x_0 + \frac{n}{2}h$, které jsou označeny $y_{-\frac{n}{2}}, y_{-\frac{n}{2}+1}, \dots, y_{-1}, y_0, y_{+1}, \dots, y_{\frac{n}{2}-1}, y_{\frac{n}{2}}$. Používají se zde jako indexy kladná i záporná celá čísla a nula. Ovšem při indexování polí v MATLABu se může používat jen celá kladná čísla, proto se musí provést transformace indexů neboli funkční hodnoty y_i , které jsou indexovány celými čísli $i = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}$. Tyto indexy se uloží do složky vektoru u , kde právě každý index každé složky bude mít hodnotu $\frac{n}{2} + 1$ větší než index i . Bude tedy platit $y_i = u_{\frac{n}{2}+1+i}$. Po této transformaci se může aproximace sudé n -té derivace funkce vyjádřit následujícím vztahem

$$y_0^{(n)} = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} u_{1+k} \quad [1]$$

Pro řešení příkladů aproximací sudých n -tých derivací pomocí MATLABu se může vytvořit M-funkce, do které se vloží sudé n jako stupeň derivace, h jako diskretizační krok a vytvořený vektor u o $(n + 1)$ složkách, což budou funkční hodnoty funkce f vypočtené v uzlových bodech.

Tato M-funkce se může následně opakovaně volat s jinými vstupními hodnotami. M-funkce bude vypadat následovně:

```
function df_s = numericke_aproximace_sude(n,h,u)
if h<=0 disp('Krok h není kladné číslo!'), df_s=NaN, return, end
if 2*floor(n/2)~=n disp('Číslo n není sudé!'), df_s=NaN, return, end
[r,c]=size(u);
if r~=1 disp('Není použit vektor u!'), df_s=NaN, return, end
if c>n+1 disp('Vektor u má moc komponentů!'), df_s=NaN, return, end
if c<n+1 disp('Vektor u má moc málo komponentů!'), df_s=NaN, return,
end
df_s=0;
for k=0:n, df_s=df_s+(-1)^k*nchoosek(n,k)*u(1+k); end
df_s=df_s/h^n;
end
```

M-funkce má jeden výstup df_s a tři vstupní hodnoty a to n (řád derivace), h (diskretizační krok) a u (vektor hodnot funkce). V M-funkci se použije podmíněný příkaz `if`, což kontroluje

podmínky, zda jsou vstupní hodnoty validní. Nejprve kontroluje, zda je diskretizační krok h kladné číslo. Pokud by nebylo, vyskočilo by hlášení a výstupní hodnota by se nastavila na NaN, což znamená neplatná hodnota. Další podmínka kontroluje, zda je n sudé číslo. Výraz $2*\text{floor}(n/2)\sim=n$ vrací nejbližší sudé číslo, které je menší nebo rovno n . Pokud není roven n , říká to, že n není sudé číslo. Další podmínka kontroluje rozměr vektoru u . Funkce `size` zjišťuje počet řádků a sloupců $[r,c]$ v matici u . Pokud má matice u více než jeden řádek, nejedná se o vektor. Dále jsou dvě podmínky, které kontrolují, zda má vektor u přesně $n+1$ prvků. Pokud M-funkce projde všemi podmínkami, se nastaví `df_s` na 0 a poté je proveden cyklus `for`, který probíhá od 0 do n , přičemž pro každou hodnotu k se k `df_s` přičte člen ve tvaru $(-1)^k * n\text{choose}(n,k) * u(k+1)$. Funkce `nchoose(n,k)` vrací binomický koeficient neboli kolika způsoby lze vybrat podmnožinu k objektů z n . Nakonec se celková suma `df_s` vydělí h^n , čímž se získá finální hodnota aproximace pro n -tou derivaci.

Nyní jako příklad uvažujme bod $x_0 = 5$ a funkce f daná funkčními hodnotami, které jsou uvedeny v následující tabulce:

Tabulka 1: Funkční hodnoty funkce f

x	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4
$f(x)$	1,980	1,990	2,000	2,008	2,020

Ze zadaných funkčních hodnot vyplývá, že diskretizační krok h je $h = 0,2$. Bod $x_0=5$ diskretizační krok $h=0.2$ a stupeň derivace $n=4$ Následně zavoláme M-funkci `numericke_aproximace_sude(n,h,u)`. Získá se výsledek: 5.0000 . Středová aproximace čtvrté derivace funkce f danou funkčními hodnotami v bodě $x_0 = 5$ je $f^{(4)}(5) = 5$.

2.11 Numerické aproximace derivací funkce na intervalu

Tato práce je zaměřena pouze na přímý výpočet aproximací n -tých derivací v uzlových bodech. Je dána funkce f o jedné reálné proměnné a její interval $\langle a, b \rangle$, který je rovnoměrně rozdělen na N podintervalů o délce $H = \frac{b-a}{N}$. Dělicí body intervalu $\langle a, b \rangle$ jsou $x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + H, x_2 = x_0 + 2H, \dots, x_{N-1} = x_0 + (N-1)H, x_N = b$. Je dán diskretizační krok h a předpokládá se, že funkce f je diferencovatelná třídy C_{n+1} ve všech bodech intervalu $\langle a - nh; b + nh \rangle$. V dělicích bodech intervalu $\langle a; b \rangle$ se použijí vztahy

pro středové aproximace n-tých derivací. Pro použití této metody je nezbytné, aby byly k dispozici funkční hodnoty v bodech, které nepatří do intervalu $\langle a, b \rangle$, tedy v uzlových bodech $a - nh, \dots, a - 2h, a - h, b + h, b + 2h, \dots, b + nh$. [1]

Jako příklad se vypočítá aproximace čtvrté derivace funkce $f(x) = \frac{\beta(3+\cos x, y)}{5}$ na intervalu $\langle 1, 4 \rangle$. Pro výpočet se použije vzdálenost uzlových bodů $H = 0,05$ a diskretizační krok se využije $h = 0,01$. Z výsledných hodnot je následně nakreslen průběh funkce $f(x)$ a průběh čtvrté derivace $f^{(4)}(x)$ na intervalu $\langle 1, 4 \rangle$. Nejprve se příkazem `x0=1:0.05:4` definuje vektor neboli sada bodů v intervalu $\langle 1, 4 \rangle$ s krokem 0,05. Poté je zadán `y0=5` a diskretizační krok `h=0.01`

Jako poslední se vytvoří M-funkce $f(x) = \frac{\beta(3+\cos x, y)}{5}$:

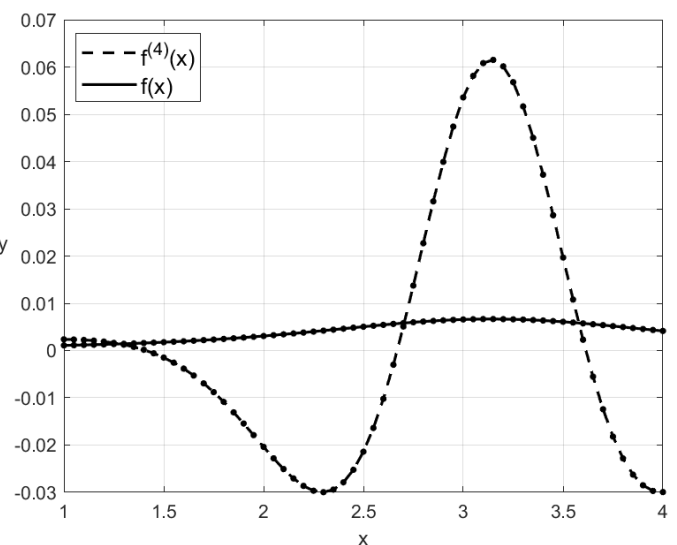
```
function f = f_beta_interval(x,y)
    f=beta(3+cos(x),y)/5;
end
```

Po vytvoření funkce f se vytvoří vektor `Y=feval('f_beta_interval',x0,y0)` do kterého se uloží hodnoty funkce `f_beta_interval` pro všechny hodnoty `x0` a `y0`. Následně se zavolá již vytvořená funkce na výpočet středové aproximace čtvrté derivace: `d4Y=numericke_aproximace_ctvrte_derivaceS(x0,y0,h,'f_beta_interval')` přičemž výsledek se uloží do proměnné `d4Y`.

Nyní jako poslední část se vytvoří graf pomocí příkazu:

```
plot(x0,d4Y,x0,Y), grid
```

Graf je vidět na obrázku obr. 4, kde se nachází čárkovaná čára, která značí průběh čtvrté derivace $f^{(4)}(x)$ na intervalu $\langle 1, 4 \rangle$ a černá plná čára, která ukazuje průběh funkce $f(x)$.



Obrázek 4: Graf čtvrté derivace na intervalu (zdroj – vlastní)

ZÁVĚR

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou derivací funkcí jedné reálné proměnné a jejich řešení s podporou programového prostředí MATLAB. V rámci teoretické části byly uvedeny jak základní, tak i alternativní definice derivace, a to včetně limitní definice, derivace jako funkce, vyšších derivací a jejich významu. Dále byla věnována část Taylorovu polynomu, který umožňuje aproximaci funkcí pomocí polynomiální reprezentace.

Praktická část se soustředila na implementaci metod vysvětlených v teoretické části, v praxi pomocí MATLABu. Byly zpracovány výpočty derivací jak klasickým výpočtem, tak i pomocí Matlabu a porovnány výsledky. Byly zpracovány analytické metody i s využitím příkazu `diff` a použitím knihovny Symbolic Math Toolbox, stejně jako numerické přístupy pro výpočet aproximací a to prvních, druhých, třetích, n-tých derivací a derivací funkce na intervalu. Další částí bylo nahrazení funkcí Taylorovými polynomy, což nám ukazuje, jak lze derivace využít k aproximaci funkcí v konkrétním bodě a jeho blízkém okolí. Pro každou metodu byly vytvořeny M-skripty a vzorové příklady pro jejich využití.

Výsledky práce dokázaly, že MATLAB je velmi efektivní nástroj pro řešení derivací analyticky i numericky. Díky svým možnostem vizualizace, přizpůsobení a jednodušší syntaxi je MATLAB intuitivní a umožňuje uživateli snadno se zorientovat a využívat dle svých potřeb.

Práce tak nejen shrnuje ale i implementuje známe metody výpočtů derivací. Její výstupy mohou sloužit jako základ pro další rozvoj, například rozšíření na funkce více proměnných a pokročilé aplikace derivací pomocí MATLABu.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] Zahrádka, Jaromír. *Diskrétní matematika pro SII: diskretizační metody numerické matematiky*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2014. ISBN 978-80-7395-841-1.
- [2] Zahrádka, Jaromír. *Matematický seminář - MATLAB*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2013. ISBN 978-80-7395-691-2.
- [3] Marek, Jaroslav; Pastor, Karel a Pozdílková, Alena. *Vysokoškolská matematika: výklad, řešené příklady a cvičení*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2021. ISBN 978-80-7560-373-9.
- [4] Vysoké učení technické v Brně. *Derivace a jejich aplikace*. Online. [cit. 11. listopadu 2024]. Dostupné z: https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=955603785.
- [5] Gymnázium Jana Keplera. *Odvození derivací*. Online. [cit. 11. listopadu 2024]. Dostupné z: <https://www.gymek.cz/uploads/documents/odvozeni-derivaci-613a593956154832506684.pdf>.
- [6] Západočeská univerzita v Plzni. *Derivace*. Online. [cit. 11. listopadu 2024]. Dostupné z: https://home.zcu.cz/~danek/DATA/WWW_STRANKY/soubory/derivace.pdf.
- [7] Wikipedia, otevřená encyklopedie, poslední úprava 27. 11. 2024 *Derivace* [online]. [cit. 1. 12. 2024]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Derivace>
- [8] Wikipedia, otevřená encyklopedie, poslední úpravy 21. 10 2023 *Polynomy* [online]. [cit. 1. 12. 2024]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Polynom>
- [9] Wikipedia, otevřená encyklopedie, poslední úpravy 14. 8. 2023 *Binomická věta* [online]. [cit. 1. 12. 2024]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Binomická_věta
- [10] Wikipedia, otevřená encyklopedie, poslední úpravy 15. 9. 2024 *Diferenciální počet* [online]. [cit. 1. 12. 2024]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Diferenciální_počet
- [11] Wikipedia, otevřená encyklopedie, poslední úpravy 28. 11. 2024. *Diferenciální rovnice* [online]. [cit. 1. 12. 2024]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Diferenciální_rovnice
- [12] Wikipedia, otevřená encyklopedie, poslední úpravy 14. 12. 2024. *Taylorova řada* [online]. [cit. 14. 12. 2024]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Taylorova_řada
- [13] Wikipedia, otevřená encyklopedie, poslední úpravy 14. 12. 2024. *Numerická derivace* [online]. [cit. 14. 12. 2024]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Numerická_derivace
- [14] Marík, *Derivace a lineární aproximace* [online]. Mendelova univerzita v Brně. [cit. 14. 12. 2024]. Dostupné z: https://user.mendelu.cz/marik/mtk/mat-slidy/derivace_II/
- [15] MathWorks. *MATLAB Product* [online]. [cit. 14. 12. 2024]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>

[16] Wikipedia, otevřená encyklopedie, poslední úpravy 14. 12. 2024. *Beta funkce* [online]. [cit. 14. 12. 2024]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Beta_funkce