

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní

Modelování volatility akciových indexů
Diplomová práce

2022

Bc. Alena Faltysová

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	Alena Faltysová
Osobní číslo:	E190004
Studijní program:	N0413A050009 Ekonomika a management
Specializace:	Management finančních institucí
Téma práce:	Modelování volatility akciových indexů
Zadávací katedra:	Ústav matematiky a kvantitativních metod

Zásady pro vypracování

Cíl práce: sestavení modelů volatility vybraných akciových indexů včetně predikce. Modelace bude provedena pomocí analýzy finančních časových řad s využitím vhodného ekonometrického softwaru.

Osnova:

- Akciové trhy a indexy.
- Teorie analýzy finančních časových řad.
- Vytvoření modelů.
- Ověření spolehlivosti zkonstruovaných předpovědí.

Rozsah pracovní zprávy: **50**
Rozsah grafických prací: **–**
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

ARLT, Josef. Moderní metody modelování ekonomických časových řad. vyd. 1. Praha: Grada Publishing a.s., 1999. 312 s. ISBN 80-7169-539-4.
ARLT, Josef a Markéta ARLTOVÁ. Finanční časové řady: [vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace]. Praha: Grada, 2003, 220 s. ISBN 80-247-0330-0.
nI CIPRA, Tomáš. Finanční ekonometrie. 2. vydání. Praha: Ekopress, 2013. ISBN 978-80-86929-93-4.
JÍLEK, Josef. Akciové trhy a investování. Praha: Grada, 2009. Finance. ISBN 978-80-247-2963-3.
TSAY, Ruey, S. Analysis of financial time series. 2nd ed. Hoboken: John Wiley, c2005. Wiley series in probability and statistics. ISBN 0-471-69074-0.

Vedoucí diplomové práce: **Mgr. David Zapletal, Ph.D.**
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: **1. září 2021**
Termín odevzdání diplomové práce: **30. dubna 2022**

prof. Ing. Jan Stejskal, Ph.D. v.r.
děkan

L.S.

Mgr. Libor Koudela, Ph.D. v.r.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 1. září 2021

Prohlašuji:

Práci s názvem Modelování volatility akciových indexů jsem vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 7/2019 Pravidla pro odevzdávání, zveřejňování a formální úpravu závěrečných prací, ve znění pozdějších dodatků, bude práce zveřejněna prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 27. 4. 2022

Bc. Alena Faltysová v. r.

PODĚKOVÁNÍ

Chtěla bych poděkovat Mgr. Davidu Zapletalovi, Ph.D., za vedení mé diplomové práce, cenné rady, odborný dohled a také za jeho čas a trpělivost, které mi věnoval při psaní této práce. Ráda bych také poděkovala své rodině a příteli, kteří mi vždy byli oporou a podporou.

ANOTACE

Tato diplomová práce je zaměřena na popis analýzy časové řady se zaměřením na modely volatility. Cílem této práce je sestavení modelů vybraných akciových indexů, které využijeme k následné predikci a porovnání s realitou. Součástí práce je i samotné seznámení s akciovým trhem, akciovými indexy a možnostech jejich obchodování.

KLÍČOVÁ SLOVA

akciový index, časové řady, Boxova-Jenkinsova metodologie, modely volatility, predikce

TITLE

Modeling volatility of stock indexes

ANNOTATION

This diploma thesis is focused on the description of time series analysis with a focus on volatility models. The aim of this thesis is to build models of selected stock indices, which we will use for subsequent prediction and comparison with reality. Part of the work is the introduction to the stock market, stock indices and their trading opportunities.

KEYWORDS

stock indexes, time series, Box–Jenkins methodology, volatility models, prediction

OBSAH

SEZNAM ILUSTRACÍ A TABULEK.....	9
SEZNAM ZKRATEK A ZNAČEK	11
ÚVOD	12
1. Akciový trh a akciové indexy	13
1.1 Newyorská akciová burza (NYSE).....	14
1.2 Nasdaq	15
1.3 Tokijská burza.....	16
1.4 Akciový index.....	16
1.4.1 Cenově vážený index a index vážený dle tržní kapitalizace	17
1.4.2 Obchodování s indexy	19
2. Časové řady a jejich analýza	22
2.1 Stacionarita	22
2.2 Autokorelační a parciální autokorelační funkce	23
2.3 Proces bílého šumu	24
2.4 Základní modely Boxovy-Jenkinsovy metodologie	25
2.4.1 Autoregresní procesy AR	25
2.4.2 Procesy klouzavých průměrů MA	27
2.4.3 Smíšený proces ARMA	28
2.5 Modely nestacionárních časových řad.....	29
2.5.1 ARIMA.....	30
2.5.2 SARIMA.....	31
2.6 Konstrukce modelů Boxovy-Jenkinsovy metodologie	32
2.6.1 Identifikace modelu	32
2.6.2 Odhad modelu	33
2.6.3 Diagnostika modelu.....	33
2.7 Předpovědi v rámci Boxovy-Jenkinsovy metodologie	34

3.	Finanční časové řady a modelování volatility	36
3.1	Model ARCH.....	37
3.2	Model GARCH.....	38
3.3	Výstavba modelů volatility	39
3.4	Konstrukce předpovědí na základě modelů volatility.....	40
4.	Vybrané akciové indexy	42
4.1	S&P 500.....	42
4.2	Dow Jones Industrial Average	46
4.3	Nikkei 225.....	48
5.	Analýza vybraných akciových indexů.....	50
5.1	Analýza indexu S&P 500.....	51
5.2	Analýza indexu Dow 30	62
5.3	Analýza indexu Nikkei 225	67
	ZÁVĚR	72
	POUŽITÁ LITERATURA.....	74
	PŘÍLOHY	79

SEZNAM ILUSTRACÍ A TABULEK

Obrázek 1 - Korelogram	24
Obrázek 2 - Procentuální složení sektorů v indexu S&P 500.....	43
Obrázek 3 - Historický průběh indexu S&P 500	44
Obrázek 4 - Historický vývoj indexu DOW 30	47
Obrázek 5 - Historický vývoj indexu Nikkei 225.....	49
Obrázek 6 - Nahrání dat do softwaru Gretl.....	51
Obrázek 7 - Graf indexu S&P 500.....	52
Obrázek 8 - Korelogram základních dat indexu S&P 500.....	53
Obrázek 9 - Graf logaritmických diferencí hodnot indexu S&P 500	53
Obrázek 10 - Korelogram logaritmických diferencí hodnot indexu S&P 500	54
Obrázek 11 - Přehled koeficientů a jejich p-hodnot pro model MA(13) indexu S&P 500	55
Obrázek 12 - Kořeny modelu MA(13) indexu S&P 500.....	55
Obrázek 13 - Korelogram reziduí modelu MA(13) indexu S&P 500	56
Obrázek 14 - ARCH test modelu MA(13) indexu S&P 500	56
Obrázek 15 - Korelogram čtverců reziduí modelu MA(13) indexu S&P 500.....	57
Obrázek 16 - Parametry modelu GARCH(1,1) indexu S&P 500	58
Obrázek 17 - ARCH test pro rezidua z modelu volatility indexu S&P 500	58
Obrázek 18 - Výstup testu normality standardizovaných reziduí modelu GARCH(1,1) indexu S&P 500	59
Obrázek 19 - Graf skutečných a predikovaných hodnot logaritmických diferencí indexu S&P 500	60
Obrázek 20 - Predikce hodnot indexu S&P 500	61
Obrázek 21 - Graf indexu Dow 30.....	62
Obrázek 22 - Korelogram logaritmických diferencí hodnot indexu Dow 30	63
Obrázek 23 - Přehled koeficientů a jejich p-hodnot pro model MA(13) indexu Dow 30	64
Obrázek 24 - Výsledný přehled koeficientů a jejich p-hodnot pro model MA(13) indexu Dow 30	64
Obrázek 25 - ARCH test modelu MA(13) indexu Dow 30	64
Obrázek 26 - Korelogram druhých mocnin reziduí z modelu MA(13) indexu Dow 30	65
Obrázek 27 - Parametry modelu GARCH(1,1) indexu Dow 30.....	65
Obrázek 28 - Predikce hodnot indexu Dow 30.....	66

Obrázek 29 - Graf indexu Nikkei 225	67
Obrázek 30 - Korelogram logaritmických diferencí hodnot indexu Nikkei 225	68
Obrázek 31 - Přehled koeficientů a jejich p-hodnot pro model ARIMA(0,0,0) indexu Nikkei 225	68
Obrázek 32 - ARCH test modelu ARIMA(0,0,0) indexu Nikkei 225	69
Obrázek 33 - Korelogram druhých mocnin reziduí z modelu ARIMA(0,0,0) indexu Nikkei 225	69
Obrázek 34 - Parametry modelu GARCH(1,1) indexu Nikkei 225	70
Obrázek 35 - Predikce hodnot indexu Nikkei 225	70
Tabulka 1 - Váhy akcií dle přístupu výpočtu akciového indexu	18
Tabulka 2 - Změny v indexu po změně cen akcií	19
Tabulka 3 - Přehled hypotéz ADF-testu a KPSS-testu	30
Tabulka 4 - 10 nejvýznamnějších společností indexu S&P 500	43
Tabulka 5 - Společnosti v indexu Dow 30	46
Tabulka 6 - 10 společností indexu Nikkei 225 s největší vahou	48
Tabulka 7 - Informační kritéria pro modely MA(13), AR(9) indexu S&P 500	55
Tabulka 8 - Přehled hodnot predikce indexu S&P 500	61
Tabulka 9 - Informační kritéria pro modely MA(13), AR(9) indexu Dow 30	63
Tabulka 10 - Přehled hodnot predikce indexu Dow 30	66
Tabulka 11 - Přehled hodnot predikce indexu Nikkei 225	71

SEZNAM ZKRATEK A ZNAČEK

NYSE	New York Stock Exchange
OTC	over-the-counter
ICE	Intercontinental Exchange
IPO	Initial Public Offereing
AMEX	American stock Exchange
ETP	exchange-traded product
NASDAQ	National Association of Securities Dealers Automated Quotations
ETF	Exchange-traded fund
ACF	autocorrelation function
PACF	partial autocorrelation function
AR	autoregression
MA	moving average
AIC	Akaike information criterion
BIC	Bayes information criterion
SIC	Schwarz information criterion

ÚVOD

V současné době je velmi často probírané téma investic, a to hlavně těch dlouhodobých. Je doporučováno, aby si lidé našli způsob zhodnocení svých prostředků, který přesáhne alespoň hodnotu inflace, aby peníze časem neztrácely svoji hodnotu. Pokud ale investiční možnosti nabízejí vysoké zhodnocení, je to většinou také spojeno s velkým rizikem. Pokud bychom se tedy měli zaměřit na něco diverzifikovaného, ale s historicky podloženým výnosem, dostali bychom se k akciovým indexům, které reprezentují vybraný akciový trh. Konkrétně americký index S&P 500 nabízí průměrný dlouhodobý výnos v horizontu 20 let 10 % ročně. Doba rostoucí inflace, volatility a nejistoty si ale žádá statistický přístup, bez emocí, k predikování budoucího vývoje na finančních trzích a přesně tímto se bude tato diplomová práce zabývat.

První kapitola bude věnována seznámení se s akciovým trhem, burzami a typy akciových indexů. Dále si představíme i možnosti obchodování s indexy. Ve druhé kapitole se podíváme na teoretickou podstatu analýzy časové řady, konkrétně na Boxovu-Jenkinsovu metodologii a její základní modely včetně jejich konstrukce. Ve třetí kapitole se zaměříme na finanční časové řady, které se vyznačují svou proměnnou volatilitou a do kterých řadíme i hodnoty akciových indexů v čase. Důležitou částí zde budou modely volatility a jejich výstavba.

Čtvrtá a pátá kapitola je již zaměřena na vybrané akciové indexy, jejich složení, historii a následnou analýzu. Analýza bude provedena s pomocí ekonometrického softwaru Gretl, ve kterém jsou naše představované metody a modely implementovány. Výsledný model časové řady bude využit ke konstrukci budoucích bodových předpovědí a konkrétně modely volatility využijeme pro stanovení intervalových předpovědí. Pokud reálné hodnoty překročí odhadnuté meze, může to být indikátor změny na trhu, který můžeme včas zaznamenat a další průběh odhadnout znovu. Nebude tedy chybět ani srovnání predikovaných a reálných hodnot, které bude doplněno o události, které daný průběh ovlivnily.

1. Akciový trh a akciové indexy

Akciový trh je část kapitálového trhu, kde se obchoduje s akciemi. Můžeme tedy také mluvit o akciové burze, která má většinou formu neziskové obchodní společnosti. Běžně se jedná o akciovou společnost a členové burzy (akcionáři) bývají zejména banky nebo obchodníci s cennými papíry. První dokumenty, které prokazují existenci obchodních míst podobajících se burzám, se datují již do 12. století. Mají tedy velkou historii a k dnešní podobě musely urazit dlouhou cestu.

Slovo burza pochází z latinského "bursa", které znamená kožený měšec. Kožený měšec má spojitost s belgickou obchodní rodinou, která měla kožený měšec obsažený v erbu. Koncem 14. století se do jejich hostince v Bruggách sjížděli obchodníci kvůli sjednání finančních obchodů. Po nějaké době se tomuto místu začalo říkat právě "burzy". Na popud toho v roce 1531 v Antverpách vznikla instituce, která obchodovala se směnkami, zlatými a stříbrnými mincemi. Dokonce zde proběhla i první emise dluhopisů. V průběhu let od 17. století vznikaly obchodní burzy v Amsterdamu, Berlíně, Londýně, New Yorku, Tokiu a v dalších městech. V této době šlo hlavně o fyzické obchodování. Forma obchodování s akciemi, kterou známe teď, se rozmohla až s vývojem výpočetní techniky. Nejprve šlo o zadávání příkazů prostřednictvím počítačové sítě a v 90. letech 20. století se již začalo obchodovat přes internet.

Na akciových burzách můžeme obchodovat formou prezenčního systému, který existuje historicky a vyznačuje se obchodním parketem. Zde zástupci členských institucí vyjednávají koupi a prodej akcií s burzovním specialistou. S touto formou se můžeme setkat například na New York Stock Exchange neboli NYSE. Druhou, aktuálnější možností je elektronický systém, který spočívá ve vkládání kupních a prodejních příkazů prostřednictvím počítačového systému. Tato forma je samozřejmě čím dál rozšířenější a uživatelsky přívětivější [1]. V současné době je již člověk schopný vytvořit i matematické modely na základě kterých se mohou realizovat nákupy a prodeje automaticky, po dosažení nastavených parametrů. Výhodou těchto algoritmů je rychlost, bez emočnosti a tím snížení možných nechtěných ztrát.

Akciový trh jako takový můžeme rozdělit na primární a sekundární. Primární trh slouží k emisi nových cenných papírů a je dále rozdělen na soukromý a veřejný. Na soukromém primárním akciovém trhu získávají společnosti kapitál prostřednictvím nekótovaných akcií, které jsou prodávány přímo určitým investorům a jedná se pak o soukromou společnost. Naopak na veřejném primárním akciovém trhu firmy vstupují na burzu a nabízejí své akcie veřejně. Jedná se hlavně o prvotní vstup firmy na akciový trh, kdy buď přemění celou společnost nebo její část, a to pomocí první veřejné nabídky akcií, tzv. IPO. Firma se poté stává veřejnou

společností. Sekundární trh se běžně označuje jako akciový a charakteristickým rysem je, že investoři obchodují mezi sebou. Obchoduje se zde již s dříve vydanými akciemi bez účasti emitujících společností. Emitující společnost z toho tedy neobdrží žádný dodatečný kapitál. Toto se děje prostřednictvím akciových burz, jejichž příklady si uvedeme v následující části 1.1, 1.2, 1.3 [2].

Vedle akciového trhu, akciové burzy existuje také mimoburzovní trh neboli OTC trh. Zde se obchoduje s akciemi, které nesplnily podmínky pro obchodování na burze. Jedná se o druh služby, který poskytuje cenové kotace. Americký OTC trh tvoří Pink sheets (OTC Markets Group) a OTC Bulletin board neboli OTCBB, který se již tolik nevyužívá. Výhodou tohoto obchodování je, že investoři mohou investovat i do menších firem, které na běžnou burzu nedosáhnou, ale mají potenciál růstu. Jelikož se jedná o neregulované obchodování a firmy nemusí sdílet tolik informací jako na burze, tak může docházet k informační asymetrii a zvýšení rizika pro investora [3].

Aby nedocházelo k záměně akciových titulů, má každá akciová společnost svůj jedinečný symbol neboli „ticker symbol“, který je maximálně čtyřmístný a může se skládat z velkých písmen nebo číslic. Dle individuálního symbolu pak můžeme konkrétní společnost na akciovém trhu snadněji dohledat. Největším akciovým trhem je trh americký, který obsahuje výrazný denní objem obchodů a je i velice populární. Na druhou stranu se také jedná o jeden z nejprísněji regulovaných. Neměli bychom opomíjet i jiné trhy, které nám mohou nabídnout zajímavé investiční možnosti. Nyní se podíváme na vybrané významné burzy, které pak budou souviset s akciovými indexy.

1.1 Newyorská akciová burza (NYSE)

Jedná se o nejznámější a největší akciovou burzu jak v Americe, tak ve světě se sídlem na známé Wall Street v New Yorku. Byla založena na základě Buttonwoodské dohody již v roce 1792 a od roku 1863 nese současný název New York Stock Exchange. Jednalo se o neziskovou organizaci vlastněnou svými členy. V březnu roku 2006 proběhlo spojení s chicagským elektronickým systémem Archipelago a došlo k přeměně na veřejně obchodovatelnou společnost. V důsledku tohoto sloučení vznikla NYSE Arca [4]. Další důležitou událostí tohoto roku bylo sloučení s evropskou akciovou burzou Euronextem. Nově vzniklá NYSE Euronext se stala první globální burzou cenných papírů na světě [1]. Společnost NYSE Euronext ale roku 2013 zanikla po převzetí společností ICE, která pak vyčlenila Euronext a NYSE zase zpět. Společnost ICE je tedy majitelem Newyorské akciové burzy [5]. V roce 2007 došlo k fúzi s AMEX a dalo za vznik NYSE American [6].

K 30.6.2018 činila tržní kapitalizace NYSE 28,5 bilionů amerických dolarů [7]. Josef Jílek [1, s. 128] ve své knize uvádí, že nyní je na NYSE registrováno asi 2800 společností a denně se provede asi 2,5 milionu operací s akciemi. Mezi společnosti zde zapsané patří například Twitter Inc. (TWTR), McDonald's Corporation (MCD) nebo The Coca-Cola Company (KO) [8]. Obchoduje se zde ale jak s americkými, tak i zahraničními akciemi. Hlavní obchodní hodiny jsou od pondělí do pátku 9:30 – 16:00 newyorského času, tj. 15:30 – 22:00 času našeho. Existují také ale před a po obchodní hodiny známé jako „Extended Markets“. O devíti svátcích v roce je burza zavřená [9]. NYSE je založena na hybridním modelu, což znamená, že se zde stále obchoduje na parketě, ale zároveň se používají elektronické systémy [1]. Jedná se tedy o model, který zahrnuje jak burzovní specialisty, tak technologie pro své obchodování. Burzovní specialista na NYSE vystupuje jako tvůrce trhu neboli „market maker“. Specializuje se na zprostředkování obchodů s jednotlivými akciemi a jelikož se jedná o fyzické obchodování, mají obecně více povinností. Například musí každý den stanovovat otevírací ceny, které se mohou odlišovat od těch zavíracích z předchozího dne. Tržní cenu stanovují klasicky na základě nabídky a poptávky. Pokud se nabídka s poptávkou dostanou do nerovnováhy, musí konat obchody na vlastní účet, aby trh vyrovnali. V současné době ale převažuje systém elektronický. [10]

Proto, aby se zde mohla firma registrovat, musí splnit hned několik podmínek a celý proces obsahuje 4 kroky. První krok zahrnuje výběr burzy. V nabídce jsou 3 možnosti, a to: NYSE, NYSE American a NYSE Arca. NYSE je určen pro společnosti se střední a velkou kapitalizací. NYSE American je určen pro společnosti s malou tržní kapitalizací a NYSE Arca je plně elektronická burza pro produkty obchodované na burze, tedy pro ETP. Druhým krokem je rezervace burzovního telegrafu neboli konkrétního označení určité akcie, které je až čtyřmístné. Třetím krokem je poslání samotné žádosti s potřebnými formuláři a naпослед je zvolení tzv. „Designated Market Maker“, který se stará o dané akcie a poskytuje potřebné informace [11].

1.2 Nasdaq

Nasdaq byl založen v roce 1971 společností National Association of Securities Dealers (NASD) jako elektronický trh pro pomoc s OTC obchodováním s akciemi. Dlouhou dobu existoval pouze jako počítačová síť propojující jednotlivé finanční instituce a nejednalo se o akciovou burzu. Spadal tedy do mimoburzovního trhu. To se ale změnilo v roce 2006, kdy se z NASDAQ stala akciová burza [1]. V současné době jde o největší ryze elektronický burzovní trh v USA a druhou největší burzu v USA. Je vlastněná společností Nasdaq, Inc., která právě provozuje

elektronický obchodovací systém NASDAQ. Jedná se o veřejně obchodovatelnou společnost jejíž akcie jsou nabízeny veřejně pod označením NDAQ [12].

Na této burze je registrováno cca 3300 společností a je jich tedy více než na NYSE [12]. Obchoduje se zde zejména s akciemi technologických a internetových společností jako je Apple Inc. (AAPL), Microsoft Corporation (MSFT), Facebook, Inc. (FB) nebo Amazon.com, Inc. (AMZN). Samozřejmě jsou zde zahrnuty i jiná odvětví jako např. zdravotnictví, maloobchod nebo průmysl [13]. Nasdaq má stejné obchodní hodiny jako NYSE.

Tuto burzu tvoří opět tzv. „market makers“, kteří pomáhají investorům a obchodníkům nakupovat a prodávat cenné papíry a tím zvyšují likviditu a konkurenceschopnost ceny na trzích. Právě tyto osoby provádějí nákupy a prodeje cenných papírů na svůj vlastní účet a tím také tvoří nabídku a poptávku [10].

1.3 Tokijská burza

Tokijská burza neboli Tokyo stock exchange je největší burzou v Japonsku, ale také se řadí mezi největších akciové burzy na světě. Založena byla v roce 1878 a do roku 1999 využívala prezenční systém obchodování s burzovním parketem. Od tohoto roku do současnosti pak využívá systém elektronický [1]. V roce 1986 byl umožněn vstup zahraničním investorům, což bylo velkým milníkem. V současné době je součástí holdingové společnosti Tokyo Stock Exchange Group, Inc. [14].

Na této burze je kótováno přes 3000 společností, a to jak japonských, tak i zahraničních. Mezi největší zde kótované společnosti, které jsou i pro nás známé, se řadí například Toyota Motor Corporation a Toyota Tsusho Corporation, dále Honda Motor Co., Mitsubishi Corporation nebo Sony Corporation [15]. Částky jsou zde uváděny v japonských jenech a obchodní hodiny jsou od pondělí do pátku 9:00-11:30 a 12:30-15:00 JST, což znamená 1:00 – 3:30 a 4:30-7:00 v ČR. Na této burze mají tedy hodinovou pauzu na oběd a také zde neexistuje obchodování mimo obchodní hodiny narozdíl od předchozích dvou zmíněných burz [16].

Svůj trh má rozdělen na 5 sekcí. V první sekci jsou zahrnuty velké a aktivně obchodované společnosti, ve druhé sekci jsou zahrnuty středně velké podniky. Tyto dvě sekce tvoří hlavní trh. Další dvě sekce jsou „Mothers“ a Jasdaq, které obsahují menší firmy s růstovým potenciálem. Poslední se nazývá Tokyo PRO Market a ten je určen pro profesionální investory. Každá z těchto sekcí má své vlastní podmínky [15].

1.4 Akciový index

V předchozí části jsme se zaměřili na akciové trhy, burzy. Každý akciový trh má svůj průběh a je tedy důležité sledovat jeho vývoj. Obecně bychom mohli mluvit o burzovním indexu, který

slouží ke sledování vývoje daného trhu, kde se obchoduje s cennými papíry nebo komoditami. Za nejdůležitější se ale považuje právě trh akciový. Důležitým pojmem této práce tedy bude akciový index, který je jak nejvýznamnějším, tak i nejvíce obchodovaným indexem. Akciový index je ukazatel vývoje určitého akciového trhu jako celku nebo jeho části. Jedná se o jakýsi statistický údaj. Indexy mohou zahrnovat jak největší či nejdůležitější společnosti, tak i méně zajímavé. Dále mohou být vybrány akcie společností ze stejného sektoru. Obecně se indexy dělí na souhrnné a výběrové. Souhrnné indexy obsahují všechny akcie registrované na dané burze a indexy výběrové obsahují pouze vzorek vybraných akcií na daném trhu, který splňuje daná kritéria. Mohli bychom také říct, že pokud roste hodnota podkladových akcií, roste i hodnota akciového indexu a naopak [1]. Aktuální hodnota indexu se určuje v pravidelně stanovených intervalech po celou dobu otevření daného akciového trhu. V zásadě skoro každá burza má svůj index. Například výše zmíněné burzy mají následující indexy: NYSE - Dow Jones, Nasdaq - NASDAQ Composite index, Tokijská burza - Nikkei 225. Existuje pak také velmi známý index S&P 500, který zahrnuje akcie kótované jak na Nasdaq, tak na NYSE. Samozřejmě i v Evropě máme své burzy a ty mají své indexy. Například v Německu Frankfurtská burza má DAX index, Londýnská burza ve Velké Británii má FTSE 100 index a u nás v ČR Burza cenných papírů Praha má Index PX.

Existují dva základní způsoby výpočtu akciového indexu, a to cenově vážené indexy a indexy vážené dle tržní kapitalizace. Jelikož každý má rozdílný přístup, je důležité pochopit způsob jejich tvorby, abychom je poté mohli správně interpretovat.

1.4.1 Cenově vážený index a index vážený dle tržní kapitalizace

Cenově vážený index je založen na aktuálních cenách daných akcií. Čím vyšší je cena akcie vybrané společnosti, tím více ovlivňuje hodnotu daného indexu a má v něm větší váhu. Nezohledňuje se zde počet obchodovaných akcií. Tuto metodu využívá např. Dow Jones index nebo Nikkei 225. Obecný vzorec vypadá následovně a P_i zde značí cenu i -té akcie v čase t , n je počet akcií zahrnutých v indexu a k_t je koeficient v čase t [1].

$$Index = k_t * \sum_{i=1}^n P_{i,t} \quad (1)$$

Druhý index, založený na tržní kapitalizaci, již uvažuje počet daných akcií v oběhu na rozdíl od předchozího. Platí tedy, že čím větší má společnost tržní kapitalizaci, tím větší vliv a váhu má ve vybraném indexu. Tržní kapitalizace se stanoví jednoduše jako součin aktuální ceny akcie a celkového počtu akcií vybrané společnosti. Cena akcie zde již není jediným měřítkem. Tento přístup uplatňuje jednoduchou myšlenku toho, že čím větší firma je, tím větší by měla

mít vliv a váhu na daném trhu i v daném indexu. Jelikož se obchodují ve velkých objemech a hospodářské výsledky těchto největších společností na burze mají mnohem větší vliv než menší společnosti, mohou pak mít i dopad na celkovou ekonomiku. Tento postup využívá např. Nasdaq, S&P 500, London FTSE 100 nebo i Index PX. Vzorec pro výpočet vypadá následovně a prvky k_t , $P_{i,t}$, n mají stejná význam jako v předcházejícím vzorci (1) a $n_{i,t}$ značí počet i -tých akcií v čase t .

$$Index = k_t * \sum_{i=1}^n P_{i,t} * n_{i,t} \quad (2)$$

Koeficient k_t zaručuje spojitost pro případy dělení či výměny akcií v daném indexu. Zpravidla pro nejznámější indexy platí, že mají relativně pevnou bázi akcií a k obměně tedy dochází zřídka [1].

Pro pochopení a porovnání přístupů tvorby indexů si ukážeme jednoduchý příklad. Uvažujme fiktivní akciový trh, kde se obchoduje s akciemi společností X a Y. Akcie společnosti X má aktuální tržní hodnotu 100 \$ a jejich celkový počet je 1000. Tržní kapitalizace je tedy $100 * 1000$, tzn. 100 000 \$. Akcie společnosti Y má aktuální tržní hodnotu 10 \$ a celkový počet těchto akcií je 20 000. Tržní kapitalizace společnosti Y je tedy $10 * 20\,000$, což je 200 000 \$ [17]. V následující Tabulce 1 jsou uvedeny zadané informace a vypočtené váhy jednotlivých titulů podle způsobu výpočtu akciového indexu. Je zde krásně vidět, jak se liší jednotlivé váhy pro dané metody. Váha v cenově váženém indexu převažuje pro společnost X, jelikož aktuální cena její akcie je desetkrát větší než společnosti Y. Naopak dle tržní kapitalizace má vedoucí váhu společnost Y, jelikož je její tržní kapitalizace dvojnásobná oproti společnosti X.

Tabulka 1 - Váhy akcií dle přístupu výpočtu akciového indexu

Společnost	Aktuální cena akcie	Počet akcií v oběhu	Tržní kapitalizace	Váha v indexu dle tržní kapitalizace	Váha v cenově váženém indexu
X	100	1 000	100 000	0,33	0,91
Y	10	20 000	200 000	0,67	0,09
Suma	110	21 000	300 000	1	1

Zdroj: Vlastní zpracování dle [17]

Nyní si ještě zkusíme namodelovat případ, kdy by došlo k 10 % nárůstu ceny u akcie společnosti X a zároveň k 10 % poklesu ceny u akcie společnosti Y, jak můžeme vidět v Tabulce 2. Při vážení dle ceny akcie, došlo k nárůstům ze 110 na 119 \$ a procentuálně to dělalo nárůst indexu o 8,18 %. Naopak při vážení dle tržní kapitalizace došlo k poklesu celkové tržní kapitalizace o 10 000 \$ a tedy celkovému snížení indexu o 3,33 %. Je zde vidět, že stejná událost při každém přístupu způsobí jinou reakci. Způsob dle tržní kapitalizace dává větší váhu 10 %

snížení ceny, jelikož společnost Y má celkově větší množství akcií v oběhu, a tedy i větší váhu, jak bylo ukázáno v Tabulce 1. Na druhou stranu zase přístup vážený dle cen dal větší váhu zvýšení ceny akcie společnosti X. Je pak zřejmé, že po této změně cen, dojde i k přepočtu vah jednotlivých akcií.

Tabulka 2 - Změny v indexu po změně cen akcií

Společnost	Nová aktuální cena akcie	Původní tržní kapitalizace	Nová tržní kapitalizace	Váha v indexu dle tržní kapitalizace	Váha v cenově váženém indexu
X	110	100 000	110 000	0,38	0,92
Y	9	200 000	180 000	0,62	0,08
Suma	119	300 000	290 000	1	1
Změna dle tržní kapitalizace:			-3,33%		
Změna u cenově váženého indexu:			8,18%		

Zdroj: Vlastní zpracování dle [17]

Z tohoto jednoduchého příkladu je vidět, jak důležité je pochopit fungování výpočtu daného indexu. Je to významný faktor pro správnou interpretaci, což bylo uvedeno již výše.

1.4.2 Obchodování s indexy

Jak již bylo řečeno, akciové indexy slouží jako ukazatel vývoje daného akciového trhu. Zároveň se ale také jedná o investiční instrument. Nejedná se o obchod s nějakým aktivem, jelikož index je obecně statistický údaj neboli ukazatel. Obchodování je založeno na spekulaci vývoje daného indexu, ale zároveň se akciové indexy nedají obchodovat samostatně. Existují proto různé finanční deriváty, které obchodování umožňují. Jedná se o futures, CFD (contracts for difference) nebo ETF (exchange-traded fund). Může se s nimi obchodovat jak v průběhu jednoho dne neboli intradenně, což znamená, že se pozice nedrží přes noc, tak na dlouhodobé bázi [18].

Nyní si postupně řekneme něco k jednotlivým druhům obchodování. Jako první budeme mluvit o futures na akciové indexy. Jde o typ finančního derivátu, kde cena závisí na ceně podkladového aktiva. V našem případě podkladovým aktivem je akciový index a cena futures je odvozena právě od ceny indexu. Jedná se o pevné termínované kontrakty, se kterými lze obchodovat na burzách a můžeme tedy mluvit o burzovních kontraktech. Tyto kontrakty musejí být standardizované, a to jak z hlediska své velikosti, tak i termínu svého vypořádání. Objevují se zde pozice „long“ a „short“. Při „long“ neboli dlouhé pozici se spekuluje na růst ceny podkladového aktiva a jde o nákup. Naopak při „short“ neboli krátké pozici se spekuluje na pokles a jedná se o prodej. Do obchodu vstupuje také tzv. clearingové středisko, které při otevření nové pozice, nákupu kontraktu, požaduje maržový vklad neboli počáteční marži, která představuje několikaprocentní část z nominální hodnoty a slouží i jako pojistka. Jelikož investor při koupi nemusí disponovat celou částkou, ale jen určitým procentem, vzniká tzv. pákový

efekt. Dalším z úkolů clearingového střediska je ocenění a vypořádání otevřených pozic skrze maržový účet, a to každý den po ukončení obchodování. Při vzestupu kurzu futures dosahují subjekty v dlouhé pozici zisk, a naopak subjekty v krátké pozici ztrátu. Kdyby došlo k poklesu kurzu futures, bude to přesně opačně. Jak je uvedeno již na začátku, futures jsou burzovně obchodovatelné, a tak s nimi mohou investoři obchodovat, tzn. otevírat nové pozice, které mohou i zavírat, a to kdykoli před jejich vlastním vypořádáním. U těchto typů derivátových kontraktů dochází k finančnímu vyrovnání mezi subjekty v protipozicích, nikoli k dodání podkladového aktiva [19]. Existují i tzv. mini futures na akciové indexy, které nevyžadují tak vysoký vklad jako u klasických velkých futures a jsou tedy vhodnější variantou pro drobné investory. Uvádí se, že trh s těmito futures je vysoce likvidní a často se tyto futures užívají jako spekulativní nástroj.

Jako další je na řadě obchodování pomocí CFD. CFD neboli contracts for difference vytváří kontrakt mezi dvěma stranami o pohybu ceny daného instrumentu, jak již vyplývá z názvu a opět se jedná o typ derivátu. U nás by byl daným instrumentem opět vybraný akciový index. Na rozdíl od futures se smlouva uzavírá mezi námi a brokerem. CFD tedy nejsou burzovně obchodované, neexistuje zde žádná standardizace, ale samozřejmě existuje jistý legislativní dohled. Výhodou je zde velmi široké portfolio nebo možnosti obchodování s malým množstvím. Můžeme tedy říct, že u tohoto instrumentu lze obchodovat i s malým kapitálem a mnoha podkladovými aktivy. Stejně jako u futures, daný instrument nevlastníme, pouze spekulujeme na jeho růst nebo pokles a můžeme tedy profitovat oběma směry. Důležitým faktem zde je, že tyto kontrakty jsou založené na finanční páce. Tzn. že požadovaný počáteční vklad je nižší než celková hodnota investice. Z toho plynou výrazně vyšší jak zisky, tak i ztráty než u jiných typů investic. Jestliže spekulujeme na růst ceny daného aktiva, zadáváme nákupní "long" pozici a budeme profitovat z každého růstu ceny. Pokud bychom spekulovali na pokles, zadali bychom prodejní „short“ pozici a profitovali bychom z každého poklesu ceny. Pokud se ale cena bude vyvíjet opačným směrem, než jsme očekávali, budeme realizovat ztrátu. Jedná se o časově neomezené pozice a investoři mají právo je kdykoli uzavřít. Následně dojde k vyrovnání cenových rozdílů, které vzniknou na základě cen v době od otevření do uzavření pozice. Tento nástroj se často používá pro krátkodobé, dokonce i intradenní obchodování [20].

Jako poslední tu máme ETF v překladu exchange-traded fund neboli burzovně obchodované fondy. Jedná se o fond, který vydal své akcie, s kterými se pak obchoduje na burze. Existují různé typy, ale pro nás jsou důležité právě indexové ETF, které obsahují akcie vybraného akciového indexu v takovém poměru a složení, aby kopírovaly jeho cenový vývoj. Proto se také

můžeme setkat s názvem indexové akcie. Opět se zde uplatňuje spekulace jak na růst, tak i na pokles.

2. Časové řady a jejich analýza

V minulých kapitolách jsme se seznámili s pojmem akciový index, který je důležitým prvkem této práce. Jak již víme, akciový index nám udává určité hodnoty v čase, a proto dalším důležitým pojmem této práce budou časové řady a s tím související modely časových řad, které slouží k následné analýze a predikci dalšího vývoje.

Obecně bychom časovou řadu mohli definovat jako posloupnost dat $y_1, \dots, y_n$, která je chronologicky uspořádaná v čase. Významnou součástí je pak nahodilost a nejistota. Můžeme pak tedy na časovou řadu pohlížet jako na realizaci náhodného neboli stochastického procesu. Stochastický neboli náhodný proces je řada náhodných veličin uspořádaných v čase $\{X(s, t), s \in S, t \in T\}$, kde S značí výběrový prostor a T indexní řadu neboli časovou množinu. My dále budeme pracovat se zjednodušenou formou $\{Y_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, resp. $\{Y_t\}$. Realizaci stochastického procesu pak označujeme jako časovou řadu y_t . Jelikož hodnoty akciových indexů jsou zaznamenávány s vysokou časovou frekvencí, mluvíme pak přímo o finančních časových řadách, pro které je vysoká časová frekvence základním rysem a pro které je vhodné zahrnout i modelování volatility [21].

Pro následnou analýzu časových řad existuje více metod a postupů jako například Dekompozice časových řad, Boxova-Jenkinsova metodologie, Spektrální analýza, Analýza vícerozměrných časových řad a další. Více informací o daných metodách nalezneme například v knize Finanční ekonometrie od Tomáše Cipry. V této práci budeme pracovat s Boxovo-Jenkinsovou metodologií, kterou si v následujících odstavcích představíme a která bude základem pro následné modelování volatility. Předtím se ale ještě seznámíme se základními principy, se kterými budeme u časových řad pracovat.

2.1 Stacionarita

Stacionarita je základem analýzy časových řad. Obecně bychom mohli říct, že se jedná o stochasticky ustálené chování dané časové řady. Rozlišujeme dva typy, a to stacionaritu striktní a stacionaritu slabou. Pro striktní stacionaritu platí, že pravděpodobností rozdělení náhodného vektoru $(y_{t_1}, \dots, y_{t_k})$ je shodné s rozdělením náhodného vektoru $(y_{t_1+h}, \dots, y_{t_k+h})$ pro všechna h , kde k je libovolné kladné celé číslo a $(t_1, \dots, t_k)$ je soubor k kladných celých čísel. Jinými slovy bychom mohli říct, že pravděpodobností chování stochastického procesu je v čase neměnné. Jelikož se jedná o velmi silnou podmínku, která je těžko ověřitelná, zavedla se slabá stacionarita.

Časová řada y_t je slabě stacionární, pokud je střední hodnota y_t , rozptyl y_t a kovariance mezi y_t a y_{t-h} v čase neměnná, tedy konstantní pro libovolné h . Pro každé s, t pak platí následující:

$$E(y_t) = \mu = konst. \quad (3)$$

$$var(y_t) = \sigma_y^2 = konst. \quad (4)$$

$$cov(y_s, y_t) = cov(y_{s+h}, y_{t+h}), \text{ pro libovolné } h. \quad (5)$$

Obecně nám tedy stačí, aby příslušný proces byl invariantní vůči posunům v čase v rámci momentů do druhého řádu včetně. Z definice můžeme dále odvodit, že pokud je y_t striktně stacionární a její první dva momenty jsou konečná čísla, pak je y_t též slabě stacionární. Opačně to ale neplatí. Jedná-li se navíc o proces s normálním rozdělením, je slabá stacionarita ekvivaletní se stacionaritou striktní. V této práci budeme pracovat pouze se slabou stacionaritou, kterou budeme nazývat jednoduše stacionarita. Pokud se v časové řadě objevuje trend či sezónnost je to se stacionaritou neslučitelné a před další analýzou je tedy nutné nestacionární řadu upravit a stacionarizovat [22].

2.2 Autokorelační a parciální autokorelační funkce

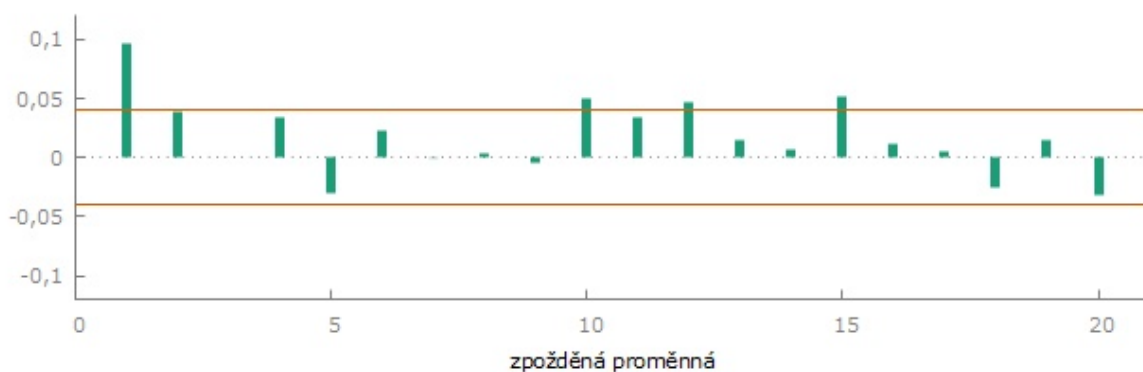
Další důležitou součástí analýzy časových řad dle Box-Jenkinsovy metodologie je autokorelační a parciální autokorelační funkce. Tyto funkce jsou zaměřeny na závislosti mezi jednotlivými prvky časové řady. Roli zde hraje hodnota k , která značí řád zpoždění, tedy pro kolik sousedních hodnot, zpoždění, budeme danou funkci uvažovat. Pro zavedení autokorelační funkce musíme zavést také funkci autokovarianční. Autokovarianční funkce pro zpoždění k se definuje následovně jako

$$\gamma_k = cov(y_t, y_{t-k}) = E(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu), k = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (6)$$

Autokorelační funkce neboli ACF pro zpoždění k pak vychází z autokovarianční funkce a podává nám informaci o síle lineární závislosti mezi y_t a y_{t-k} . Definuje se jako

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\gamma_k}{\sigma_y^2}, k = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (7)$$

V případě stacionárního stochastického procesu platí, že obě tyto funkce jsou funkcemi sudými, což znamená, že $\gamma_k = \gamma_{-k}$ a $\rho_k = \rho_{-k}$, a proto můžeme uvažovat hodnoty $k > 0$. Pro $k = 0$ pak platí $\rho_0 = 1$. Hodnoty ρ_k leží v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ a grafickým zobrazením ACF je korelogram, který můžeme vidět na Obrázku 1. Oranžové vodorovné čáry představují 95% interval spolehlivosti, jehož hodnoty se vypočítají jako $\frac{1.96}{\sqrt{T}}$ a značí, že hodnoty v tomto pásu jsou na hladině významnosti 0,05 statisticky nevýznamné.



Obrázek 1 - Korelogram

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Jelikož korelace mezi náhodnými veličinami y_t a y_{t-k} může být způsobena jejich korelací s veličinami $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1}$, zavádíme parciální autokorelační funkci ρ_{kk} neboli PACF. Parciální autokorelační funkce nám podává informaci o korelaci mezi veličinami y_t a y_{t-k} , která je ale očištěná o vliv veličin ležících mezi nimi. Pro PACF platí $\rho_{00} = 1$ a $\rho_{11} = \rho_1$. Další hodnoty PACF se pak určí jako podíl determinantů matic, který vypadá následovně

$$\rho_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}. \quad (8)$$

Chování ACF a PACF je důležitým ukazatel pro tvorbu modelů v rámci Boxovy-Jenkinsovy metodologie. Hlavně nás bude zajímat hodnota $k = k_0$, za kterou je daná funkce nulová, resp. statisticky nevýznamná. Bod k_0 se označuje jako bod useknutí. V praxi by tyto výpočty byly velmi náročné, proto se hojně využívají počítačové programy, ve kterých jsou výše uvedené výpočty zahrnuté [21] [23].

2.3 Proces bílého šumu

Jestliže stochastický proces $\{Y_t\}$ je posloupností nezávislých a identicky rozdělených náhodných veličin s konstantní střední hodnotou (obvykle nulovou) a konstantním konečným rozptylem $\sigma^2 > 0$, mluvíme pak o bílého šumu. Proces bílého šumu je stacionárním procesem a hodnoty ACF a PACF má nulové pro $k \neq 0$, jinak $\rho_0 = \rho_{00} = 1$. V praxi bychom mohli říct, že pokud jsou hodnoty ACF velmi blízké nule, blíží se ACF procesu bílého šumu. Bílý šum se též může

označovat jako gaussovský, a to v případě, je-li jeho sdružené pravděpodobnostní rozdělení normální [21] [22].

2.4 Základní modely Boxovy-Jenkinsovy metodologie

Nyní se již dostáváme k samotné metodologii. Principy této metody zformulovali George Box a Gwilym Jenkins v roce 1970 a podle nichž byla tato metoda i pojmenována. Základ pro modelování časové řady dle Boxovy-Jenkinsovy metodologie je postaven na reziduální, tedy náhodné složce. Další důležitou součástí této metodologie je korelační analýza, která nám pomáhá i k určení správného modelu. Výhodou této metody je i modelace časové řady s velmi obecným průběhem, což znamená její rozsáhlé využití. Nyní se již zaměříme na konkrétní modely Boxovy-Jenkinsovy metodologie. Bude se jednat o autoregresní procesy, procesy klouzavých průměrů a jejich kombinace. Zde budeme pracovat pouze s řadami stacionárními. Poté přejdeme na modely nestacionárních časových řad, kde budeme pracovat s trendem či sezónností. Následující podkapitoly a kapitoly 2.5 a 2.6 jsou zpracovány na základě zdrojů [21], [22], [23], [24].

2.4.1 Autoregresní procesy AR

Autoregresním procesem řádu p , tedy $AR(p)$, rozumíme proces ve tvaru

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (9)$$

kde $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ jsou reálné parametry a ε_t je bílý šum. Tento zápis lze přepsat s použitím operátoru zpětného posunutí B , který představuje zpoždění o jedno časové období, tedy $By_t = y_{t-1}$. J -tá mocnina operátoru zpětného posunu poté zpozdí veličinu v čase o j časových jednotek a platí tedy $B^j y_t = y_{t-j}$. Zápis s využitím tohoto operátoru zpětného posunutí budeme využívat i v dalších modelech a zápisech jejich tvaru. Model $AR(p)$ pak po přepisu vypadá následovně

$$\varepsilon_t = \varphi_p(B)y_t, \quad (10)$$

kde $\varphi_p(B) = (1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p)$ a jedná se o autoregresní operátor.

Pokud by byla hodnota parametrů 0, jednalo by se jen o proces bílého šumu. Proces $AR(p)$ je stacionární, jestliže kořeny polynomiální rovnice $1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p = 0$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině, respektive jejich převrácené hodnoty leží uvnitř tohoto kruhu. Tento proces má nulovou střední hodnotu a rozptyl

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi_1 \rho_1 - \dots - \varphi_p \rho_p}. \quad (11)$$

Autokorelační funkce pak musí splňovat diferenční rovnici

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p}, \text{ pro } k > 0. \quad (12)$$

Tento tvar odvodíme vynásobením všech členů vztahu (9) hodnotou $\frac{y_{t-k}}{\sigma_y^2}$ a přejdeme pak ke středním hodnotám. Pokud bychom chtěli dále vyjádřit parametry $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ pomocí hodnot autokorelační funkce $\rho_1, \dots, \rho_p$ či naopak, dostaneme soustavu Yuleových-Walkerových rovnic pro $k = 1, \dots, p$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \varphi_1 + \varphi_2 \rho_1 + \dots + \varphi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \varphi_1 \rho_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_p \rho_{p-2} \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \rho_p &= \varphi_1 \rho_{p-1} + \varphi_2 \rho_{p-2} + \dots + \varphi_p. \end{aligned} \quad (13)$$

Pro autoregresní proces $AR(p)$ je pak také důležitý průběh parciální autokorelační funkce PACF, kdy bod useknutí k_0 se rovná řádu p a platí $\rho_{kk} = 0$, pro $k > p$. Tento fakt pak napomáhá k identifikaci autoregresních procesů. Další vlastností, kterou budeme v této práci zmiňovat, je invertibilita. Jedná se o vlastnost, která umožňuje vyjádřit současnou hodnotu procesu pomocí minulých hodnot a současné hodnoty bílého šumu. V praxi máme k dispozici právě hodnoty realizace náhodného procesu y_t a ne hodnoty bílého šumu, tudíž se jedná o důležitou vlastnost. Již ze zápisu pro autoregresní procesy $AR(p)$ můžeme vidět, že se jedná o model invertibilní. V následujících odstavcích si představíme konkrétní procesy $AR(1)$ a $AR(2)$.

Autoregresní proces prvního řádu $AR(1)$ má tvar

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (14)$$

a s použitím operátoru zpětného posunu vypadá následovně

$$(1 - \varphi_1 B)y_t = \varepsilon_t. \quad (15)$$

Tento proces je stacionární pro $|\varphi_1| < 1$ a v tomto případě má nulovou střední hodnotu, konstantní rozptyl ve tvaru $\sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \varphi_1^2}$ a autokorelační funkci $\rho_k = \varphi_1^k$, pro $k \geq 0$. Parciální autokorelační funkce $AR(1)$ má tvar $\rho_{11} = \varphi_1$ a $\rho_{kk} = 0$, pro $k > 1$, což vyplývá z bodu useknutí $k_0 = p = 1$.

Autoregresní proces druhého řádu $AR(2)$ má tvar

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \quad (16)$$

a s použitím operátoru zpětného posunutí

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2)y_t = \varepsilon_t. \quad (17)$$

Aby tento proces byl stacionární, musí kořeny této kvadratické rovnice $(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2) = 0$ ležet vně jednotkového kruhu a pak pro parametry φ_1, φ_2 platí následující omezení

$$\varphi_1 + \varphi_2 < 1, \quad \varphi_2 - \varphi_1 < 1, \quad -1 < \varphi_2 < 1. \quad (18)$$

V případě splnění je střední hodnota procesu AR(2) opět nulová, rozptyl konstantní v čase $\sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi_1 \rho_1 - \varphi_2 \rho_2}$, pro autokorelační funkci platí vztah $\rho_k - \varphi_1 \rho_{k-1} - \varphi_2 \rho_{k-2} = 0$, pro $k = 1, 2, \dots$, ze kterého po dosazení jednotlivých k dostaneme potřebné vztahy. ACF je tedy bez bodu useknutí a má buď tvar exponenciálního poklesu nebo exponenciálně klesající sinusoidy. Parciální autokorelační funkce AR(2) má pak bod useknutí $k_0 = 2 = p$ a tudíž hodnoty PACF jsou různé od nuly jen pro $k = 1, 2$. Pro $k = 3, 4, \dots$ platí $\rho_{kk} = 0$.

2.4.2 Procesy klouzavých průměrů MA

Procesem klouzavých průměrů řádu q , tedy MA(q), rozumíme proces ve tvaru

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (19)$$

nebo ve tvaru pomocí operátoru zpětného posunutí B

$$y_t = \theta_q(B) \varepsilon_t, \quad (20)$$

kde ε_t je bílý šum, $\theta_1, \dots, \theta_q$ jsou parametry procesu a $\theta_q(B)$ označuje operátor klouzavých součtů, který má tvar $\theta_q(B) = (1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q)$.

Proces MA(q) je vždy stacionární, má nulovou střední hodnotu a rozptyl ve tvaru

$$\sigma_y^2 = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2. \quad (21)$$

Autokorelační funkci má pak ve tvaru

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_k + \theta_k \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{pro } k = 1, \dots, q \\ 0 & \text{pro } k > q \end{cases} \quad (22)$$

a již ze zápisu můžeme vidět, že průběh ACF bude pro určení modelu MA(q) důležitý, jelikož bod useknutí autokorelační funkce se rovná řádu modelu MA $k_0 = q$. Parciální autokorelační funkce poté již nemá bod useknutí a má průběh exponenciálně klesajících pohybů nebo exponenciálně klesajících sinusoidních pohybů. Proces MA(q) je invertibilní, jestliže ho lze vyjádřit ve formě konvergentního procesu AR(∞) ve tvaru $\theta_q^{-1}(B)y_t = \varepsilon_t$. Toto je splněno, pokud kořeny následující rovnice $(1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q) = 0$ leží vně jednotkového kruhu. V následujících odstavcích si představíme konkrétní procesy MA(1) a MA(2).

Proces klouzavých průměrů prvního řádu MA(1) má tvar

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (23)$$

a s použitím operátoru zpětného posunu vypadá následovně

$$y_t = (1 + \theta_1 B) \varepsilon_t. \quad (24)$$

Proto, aby byl proces MA(1) invertibilní musí platit $|\theta_1| < 1$. Bodem useknutí ACF je $k_0 = q = 1$, což znamená, že hodnota autokorelační funkce je nenulová pouze pro $k = 1$ a je vyjádřena jako $\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$. Pro $k > 1$ platí $\rho_k = 0$. Průběh PACF má tvar $\rho_{kk} = \frac{(-1)^{k-1}\theta_1^k(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2(k+1)}}$ a nemá bod useknutí.

Proces klouzavých průměrů druhého řádu MA(2) má tvar

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} \quad (25)$$

a s použitím operátoru zpětného posunu vypadá následovně

$$y_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2)\varepsilon_t. \quad (26)$$

Aby byl proces MA(2) invertibilní, musí kořeny rovnice $(1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2) = 0$ ležet vně jednotkového kruhu a z toho pak plynou následující podmínky pro parametry θ_1, θ_2

$$\theta_1 + \theta_2 > -1, \quad \theta_2 - \theta_1 > -1, \quad -1 < \theta_2 < 1. \quad (27)$$

Autokorelační funkce má tvar $\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_1(1+\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & k = 1 \\ \frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & k = 2 \\ 0, & k > 2 \end{cases}$, což i značí bod useknutí

$k_0 = 2 = q$. PACF nemá bod useknutí a buď exponenciálně klesá nebo má tvar exponenciálně klesající sinusoidy.

2.4.3 Smíšený proces ARMA

Smíšený proces, kde se kombinuje jak autoregresní proces, tak proces klouzavých průměrů, je smíšený proces řádu p, q neboli ARMA(p, q). Má tvar

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (28)$$

nebo s použitím operátoru zpětného posunu

$$\varphi_p(B)y_t = \theta_q(B)\varepsilon_t, \quad (29)$$

kde $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ a $\theta_1, \dots, \theta_q$ jsou parametry procesu a $\varphi_p(B)$ a $\theta_q(B)$ jsou operátory, které jsme si definovali v částech 2.4.1 a 2.4.2. Pro stacionaritu procesu ARMA(p, q) platí stejné podmínky jako pro stacionaritu procesu AR(p), a to že kořeny rovnice $\varphi_p(B) = 0$ leží vně jednotkového kruhu. Pro invertibilitu platí podmínky stejné jako pro MA(q), tedy kořeny rovnice $\theta_q(B) = 0$ leží vně jednotkového kruhu. Stacionární smíšený proces řádu p, q má pak střední hodnotu nulovou, autokorelační a parciální autokorelační funkce nemají bod useknutí. ACF má podobný průběh jako u procesu AR(p), tedy kombinaci exponenciálně klesajících pohybů nebo exponenciálně klesajících sinusoidních pohybů. Pokud je $q \geq p$, prvních $q - p$ hodnot tento tvar následovat nebude. PACF je pak omezena lineární kombinací klesajících geometrických

posloupností a sinusoid různých frekvencí s geometricky klesajícími amplitudami podobně jako u procesu MA(q). Pokud je $p \geq q$, počáteční hodnoty $\rho_{00}, \dots, \rho_{p-q, p-q}$ mají odlišný průběh než zbytek PACF.

Konkrétně si představíme model ARMA(1,1), který má tvar

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (30)$$

nebo

$$(1 - \varphi_1 B)y_t = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t. \quad (31)$$

Proces ARMA(1,1) je stacionární, jestliže $|\varphi_1| < 1$ a invertibilní, když $|\theta_1| < 1$. Již ze zápisu procesu plyne, že pokud by hodnota parametru $\varphi_1 = 0$, dostaneme proces MA(1) a pokud $\theta_1 = 0$, redukuje se proces na AR(1). Autokorelační funkce je bez bodu useknutí s exponenciálně

klesajícími hodnotami od hodnoty ρ_1 a má tvar $\rho_k = \begin{cases} \frac{(1-\varphi_1\theta_1)(\varphi_1-\theta_1)}{1-\varphi_1^2-2\varphi_1\theta_1}, & k = 1 \\ \varphi_1\rho_{k-1}, & k > 1 \end{cases}$. Parciální

autokorelační funkce je též bez bodu useknutí a je omezena klesající geometrickou posloupností.

2.5 Modely nestacionárních časových řad

V minulé kapitole jsme pracovali pouze se stacionárními procesy. Většina časových řad, a to hlavně ekonomických, je v praxi ovšem nestacionární. Tzn. že se v čase mění střední hodnota nebo rozptyl procesu. Nestacionaritu může způsobovat trend, sezónnost či určité cykly, náhodná procházka nebo kombinace těchto zmíněných. Proces náhodné procházky je v podstatě proces AR(1), kde $\varphi_1 = 1$ a je tedy tvořen kumulováním náhodných veličin tvořících proces bílého šumu. Zdrojem nestacionarity je zde stochastický trend. Můžeme se pak také setkat s procesem náhodné procházky s driftem, která ještě zahrnuje konstantu a obsahuje i deterministický lineární trend.

Trend odráží dlouhodobé chování dané časové řady a může být rostoucí, klesající nebo se může i v průběhu času měnit. Trend je ve většině případů viditelný hned po vykreslení dané časové řady, případně z korelogramu. Výběrová ACF zde má velmi výrazné přesahy a výběrová PACF má první hodnotu blízkou jedné a všechny ostatní hodnoty jsou téměř nulové. Pro potvrzení pak můžeme nestacionaritu ověřit dle testů na jednotkový kořen. Jedná se například o Dickeyův-Fullerův test či jeho rozšířenou verzi ADF-test a KPSS-test, jejichž hypotézy můžeme vidět v následující Tabulce 3.

Tabulka 3 - Přehled hypotéz ADF-testu a KPSS-testu

	ADF-test	KPSS-test
H_0 :	y_t je nestacionární	y_t je stacionární
H_1 :	y_t je stacionární	y_t je nestacionární

Zdroj: Vlastní zpracování dle [23]

Doporučuje se přitom použít oba současně a za směrodatný výstup brát vždy jen H_0^{ADF} se zamítá, a zároveň H_0^{KPSS} nelze zamítnout pro potvrzení stacionarity nebo H_0^{ADF} nelze zamítnout a současně H_0^{KPSS} se zamítá pro potvrzení nestacionarity. Zbylé kombinace se uvažují jako neprůkazné. Tyto testy jsou již běžně součástí softwarových systémů. Bližší informace k uvedeným metodám můžeme najít například v knize Finanční ekonometrie od Tomáše Cipry. Pro modelování stochastického trendu se využívá proces ARIMA.

Sezónností se rozumí periodické kolísání, které se v určité podobě stále opakuje v celém průběhu časové řady. Sezónnost můžeme rozpoznat opět ze samotného vykreslení časové řady nebo pak z korelogramu výběrové ACF a PACF, ve kterém je periodicitu vidět. V případě sezónnosti se využívá hlavně model SARIMA. Trend i sezónnost jsou v Box-Jenkinsově metodologii modelovány stochasticky.

Nestacionární data jsou pro následnou predikci nepředvídatelná, a proto je potřeba tyto data vždy převést na stacionární, abychom získali spolehlivé výsledky. Pro odstranění nestacionarity se často využívá diferencování, a to převážně prvního a druhého řádu. Pro stabilizaci z hlediska rozptylu se používají logaritmické transformace, které je nutné použít ještě před samotným diferencováním. Zjednodušeně pak můžeme mluvit o logaritmických diferencích, které se často využívají u finančních časových řad, kterým je věnována kapitola 3. V následující části si blíže představíme zmíněné modely ARIMA a SARIMA.

2.5.1 ARIMA

Pokud lze nestacionární data, kde působí stochastický trend, stacionarizovat pomocí diferencování, je v rámci Boxovy-Jenkinsovi metodologie použit proces typu ARIMA(p, d, q) neboli *integrováný smíšený proces řádu p, d, q* . Má tvar

$$\varphi_p(B)w_t = \theta_q(B)\varepsilon_t, \quad (32)$$

kde

$$w_t = \Delta^d y_t \quad (33)$$

a značí d -tou diferenci. Diferenční operátor Δ lze přepsat jako $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (1 - B)y_t$. Můžeme se tedy setkat i se zápisem

$$\varphi_p(B)(1-B)^d y_t = \theta_q(B)\varepsilon_t. \quad (34)$$

V praxi se tedy nejprve provede stacionarizace časové řady pomocí vhodné difference $\Delta^d y_t$ a vzniklá stacionární řada w_t se pak modeluje pomocí smíšeného modelu ARMA(p, q), který je stacionární i invertibilní. Nově vzniklá řada w_t má již o d méně pozorování než původní řada y_t . Řád difference zpravidla nepřekročí dvojku a ve většině případů je $d = 1$. Pro odhadnutí řádu difference můžeme využít například výše zmíněné testy na jednotkový kořen nebo zanalyzovat průběh jednotlivých řad $y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t, \dots$ a jejich výběrové ACF a PACF.

Můžeme se zde setkat ještě se speciálním případem, a tím je *integrovaný proces* $I(d)$, který vlastně vzniká načítáním bílého šumu a většinou se zapisuje ve tvaru

$$\Delta^d y_t = \varepsilon_t. \quad (35)$$

V ekonomické praxi se většinou můžeme setkat pouze s procesy $I(1)$ a $I(2)$, které představují proces ARIMA($0, d, 0$). Proces také může obsahovat konstantu, která modeluje nenulovou úroveň procesu, stejně jako u náhodné procházky s driftem. Pro $d > 0$ platí, že model ARIMA je pro řadu y_t invariantní vůči případnému posunu řady o libovolnou konstantu.

2.5.2 SARIMA

Nyní se zaměříme na stochastické modelování sezónnosti v časové řadě a budeme uvažovat *sezónní modely Boxovy-Jenkinsovy metodologie*. Pokud proces obsahuje sezónní kolísání, lze očekávat krom závislosti mezi veličinami $\dots y_{t-3}, y_{t-2}, y_{t-1}, y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, y_{t+3}, \dots$ i závislost mezi sobě odpovídajícími veličinami v jednotlivých sezónách, tj. mezi veličinami $\dots y_{t-2S}, y_{t-1S}, y_{tS}, y_{t+1S}, y_{t+2S}, \dots$, kde S značí počet sezón. Pro měsíční data je $S = 12$, pro čtvrtletní je $S = 4$. V případě denní finanční časové řady je $S = 5$, jelikož se uvažují jen pracovní dny, ve kterých se obchoduje. Samotná SARIMA vychází ze základních sezónních modelů, a to SAR(P), SMA(Q) a SARMA(p, q)(P, Q). Jedná se o procesy založené na AR, MA, ARMA, které jsou rozšířené o sezónní složku. Více o těchto modelech se dozvíme například v knize Finanční časové řady od Josefa Arlta a Markéty Arltové.

Samotný model SARIMA(p, d, q)(P, D, Q) $_S$ neboli *multiplikativní proces řádu* $(p, d, q) \times (P, D, Q)_S$ může kombinovat oba typy závislostí. Pokud se oba typy objevují, tak závislost uvnitř period popisuje model ARIMA

$$\varphi_p(B)(1-B)^d y_t = \theta_q(B)b_t \quad (36)$$

a sezónní závislosti obsahuje proces $\{b_t\}_t$, který může být popsán modelem

$$\Phi_P(B^S)(1-B^S)^D b_t = \Theta_Q(B^S)\varepsilon_t, \quad (37)$$

kde $\Phi_P(B^S) = 1 - \Phi_1 B^S - \dots - \Phi_P B^{PS}$ a $\Theta_Q(B^S) = 1 - \Theta_1 B^S - \dots - \Theta_Q B^{QS}$. Sezónní difference se pak konstruuují prostřednictvím členu $(1 - B^S)$. Spojením výše uvedených modelů pak dostaneme obecný model

$$\Phi_P(B^S)\varphi_p(B)(1 - B)^d(1 - B^S)^D y_t = \theta_q(B)\theta_Q(B^S)\varepsilon_t, \quad (38)$$

kde p je řád procesu AR, q řád procesu MA, d řád prosté difference, P řád sezónního procesu AR, Q řád sezónního procesu MA, D řád sezónního difference a S délka sezónní periody. Výrazy obsahující S pak modelují sezónní složku.

2.6 Konstrukce modelů Boxovy-Jenkinsovy metodologie

Nyní se blíže podíváme na samotnou výstavbu modelů Boxovy-Jenkinsovy metodologie. Doporučuje se postupovat ve třech krocích, a to

- 1) identifikace modelu,
- 2) odhad modelu,
- 3) diagnostika modelu.

Pokud diagnostika modelu není úspěšná, je potřeba odhadnout nový model a výstupy porovnat. Takhle můžeme pokračovat do doby, dokud nenalezneme nejvhodnější model. V následujících podkapitolách si popíšeme jednotlivé kroky.

2.6.1 Identifikace modelu

První si představíme identifikaci modelu, což je jedna z nejtěžších úloh. Vždy je důležité začít samotným vykreslením dané časové řady, které nám pomůže rozpoznat možnou přítomnost trendu či sezónnosti. Možnou nestacionaritu lze ověřit průběhem ACF, PACF, testy zmíněnými v úvodu kapitoly 2.5 a pak dále stacionarizovat. V tuto chvíli již můžeme začít odhadovat model na připravených datech. Můžeme použít průběh ACF, PACF, který jsme si popsali u jednotlivých modelů nebo využít informační kritéria AIC, BIC. Kritérium BIC lze najít i pod názvem Schwarzovo kritérium neboli SIC. Použití informačních kritérií se již řadí mezi modernější přístupy identifikace modelu a minimalizuje subjektivní zásah analytika. My si kritéria představíme na problému identifikace modelu ARMA(p, q), ke kterému se přistupuje jako k problému odhadu parametrů p a q na základě optimalizace

$$(\hat{p}, \hat{q}) = \arg \min A(k, l). \quad (39)$$

Kritérium AIC má následující podobu

$$AIC(k, l) = \ln \hat{\sigma}_{k,l}^2 + \frac{2(k + l + 1)}{n} \quad (40)$$

a kritérium BIC pak

$$BIC(k, l) = \ln \hat{\sigma}_{k,l}^2 + \frac{(k + l + 1) \ln n}{n}. \quad (41)$$

Přitom $\hat{\sigma}_{k,l}^2$ je odhadnutý rozptyl bílého šumu procesu ARMA(k, l) a n je délka dané řady. V praxi pak tedy hledáme takový model, který má kritéria AIC a BIC (SIC) co nejmenší.

2.6.2 Odhad modelu

Nyní se dostáváme k určení hodnot parametrů jednotlivých modelů. Existují různé možnosti odhadu finálních parametrů modelu a v praxi jsou samotné odhadové procedury čistě softwarovou záležitostí. Je ale důležité mít povědomí o postupech, které využívají, a proto si zde některé zmíníme.

Pro odhady parametrů se mohou využívat vztahy mezi parametry daného modelu a jeho autokorelacemi jako např. u modelu AR(1) platí $\varphi_1 = \rho_1$. Tato možnost se ale používá spíše pro předběžné určení a jako vstupní hodnota pro další odhadové procedury, které jsou již v režii samotného softwaru. Pro model AR(p) se pak využívá klasický OLS-odhad neboli metoda nejmenších čtverců. V případě stacionárního a invertibilního ARMA(p, q) modelu se používají NLS-odhady neboli nelineární regresní modely, které jsou pak realizované pomocí iteračních algoritmů typu Gauss-Newton. Tyto algoritmy jsou blíže popsány například v knize Finanční ekonometrie od Tomáše Cipry. Ve výsledném modelu se pak může vyskytovat i konstanta, kterou jsme do výše uvedených vztahů neuváděli. Jedná se o hodnotu, která pak ovlivňuje úroveň modelu a při odhadu by měla být zahrnuta. Jestli je pro daný model významná, zjistíme při následné diagnostice modelu.

2.6.3 Diagnostika modelu

Posledním krokem je diagnostika odhadnutého modelu. Tento krok se soustřeďuje na ověření adekvátnosti zkonstruovaných modelů a kompatibility s analyzovanými daty. Postupně si tedy představíme různé aspekty, které je důležité ověřit.

- a) Testování významnosti parametrů – slouží k posouzení, zda je zjišťovaný parametr či konstanta statisticky významná pro daný model. Pro vyhodnocení se nejčastěji využívá p-hodnota, která je obsažena ve výstupu daného softwaru. Testuje se nulová hypotéza, která uvažuje, že zjišťovaný parametr nebo konstanta je rovna nule oproti alternativní hypotéze, která předpokládá statisticky významnou nenulovost daného parametru. Pokud je p-hodnota menší než daná hladina významnosti, nulová hypotéza se zamítá a uvažuje se statistická významnost daného parametru. Do

konečného modelu se pak uvažují pouze statisticky významné parametry a model lze případně odhadnout znovu bez nevýznamných parametrů pro vybraná zpoždění.

- b) Kontrola stacionarity – odhadnutý model musí splňovat podmínku stacionarity. Nejčastěji se kontroluje, zda kořeny odhadnutého autoregresního polynomu leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině, respektive jejich převrácené hodnoty leží uvnitř tohoto kruhu. Tento postup jsme zmiňovali i u jednotlivých modelů výše.
- c) Grafická prohlídka vypočteného bílého šumu – pro vypočtený bílý šum $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ z odhadnutého modelu očekáváme nulovou střední hodnotu, konstantní rozptyl, nekorelovanost a normalitu.
- d) Testování nekorelovanosti pro vypočtený bílý šum – za předpokladu normality lze využít test založený na Bartlettově aproximaci, kde ovšem pracujeme s odhadnutými autokorelacemi pro ε_t . Nulová hypotéza nekorelovanosti má kritický obor na hladině významnosti pět procent

$$|r_k(\hat{\varepsilon}_t)| \geq 2 \sqrt{\frac{1}{n}} \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots \quad (42)$$

Dále se také často používají tzv. Q-testy, někdy označované jako portmanteau-testy, které testují souhrnně významnost prvních K autokorelací odhadnutého bílého šumu. Hodnotu K je nutné zvolit předem a doporučuje se zvolit $K \approx \sqrt{n}$, kde n je délka dané řady. Současně zde také dochází k ověření použité struktury ARMA(p, q), neboť testová Q-statistika za platnosti nulové hypotézy, že původní řada se řídí modelem ARMA(p, q), pak má asymptoticky rozdělení $\chi^2(K - p - q)$. V praxi se přitom nejčastěji jako Q-statistika používá Boxova-Pierceova statistika nebo testově silnější Ljungova-Boxova.

2.7 Předpovědi v rámci Boxovy-Jenkinsovy metodologie

Poslední podkapitola v této části je zaměřena na konstrukci předpovědi dané časové řady v rámci Boxovy-Jenkinsovy metodologie, což je důležitá součást samotné analýzy. Symbolem $\hat{y}_{t+k}(t)$ budeme značit bodovou předpověď hodnoty y_{t+k} , která je konstruovaná v čase t o k kroků dopředu, kde k značí horizont předpovědi. Zde se zaměříme na lineární předpověď, která je lineární funkcí hodnot $y_t, y_{t-1}, \dots$ nebo ekvivalentně lineární funkcí hodnot $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots$ za předpokladu stacionarity a invertibility procesu. Dalším požadavkem je, aby předpověď měla ve třídě všech lineárních předpovědí nejmenší střední čtvercovou chybu

$$MSE = E(y_{t+k} - \hat{y}_{t+k}(t))^2. \quad (43)$$

My si ukážeme předpověď pro proces ARMA(p, q) dle vztahu 28. Uvažovanou předpověď s minimální čtvercovou chybou lze psát ve formě

$$\hat{y}_{t+k}(t) = \psi_k^* \varepsilon_t + \psi_{k+1}^* \varepsilon_{t-1} + \dots \quad (44)$$

Minimální čtvercovou chybu dostaneme pokud $\psi_j^* = \psi_j$ pro $j = k, k+1, \dots$. Chyba předpovědi je pak vyjádřena jako $e_{t+k}(t) = y_{t+k} - \hat{y}_{t+k}(t)$ a speciálně platí $e_t(t-1) = y_t - \hat{y}_t(t-1) = \varepsilon_t$. Z toho vyplývá, že bílý šum představuje jednokrokové chyby předpovědi. Vedle bodových předpovědí existují i intervalové předpovědi, které zobrazují intervalový pás možného budoucího průběhu. Konkrétně pro normální (Gaussovský) stochastický proces je $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ předpovědní interval určen hranicemi

$$\hat{y}_{t+k}(t) \pm u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\sum_{j=0}^{k-1} \psi_j^2}, \quad (45)$$

kde α značí hladinu významnosti a výraz $u_{1-\alpha/2}$ je $(1 - \alpha/2) \cdot 100\%$ je kvantil normovaného normálního rozdělení. Pro stacionární procesy konverguje bodová předpověď ke střední hodnotě procesu a interval spolehlivosti se limitně blíží ke dvěma vodorovným přímkám nad sebou. Naopak pro nestacionární procesy se interval spolehlivosti rozevírá neomezeně s rostoucím horizontem předpovědi.

3. Finanční časové řady a modelování volatility

V minulých kapitolách jsme se zabývali modely, které jsou převážně lineární nebo je lze snadno linearizovat nějakou transformací. Ve financích se ale často objevují vztahy nelineární. Podíváme-li se na finanční trh, kde se obchoduje např. s akciemi, měnami, cennými papíry či dalšími komoditami, základní informací pro nás je cena jednotlivých aktiv. Finanční časové řady jsou pak řady, které popisují ceny a jejich dynamiku vývoje na finančních trzích a vyznačují se vysokou frekvencí pozorování. Ta může přispívat k zesílení vlivu nesystematických faktorů na vývoj dané časové řady a dopadem pak může být relativně vysoká a v čase se obvykle měnící volatilita. Volatilita vyjadřuje míru kolísání ceny určitého podkladového aktiva za dané časové období. Je uvažovaná jako směrodatná odchylka a je ukazatelem míry rizikovosti finančních aktiv. Mohli bychom říct, že čím je volatilita větší, tím je i větší cenové rozpětí. Pro tyto případy se využívají nelineární modely, které se mohou označovat jako modely proměnlivé volatility nebo modely podmíněné heteroskedasticity. Na rozdíl od předchozích modelů se zabývají variabilitou nikoli úrovní časové řady. Tato kapitola je opět zpracována na základě zdrojů [21], [22], [23], [24].

U finančních časových řad nebo přímo u cenových indexů, se pracuje s logaritmickou mírou zisku r_t , která má následující vyjádření

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}), \quad (46)$$

kde P_t značí cenu příslušného aktiva v čase t a P_{t-1} cenu příslušného aktiva v čase $t - 1$. Důvodem pro logaritmování jsou kladné hodnoty cen, tudíž se předpokládá jejich logaritmicko-normální rozdělení, potažmo normální rozdělení jejich logaritmů. Lze si ale představit, že logaritmus výnosu má rozdělení s rozptylem, který se mění v čase, tzn. je podmíněně heteroskedastický. Tím se dostáváme k první vlastnosti finančních časových řad a tím je tzv. *leptokurtické rozdělení*. Jedná se o špičatější rozdělení s „tlustšími“ konci ve srovnání s normálním rozdělením. Takovéto rozdělení má pak kladný koeficient špičatosti. Z toho vyplývá, že četnost výskytu extrémně vysokých či nízkých hodnot je vyšší než za předpokladu normality. Další z vlastností je *shlukování volatility*, kdy se volatilita objevuje ve shlucích vysokých a nízkých volatilit. Volatilita těchto časových řad se tedy v průběhu času mění, a to je spojeno s rostoucí a klesající nejistotou na trhu. Poslední si zmíníme *pákový efekt*, který souvisí s kolísáním volatility v čase a jedná se o tendenci volatility zvětšit se více po cenovém poklesu než po cenovém nárůstu stejné velikosti.

Můžeme říct, že modelování volatility je tedy důležitou součástí analýzy časových řad. Tyto modely charakterizují vývoj podmíněného rozptylu stochastického procesu. Pokud jsme tedy

u úrovnového modelu identifikovali podmíněnou heteroskedasticitu, je nutné použít vhodný model volatility, který nám ve výsledku pomůže upřesnit intervalové předpovědi časové řady. Tzn. že úrovnový model z minulé kapitoly doplníme o model volatility. Mimo jiné se tyto modely využívají pro empirické ověření ekonomické a finanční teorie týkající se finančního trhu nebo při analýze VaR.

Modely volatility, kterými se budeme zabývat, vycházejí z představy, že např. model AR(1), tedy vztah 14, lze modifikovat do tvaru $y_t = \varphi_1 y_{t-1} + e_t$, kde $|\varphi_1| < 1$ a $\{e_t\}$ je podmíněně heteroskedastický proces s podmíněnou střední hodnotou $E(e_t|\Omega_{t-1}) = 0$ a podmíněným rozptylem $D(e_t|\Omega_{t-1}) = E(e_t^2|\Omega_{t-1}) = h_t$, kde Ω_{t-1} je relevantní informace až do času $t - 1$. Tyto požadavky splňuje model procesu $\{e_t\}$ ve tvaru

$$e_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \quad (47)$$

kde veličiny procesu $\{\varepsilon_t\}$ jsou nezávislé s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Jednotlivé modely volatility potom spočívají ve formulaci vývoje podmíněného rozptylu h_t v čase. V následující části si představíme dva modely volatility, a to model ARCH, a GARCH. Modely jsou charakteristické tím, že podmíněný rozptyl je lineární funkcí $e_{t-1}^2, e_{t-2}^2, \dots, e_{t-q}^2$, proto jsou tyto modely často označovány jako *lineární modely volatility*. Modely tohoto typu představují jeden z nejúspěšnějších nástrojů pro modelování finančních časových řad.

3.1 Model ARCH

Model ARCH představil Robert F. Engle v roce 1982. Tento model je založen na dvou predikátech, a to že modely finančních časových řad mají proměnnou volatilitu v čase, jsou tedy heteroskedastické a volatilita je kvadratickou funkcí odchylek od podmíněné střední hodnoty e_t . Podmíněný rozptyl obecného modelu ARCH(q) má tvar

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q e_{t-q}^2. \quad (48)$$

Pro kladný podmíněný rozptyl platí podmínky $\alpha_0 > 0$ a $\alpha_i \geq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, q$. Pokud je úrovnový model tvořen pouze reziduální složkou, celkový zápis modelu časové řady vypadá následovně

$$y_t = e_t, \quad e_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q e_{t-q}^2. \quad (49)$$

Platí, že reziduální složka ε_t je nezávislá, identicky rozdělená (iid) náhodná veličina s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Náhodné veličiny e_t jsou pouze nekorelované. Vztah 48 lze vyjádřit pomocí operátoru zpoždění jako

$$(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_q B^q) e_t^2 = \alpha_0 + v_t, \quad (50)$$

kde $v_t = e_t^2 - h_t$. Nepodmíněný rozptyl procesu $\{e_t\}$ má tvar

$$D(e_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q}, \quad (51)$$

čili je konstantní v čase a proces $\{e_t\}$ je nepodmíněně homoskedastický. Rozdělení těchto modelů je opět špičatější oproti normálnímu rozdělení. Parametry se obvykle odhadují metodou maximální věrohodnosti. Řád q tohoto modelu můžeme identifikovat jako bod useknutí odhadnutého parciálního korelogramu v modelu

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q e_{t-q}^2 + u_t, \quad (52)$$

kde u_t je klasický bílý šum. Pokud by ale vycházel vysoký řád q , bylo by nutné odhadovat velké množství parametrů a mohl by také nastat problém s podmínkami nezápornosti pro odhadované parametry α_0 a α_i pro $i = 1, 2, \dots, q$. V takových případech se spíše přechází na model GARCH(1,1), který si probereme v následující podkapitole 3.2.

3.2 Model GARCH

Model GARCH navrhl Tim Bollerslev v roce 1986 a jedná se o zobecněný model ARCH. Tento model uvažuje, že volatilita může záviset také na svých zpožděných hodnotách a doplnil model ARCH o zpožděný podmíněný rozptyl. Nejpoužívanějším modelem finančních časových řad je pak model model GARCH(1,1).

Doplníme-li model ARCH(1) o podmíněný rozptyl v prvním zpoždění, dostáváme model GARCH(1,1) ve tvaru

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad (53)$$

kde kladný podmíněný rozptyl zajistí podmínky $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1, \beta_1 \geq 0$ a $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Pomocí operátoru zpoždění B lze model přepsat do tvaru

$$(1 - \beta_1 B)h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2, \quad (54)$$

kdy za podmínky $\beta_1 < 1$, dostaneme model ARCH(∞) ve tvaru

$$h_t = (1 + \beta_1 B + \beta_1^2 B^2 + \dots)(\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2). \quad (55)$$

Z toho plyne, že model GARCH(1,1) lze použít v případech, kdy je nutný vysoký řád modelu ARCH. Nepodmíněný rozptyl procesu $\{e_t\}$ má formu

$$D(e_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}, \quad (56)$$

ze které vyplývá, že je konstantní v čase a proces $\{e_t\}$ je nepodmíněně homoskedastický.

Podmíněný rozptyl obecného modelu GARCH(p, q) pak lze zapsat ve tvaru

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}, \quad (57)$$

kde parametry modelu splňují podmínky $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i, \beta_j \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{\max\{p,q\}}(\alpha_i + \beta_i) < 1$. Nepodmíněný rozptyl procesu $\{e_t\}$ má pak formu

$$D(e_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max\{p,q\}}(\alpha_i + \beta_i)}. \quad (58)$$

Modely GARCH vyšších řádů se využívají v praxi spíše sporadicky a také existují jeho další modifikace jako např. modely IGARCH, GARCH-M. Dále pak modely EGARCH, které již spadají do nelineárních modelů volatility. Tyto modely jsou pak blíže popsány např. v knize Ekonomické časové řady od Josefa Arlta a Markéty Arltové nebo Finanční ekonometrie od Tomáše Cipry.

3.3 Výstavba modelů volatility

Jak bylo uvedeno v úvodu této kapitoly, modely volatility nám umožňují upřesnit intervalové předpovědi časové řady. V této kapitole si tedy ukážeme kroky, podle kterých je potřeba postupovat, abychom získaly model volatility.

- 1) Určení vhodného úrovnového modelu dle Boxovy-Jenkinsovy metodologie viz kapitola 2.
- 2) Zanalyzování kvality daného modelu a speciálně výsledku testu podmíněné heteroskedasticity, tzv. ARCH testu a normality. ARCH test vychází z úvahy, že podmíněný rozptyl $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q e_{t-q}^2$ modelu ARCH(q) je konstantní, jestliže jsou parametry odpovídající veličinám $e_{t-1}^2, \dots, e_{t-q}^2$ rovny nule. Tudíž testujeme nulovou hypotézu podmíněné homoskedasticity $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0$. V případě jejího zamítnutí dochází k prokázání podmíněné heteroskedasticity a je tedy potřeba zkonstruovat vhodný model podmíněné heteroskedasticity.
- 3) Identifikace vhodného modelu volatility.
- 4) Odhad parametrů identifikovaného modelu volatility. Pro tyto modely se využívá zejména metoda maximální věrohodnosti neboli ML-odhady, nikoli metodika nejmenších čtverců, která se využívá pro úrovnové modely Boxovy-Jenkinsovy metodologie. Finální ML-odhady jsou pak již v režii daného softwaru a většinou se odhaduje celý model najednou. Případně je součástí i rovnice střední hodnoty a rozptylové matice odhadnutých parametrů.
- 5) Diagnostika modelu spočívající v ověření průběhu standardizovaných reziduí. Pokud je model určen správně, měla by jeho standardizovaná rezidua $\hat{\varepsilon}_t = \frac{e_t}{\sqrt{h_t}}$ být nezávislá,

s nulovou střední hodnotou, jednotkovým rozptylem a případně normálním rozdělením pravděpodobnosti.

3.4 Konstrukce předpovědí na základě modelů volatility

Poslední podkapitola je věnována předpovědím v rámci modelů volatility, které pak blíže upravují intervalové předpovědi z úrovnových modelů. Prvně se podíváme na předpovědi v rámci modelů ARIMA za předpokladu podmíněné heteroskedasticity. Zde se opět setkáme s předpovědí na základě minimální čtvercové chyby MSE. Tato předpověď hodnoty v čase $T + k$, tj. předpověď o k kroků dopředu konstruovaná v čase T , která vychází z modelu ARIMA, je podmíněná střední hodnota náhodné veličiny y_{T+k} , tj. $\hat{y}_{T+k}(T) = E(y_{T+k}|\Omega_T)$. Symbol Ω_T je relevantní minulé informace až do času T a k opět značí horizont předpovědi. Předpokládáme-li, že model ARIMA je tvořen lineární kombinací veličin procesu $\{e_t\}$, které jsou podmíněně heteroskedastické má předpovědní chyba tvar

$$e_{T+k}(T) = y_{T+k} - \hat{y}_{T+k}(T) = \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j e_{T+k-j}. \quad (59)$$

Minimální čtvercovou chybu pak lze zapsat jako

$$MSE(\hat{y}_{T+k}(T)) = E(e_{T+k}(T)^2) = D(e_{T+k}(T)) = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j^2, \quad (60)$$

kde σ_e^2 je nepodmíněný rozptyl procesu $\{e_t\}$ a proto se také vztah (60) označuje jako nepodmíněná střední čtvercová chyba. Existuje ale také minimální podmíněná střední čtvercová chyba, kterou je možné vyjádřit jako

$$\begin{aligned} MSE(\hat{y}_{T+k}(T)|\Omega_T) &= E(e_{T+k}(T)^2|\Omega_T) = D(e_{T+k}(T)|\Omega_T) \\ &= \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j^2 E(h_{T+k-j}|\Omega_T). \end{aligned} \quad (61)$$

Podmíněná střední čtvercová chyba předpovědi je vyšší nebo nižší než nepodmíněná střední čtvercová chyba za předpokladu podmíněné heteroskedasticity. Toto je dáno rozdílem mezi nepodmíněným rozptylem σ_e^2 procesu $\{e_t\}$ a v čase T očekávaným budoucím podmíněným rozptylem. Na základě těchto spojitostí je zřejmé, že bodové předpovědi konstruované na základě modelů ARMA a ARIMA jsou jak v případě podmíněné homoskedasticity tak heteroskedasticity identické. Podmíněnou střední čtvercovou chybu pak ale můžeme právě využít ke konstrukci intervalových předpovědí, které jsou při podmíněné heteroskedasticitě rozdílné oproti podmíněné homoskedasticitě. Jejich konstrukce je ale obtížnější z důvodu rozdělení pravděpodobnostních chyb $e_{T+k}(T)$, které není normální. Aby bylo možné výše

uvedenou podmíněnou střední čtvercovou chybu vypočítat, je potřeba určit podmíněnou střední hodnotu budoucího podmíněného rozptylu $E(h_{T+k-j}|\Omega_T)$. Je možné ukázat, že se jedná o předpověď s minimální střední čtvercovou chybou podmíněného rozptylu h_{T+k-j} .

Pokud bychom se podívali na výpočet předpovědi podmíněného rozptylu pro obecný model GARCH(p, q) ve tvaru 57, tak pro $T + k$ platí

$$h_{T+k} = \alpha_0 + \alpha_1 e_{T+k-1}^2 + \cdots + \alpha_q e_{T+k-q}^2 + \beta_1 h_{T+k-1} + \cdots + \beta_p h_{T+k-p}. \quad (62)$$

Dále pak předpověď hodnoty h_{T+k} s minimální střední čtvercovou chybou můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} \hat{h}_{T+k}(T) = & \alpha_0 + \alpha_1 \hat{e}_{T+k-1}^2(T) + \cdots + \alpha_q \hat{e}_{T+k-q}^2(T) + \beta_1 \hat{h}_{T+k-1}(T) + \cdots \\ & + \beta_p \hat{h}_{T+k-p}(T), \end{aligned} \quad (63)$$

kde platí následující

$$\begin{aligned} \hat{h}_{T+j}(T) = E(h_{T+j}|\Omega_T) &= \hat{e}_{T+j}^2(T) = E(e_{T+j}^2|\Omega_T), & j \geq 1, \\ \hat{h}_{T+j}(T) = E(h_{T+j}|\Omega_T) &= h_{T+j}, & j \leq 0, \\ \hat{e}_{T+j}^2(T) = E(e_{T+j}^2|\Omega_T) &= e_{T+j}^2, & j \leq 0. \end{aligned}$$

4. Vybrané akciové indexy

Finanční trh je velmi rozmanitý a nabízí spoustu možností pro investory. Na celém světě existuje spousta burz či obchodních míst, díky kterým můžeme obchodovat s cennými papíry a realizovat investiční možnosti. Důležitou částí finančního trhu je trh akciový, na kterém se prostřednictvím burz obchoduje s akciemi společností. Vývoj akciového trhu pak dlouhodobě sledují akciové indexy, které jsme si představili v části 1.4 a ze které také víme, že s akciovými indexy můžeme obchodovat pomocí finančních derivátů. V současnosti jsou možnosti velmi rozmanité a investoři obchodují na mezinárodních burzách po celém světě. Největší burzy jsou situované v Severní Americe a v Asii. Tyto burzy mnohdy určují tempo světového obchodu a příslušné akciové indexy zobrazují dlouhodobý vývoj daného akciového trhu. Pro tuto práci jsem se tedy zaměřila na americký a japonský akciový trh. Jedná se o indexy, které jsou celosvětově známé, významné na finančních trzích a mají již dlouhou historii. Budeme se zabývat indexy S&P 500, Dow Jones Industrial Average a Nikkei 225. V této části si tedy představíme uvedené akciové indexy, které pak budeme v následující kapitole analyzovat.

4.1 S&P 500

Prvním analyzovaným indexem je americký Index Standard & Poor's 500 nebo častěji známý jako index S&P 500, který je jedním z nesledovanějších indexů vůbec. Obsahuje 500 nejvýznamnějších veřejně obchodovaných společností v USA, které jsou obchodovatelné na největších amerických burzách NYSE a NASDAQ. Řadí se mezi nejspolehlivější ukazatele vývoje amerického akciového trhu. Tento index, a tedy výběr společností je založený na výpočtu podle tržní kapitalizace. Vybírané společnosti musí mít vysokou tržní kapitalizaci a také vysoký objem obchodovaných akcií. Vedle tržní kapitalizace je také důležitá rozmanitost sektorů vybíraných společností, která přispívá ke skutečné reprezentaci celého spektra americké ekonomiky. Zajímavostí je, že součástí může být i společnost, která nemá sídlo v USA, ale obchoduje se na newyorských burzách a má významné postavení v určitém odvětví a nepřehlédnutelné postavení na americkém trhu. Výsledné zahrnutí či vyloučení společnosti pak vedle pevných pravidel závisí i na subjektivním zhodnocení.

Konstrukce samotného indexu je založena na úpravě tržní kapitalizace každé společnosti, aby kompenzovala nové emise akcií nebo fúze společností. Hodnota indexu se pak vypočítá tak, že se sečtou upravené tržní kapitalizace každé společnosti a výsledek se vydělí dělitelem. Dělitel je ale chráněnou informací S&P a není zveřejněn. Můžeme však vypočítat váhu společnosti v indexu, která může investorům poskytnout cenné informace. Váha jedné společnosti v indexu se vyjádří jako podíl tržní kapitalizace dané společnosti a součtu tržních

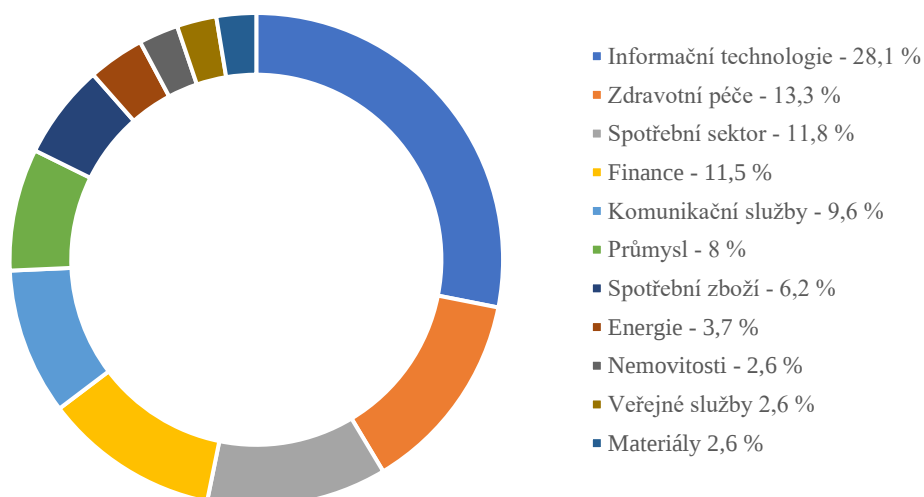
kapitalizací všech společností v indexu. Obecně platí, že čím větší je tržní váha společnosti, tím větší dopad bude mít každá 1% změna ceny akcie na index [25] [26]. Na oficiálních stránkách je uvedeno 10 nejvýznamnějších společností indexu a k datu 28. 2. 2022 se jedná o společnosti, které jsou uvedeny v následující Tabulce 4.

Tabulka 4 - 10 nejvýznamnějších společností indexu S&P 500

Pořadí	Společnost	Symbol	Sektor
1.	Apple Inc.	AAPL	Informační technologie
2.	Microsoft Corp	MSFT	Informační technologie
3.	Amazon.com Inc	AMZN	Spotřební sektor
4.	Alphabet Inc A	GOOGL	Komunikační služby
5.	Alphabet Inc C	GOOG	Komunikační služby
6.	Tesla, Inc	TSLA	Spotřební sektor
7.	Nvidia Corp	NVDA	Informační technologie
8.	Berkshire Hathaway B	BRK.B	Finance
9.	Meta Platforms, Inc. Class A	FB	Komunikační služby
10.	Unitedhealth Group Inc	UNH	Zdravotní péče

Zdroj: Vlastní zpracování dle [27]

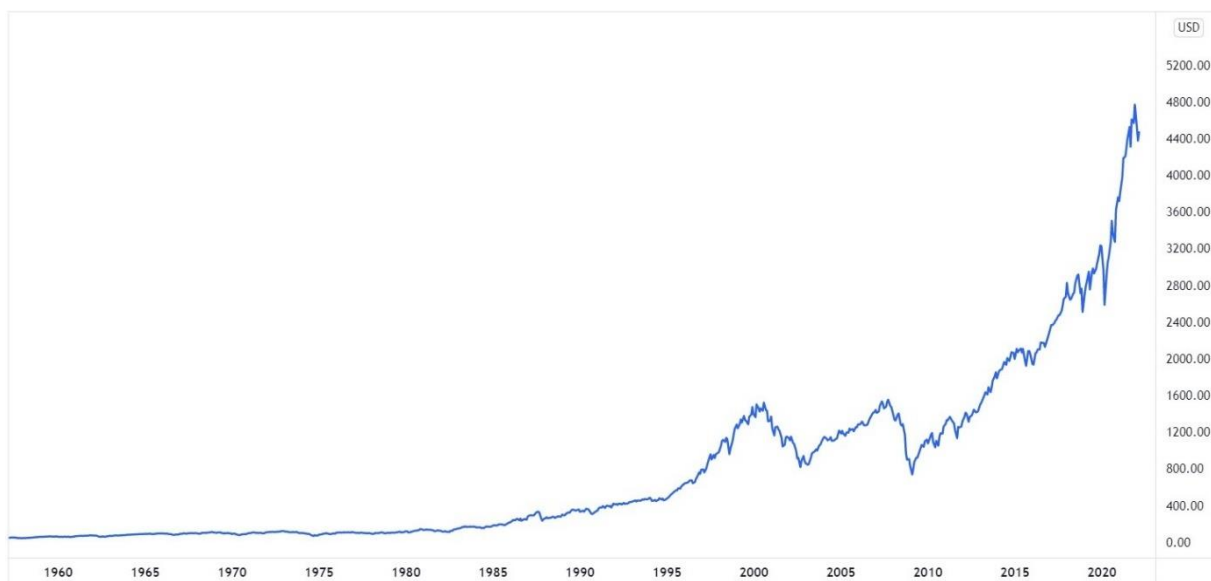
Kdybychom se zaměřili na sektory společností v indexu, tak rozdělení můžeme vidět na Obrázku 2. Společnosti zaměřené na informační technologie, zdravotní péči a spotřební sektor zaujímají více jak polovinu.



Obrázek 2 - Procentuální složení sektorů v indexu S&P 500

Zdroj: Vlastní zpracování dle [27]

Podíváme-li se do historie, tak počátky tohoto indexu sahají až do roku 1923. Do podoby, jak ho známe dnes, byl rozšířen v roce 1957. Za jeho vznikem stojí jedna z největších ratingových společností Standard & Poor's, podle které je také odvozen i samotný název indexu. Na následujícím Obrázku 3 můžeme vidět historický průběh tohoto indexu do března roku 2022.



Obrázek 3 - Historický průběh indexu S&P 500

Zdroj: Tradingview.com

Je patrné, že od roku 1957 je nárůst hodnoty indexu velmi výrazný, a to v řádu několika tisíc procent. Také je znatelný jasný dlouhodobý rostoucí trend. Ne vždy se ale indexu dařilo, jelikož ho v minulosti zasáhly jisté události, které jeho průběh značně ovlivnily.

První významný pokles můžeme zaznamenat po roce 2000, kdy došlo k prasknutí internetové bubliny, která souvisí s internetovou horečkou neboli tzv. „Dot-com bubble“. Tato bublina vznikla v Americe v důsledku zpřístupnění internetu široké veřejnosti v 90 letech 20. století. Společnosti viděli internet jako příležitost pro růst a zvýšení svých zisků, a tak začaly vytvářet své internetové stránky pod doménou .com neboli dot-com. Zároveň se pak spousta těchto společností chtěla stát veřejnými prostřednictvím první veřejné nabídky akcií neboli IPO. Tento rozkvět inspiroval spousty investorů k investování právě do těchto dot-com společností. Problémem zde bylo, že většina investorů investovala své prostředky, aniž by si dostatečně prostudovala dané společnosti a jejich budoucí záměry, ale měla vidinu úspěšného technologického vývoje s vidinou budoucí ziskovosti. Investice byly ještě podpořeny nízkými úrokovými sazbami, které vyhlásil FED. Všechny zmíněné události měly za následek vznik spekulativní bubliny na akciovém trhu. Postupně začali analytici upozorňovat na nadhodnocené ceny akcií a v průběhu roku 2000 došlo k poklesu cen akcií téměř všech technologických webových firem. Firmy, které předtím disponovali tržní kapitalizací v řádech miliard dolarů, spadly téměř na nulu. Příkladem je společnost Pets.com, která byla dokonce provázána se společností Amazon.com, ale zkrachovala již 9 měsíců po jejím uvedení na trh. Začátkem roku 2001 se objevilo mnoho účetních skandálů, které ukazovaly, jak technologické společnosti uměle zvyšovaly své zisky. K dalšímu prohloubení propadu na akciových trzích přispěl

teroristický útok 11. září 2001 na Světové obchodní centrum v New Yorku. Později se situace začala napravovat a mnoho dot-com společností tyto události ustálo. Jedná se například o Amazon.com, eBay, Yahoo! nebo Google (nyní Alphabet Inc Class A.) [28] [29]. Celkově v letech 2000–2002 došlo k poklesu indexu S&P 500 o necelých 50 %.

Druhý viditelný propad nastal po roce 2007 v důsledku hypoteční krize. Počátek 21. století byl ve Spojených státech obdobím nízkých úrokových sazeb a snadného dosažení hypotečních úvěrů. Americké bankovní instituce téměř neprováděly ověřování úvěruschopnosti žadatele a docházelo k poskytnutí úvěrů jednotlivcům, kteří možná dříve neměli nárok na hypotéky, ale nyní byli klasifikováni jako „sub-prime“ dlužníci. Tito dlužníci se později stali problémovými a dle jejich označení se krize označovala jako „Subprime Mortgage Crisis“. Spolu s hypotékami banky vystavovaly hypoteční zástavní listy neboli anglicky Mortgage-Backed Security MBS, které byly ohodnocené velmi vysokým ratingem. Bylo jen otázkou času, kdy se projeví úvěrové riziko a tento systém zkolabuje. Když FED začal zvyšovat úrokové sazby, vedlo to k nárůstu splátek u hypotečních úvěrů s proměnlivou sazbou, a to způsobilo platební neschopnost velkého množství klientů a zabavení zajištěných nemovitostí. Do toho v roce 2006 začaly ceny nemovitostí klesat, a tak utrpěly finanční instituce výrazné ztráty, jelikož samotné nemovitosti pak často měly nižší hodnotu než hypotéky s nimi spojené. Výše uvedené události vedly k přísnějšímu poskytování úvěrů, které znamenalo snížení počtu poskytnutých úvěrů, a tedy i nižší hospodářský růst. Některé banky měly ztráty tak velké, že zanikly nebo je ve snaze zachránit jiné banky koupily. Mezi banky, které vyhlásily bankrot, patřila i jedna z největších a nejstarších investičních bank v USA Lehman Brothers. Jakmile investoři na trzích viděli, že federální vláda dovolila padnout Lehman Brothers, vedlo to k masivním dopadům a výprodejům napříč trhy. Propad nastal na akciových trzích nejen v USA, ale postupně i v Evropě a Asii. Propojenost světové ekonomiky způsobila přechod americké hypoteční krize na finanční světovou krizi [30] [31] [32]. Celkový propad indexu S&P 500 byl od maxima v říjnu 2007 do března 2009 zhruba více jak 50 %. Po roce 2009 došlo k pozitivnímu obratu a oživení trhu.

Poslední větší viditelný propad nastal s příchodem koronaviru v březnu roku 2020, kdy došlo ze strany WHO k vyhlášení koronaviru jako pandemie. Na trzích panovala nervozita, jelikož se v jednotlivých státech vydávala různá opatření a restriktce, včetně omezení cestování a lidé nevěděli, jak velký to bude mít ekonomický dopad. 12. března 2020 se index S&P 500 propadl o 9,5 procenta, což je jeho nejstrmější jednodenní propad od roku 1987. Index se pak začal zotavovat na začátku dubna 2020 a v lednu 2022 dokonce dosáhl svého nového maxima [33].

4.2 Dow Jones Industrial Average

Druhým analyzovaným indexem je americký Dow Jones Industrial Average neboli zkráceně Dow 30 a jedná se o jeden z nejstarších indexů vůbec. Reprezentuje 30 významných amerických společností, které jsou obchodovatelné na NYSE a NASDAQ. Jedná se o tzv. „blue-chip“ akcie, což je označení pro akcie vysoce kvalitních společností, které mají stabilní růst, trvale stabilní zisky a pravidelně vyplácejí dividendy. Jak se v čase mění ekonomika, mění se i složení indexu. Společnost může být nahrazena, pokud se stane méně relevantní pro současné trendy ekonomiky nebo pokud se nachází ve finanční tísní a ztratí velké procento své tržní kapitalizace. Důležité také je, aby společnosti splňovaly kritéria kótování. V následující Tabulce 5 můžeme vidět abecední přehled společností, které zahrnuje index Dow 30 k březnu 2022. Z tabulky vidíme, že poslední změny složení indexu proběhly v roce 2020 a některé společnosti jsou součástí již desítky let.

Tabulka 5 - Společnosti v indexu Dow 30

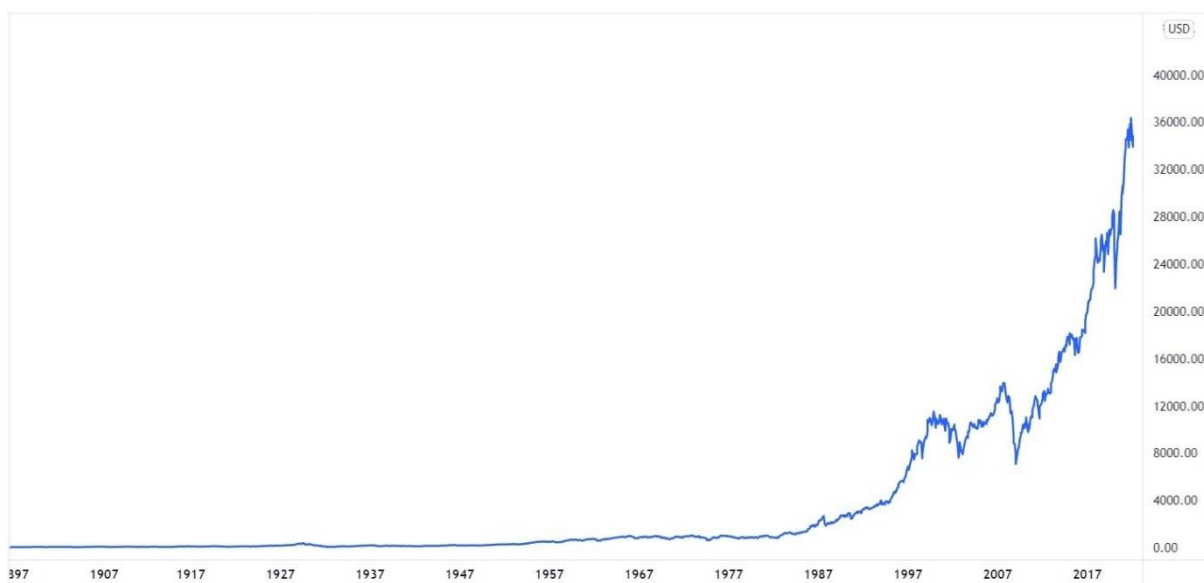
Společnost	Symbol	Rok přidání	Společnost	Symbol	Rok přidání
3M	MMM	1976	Johnson & Johnson	JNJ	1997
American Express	AXP	1982	JPMorgan Chase	JPM	1991
Amgen	AMGN	2020	McDonald's	MCD	1985
Apple Inc.	AAPL	2015	Merck & Co.	MRK	1979
Boeing	BA	1987	Microsoft	MSFT	1999
Caterpillar	CAT	1991	NIKE	NKE	2013
Chevron	CVX	2008	Proctor & Gamble	PG	1932
Cisco Systems	CSCO	2009	Salesforce	CRM	2020
The Coca-Cola Company	KO	1987	The Travelers Companies	TRV	2009
Dow Inc.	DOW	2019	UnitedHealth Group	UNH	2012
Goldman Sachs	GS	2013	Verizon	VZ	2004
The Home Depot	HD	1999	Visa	V	2013
Honeywell	HON	2020	Walmart	WMT	1997
IBM	IBM	1979	Walgreens Boots Alliance	WBA	2018
Intel	INTC	1999	The Walt Disney Company	DIS	1991

Zdroj: Vlastní zpracování dle [34] [35]

Jedná se o cenově vážený index, takže hlavní roli zde hraje cena akcie dané společnosti a čím vyšší je cena akcie, tím větší má daná společnost váhu. Cena indexu se na svém počátku určovala prostým průměrem, který ale postupem času začal být nedostačující. Proto je nyní cena indexu dána jako podíl sumy cen všech akcií a dělitele, který není fixní a pro zajištění kontinuity hodnoty je upravován. Je důležité si uvědomit, že růst indexu může být způsoben podstatným nárůstem cen akcií jedné společnosti, který je schopen vyvážit pokles cen akcií několika dalších akcií. Dow 30 tedy udává průměrný trend všech 30 akcií dohromady a směr

závisí na tom, která strana je silnější – růst nebo pokles cen akcií. Tento index také často slouží jako ukazatel vývoje amerického akciového trhu, i když bývá kritizován. Mnoho kritiků uvádí, že index obsahuje jen malý počet společností, který nemůže být reprezentativní na rozdíl od předešlého indexu S&P 500. Dále zmiňuje že pouhé zohlednění ceny akcií přesně neodráží danou společnost [34] [36].

Dow 30 je jeden z nejstarších indexů, jak jsme uvedli v úvodu této kapitoly. Jeho začátky se datují k roku 1896. Za jeho vznik se zasloužili Edward Jones a Charles Dow, podle kterých je také index pojmenován. Na svém počátku index zahrnoval pouze 12 společností z oblasti průmyslu, a to se také projevilo v jeho názvu „Industrial Average“. V roce 1928 byl rozšířen na současných 30 společností. Dnes jsou komponenty tohoto indexu vybírány ze všech hlavních sektorů ekonomiky s výjimkou dopravního průmyslu a veřejných služeb. Akcie z těchto sektorů jsou pokryty indexem Dow Jones Transportation Average, což je nejstarší index v USA, a Dow Jones Utility Average. Na následujícím Obrázku 4 můžeme vidět historický vývoj tohoto indexu do března roku 2022.



Obrázek 4 - Historický vývoj indexu DOW 30

Zdroj: Tradingview.com

Z obrázku můžeme vidět, že vývoj tohoto indexu je téměř totožný s vývojem předchozího indexu S&P 500. Je zde patrný dlouhodobý rostoucí trend a negativně ho ovlivnily stejné události, které jsme zmiňovali v minulé části 4.1. Svého maxima dosáhl stejně jako S&P 500 v lednu roku 2022. Na vzdory různým přístupům u výše uvedených indexů, můžeme vidět, že oba indexy odrážejí vývoj amerického akciového trhu stejným směrem [34] [36] [37].

4.3 Nikkei 225

Posledním analyzovaným indexem je Nikkei 225, což je nejuznávanější japonský index. Skládá se z 225 nejvýznamnějších společností, které se obchodují v první sekci tokijské burzy. Využívá se jako indikátor pohybu japonského akciového trhu. Jedná se o cenově vážený index a hlavní roli zde opět hraje cena dané akcie. Výsledná cena tohoto indexu se stanoví jako podíl sumy upravených cen akcií všech společností v indexu a dělitele, který se upravuje pro zachování kontinuity. Pravidelně každý rok jsou revidovány společnosti v indexu na základě výročních zpráv a dbá se na likviditu a sektorovou rovnováhu. Z výše uvedeného můžeme vyvodit, že Nikkei je ekvivalentem indexu Dow Jones Industrial Average pro japonský akciový trh. V následující Tabulce 6 můžeme vidět abecední přehled 10 společností s největší vahou v indexu.

Tabulka 6 - 10 společností indexu Nikkei 225 s největší vahou

Společnost	Symbol	Sektor
Advantest Corporation	6857	Polovodičový průmysl
Daikin Industries, Ltd.	6367	Elektrická zařízení
FANUC Corporation	6954	Robotika
Fast Retailing Co., Ltd.	9983	Maloobchod
KDDI Corporation	9433	Telekomunikace
Recruit Holdings Co. Ltd.	6098	Média
Shin-Etsu Chemical Co., Ltd.	4063	Chemický průmysl
Softbank Group Corporation	9984	Telekomunikace
Terumo Corporation	4543	Lékařské vybavení
Tokyo Electron Ltd.	8035	Polovodičový průmysl

Zdroj: Vlastní zpracování dle [38]

Společnosti uvedené v Tabulce 6 nám nebudou asi úplně známé, ale pokud bychom měli zmínit nějaké známější, které jsou součástí tohoto indexu, jednalo by se například o Toyotu, Hondu, Sony nebo Nikon.

Poprvé byla hodnota tohoto indexu vypočítaná v roce 1950 a jedná se o nejstarší index v Asii. Historický vývoj indexu Nikkei 225 od roku 1984 do března roku 2022 můžeme vidět na Obrázku 5. Zde již není viditelný dlouhodobý trend a můžeme zaznamenat časté střídání období růstu a poklesu. Nejvýznamnější událost, která negativně ovlivnila vývoj tohoto indexu souvisí s japonskou cenovou bublinou aktiv v 80. letech 20. století. Japonská vláda použila fiskální a monetární stimuly k potlačení recese způsobené zhodnocením japonského jenu. Ceny akcií a hodnoty pozemků se mezi lety 1985 a 1989 ztrojnásobily, a právě v roce 1989 dosáhl Nikkei svého maxima. Na vrcholu bubliny představovala Tokijská burza 60 % celosvětové kapitalizace akciového trhu. Bublina praskla v roce 1990 a hodnota indexu Nikkei v tom roce

klesla o jednu třetinu. Po roce 2007 se i zde na japonském indexu projevila finanční krize vyvolaná hypoteční krizí v USA. V letech 2012-2015 japonská vláda a Bank of Japan usilovaly o obnovení růstu ekonomiky pomocí ekonomických stimulů s cílem překonat původní maximum z roku 1989. I když zatím svého cíle nedosáhly, můžeme vidět, že od roku 2012 se vývoj obrátil pozitivním směrem a je zde viditelný rostoucí trend.



Obrázek 5 - Historický vývoj indexu Nikkei 225

Zdroj: Tradingview.com

Celkově můžeme zhodnotit, že se index Nikkei 225 odlišuje od průběhu předchozích indexů a jeho cenový vývoj tedy nekoreluje s americkými indexy [39] [40] [41].

5. Analýza vybraných akciových indexů

Nyní se již dostáváme k poslední kapitole, která bude zaměřena na konstrukci modelů časových řad vybraných akciových indexů, které jsme si představili v předchozí kapitole. Součástí bude i předpověď na dalších 10 obchodních dnů a následně srovnání s reálnými hodnotami. Vstupem budou denní data zavíracích cen jednotlivých indexů, jejichž začátek a konec je pro všechny řady totožný a jedná se o období 16. 3. 2020 – 15. 3. 2022. Pro samotnou analýzu není nutné uvažovat všechna historická data, ale alespoň nějaký delší časový úsek, který je adekvátní pro následnou modelaci řady. Z toho důvodu byl začátek stanoven po propuknutí pandemie COVID-19 a velkém propadu na akciových trzích, jelikož pandemie COVID-19 celkově změnila a ovlivnila vývoj jak na akciových, tak na všech finančních trzích. Vstupní soubor bude ve formátu .xlsx a bude obsahovat první sloupec s datem a druhý sloupec s uzavíracími cenami daného indexu. Celková vstupní data ke všem třem indexům nalezneme v příloze této práce.

Vstupní data jsme získali z webové stránky MarketWatch.com, která poskytuje jak údaje o akciových trzích, tak finanční informace a obchodní zprávy. Každá burza má jiný počet obchodních dnů, což je způsobeno převážně státními svátky v daném státě. Z toho důvodu jsme museli získaná data ještě doplnit o chybějící hodnoty z obchodních dnů, na které spadal státní svátek. Pokud chybělo jedno pozorování, bylo dopočítáno jako průměr předchozí a nadcházející hodnoty. Jestliže chybělo více hodnot za sebou, byly dopočítány pomocí klouzavého průměru s oknem 4. Klouzavý průměr byl použit jen u indexu Nikkei 225, jinak stačil průměr. Pro samotnou analýzu budeme využívat bezplatný statistický software Gretl, ve kterém jsou zahrnuty i modely časových řad, které jsme si představili v kapitolách 2 a 3.

Poslední část analýzy bude věnována predikci časové řady. Prognózy vývoje jsou důležitou součástí finančních trhů, jelikož zde dochází k velké kumulaci finančních prostředků, ať už velkých institucí, tak menších investorů či správců finančních fondů. V zájmu každého z těchto subjektů je zhodnocovat finanční prostředky a k tomu je nutné porozumět danému finančnímu trhu. K tomu slouží analýza finančních trhů, která se dá rozdělit do tří částí, které jsou

- fundamentální analýza,
- technická analýza,
- psychologická analýza.

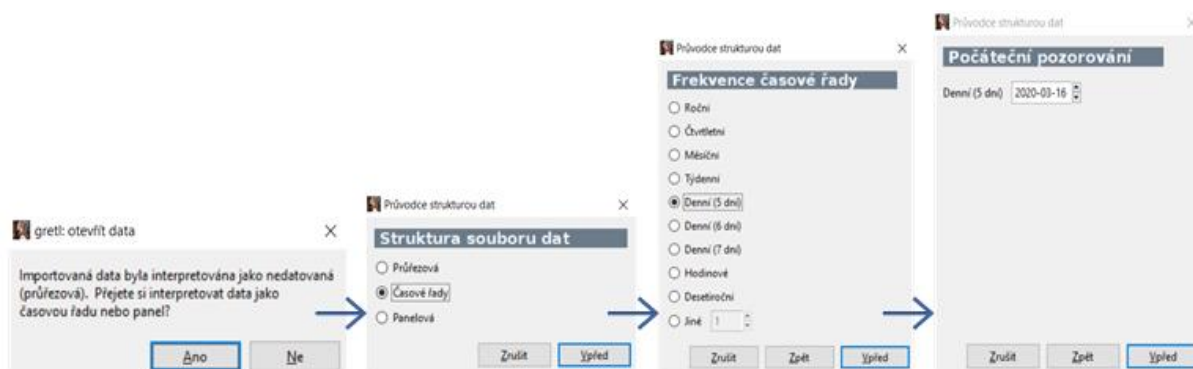
Fundamentální analýza zahrnuje zpracování informací z oblasti ekonomie, účetnictví, statistických dat, politiky, historie či demografie. Technická analýza je založena na analýze historických dat, která je následně využita pro předpověď budoucího vývoje. Do této kategorie spadá i naše analýza časové řady a její následná predikce. Musíme mít ale na paměti, že budoucí

předpověď není 100%, jelikož na vývoj časové řady působí mnoho faktorů, které nemusí být včas odhaleny. Psychologická analýza se pak zaměřuje na pochopení lidského myšlení a je spojována s davovou psychologií. Tyto tři části analýzy pak společně vytvářejí mocný nástroj pro úspěšné operace na finančních trzích. Konkrétně akciové indexy můžeme na finančních trzích obchodovat pomocí finančních derivátů, které jsme si představili v části 1.4.2. Pro uskutečnění nějakého obchodu je tedy dobré znát co nejvíce informací a využít tak finanční analýzu.

Postup analýzy časové řady včetně práce se softwarem Gretl bude detailněji popsán pro index S&P 500. Pro indexy Dow 30 a Nikkei 225 je poskytnut výsledný přehled analýzy. Pro potřeby analýzy budeme uvažovat hladinu významnosti $\alpha = 5 \% = 0,05$.

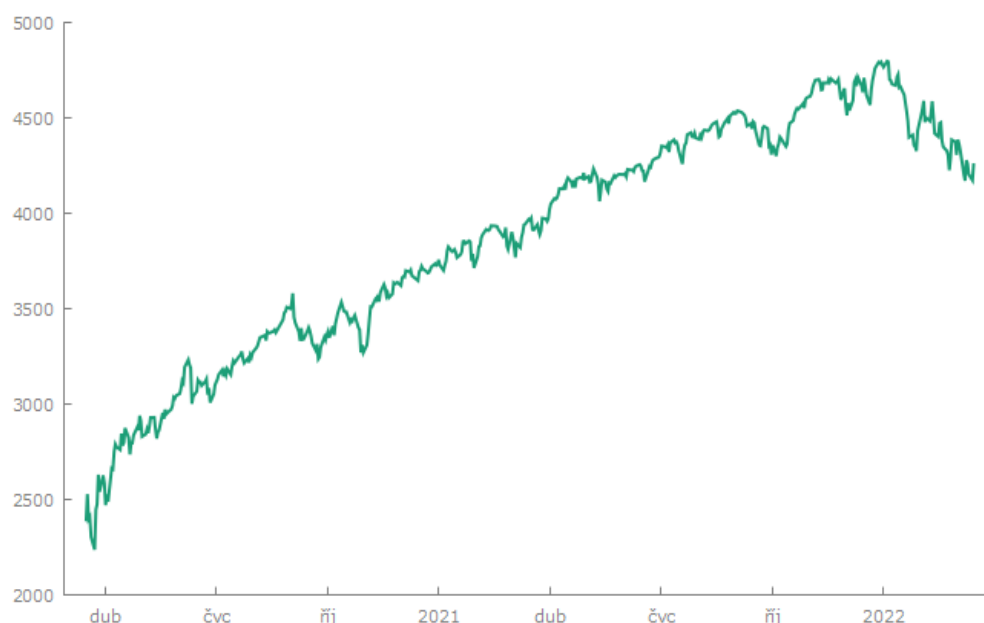
5.1 Analýza indexu S&P 500

První časovou řadou, kterou budeme analyzovat, je vývoj hodnoty indexu S&P 500. Základním krokem je nahrání vstupních dat do softwaru Gretl a interpretace dat jako časové řady s frekvencí 5 obchodních dní se začátkem 16. 3. 2020, jak můžeme vidět na Obrázku 6. Naše výsledná časová řada pak bude mít označení *Close* na základě pojmenování sloupce hodnot ve vstupním souboru. Teď přichází na řadu vykreslení dané časové řady, které můžeme vidět na Obrázku 7. Vykreslení nám poskytne první náhled na analyzovaná data a je základem pro další analýzu. Osa x znázorňuje čas a osa y závěrací hodnoty indexu S&P 500 v USD.



Obrázek 6 - Nahrání dat do softwaru Gretl

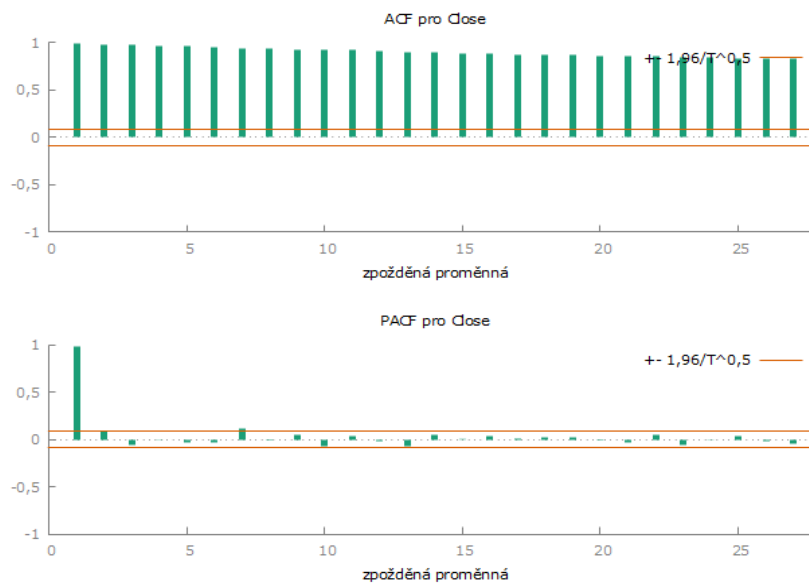
Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl



Obrázek 7 - Graf indexu S&P 500

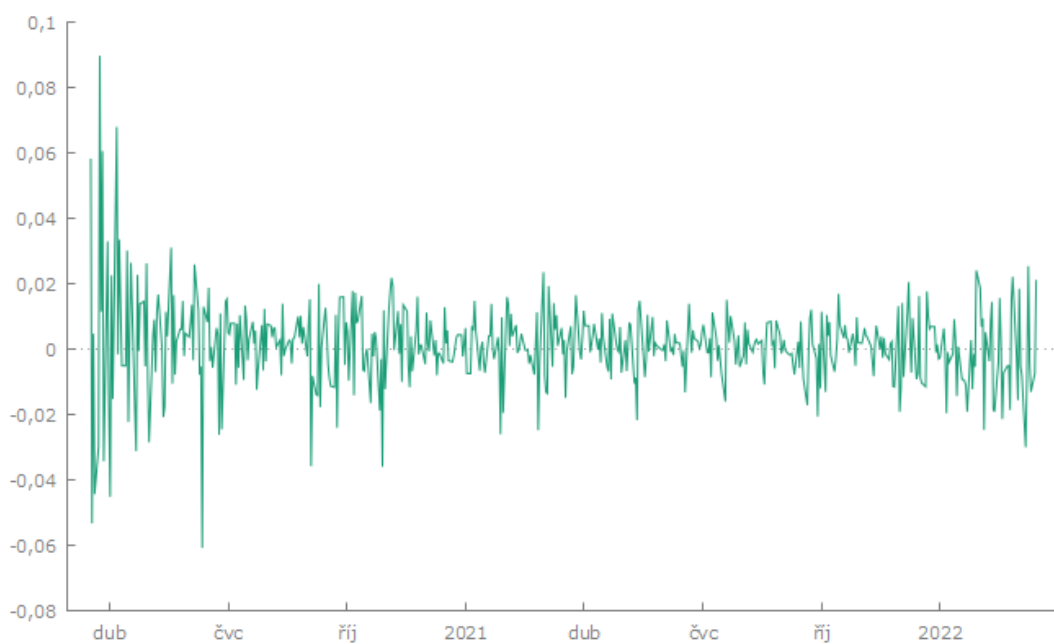
Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Z grafu je vidět, že se objevuje trend, a tudíž se nejedná o stacionární data. Nestacionaritu lze dále potvrdit korelogramem ACF a PACF, který můžeme vidět na následujícím Obrázku 8. Průběh mají takový, jaký jsme popsali v úvodu části 2.5. Vykreslení korelogramu nalezneme v záložce *Proměnná* a po zvolení zadáme počet zpoždění. Další možností je použití testů na jednotkový kořen, které jsme si též představili v části 2.5 a v Gretlu je nalezneme ve stejné záložce. I testy na jednotkový kořen nestacionaritu potvrdily. Dalším krokem je tedy data stacionarizovat. Jelikož se jedná o finanční časovou řadu, využijeme logaritmické míry zisku neboli logaritmické difference, které jednoduše vytvoříme kliknutím v záložce *Přidat*. Výsledná proměnná bude mít označení *ld_Close*. Graf logaritmických diferencí závěrečných hodnot indexu S&P 500 je zaznamenán na Obrázku 9 níže.



Obrázek 8 - Korelogram základních dat indexu S&P 500

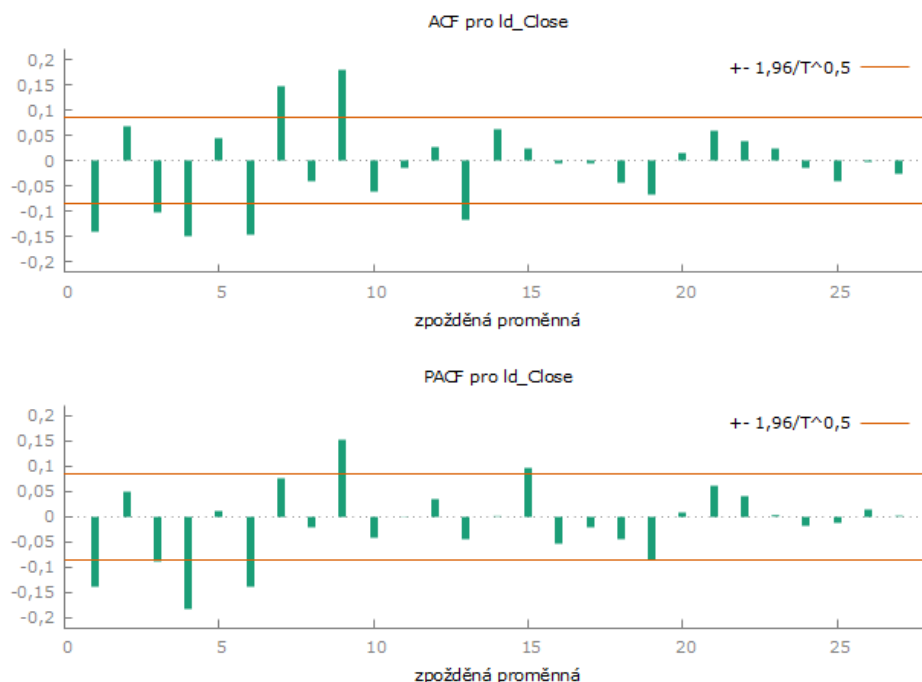
Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl



Obrázek 9 - Graf logaritmických diferencí hodnot indexu S&P 500

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Z Obrázku 9 lze vidět, že jsme dosáhli požadovaných stacionárních dat a stacionaritu potvrzují i testy na jednotkový kořen KPSS a ADF test. Abychom mohli odhadnout model této řady, je klíčovým prvkem korelogram logaritmických diferencí, který můžeme vidět na Obrázku 10.



Obrázek 10 - Korelogram logaritmických diferencí hodnot indexu S&P 500

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Z korelogramu je viditelné, že hodnota ACF má významný statistický přesah ještě pro 13. zpoždění, tudíž by připadal v úvahu model MA(13) pro logaritmické difference. V průběhu PACF se objevuje významný statistický přesah do 9. zpoždění, a tak bychom také mohli uvažovat model AR(9). Abychom mohli rozhodnout o výsledném modelu, musíme pro oba modely odhadnout parametry a dle vypočítaných hodnot kritérií AIC a BIC pak vybereme model výsledný. Modely Boxovy-Jenkinsovy najdeme v softwaru Gretl v záložce *Model* → *Univariate time series* → *ARIMA*, kde jako závisle proměnnou vybereme *ld_Close*, a pro tu pak zvolíme řád odhadovaného modelu. Software Gretl navíc umožňuje odhadovat parametry pro specifické zpožděné proměnné, což pro nás jsou právě zpoždění s významnými statistickými přesahy u ACF a PACF. Konkrétně pro model MA(13) zvolíme specifické zpožděné proměnné pro řád zpoždění 1, 3, 4, 6, 7, 9, 13 a pro zbylé řady zpoždění 2, 5, 8, 10, 11, 12 jsou uvažovány parametry modelu nulové. To stejné uvažujeme u modelu AR(9), kde zvolíme specifické zpožděné proměnné pro řád zpoždění 1, 3, 4, 6, 7, 9. Hodnoty kritérií AIC, BIC pro odhadované modely jsou shrnuty v následující Tabulce 7, kde pro obě kritéria vychází menší hodnoty u modelu MA(13), který je tudíž modelem vhodnějším. Nyní ještě zkontrolujeme kvalitu vybraného modelu MA(13).

Tabulka 7 - Informační kritéria pro modely MA(13), AR(9) indexu S&P 500

	MA(13)	AR(9)
AIC	-3111,362	-3103,441
BIC (SIC)	-3073,060	-3069,395

Zdroj: Gretl – vlastní zpracování

Když bychom se podívali na testování významnosti parametrů, dojdeme k závěru, že všechny odhadované parametry včetně konstanty jsou významné, tedy zamítáme nulovou hypotézu o nulovosti odhadovaných parametrů na základě p-hodnoty, která je menší než naše hladina významnosti, jak můžeme vidět na Obrázku 11. Zbylé parametry $\theta_2, \theta_5, \theta_8, \theta_{10}, \theta_{11}$ a θ_{12} nebudou do výsledného modelu zahrnuty.

	koeficient	směr. chyba	z	p-hodnota	
const	0,00109659	0,000360328	3,043	0,0023	***
theta_1	-0,0809648	0,0412639	-1,962	0,0497	**
theta_3	-0,0963291	0,0426219	-2,260	0,0238	**
theta_4	-0,124497	0,0407279	-3,057	0,0022	***
theta_6	-0,170444	0,0415512	-4,102	4,10e-05	***
theta_7	0,124617	0,0415682	2,998	0,0027	***
theta_9	0,254069	0,0456364	5,567	2,59e-08	***
theta_13	-0,223847	0,0478134	-4,682	2,85e-06	***

Obrázek 11 - Přehled koeficientů a jejich p-hodnot pro model MA(13) indexu S&P 500

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

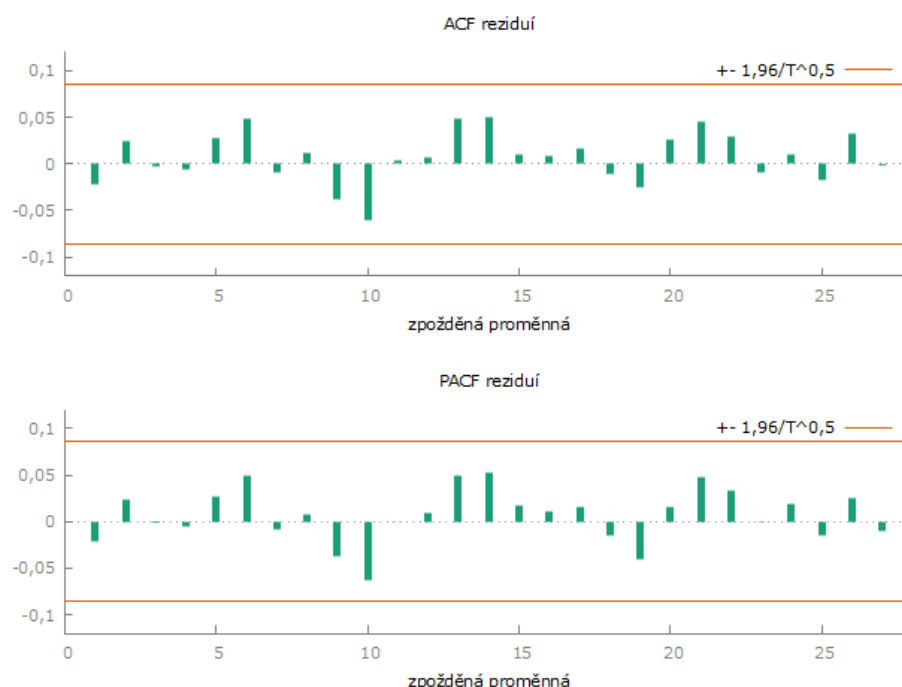
Stacionaritu daného modelu ověříme dle rozložení kořenů odhadnutého autoregresního polynomu. Z obrázku 12 vidíme, že absolutní hodnota všech kořenů v komplexní rovině je větší než 1, tudíž leží vně jednotkového kruhu a stacionaritu můžeme potvrdit.

	Reálná	Imaginární	Abs. hodnota	Frekvence
MA				
Kořen 1	1,1496	0,0000	1,1496	0,0000
Kořen 2	-1,1459	-0,1497	1,1556	-0,4793
Kořen 3	-1,1459	0,1497	1,1556	0,4793
Kořen 4	0,1334	-1,1684	1,1760	-0,2319
Kořen 5	0,1334	1,1684	1,1760	0,2319
Kořen 6	1,0145	-0,4235	1,0993	-0,0629
Kořen 7	1,0145	0,4235	1,0993	0,0629
Kořen 8	0,5716	0,9260	1,0882	0,1620
Kořen 9	0,5716	-0,9260	1,0882	-0,1620
Kořen 10	-0,3599	-1,0535	1,1133	-0,3024
Kořen 11	-0,3599	1,0535	1,1133	0,3024
Kořen 12	-0,7885	-0,7514	1,0892	-0,3788
Kořen 13	-0,7885	0,7514	1,0892	0,3788

Obrázek 12 - Kořeny modelu MA(13) indexu S&P 500

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Průběh reziduí a kontrola, zda jsme odstranili autokorelaci zjistíme z grafu korelogramu reziduí, který nalezneme v záložce *Grafy* v okně odhadovaného modelu. Pro model MA(13) je korelogram reziduí zobrazen na Obrázku 13 a můžeme zhodnotit, že nejsou žádné významné statistické přesahy, tudíž je průběh v pořádku a model je i pro toto kritérium akceptovatelný.



Obrázek 13 - Korelogram reziduí modelu MA(13) indexu S&P 500

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Jako poslední vyhodnotíme test podmíněné heteroskedasticity neboli ARCH test, který nalezneme v záložce *Testy* v okně odhadovaného modelu a následně zvolíme řád zpoždění dle vstupních dat. Jelikož my pracujeme s daty s frekvencí 5 obchodních dní, zadáme řád 5 a výstup nalezneme na Obrázku 14.

Test pro ARCH řádu 5

	koeficient	směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
alpha(0)	5,12819e-05	1,64270e-05	3,122	0,0019	***
alpha(1)	0,0491644	0,0431631	1,139	0,2552	
alpha(2)	0,152025	0,0417324	3,643	0,0003	***
alpha(3)	-0,0451036	0,0419858	-1,074	0,2832	
alpha(4)	0,216241	0,0407751	5,303	1,70e-07	***
alpha(5)	0,207347	0,0400783	5,174	3,31e-07	***

Nulová hypotéza: není zde žádný efekt ARCH

Testovací statistika: LM = 93,6074

s p-hodnotou = $P(\text{Chi-kvadrát}(5) > 93,6074) = 1,17232e-18$

Obrázek 14 - ARCH test modelu MA(13) indexu S&P 500

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

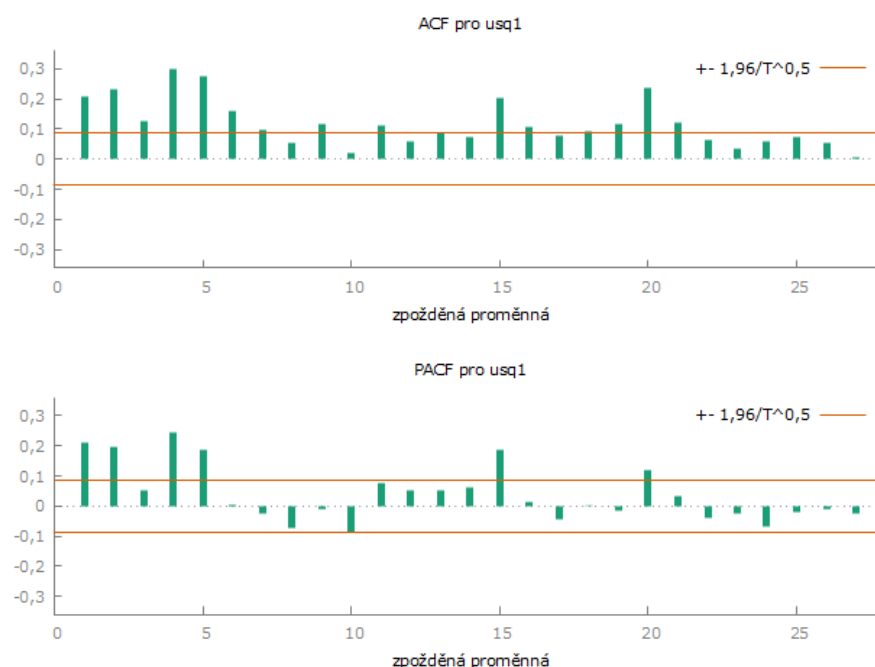
Můžeme zhodnotit, že nulovou hypotézu zamítáme na základě p-hodnoty, která je menší než naše hladina významnosti a potvrzujeme podmíněnou heteroskedasticitu, kterou bude potřeba

dále modelovat pomocí modelu volatility. Výsledný úrovnový model má pak hodnoty parametrů, které jsou uvedeny na Obrázku 11 ve sloupci koeficient a následný tvar při zaokrouhlení parametrů na tři desetinná místa vypadá následovně

$$y_t = 0,001 - 0,081\varepsilon_{t-1} - 0,096\varepsilon_{t-3} - 0,124\varepsilon_{t-4} - 0,170\varepsilon_{t-6} + 0,125\varepsilon_{t-7} + 0,254\varepsilon_{t-9} - 0,224\varepsilon_{t-13} + e_t, \quad (64)$$

kde $e_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}$ a h_t je podmíněný rozptyl, který budeme dále modelovat pomocí modelu volatility.

Abychom mohli odhadnout model volatility, musíme nejdříve uložit druhé mocniny reziduí z modelu MA(13), které nalezneme pod proměnnou *usq1*. Dalším krokem bude vykreslení jejich korelogramu, který je zobrazen na následujícím Obrázku 15, kde se zaměříme hlavně na průběh PACF.



Obrázek 15 - Korelogram čtverců reziduí modelu MA(13) indexu S&P 500

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Z korelogramu PACF je viditelný velmi výrazný přesah i pro 15. zpoždění a tudíž bychom museli uvažovat minimálně model ARCH(15). Jelikož by byl řád modelu ARCH velmi vysoký, využijeme model GARCH(1,1), který odhadneme pro rezidua, která si též uložíme z modelu MA(13) a nalezneme je pod proměnnou *uhat1*. Modely volatility najdeme v softwaru Gretl v záložce *Model* → *Univariate time series* → *GARCH* a pro diagnostiku modelu je nutné rezidua standardizovat. Hodnoty parametrů modelu GARCH(1,1) můžeme vidět na Obrázku 16, ze kterého také můžeme potvrdit, že jsou všechny parametry statisticky významné.

	koeficient	směr. chyba	z	p-hodnota
alpha(0)	4,07512e-06	1,52065e-06	2,680	0,0074 ***
alpha(1)	0,135668	0,0331087	4,098	4,17e-05 ***
beta(1)	0,836357	0,0334470	25,01	5,33e-138 ***

Obrázek 16 - Parametry modelu GARCH(1,1) indexu S&P 500

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Opět je důležité zkontrolovat daný model, a to hlavně z pohledu autokorelace a podmíněné heteroskedasticity, které by měl model volatility eliminovat. Podíváme-li se na korelogram druhých mocnin reziduí z modelu GARCH(1,1) zjistíme, že všechny výrazné přesahy, které jsou zachycené na Obrázku 15, byly eliminovány. Abychom zjistili, zda byla vyloučena i podmíněná heteroskedasticita, je nutné provést ARCH test pro rezidua z našeho modelu volatility. Toto v softwaru Gretl nelze provést přímo, ale pomocí úrovnového modelu ARIMA(0,0,0). Výsledek můžeme vidět na následujícím Obrázku 17, který zachycuje, že nulová hypotéza ARCH testu nelze zamítnout, jelikož je p-hodnota větší než hladina významnosti, a tudíž uvažujeme podmíněnou homoskedasticitu, tedy konstantní rozptyl v čase.

Test pro ARCH řádu 5

	koeficient	směr. chyba	t-podíl	p-hodnota
alpha(0)	0,959831	0,129300	7,423	4,82e-013 ***
alpha(1)	-0,0299456	0,0442335	-0,6770	0,4987
alpha(2)	0,0353259	0,0442267	0,7987	0,4248
alpha(3)	-0,0385286	0,0442410	-0,8709	0,3842
alpha(4)	0,0179289	0,0441321	0,4063	0,6847
alpha(5)	0,0424199	0,0406486	1,044	0,2972

Nulová hypotéza: není zde žádný efekt ARCH

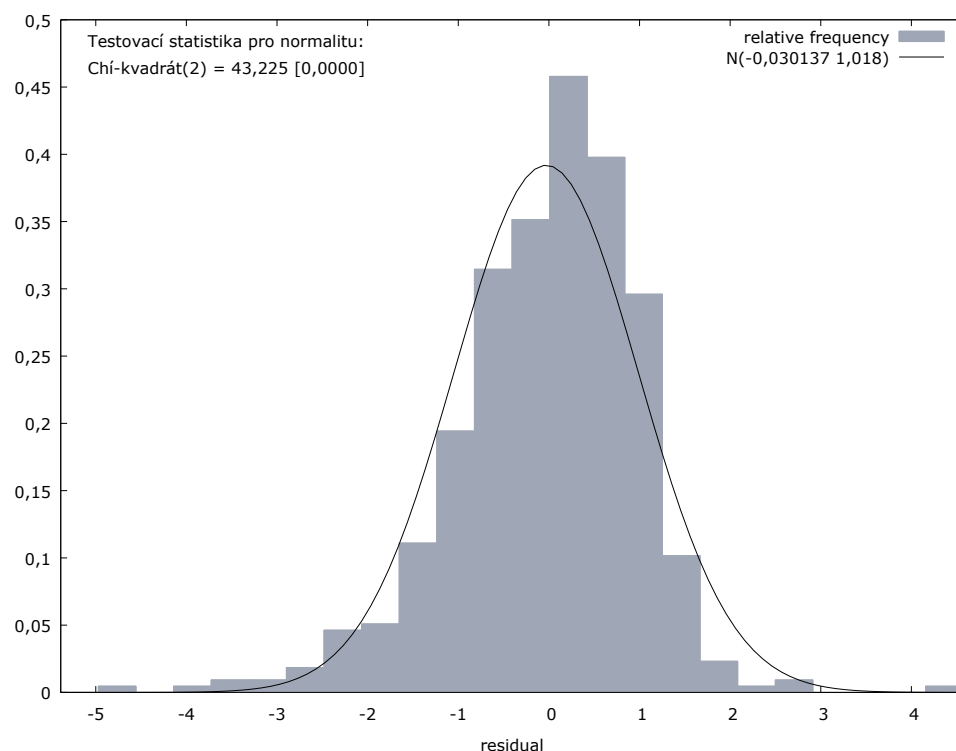
Testovací statistika: LM = 3,20029

s p-hodnotou = $P(\text{Chi-kvadrát}(5) > 3,20029) = 0,669139$

Obrázek 17 - ARCH test pro rezidua z modelu volatility indexu S&P 500

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Kdybychom se zaměřili na rozdělení standardizovaných reziduí, zjistili bychom, že se jedná o rozdělení špičatější, než je rozdělení normální. Tento jev se právě často objevuje u finančních časových řad, což jsme uváděli v úvodu kapitoly 3. Výstup testu normality pro standardizovaná rezidua modelu GARCH(1,1) je zaznamenán na následujícím Obrázku 18.



Obrázek 18 - Výstup testu normality standardizovaných reziduí modelu GARCH(1,1) indexu S&P 500

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

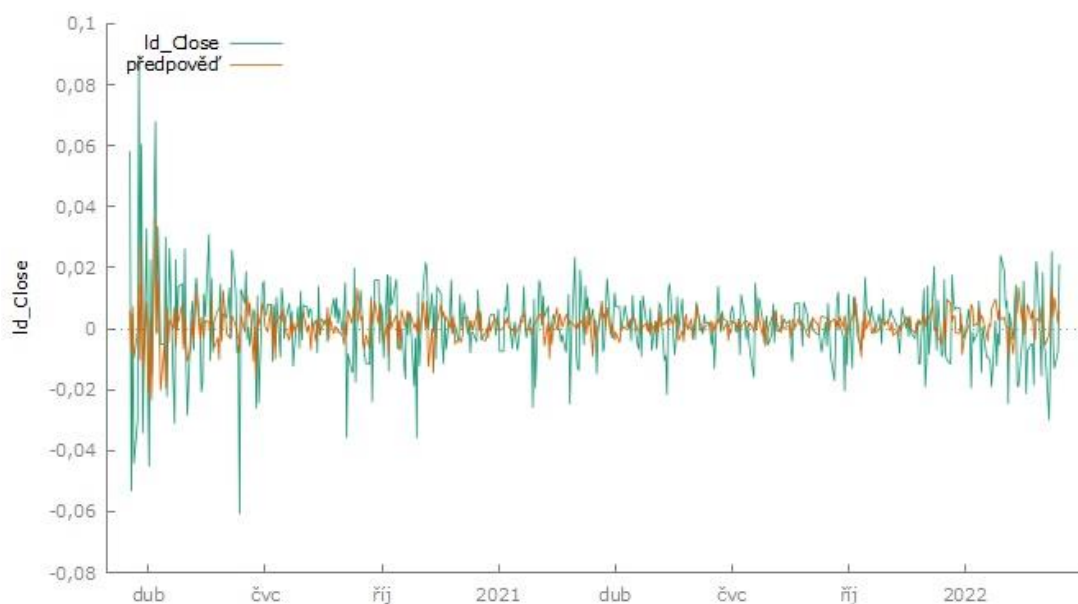
Výsledný model GARCH(1,1) se jeví jako vhodný model volatility s parametry, které jsou uvedeny na Obrázku 16 a můžeme ho zapsat ve tvaru

$$h_t = 4,075 * 10^{-6} + 0,136 e_{t-1}^2 + 0,836 h_{t-1}. \quad (65)$$

Celkový výsledný model logaritmických diferencí indexu S&P 500 má následující podobu

$$\begin{aligned} y_t = & 0,001 - 0,081 \varepsilon_{t-1} - 0,096 \varepsilon_{t-3} - 0,124 \varepsilon_{t-4} - 0,170 \varepsilon_{t-6} \\ & + 0,125 \varepsilon_{t-7} + 0,254 \varepsilon_{t-9} - 0,224 \varepsilon_{t-13} \\ & + \varepsilon_t \sqrt{4,075 * 10^{-6} + 0,136 e_{t-1}^2 + 0,836 h_{t-1}}. \end{aligned} \quad (66)$$

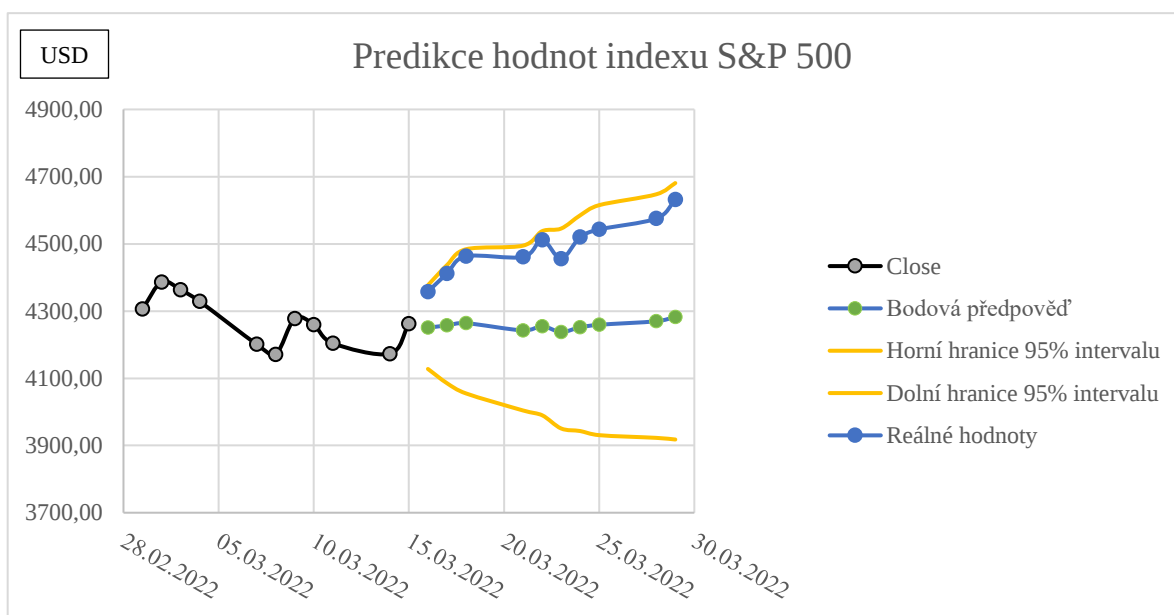
Porovnání hodnot logaritmických diferencí za analyzované období a ex-post předpovědí pomocí úrovnového modelu dle vztahu 64 je zobrazeno na Obrázku 19. Jedná se o ukázkou, jak daný úrovnový model zpětně odhadl analyzovaná data a u následujících dvou indexů již tento graf zobrazen nebude.



Obrázek 19 - Graf skutečných a predikovaných hodnot logaritmických diferencí indexu S&P 500

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Nyní se zaměříme na budoucí předpověď vývoje indexu S&P 500 na 10 pracovních dnů. Předpověď najdeme v softwaru Gretl v záložce *Analýza* → *Předpovědi* v okně daného modelu. Je ale důležité si uvědomit, že předpověď se týká hodnot logaritmických diferencí. Abychom dostali původní nominální hodnoty, je třeba výslednou hodnotu předpovědi transformovat zpět. Úroňový model využijeme pro odhad bodových předpovědí a upravená směrodatná chyba z modelu volatility nám určí intervalové předpovědi. Intervalové předpovědi nám určují možný prostor budoucího vývoje s pravděpodobností 95 %. Pokud dojde k vychýlení reálné hodnoty v budoucnu mimo tento interval, je možné, že se na finančním trhu děje něco neočekávaného. Pro tyto případy je vhodné věnovat danému trhu větší pozornost a zkusit zanalyzovat, co daný výkyv způsobilo. Na Obrázku 20 můžeme vidět průběh predikce nominálních hodnot indexu S&P 500 včetně intervalových předpovědí a srovnání s reálnými hodnotami. Konkrétní hodnoty jsou zaznamenány v následující Tabulce 8.



Obrázek 20 - Predikce hodnot indexu S&P 500

Zdroj: Gretl – vlastní zpracování

Tabulka 8 - Přehled hodnot predikce indexu S&P 500

Obchodní den	Dolní 95% hranice	Predikce	Horní 95% hranice	Reálná hodnota
16.03.2022	4127,77	4250,56	4377,00	4357,86
17.03.2022	4085,41	4257,46	4436,75	4411,67
18.03.2022	4054,99	4264,08	4483,96	4463,12
21.03.2022	4004,23	4242,42	4494,78	4461,18
22.03.2022	3990,08	4255,10	4537,72	4511,61
23.03.2022	3950,74	4237,74	4545,58	4456,24
24.03.2022	3943,06	4251,90	4584,93	4520,16
25.03.2022	3930,78	4259,27	4615,21	4543,06
28.03.2022	3922,76	4269,77	4647,47	4575,52
29.03.2022	3917,85	4282,43	4680,94	4631,60

Zdroj: Gretl – vlastní zpracování

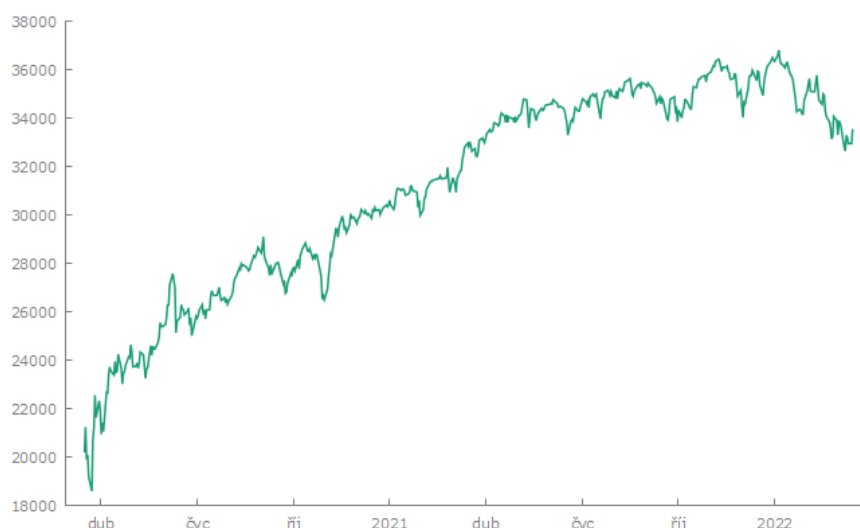
Jak z grafu, tak i z tabulky je viditelné, že se všechny reálné hodnoty pohybují v našem 95% předpovědním intervalu a model volatility byl tedy úspěšný. Bodová předpověď už tolik úspěšná nebyla, jelikož došlo k významnému nárůstu reálných hodnot. Na druhou stranu si můžeme povšimnout, že tvar křivky bodové předpovědi byl odhadnut velmi kvalitně, jelikož zaznamenává stejný průběh růstu a poklesu jako u křivky reálných hodnot. Dá se zhodnotit, že křivka reálných hodnot téměř kopíruje horní hranici 95% intervalu. Hodnota indexu vzrostla v období od 15. 3. 2022 do 29. 3. 2022 celkem o 9 %.

Nárůst hodnot byl způsoben převážně vysokou volatilitou na finančních trzích z důvodu vypuknutí války na Ukrajině koncem února 2022. Další událost, která ovlivnila americký

akciový trh, proběhla 16. 3. 2022, kdy zasedal FED a zvýšil úrokové sazby o 25 bazických bodů z důvodu vypořádání se s inflací. Toto zvýšení bylo plánované a dopředu komunikované, tudíž trh nereagoval negativně. K pozitivní náladě na americkém trhu také přispěl velmi kladný názor FEDU na americkou ekonomiku, který byl prezentován na tiskové konferenci. Vliv měl také vysoký nárůst ceny ropy. Cena za barel ropy na počátku našeho předpovědního období stoupla o 24 % [42].

5.2 Analýza indexu Dow 30

Jako druhý tu máme index Dow Jones Industrial Average. Průběh analyzovaných dat je zaznamenán na následujícím Obrázku 21, kde na ose x je znázorněn čas a na ose y uzavírací ceny indexu Dow 30 v USD.



Obrázek 21 - Graf indexu Dow 30

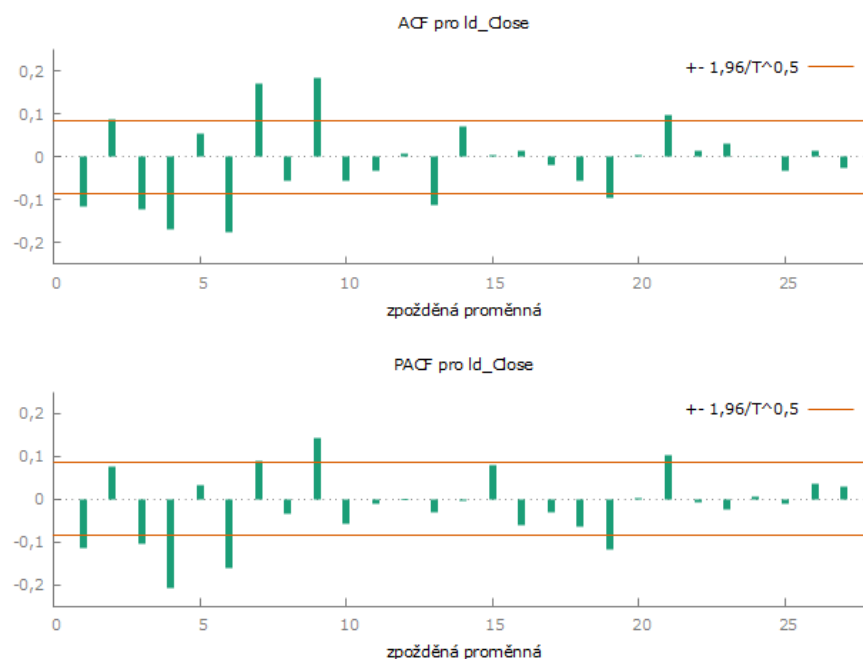
Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Z grafu je opět patrný trend a velmi podobný průběh s předchozím indexem S&P 500. Jedná se tedy o nestacionární data, která upravíme pomocí logaritmických diferencí. Díky této úpravě se nám podařilo data stacionarizovat a jsou připravena na analýzu. Pro odhad úrovnového modelu vykreslíme korelogram ACF a PACF, který můžeme vidět na Obrázku 22 dále. I zde je očividná podobnost s předchozím indexem. Opět tedy zkusíme odhadnout model MA(13), ale zde pro zpoždění 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 13 a poté model AR(9) pro zpoždění 1, 3, 4, 6, 7, 9. Hodnoty kritérií AIC, BIC pro odhadované modely jsou shrnuty v následující Tabulce 9, kde pro obě kritéria vychází menší hodnoty pro model MA(13). Tudíž z hlediska informačních kritérií je pro nás model MA(13) modelem vhodnějším. Ještě ale musíme zkontrolovat jeho kvalitu.

Tabulka 9 - Informační kritéria pro modely MA(13), AR(9) indexu Dow 30

	MA(13)	AR(9)
AIC	−3098,893	−3089,327
BIC (SIC)	−3056,336	−3055,281

Zdroj: Gretl – vlastní zpracování



Obrázek 22 - Korelogram logaritmických diferencí hodnot indexu Dow 30

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Když bychom se podívali na průběh korelogramu reziduí, zjistili bychom, že jsme eliminovali všechny významné statistické přesahy a zbavili se autokorelace. Stacionarita daného modelu je též v pořádku, jelikož absolutní hodnota všech kořenů v komplexní rovině je větší než 1, tudíž leží vně jednotkového kruhu. Pokud se zaměříme na testování významnosti parametrů, které je zobrazeno na Obrázku 23, zjistíme na základě p-hodnoty, že u parametrů θ_1 a θ_2 nelze zamítnout nulová hypotéza o nulovosti daných parametrů, jelikož je p-hodnota větší než naše hladina významnosti. Jelikož bychom tyto dva parametry uvažovali jako nulové, můžeme ještě model MA(13) odhadnout znovu pouze pro zpoždění 3, 4, 6, 7, 9, 13. Výstup tohoto nového modelu je zaznamenán na Obrázku 24, ze kterého je již zřejmá významnost uvedených parametrů i konstanty a také malá změna hodnot parametrů oproti původnímu modelu na Obrázku 23.

	koeficient	směr. chyba	z	p-hodnota	
const	0,000963345	0,000362051	2,661	0,0078	***
theta_1	-0,0677810	0,0427300	-1,586	0,1127	
theta_2	0,0655685	0,0421465	1,556	0,1198	
theta_3	-0,0979132	0,0417179	-2,347	0,0189	**
theta_4	-0,137775	0,0392373	-3,511	0,0004	***
theta_6	-0,249002	0,0449467	-5,540	3,03e-08	***
theta_7	0,146856	0,0432639	3,394	0,0007	***
theta_9	0,261584	0,0441961	5,919	3,24e-09	***
theta_13	-0,243307	0,0457144	-5,322	1,02e-07	***

Obrázek 24 - Přehled koeficientů a jejich p-hodnot pro model MA(13) indexu Dow 30

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

	koeficient	směr. chyba	z	p-hodnota	
const	0,000960390	0,000354961	2,706	0,0068	***
theta_3	-0,101080	0,0416412	-2,427	0,0152	**
theta_4	-0,141410	0,0391516	-3,612	0,0003	***
theta_6	-0,227206	0,0429304	-5,292	1,21e-07	***
theta_7	0,128019	0,0414712	3,087	0,0020	***
theta_9	0,254372	0,0451741	5,631	1,79e-08	***
theta_13	-0,251380	0,0468433	-5,366	8,03e-08	***

Obrázek 23 - Výsledný přehled koeficientů a jejich p-hodnot pro model MA(13) indexu Dow 30

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Posledním krokem kontroly je test podmíněné heteroskedasticity neboli ARCH test, který můžeme vidět na Obrázku 25. Dle p-hodnoty, která je menší než naše hladina významnosti, zamítáme nulovou hypotézu a uvažujeme podmíněnou heteroskedasticitu, kterou pak budeme dále modelovat.

Test pro ARCH řádu 5

	koeficient	směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
alpha(0)	5,45718e-05	1,97145e-05	2,768	0,0058	***
alpha(1)	0,113749	0,0441359	2,577	0,0102	**
alpha(2)	0,0893260	0,0416358	2,145	0,0324	**
alpha(3)	-0,0393330	0,0416000	-0,9455	0,3448	
alpha(4)	0,321252	0,0395667	8,119	3,55e-015	***
alpha(5)	0,0747520	0,0413467	1,808	0,0712	*

Nulová hypotéza: není zde žádný efekt ARCH

Testovací statistika: LM = 94,0723

s p-hodnotou = P(Chi-kvadrát(5) > 94,0723) = 9,35931e-19

Obrázek 25 - ARCH test modelu MA(13) indexu Dow 30

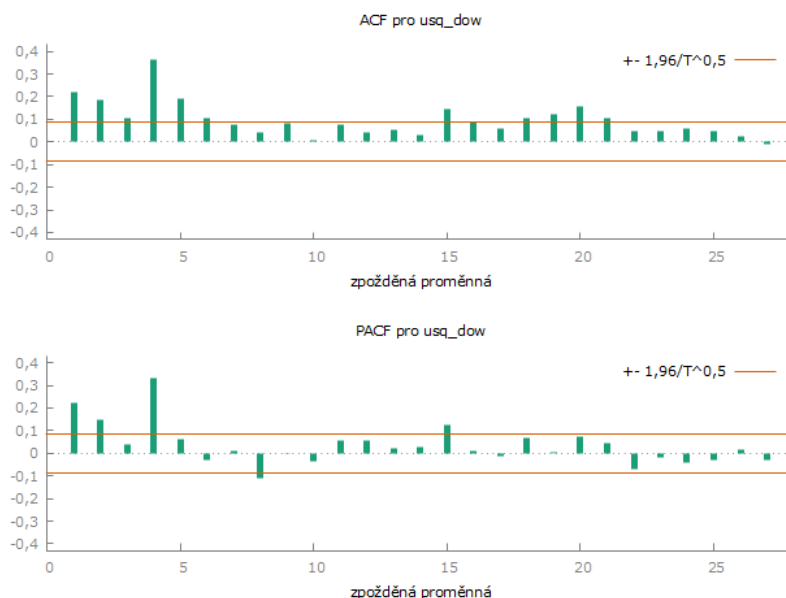
Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Vhodnost úrovnového modelu MA(13) je tedy potvrzena a výsledný tvar modelu, který má hodnoty parametrů dle Obrázku 24, vypadá následovně

$$y_t = 0,001 - 0,101\varepsilon_{t-3} - 0,141\varepsilon_{t-4} - 0,227\varepsilon_{t-6} + 0,128\varepsilon_{t-7} + 0,254\varepsilon_{t-9} - 0,251\varepsilon_{t-13} + e_t, \quad (67)$$

kde $e_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}$ a h_t je podmíněný rozptyl, který budeme dále modelovat pomocí modelu volatility.

Pro odhad modelu volatility použijeme korelogram druhých mocnin reziduí z úrovněvého modelu MA(13), který je zaznamenán na Obrázku 26.



Obrázek 26 - Korelogram druhých mocnin reziduí z modelu MA(13) indexu Dow 30

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

U PACF se objevují přesahy i pro zpoždění vyšších řádů, tudíž raději využijeme model GARCH(1,1), jehož výstup vidíme na následujícím Obrázku 27. Všechny parametry modelu jsou významné, jelikož je p-hodnota menší než naše hladina významnosti.

	koeficient	směr. chyba	z	p-hodnota
alpha (0)	5,84342e-06	2,09548e-06	2,789	0,0053 ***
alpha (1)	0,160969	0,0375210	4,290	1,79e-05 ***
beta (1)	0,795130	0,0411694	19,31	4,13e-083 ***

Obrázek 27 - Parametry modelu GARCH(1,1) indexu Dow 30

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

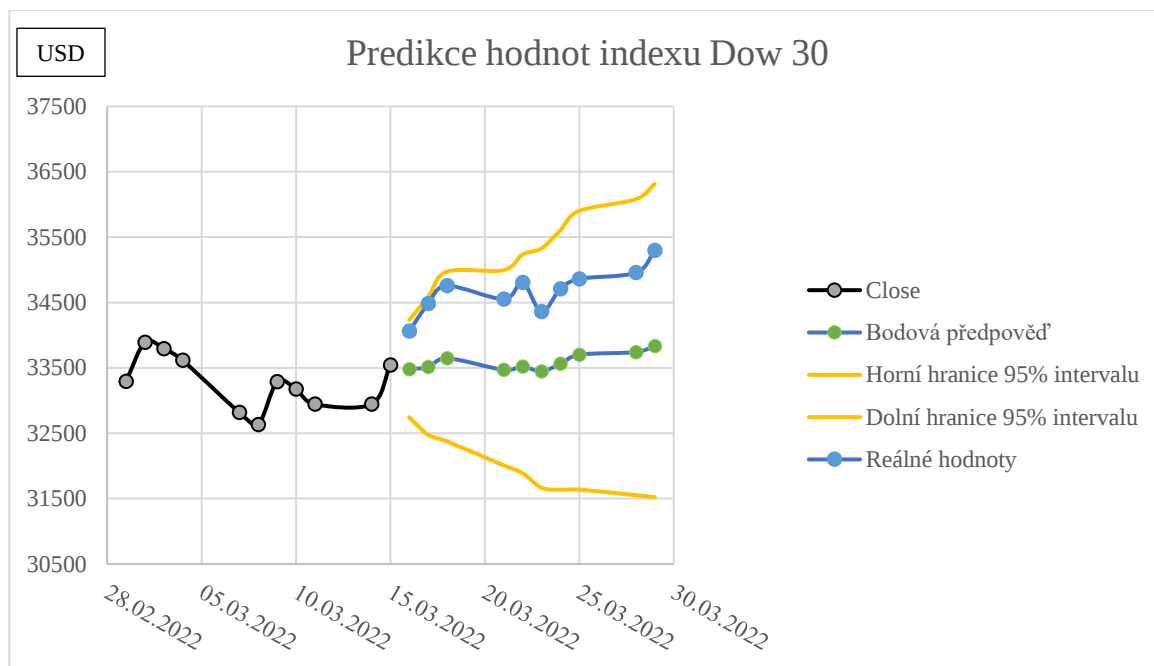
Pokud bychom se zaměřili na diagnostiku daného modelu volatility, zjistili bychom, že model eliminoval přesahy ACF a PACF v korelogramu druhých mocnin reziduí, které se objevovaly na Obrázku 26. ARCH test pro rezidua vychází též v pořádku a nulovou hypotézu o podmíněné homoskedasticitě nelze zamítnout na základě p-hodnoty 0,637. Rozdělení standardizovaných rozdělání je opět špičatější než normální rozdělání. Model GARCH(1,1) se tedy jeví jako vhodný a můžeme ho zapsat ve tvaru s parametry dle Obrázku 27 jako

$$h_t = 5,843 \cdot 10^{-6} + 0,161 e_{t-1}^2 + 0,795 h_{t-1}. \quad (68)$$

Celkový výsledný model logaritmických diferencí indexu Dow 30 má následující podobu

$$y_t = 0,001 - 0,101\varepsilon_{t-3} - 0,141\varepsilon_{t-4} - 0,227\varepsilon_{t-6} + 0,128\varepsilon_{t-7} + 0,254\varepsilon_{t-9} - 0,251\varepsilon_{t-13} + \varepsilon_t \sqrt{5,843 * 10^{-6} + 0,161 e_{t-1}^2 + 0,795 h_{t-1}}. \quad (69)$$

Nyní se již dostáváme k predikci hodnot indexu Dow 30 a porovnání s jeho reálnými hodnotami. Celkový grafický výstup je zachycen na Obrázku 28 a konkrétní hodnoty jsou zaznamenány v následující Tabulce 10.



Obrázek 28 - Predikce hodnot indexu Dow 30

Zdroj: Gretl – vlastní zpracování

Tabulka 10 - Přehled hodnot predikce indexu Dow 30

Obchodní den	Dolní 95% hranice	Predikce	Horní 95% hranice	Reálná hodnota
16.03.2022	32744,25	33480,63	34233,57	34063,10
17.03.2022	32475,32	33513,69	34585,28	34480,76
18.03.2022	32374,81	33648,05	34971,37	34754,93
21.03.2022	32009,85	33468,92	34994,49	34552,99
22.03.2022	31888,96	33519,43	35233,26	34807,46
23.03.2022	31667,91	33447,00	35326,05	34358,50
24.03.2022	31635,60	33560,75	35603,05	34707,94
25.03.2022	31638,13	33701,73	35899,93	34861,24
28.03.2022	31552,22	33740,47	36080,50	34955,89
29.03.2022	31523,22	33833,22	36312,49	35294,19

Zdroj: Gretl – vlastní zpracování

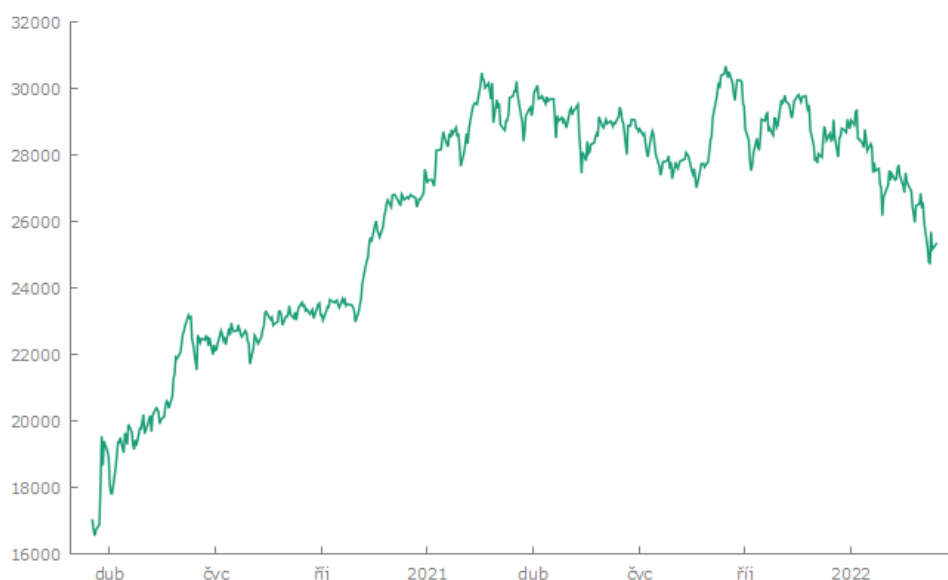
I zde u predikce můžeme vidět vysokou podobnost s průběhem indexu S&P 500. Reálné hodnoty se pohybují v našem odhadnutém 95% páse a bodová předpověď sice neodpovídá reálným hodnotám, za to opět krásně vystihuje tvar reálné křivky. Jelikož se též jedná

o americký akciový index, byl ovlivněn stejnými událostmi, jako jsme si popsali u indexu S&P 500. I zde došlo k celkovému nárůstu, a to o 5 %.

Zde můžeme zhodnotit, že oba naše americké indexy, i přesto že mají rozdílný přístup konstrukce, odrážejí americký trh stejným směrem a mají téměř totožný průběh. Pokud bychom se zaměřili na korelaci mezi těmito dvěma indexy dostali bychom se na průměrnou dlouhodobou hodnotu 0,95, což potvrzuje velmi vysokou korelaci [43]. Kdybychom se na oba indexy podívali v rámci investice například pomocí ETF, index S&P 500 poskytuje větší stupeň diverzifikace rizika, jelikož se skládá z 500 společností různého zaměření, na rozdíl od indexu Dow Jones Industrial Average, který jich obsahuje pouze 30. Většina investorů uvažuje investici do těchto akciových indexů jako dlouhodobou s historicky prokázaným výnosem. Na druhou stranu volatilita obou těchto indexů je výrazná a nabízí tak spoustu dalších investičních možností i z krátkodobého hlediska.

5.3 Analýza indexu Nikkei 225

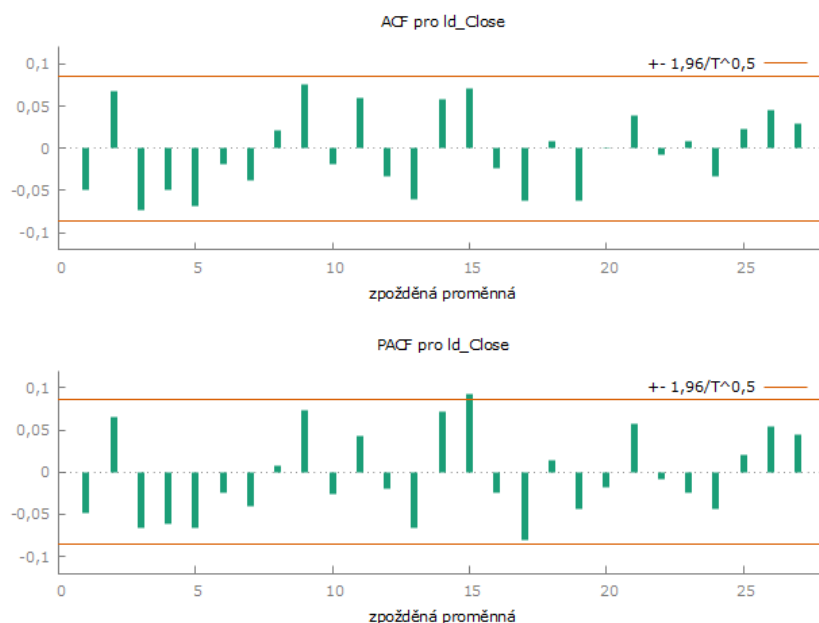
Jako poslední budeme analyzovat index Nikkei 225. Průběh analyzovaných dat můžeme vidět na následujícím Obrázku 29, kde na ose x je znázorněn čas a na ose y uzavírací ceny indexu Nikkei 225 v JPY.



Obrázek 29 - Graf indexu Nikkei 225

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Průběh indexu Nikkei 225 je již odlišný od indexů předcházejících, ale též se jedná o nestacionární data, která upravíme na logaritmické difference a ty dále budou vstupovat do následné analýzy. Pro odhad úrovnového modelu využijeme průběh korelogramu ACF a PACF, který můžeme vidět na Obrázku 30.



Obrázek 30 - Korelogram logaritmických diferencí hodnot indexu Nikkei 225

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Z průběhu korelogramu je viditelné, že zde nejsou žádné významné přesahy jak pro ACF tak PACF, tudíž budeme uvažovat model ARIMA(0,0,0). Model odhadneme s konstantou a poté dle p-hodnoty rozhodneme o jejím použití. Výstup modelu je zaznamenán na Obrázku 31.

	koeficient	směr. chyba	z	p-hodnota
const	0,000766423	0,000577285	1,328	0,1843

Obrázek 31 - Přehled koeficientů a jejich p-hodnot pro model ARIMA(0,0,0) indexu Nikkei 225

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Z výstupu můžeme zhodnotit, že p-hodnota u konstanty je větší než uvažovaná hladina významnosti, tudíž nulovou hypotézu o nulovosti nelze zamítnout a konstantu můžeme uvažovat jako nulovou. Model je pak tvořen pouze reziduální složkou. V tuto chvíli je pro nás důležitý ARCH test, kterým zjistíme, zda budeme dále pokračovat s modelem volatility. Jeho výsledek můžeme zkontrolovat na Obrázku 32, kde opět vidíme, že je p-hodnota menší než naše hladina významnosti, a tudíž nulovou hypotézu zamítáme a potvrzujeme existenci podmíněné heteroskedasticity, kterou budeme dále modelovat.

Test pro ARCH řádu 5

	koeficient	směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
alpha(0)	7,68868e-05	1,91220e-05	4,021	6,67e-05	***
alpha(1)	0,535899	0,0438613	12,22	2,72e-030	***
alpha(2)	-0,134287	0,0496282	-2,706	0,0070	***
alpha(3)	0,126252	0,0496896	2,541	0,0114	**
alpha(4)	-0,110956	0,0502804	-2,207	0,0278	**
alpha(5)	0,141138	0,0444537	3,175	0,0016	***

Nulová hypotéza: není zde žádný efekt ARCH
Testovací statistika: LM = 136,157
s p-hodnotou = P(Chi-kvadrát(5) > 136,157) = 1,1732e-27

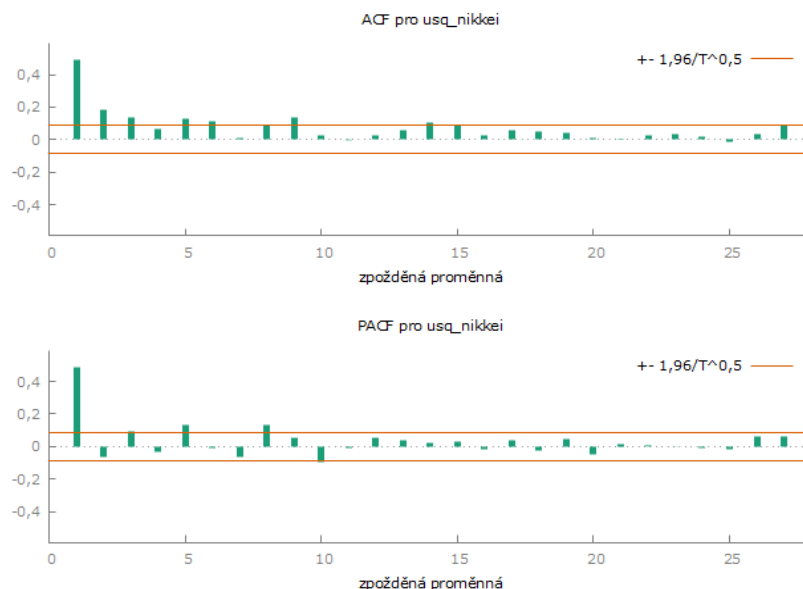
Obrázek 32 - ARCH test modelu ARIMA(0,0,0) indexu Nikkei 225

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Výsledný úrovnňový model ARIMA(0,0,0) má pak tvar

$$y_t = e_t, \text{ kde } e_t = \varepsilon_t * \sqrt{h_t}. \quad (70)$$

Korelogram druhých mocnin reziduí modelu ARIMA(0,0,0) je zaznamenán na Obrázku 33. U PACF se objevuje velmi výrazný přesah pro první zpoždění a tudíž bychom mohli uvažovat model ARCH(1). Jelikož se ale objevují přesahy i pro zpoždění vyšších řádů, zkusíme i model GARCH(1,1). Pro odhadované modely volatility dle informačních kritérií vychází lépe model GARCH(1,1), který se tedy jeví jako vhodnější a jeho výstup je uveden na Obrázku 34.



Obrázek 33 - Korelogram druhých mocnin reziduí z modelu ARIMA(0,0,0) indexu Nikkei 225

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

	koeficient	směr. chyba	z	p-hodnota
alpha (0)	3,08435e-05	1,28438e-05	2,401	0,0163 **
alpha (1)	0,168189	0,0543098	3,097	0,0020 ***
beta (1)	0,643338	0,112684	5,709	1,13e-08 ***

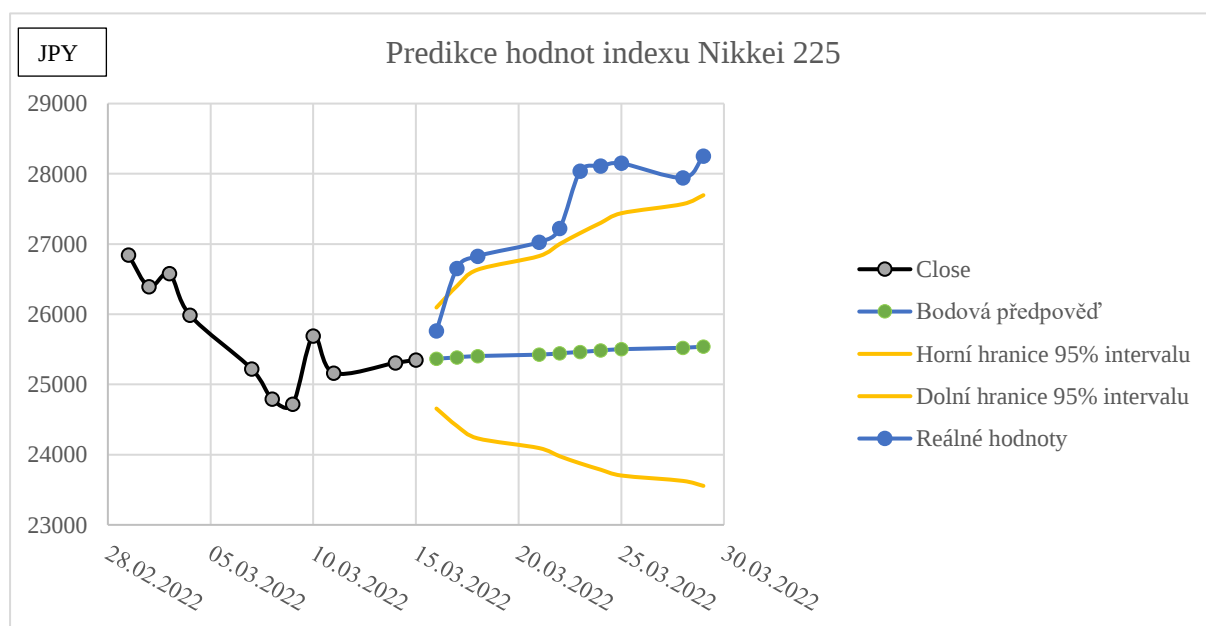
Obrázek 34 - Parametry modelu GARCH(1,1) indexu Nikkei 225

Zdroj: Vlastní zpracování v softwaru Gretl

Z Obrázku 34 vidíme, že jsou opět všechny parametry modelu volatility významné a budou pak do výsledného modelu zahrnuty. Tento model též eliminoval přesahy ACF a PACF v korelogramu druhých mocnin reziduí, které se objevovaly na Obrázku 33. ARCH test pro rezidua vychází též v pořádku a nulovou hypotézu o podmíněné homoskedasticitě nelze zamítnout na základě p-hodnoty 0,440982. Model GARCH(1,1) se tedy jeví jako vhodný a výsledný model logaritmických diferencí indexu Nikkei 225 s parametry dle Obrázku 34 má následující podobu

$$y_t = \varepsilon_t * \sqrt{3,084 * 10^{-5} + 0,168 e_{t-1}^2 + 0,643 h_{t-1}}. \quad (71)$$

Jako poslední nás opět čeká předpověď budoucího vývoje na následujících 10 obchodních dnech, kterou můžeme vidět na Obrázku 35. Konkrétní hodnoty jsou zaznamenány v Tabulce 11.



Obrázek 35 - Predikce hodnot indexu Nikkei 225

Zdroj: Gretl – vlastní zpracování

Tabulka 11 - Přehled hodnot predikce indexu Nikkei 225

Obchodní den	Dolní 95% hranice	Predikce	Horní 95% hranice	Reálná hodnota
16.03.2022	24656,81	25365,90	26095,39	25762,01
17.03.2022	24407,89	25385,34	26401,93	26652,89
18.03.2022	24232,46	25404,79	26633,84	26827,43
21.03.2022	24093,78	25424,26	26828,21	27025,77
22.03.2022	23977,40	25443,74	26999,76	27224,11
23.03.2022	23876,03	25463,24	27155,97	28040,16
24.03.2022	23785,48	25482,75	27301,14	28110,39
25.03.2022	23702,91	25502,28	27438,25	28149,84
28.03.2022	23626,43	25521,82	27569,27	27943,89
29.03.2022	23555,10	25541,38	27695,16	28252,42

Zdroj: Gretl – vlastní zpracování

Predikce u tohoto indexu bohužel nedopadla úplně uspokojivě. V predikčním 95% intervalu se nachází pouze první hodnota a poté došlo k velmi výraznému nárůstu. Celkový nárůst v období od 15. 3. 2022 do 29. 3. 2022 tvořil 11 %. Kdybychom hledali příčinu tohoto zvratu, přišli bychom na to, že nárůst byl způsoben úlevou mezi investory ohledně výhledu pro americkou ekonomiku. Tento zvrat přišel poté, co americká centrální banka zavedla očekávané zvýšení úrokových sazeb, o kterém jsme psali u indexu S&P 500 [44]. Dalším důvodem růstu je, že investoři i zde na japonském akciovém trhu sledovali ceny ropy a pokračovali v kladném hodnocení výhledu měnové politiky americké centrální banky [45]. Zde můžeme hezky vidět propojenost jednotlivých světových ekonomik.

I přesto, že zde predikce nebyla přesná a projevila se zde vysoká volatilita, model by nás upozornil na neočekávanou změnu chování, kterou bychom mohli začít hned analyzovat a zjišťovat její důvody. Predikovaný model a reálná křivka se pak tedy mohou lišit v důsledku vstupu externích proměnných, které je těžko předvídat. Jelikož se svět do nedávna potýkal s pandemií a do toho vypukla válka, se kterou téměř nikdo z nás nepočítal, ovlivnilo to samozřejmě i chování lidí na akciových trzích a prohloubilo nervozitu. Pokud tedy predikujeme hodnoty v takovéto době, musíme vždy počítat s nečekanými událostmi, které mohou reálný vývoj velmi ovlivnit a predikce tak nemusí být dostačující. Předcházet tomu můžeme jen velmi dobrou informovaností a připraveností.

ZÁVĚR

V úvodu této práce jsme se seznámili s akciovým trhem, burzami a typy akciových indexů. Součástí byly i možnosti obchodování s akciovými indexy jako jsou futures, CFD nebo ETF. V další části jsme se zaměřili na teoretickou podstatu časových řad a jejich analýzu. Konkrétně jsme se věnovali Boxově-Jenkinsově metodologii a představili si její základní modely pro stacionární časové řady a následně pak modely pro nestacionární časové řady. Dále jsme pokračovali k finančním časovým řadám, která mají svá specifika a do kterých spadají i hodnoty akciových indexů. Klíčovým prvkem byla volatilita, která je uvažována jako směrodatná odchylka a je ukazatelem míry rizikovosti finančních aktiv. Pro tyto případy existují právě modely volatility, jejíž představitele, model ARCH a GARCH, jsme si probrali blíže. Pokud u úrovnového modelu identifikujeme podmíněnou heteroskedasticitu, je nutné použít vhodný model volatility, který nám ve výsledku pomůže upřesnit intervalové předpovědi časové řady. Abychom věděli, jak tyto modely použít v praxi, uvedli jsme i postup pro výstavbu modelů.

Cílem práce bylo sestavení modelů volatility vybraných akciových indexů včetně predikce a tomu byla věnována druhá část této práce. Součástí bylo představení vybraných akciových indexů, jejich vývoj a historie. Následná analýza byla provedena v ekonometrickém softwaru Gretl. Analyzovány byly dva americké akciové indexy S&P 500, Dow 30 a jeden japonský akciový index Nikkei 225. U všech zmíněných indexů bylo nutné využít modely volatility, jelikož se potvrdila podmíněná heteroskedasticita. Výsledný úrovnový model byl využit k bodové předpovědi a model volatility nám pomohl určit intervalové předpovědi.

U amerických akciových indexů byla intervalová předpověď úspěšná a bodová předpověď se sice lišila, ale velmi kvalitně odhadla tvar budoucí křivky. Předpověď u japonského indexu již tak přesvědčivá nebyla, jelikož došlo k výraznému nárůstu hodnot indexu, který model nebyl schopen odhadnout. U všech tří zmiňovaných indexů došlo k nárůstům reálných hodnot v predikovaném období, které bylo způsobeno externími vlivy. Akciový trh je známý svou volatilitou, která byla ještě umocněna v důsledku vypuknutí války na Ukrajině koncem února 2022. Další vliv mělo zasedání amerického FEDU, kde došlo ke zvýšení úrokových sazeb a pozitivnímu zhodnocení americké ekonomiky. Zde tedy můžeme potvrdit propojenost jednotlivých světových ekonomik. Dále můžeme zhodnotit, že modely byly ve výsledku úspěšné, ale predikovaný model a reálná křivka se mohou lišit v důsledku vstupu externích proměnných, které je těžko předvídat. Lze tedy usoudit, že je důležité být informovaný a sledovat dění ve světě.

Celkově tato práce může sloužit jako základ pro pochopení analýzy časových řad, konkrétně Boxovy-Jenkinsovy metodologie, u které jsme popsali její základní možnosti. Na to pak navazuje práce s finančními časovými řadami a modely volatility. Nechybí zde ani postup analýzy a konkrétní kroky v softwaru Gretl, které jsme si ukázaly u indexu S&P 500.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JÍLEK, Josef. *Akciové trhy a investování*. Praha: Grada, 2009. Finanční trhy a instituce. ISBN 978-80-247-2963-3.
- [2] CHEN, James. Equity Capital Market (ECM). In: *Investopedia* [online]. [cit. 2020-12-05]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/terms/e/equitycapitalmarket.asp>
- [3] MLÝNEK, Jonáš. OTC obchodování – příležitosti a rizika Over-The-Counter trhů. In: *LYNX* [online]. [cit. 2020-12-03]. Dostupné z: <https://www.lynxbroker.cz/vzdelavani/otc-obchodovani/>
- [4] CHEN, James. NYSE Arca. In: *Investopedia* [online]. [cit. 2020-12-05]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/terms/n/nyse-arca.asp>
- [5] SCOTT, Gordon. Euronext. In: *Investopedia* [online]. [cit. 2020-12-05]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/terms/e/euronext.asp>
- [6] SCHNEIDER, Bob. NYSE American vs. Nasdaq: What's the Difference?. In: *Investopedia* [online]. [cit. 2020-12-05]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/ask/answers/09/amex-vs-nasdaq.asp>
- [7] INTERCONTINENTAL EXCHANGE. Total Market Cap. In: *Intercontinental exchange: NYSE* [online]. [cit. 2020-12-05]. Dostupné z: <https://www.nyse.com/market-cap>
- [8] INTERCONTINENTAL EXCHANGE. Traded products: Listings directory. In: *Intercontinental exchange* [online]. [cit. 2020-12-06]. Dostupné z: https://www.nyse.com/listings_directory/stock
- [9] NASDAQ, INC. Trading Hours for the Nasdaq Stock Markets. In: *Nasdaq* [online]. [cit. 2020-12-07]. Dostupné z: <https://www.nasdaq.com/stock-market-trading-hours-for-nasdaq>
- [10] INVESTOPEDIA. Nasdaq Market Maker vs. NYSE Specialist: What's the Difference?. In: *Investopedia* [online]. [cit. 2020-12-10]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/ask/answers/128.asp>
- [11] INTERCONTINENTAL EXCHANGE. NYSE Listings: Get Started with Listing. In: *Intercontinental exchange* [online]. [cit. 2020-12-05]. Dostupné z: <https://www.nyse.com/listings-process>

- [12] PALMER, Barclay. Can I Invest in the Nasdaq or NYSE?. In: *Investopedia* [online]. [cit. 2020-12-06]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/ask/answers/08/invest-in-nasdaq-nyse.asp>
- [13] NASDAQ, INC. Stock Screener. In: *Nasdaq* [online]. [cit. 2020-12-06]. Dostupné z: <https://www.nasdaq.com/market-activity/stocks/screener>
- [14] KLUB INVESTORŮ. Světové burzy - Tokijská burza. In: *Klub investorů* [online]. [cit. 2020-12-10]. Dostupné z: <https://www.klubinvestoru.com/cs/clanek/1483-svetove-burzy-tokijka-burza>
- [15] CHEN, James. Tokyo Stock Exchange (TSE). In: *Investopedia* [online]. [cit. 2020-12-10]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/terms/t/tokyo.asp#citation-3>
- [16] TRADINGHOURS.COM. JPX Trading Hours. In: *TradingHours.com* [online]. 2020 [cit. 2020-12-10]. Dostupné z: <https://www.tradinghours.com/markets/jpx/hours>
- [17] PENÍZE.CZ. Co je to akciový index. In: *Peníze.cz* [online]. [cit. 2020-12-12]. Dostupné z: <https://www.penize.cz/15730-co-je-to-akciovy-index>
- [18] HOLÝ, Petr. Burzovní indexy: 10 nejdůležitějších akciových indexů. In: *LYNX* [online]. [cit. 2020-12-12]. Dostupné z: <https://www.lynxbroker.cz/vzdelavani/akciove-indexy/>
- [19] REJNUŠ, Oldřich. *Finanční trhy*. 4., aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Grada, 2014. Partners. ISBN 978-80-247-3671-6.
- [20] X-TRADE BROKERS. Co je to obchodování CFD?. In: *XTB online trading* [online]. 2021 [cit. 2021-03-21]. Dostupné z: <https://www.xtb.com/cz/xtb-akademie/co-je-to-obchodovani-cfd>
- [21] ARLT, Josef a Markéta ARLTOVÁ. *Finanční časové řady: vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace*. První vydání. Praha: Grada, 2003. ISBN 80-247-0330-0.
- [22] TSAY, S. Ruey. *Analysis of Financial Time Series*. 2nd ed. Canada: John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, 2005. ISBN 0-471-69074-0.
- [23] CIPRA, Tomáš. *Finanční ekonometrie*. 2., upr. vyd. Praha: Ekopress, 2013. ISBN 978-80-86929-93-4.
- [24] ARLT, Josef a Markéta ARTLTOVÁ. *Ekonomické časové řady: Vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace*. První vydání. Praha: Grada, 2007. ISBN 80-247-1319-5.

- [25] Akciový index S&P500 – Detail, hodnota, graf, historie. In: *Finex.cz* [online]. [cit. 2022-03-17]. Dostupné z: <https://finex.cz/index/standard-and-poors-500/>
- [26] KENTON, Will. The S&P 500 Index: Standard & Poor's 500 Index. In: *Investopedia* [online]. [cit. 2022-03-17]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/terms/s/sp500.asp>
- [27] S&P 500®. In: *S&P Dow Jones Indices* [online]. 2022 [cit. 2022-03-17]. Dostupné z: <https://www.spglobal.com/spdji/en/indices/equity/sp-500/#data>
- [28] HAYES, Adam. Dotcom Bubble. In: *Investopedia* [online]. [cit. 2022-03-21]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/terms/d/dotcom-bubble.asp>
- [29] Historické bubliny 4: Internetová horečka. In: *Kryptomagazín* [online]. [cit. 2022-03-21]. Dostupné z: <https://kryptomagazin.cz/historicke-bubliny-4-internetova-horecka/>
- [30] KENTON, Will. Subprime Meltdown. In: *Investopedia* [online]. [cit. 2022-03-21]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/terms/s/subprime-meltdown.asp>
- [31] KAGAN, Julian. Mortgage-Backed Security (MBS). In: *Investopedia* [online]. [cit. 2022-03-21]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/terms/m/mbs.asp>
- [32] Víte, co způsobilo americkou hypoteční krizi? Není na škodu si to připomenout. In: *MBank* [online]. [cit. 2022-03-21]. Dostupné z: <https://www.mbank.cz/blog/post,632,vite-co-zpusobilo-americkou-hypotecni-krizi-neni-na-skodu-si-to-pripomenout.html>
- [33] Weekly development of the S&P 500 index from January 2020 to January 2022. In: *Statista* [online]. [cit. 2022-03-21]. Dostupné z: <https://www.statista.com/statistics/1104270/weekly-sandp-500-index-performance/>
- [34] GANTI, Akhilesh. Dow Jones Industrial Average (DJIA). In: *Investopedia* [online]. [cit. 2022-03-25]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/terms/d/djia.asp#citation-9>
- [35] DOW JONES STOCKS. In: *INSIDER* [online]. [cit. 2022-03-25]. Dostupné z: https://markets.businessinsider.com/index/components/dow_jones
- [36] HALL, Mary. What Does the Dow Jones Industrial Average Measure?. In: *Investopedia* [online]. [cit. 2022-03-25]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/ask/answers/050115/what-does-dow-jones-industrial-average-measure.asp>

- [37] Dow Jones Industrial Average Index – Hodnota, graf, historie. In: *Finex.cz* [online]. [cit. 2022-03-27]. Dostupné z: <https://finex.cz/index/dow-jones-industrial-average/>
- [38] DUNGO, Fehl. Top 10 Companies of Nikkei 225 Index by Weight (Japan 225 Index). In: *Dailypik* [online]. 2022 [cit. 2022-03-27]. Dostupné z: <https://dailypik.com/nikkei-225-index/>
- [39] Nikkei Stock Average (Nikkei 225). In: *Nikkei Indexes* [online]. [cit. 2022-03-27]. Dostupné z: <https://indexes.nikkei.co.jp/en/nkave/index/profile?idx=nk225>
- [40] CHEN, James. Nikkei. In: *Investopedia* [online]. [cit. 2022-03-27]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/terms/n/nikkei.asp>
- [41] Nikkei 225 Index – Cena, graf, vývoj indexu. In: *Finex.cz* [online]. [cit. 2022-03-27]. Dostupné z: <https://finex.cz/index/nikkei-225/>
- [42] IMBERT, Fred. A full recap of the Fed’s rate hike decision and Powell’s market-moving comments. In: *CNBC* [online]. [cit. 2022-04-13].
- [43] Comparing Iconic Indices: The S&P 500 and DJIA. In: *S&P Dow Jones Indices* [online]. [cit. 2022-04-13]. Dostupné z: <https://www.spglobal.com/spdji/en/documents/education/education-comparing-iconic-indices-the-sp-500-and-djia.pdf>
- [44] Nikkei 225 surges on Fed chair remarks. In: *NHK World - Japan* [online]. [cit. 2022-04-13]. Dostupné z: https://www3.nhk.or.jp/nhkworld/en/news/20220317_60/?fbclid=IwAR1flexyX7SjClx2lhjgtwXEY2-UTFUhxg_F6PgA7xmoRtYqVhYm03uuu74
- [45] HUANG, Eustance. ASIA MARKETS Japan’s Nikkei 225 closes 3% higher as SoftBank Group shares surge 7%. In: *CNBC* [online]. [cit. 2022-04-13]. Dostupné z: <https://www.cnbc.com/2022/03/23/asia-markets-us-federal-reserve-russia-ukraine-conflict-currencies-oil.html>
- [46] S&P 500 Index. In: *MarketWatch* [online]. 2022 [cit. 2022-04-26]. Dostupné z: https://www.marketwatch.com/investing/index/spx/download-data?mod=mw_quote_tab
- [47] Dow Jones Industrial Average. In: *MarketWatch* [online]. 2022 [cit. 2022-04-26]. Dostupné z: https://www.marketwatch.com/investing/index/djia/download-data?mod=mw_quote_tab

- [48] NIKKEI 225 Index. In: *MarketWatch* [online]. 2022 [cit. 2022-04-26]. Dostupné z:
[https://www.marketwatch.com/investing/index/nik/download-](https://www.marketwatch.com/investing/index/nik/download-data?countrycode=jp&mod=mw_quote_tab)
[data?countrycode=jp&mod=mw_quote_tab](https://www.marketwatch.com/investing/index/nik/download-data?countrycode=jp&mod=mw_quote_tab)

PŘÍLOHY

Příloha A – Vstupní data indexu S&P 500.....	80
Příloha B – Vstupní data indexu Dow 30	83
Příloha C – Vstupní data indexu Nikkei 225	86

Příloha A – Vstupní data indexu S&P 500 [46]

Date	Close	Date	Close	Date	Close	Date	Close
16.03.2020	2386,13	15.05.2020	2863,70	16.07.2020	3215,57	16.09.2020	3385,49
17.03.2020	2529,19	18.05.2020	2953,91	17.07.2020	3224,73	17.09.2020	3357,01
18.03.2020	2398,10	19.05.2020	2922,94	20.07.2020	3251,84	18.09.2020	3319,47
19.03.2020	2409,39	20.05.2020	2971,61	21.07.2020	3257,30	21.09.2020	3281,06
20.03.2020	2304,92	21.05.2020	2948,51	22.07.2020	3276,02	22.09.2020	3315,57
23.03.2020	2237,40	22.05.2020	2955,45	23.07.2020	3235,66	23.09.2020	3236,92
24.03.2020	2447,33	25.05.2020	2973,61	24.07.2020	3215,63	24.09.2020	3246,59
25.03.2020	2475,56	26.05.2020	2991,77	27.07.2020	3239,41	25.09.2020	3298,46
26.03.2020	2630,07	27.05.2020	3036,13	28.07.2020	3218,44	28.09.2020	3351,60
27.03.2020	2541,47	28.05.2020	3029,73	29.07.2020	3258,44	29.09.2020	3335,47
30.03.2020	2626,65	29.05.2020	3044,31	30.07.2020	3246,22	30.09.2020	3363,00
31.03.2020	2584,59	01.06.2020	3055,73	31.07.2020	3271,12	01.10.2020	3380,80
01.04.2020	2470,50	02.06.2020	3080,82	03.08.2020	3294,61	02.10.2020	3348,44
02.04.2020	2526,90	03.06.2020	3122,87	04.08.2020	3306,51	05.10.2020	3408,63
03.04.2020	2488,65	04.06.2020	3112,35	05.08.2020	3327,77	06.10.2020	3360,95
06.04.2020	2663,68	05.06.2020	3193,93	06.08.2020	3349,16	07.10.2020	3419,45
07.04.2020	2659,41	08.06.2020	3232,39	07.08.2020	3351,28	08.10.2020	3446,83
08.04.2020	2749,98	09.06.2020	3207,18	10.08.2020	3360,47	09.10.2020	3477,13
09.04.2020	2789,82	10.06.2020	3190,14	11.08.2020	3333,69	12.10.2020	3534,22
10.04.2020	2775,73	11.06.2020	3002,10	12.08.2020	3380,35	13.10.2020	3511,93
13.04.2020	2761,63	12.06.2020	3041,31	13.08.2020	3373,43	14.10.2020	3488,67
14.04.2020	2846,06	15.06.2020	3066,59	14.08.2020	3372,85	15.10.2020	3483,34
15.04.2020	2783,36	16.06.2020	3124,74	17.08.2020	3381,99	16.10.2020	3483,81
16.04.2020	2799,55	17.06.2020	3113,49	18.08.2020	3389,78	19.10.2020	3426,92
17.04.2020	2874,56	18.06.2020	3115,34	19.08.2020	3374,85	20.10.2020	3443,12
20.04.2020	2823,16	19.06.2020	3097,74	20.08.2020	3385,51	21.10.2020	3435,56
21.04.2020	2736,56	22.06.2020	3117,86	21.08.2020	3397,16	22.10.2020	3453,49
22.04.2020	2799,31	23.06.2020	3131,29	24.08.2020	3431,28	23.10.2020	3465,39
23.04.2020	2797,80	24.06.2020	3050,33	25.08.2020	3443,62	26.10.2020	3400,97
24.04.2020	2836,74	25.06.2020	3083,76	26.08.2020	3478,73	27.10.2020	3390,68
27.04.2020	2878,48	26.06.2020	3009,05	27.08.2020	3484,55	28.10.2020	3271,03
28.04.2020	2863,39	29.06.2020	3053,24	28.08.2020	3508,01	29.10.2020	3310,11
29.04.2020	2939,51	30.06.2020	3100,29	31.08.2020	3500,31	30.10.2020	3269,96
30.04.2020	2912,43	01.07.2020	3115,86	01.09.2020	3526,65	02.11.2020	3310,24
01.05.2020	2830,71	02.07.2020	3130,01	02.09.2020	3580,84	03.11.2020	3369,16
04.05.2020	2842,74	03.07.2020	3154,87	03.09.2020	3455,06	04.11.2020	3443,44
05.05.2020	2868,44	06.07.2020	3179,72	04.09.2020	3426,96	05.11.2020	3510,45
06.05.2020	2848,42	07.07.2020	3145,32	07.09.2020	3379,40	06.11.2020	3509,44
07.05.2020	2881,19	08.07.2020	3169,94	08.09.2020	3331,84	09.11.2020	3550,50
08.05.2020	2929,80	09.07.2020	3152,05	09.09.2020	3398,96	10.11.2020	3545,53
11.05.2020	2930,32	10.07.2020	3185,04	10.09.2020	3339,19	11.11.2020	3572,66
12.05.2020	2870,12	13.07.2020	3155,22	11.09.2020	3340,97	12.11.2020	3537,01
13.05.2020	2820,00	14.07.2020	3197,52	14.09.2020	3383,54	13.11.2020	3585,15
14.05.2020	2852,50	15.07.2020	3226,56	15.09.2020	3401,20	16.11.2020	3626,91

Date	Close	Date	Close	Date	Close	Date	Close
17.11.2020	3609,53	18.01.2021	3783,58	19.03.2021	3913,10	20.05.2021	4159,12
18.11.2020	3567,79	19.01.2021	3798,91	22.03.2021	3940,59	21.05.2021	4155,86
19.11.2020	3581,87	20.01.2021	3851,85	23.03.2021	3910,52	24.05.2021	4197,05
20.11.2020	3557,54	21.01.2021	3853,07	24.03.2021	3889,14	25.05.2021	4188,13
23.11.2020	3577,59	22.01.2021	3841,47	25.03.2021	3909,52	26.05.2021	4195,99
24.11.2020	3635,41	25.01.2021	3855,36	26.03.2021	3974,54	27.05.2021	4200,88
25.11.2020	3629,65	26.01.2021	3849,62	29.03.2021	3971,09	28.05.2021	4204,11
26.11.2020	3634,00	27.01.2021	3750,77	30.03.2021	3958,55	31.05.2021	4203,08
27.11.2020	3638,35	28.01.2021	3787,38	31.03.2021	3972,89	01.06.2021	4202,04
30.11.2020	3621,63	29.01.2021	3714,24	01.04.2021	4019,87	02.06.2021	4208,12
01.12.2020	3662,45	01.02.2021	3773,86	02.04.2021	4048,89	03.06.2021	4192,85
02.12.2020	3669,01	02.02.2021	3826,31	05.04.2021	4077,91	04.06.2021	4229,89
03.12.2020	3666,72	03.02.2021	3830,17	06.04.2021	4073,94	07.06.2021	4226,52
04.12.2020	3699,12	04.02.2021	3871,74	07.04.2021	4079,95	08.06.2021	4227,26
07.12.2020	3691,96	05.02.2021	3886,83	08.04.2021	4097,17	09.06.2021	4219,55
08.12.2020	3702,25	08.02.2021	3915,59	09.04.2021	4128,80	10.06.2021	4239,18
09.12.2020	3672,82	09.02.2021	3911,23	12.04.2021	4127,99	11.06.2021	4247,44
10.12.2020	3668,10	10.02.2021	3909,88	13.04.2021	4141,59	14.06.2021	4255,15
11.12.2020	3663,46	11.02.2021	3916,38	14.04.2021	4124,66	15.06.2021	4246,59
14.12.2020	3647,49	12.02.2021	3934,83	15.04.2021	4170,42	16.06.2021	4223,70
15.12.2020	3694,62	15.02.2021	3933,71	16.04.2021	4185,47	17.06.2021	4221,86
16.12.2020	3701,17	16.02.2021	3932,59	19.04.2021	4163,26	18.06.2021	4166,45
17.12.2020	3722,48	17.02.2021	3931,33	20.04.2021	4134,94	21.06.2021	4224,79
18.12.2020	3709,41	18.02.2021	3913,97	21.04.2021	4173,42	22.06.2021	4246,44
21.12.2020	3694,92	19.02.2021	3906,71	22.04.2021	4134,98	23.06.2021	4241,84
22.12.2020	3687,26	22.02.2021	3876,50	23.04.2021	4180,17	24.06.2021	4266,49
23.12.2020	3690,01	23.02.2021	3881,37	26.04.2021	4187,62	25.06.2021	4280,70
24.12.2020	3703,06	24.02.2021	3925,43	27.04.2021	4186,72	28.06.2021	4290,61
25.12.2020	3719,21	25.02.2021	3829,34	28.04.2021	4183,18	29.06.2021	4291,80
28.12.2020	3735,36	26.02.2021	3811,15	29.04.2021	4211,47	30.06.2021	4297,50
29.12.2020	3727,04	01.03.2021	3901,82	30.04.2021	4181,17	01.07.2021	4319,94
30.12.2020	3732,04	02.03.2021	3870,29	03.05.2021	4192,66	02.07.2021	4352,34
31.12.2020	3756,07	03.03.2021	3819,72	04.05.2021	4164,66	05.07.2021	4347,94
01.01.2021	3728,36	04.03.2021	3768,47	05.05.2021	4167,59	06.07.2021	4343,54
04.01.2021	3700,65	05.03.2021	3841,94	06.05.2021	4201,62	07.07.2021	4358,13
05.01.2021	3726,86	08.03.2021	3821,35	07.05.2021	4232,60	08.07.2021	4320,82
06.01.2021	3748,14	09.03.2021	3875,44	10.05.2021	4188,43	09.07.2021	4369,55
07.01.2021	3803,79	10.03.2021	3898,81	11.05.2021	4152,10	12.07.2021	4384,63
08.01.2021	3824,68	11.03.2021	3939,34	12.05.2021	4063,04	13.07.2021	4369,21
11.01.2021	3799,61	12.03.2021	3943,34	13.05.2021	4112,50	14.07.2021	4374,30
12.01.2021	3801,19	15.03.2021	3968,94	14.05.2021	4173,85	15.07.2021	4360,03
13.01.2021	3809,84	16.03.2021	3962,71	17.05.2021	4163,29	16.07.2021	4327,16
14.01.2021	3795,54	17.03.2021	3974,12	18.05.2021	4127,83	19.07.2021	4258,49
15.01.2021	3768,25	18.03.2021	3915,46	19.05.2021	4115,68	20.07.2021	4323,06

Date	Close	Date	Close	Date	Close	Date	Close
21.07.2021	4358,69	21.09.2021	4354,19	22.11.2021	4682,94	21.01.2022	4397,94
22.07.2021	4367,48	22.09.2021	4395,64	23.11.2021	4690,70	24.01.2022	4410,13
23.07.2021	4411,79	23.09.2021	4448,98	24.11.2021	4701,46	25.01.2022	4356,45
26.07.2021	4422,30	24.09.2021	4455,48	25.11.2021	4648,04	26.01.2022	4349,93
27.07.2021	4401,46	27.09.2021	4443,11	26.11.2021	4594,62	27.01.2022	4326,51
28.07.2021	4400,64	28.09.2021	4352,63	29.11.2021	4655,27	28.01.2022	4431,85
29.07.2021	4419,15	29.09.2021	4359,46	30.11.2021	4567,00	31.01.2022	4515,55
30.07.2021	4395,26	30.09.2021	4307,54	01.12.2021	4513,04	01.02.2022	4546,54
02.08.2021	4387,16	01.10.2021	4357,04	02.12.2021	4577,10	02.02.2022	4589,38
03.08.2021	4423,15	04.10.2021	4300,46	03.12.2021	4538,43	03.02.2022	4477,44
04.08.2021	4402,66	05.10.2021	4345,72	06.12.2021	4591,67	04.02.2022	4500,53
05.08.2021	4429,10	06.10.2021	4363,55	07.12.2021	4686,75	07.02.2022	4483,87
06.08.2021	4436,52	07.10.2021	4399,76	08.12.2021	4701,21	08.02.2022	4521,54
09.08.2021	4432,35	08.10.2021	4391,34	09.12.2021	4667,45	09.02.2022	4587,18
10.08.2021	4436,75	11.10.2021	4361,19	10.12.2021	4712,02	10.02.2022	4504,08
11.08.2021	4447,70	12.10.2021	4350,65	13.12.2021	4668,97	11.02.2022	4418,64
12.08.2021	4460,83	13.10.2021	4363,80	14.12.2021	4634,09	14.02.2022	4401,67
13.08.2021	4468,00	14.10.2021	4438,26	15.12.2021	4709,85	15.02.2022	4471,07
16.08.2021	4479,71	15.10.2021	4471,37	16.12.2021	4668,67	16.02.2022	4475,01
17.08.2021	4448,08	18.10.2021	4486,46	17.12.2021	4620,64	17.02.2022	4380,26
18.08.2021	4400,27	19.10.2021	4519,63	20.12.2021	4568,02	18.02.2022	4348,87
19.08.2021	4405,80	20.10.2021	4536,19	21.12.2021	4649,23	21.02.2022	4326,82
20.08.2021	4441,67	21.10.2021	4549,78	22.12.2021	4696,56	22.02.2022	4304,76
23.08.2021	4479,53	22.10.2021	4544,90	23.12.2021	4725,79	23.02.2022	4225,50
24.08.2021	4486,23	25.10.2021	4566,48	24.12.2021	4758,49	24.02.2022	4288,70
25.08.2021	4496,19	26.10.2021	4574,79	27.12.2021	4791,19	25.02.2022	4384,65
26.08.2021	4470,00	27.10.2021	4551,68	28.12.2021	4786,35	28.02.2022	4373,94
27.08.2021	4509,37	28.10.2021	4596,42	29.12.2021	4793,06	01.03.2022	4306,26
30.08.2021	4528,79	29.10.2021	4605,38	30.12.2021	4778,73	02.03.2022	4386,54
31.08.2021	4522,68	01.11.2021	4613,67	31.12.2021	4766,18	03.03.2022	4363,49
01.09.2021	4524,09	02.11.2021	4630,65	03.01.2022	4796,56	04.03.2022	4328,87
02.09.2021	4536,95	03.11.2021	4660,57	04.01.2022	4793,54	07.03.2022	4201,09
03.09.2021	4535,43	04.11.2021	4680,06	05.01.2022	4700,58	08.03.2022	4170,70
06.09.2021	4527,73	05.11.2021	4697,53	06.01.2022	4696,05	09.03.2022	4277,88
07.09.2021	4520,03	08.11.2021	4701,70	07.01.2022	4677,03	10.03.2022	4259,52
08.09.2021	4514,07	09.11.2021	4685,25	10.01.2022	4670,29	11.03.2022	4204,31
09.09.2021	4493,28	10.11.2021	4646,71	11.01.2022	4713,07	14.03.2022	4173,11
10.09.2021	4458,58	11.11.2021	4649,27	12.01.2022	4726,35	15.03.2022	4262,45
13.09.2021	4468,73	12.11.2021	4682,85	13.01.2022	4659,03		
14.09.2021	4443,05	15.11.2021	4682,80	14.01.2022	4662,85		
15.09.2021	4480,70	16.11.2021	4700,90	17.01.2022	4619,98		
16.09.2021	4473,75	17.11.2021	4688,67	18.01.2022	4577,11		
17.09.2021	4432,99	18.11.2021	4704,54	19.01.2022	4532,76		
20.09.2021	4357,73	19.11.2021	4697,96	20.01.2022	4482,73		

Příloha B – Vstupní data indexu Dow 30 [47]

Date	Close	Date	Close	Date	Close	Date	Close
16.03.2020	20188,52	15.05.2020	23685,42	16.07.2020	26734,71	16.09.2020	28032,38
17.03.2020	21237,38	18.05.2020	24597,37	17.07.2020	26671,95	17.09.2020	27901,98
18.03.2020	19898,92	19.05.2020	24206,86	20.07.2020	26680,87	18.09.2020	27657,42
19.03.2020	20087,19	20.05.2020	24575,9	21.07.2020	26840,4	21.09.2020	27147,7
20.03.2020	19173,98	21.05.2020	24474,12	22.07.2020	27005,84	22.09.2020	27288,18
23.03.2020	18591,93	22.05.2020	24465,16	23.07.2020	26652,33	23.09.2020	26763,13
24.03.2020	20704,91	25.05.2020	24730,14	24.07.2020	26469,89	24.09.2020	26815,44
25.03.2020	21200,55	26.05.2020	24995,11	27.07.2020	26584,77	25.09.2020	27173,96
26.03.2020	22552,17	27.05.2020	25548,27	28.07.2020	26379,28	28.09.2020	27584,06
27.03.2020	21636,78	28.05.2020	25400,64	29.07.2020	26539,57	29.09.2020	27452,66
30.03.2020	22327,48	29.05.2020	25383,11	30.07.2020	26313,65	30.09.2020	27781,7
31.03.2020	21917,16	01.06.2020	25475,02	31.07.2020	26428,32	01.10.2020	27816,9
01.04.2020	20943,51	02.06.2020	25742,65	03.08.2020	26664,4	02.10.2020	27682,81
02.04.2020	21413,44	03.06.2020	26269,89	04.08.2020	26828,47	05.10.2020	28148,64
03.04.2020	21052,53	04.06.2020	26281,82	05.08.2020	27201,52	06.10.2020	27772,76
06.04.2020	22679,99	05.06.2020	27110,98	06.08.2020	27386,98	07.10.2020	28303,46
07.04.2020	22653,86	08.06.2020	27572,44	07.08.2020	27433,48	08.10.2020	28425,51
08.04.2020	23433,57	09.06.2020	27272,3	10.08.2020	27791,44	09.10.2020	28586,9
09.04.2020	23719,37	10.06.2020	26989,99	11.08.2020	27686,91	12.10.2020	28837,52
10.04.2020	23555,07	11.06.2020	25128,17	12.08.2020	27976,84	13.10.2020	28679,81
13.04.2020	23390,77	12.06.2020	25605,54	13.08.2020	27896,72	14.10.2020	28514
14.04.2020	23949,76	15.06.2020	25763,16	14.08.2020	27931,02	15.10.2020	28494,2
15.04.2020	23504,35	16.06.2020	26289,98	17.08.2020	27844,91	16.10.2020	28606,31
16.04.2020	23537,68	17.06.2020	26119,61	18.08.2020	27778,07	19.10.2020	28195,42
17.04.2020	24242,49	18.06.2020	26080,1	19.08.2020	27692,88	20.10.2020	28308,79
20.04.2020	23650,44	19.06.2020	25871,46	20.08.2020	27739,73	21.10.2020	28210,82
21.04.2020	23018,88	22.06.2020	26024,96	21.08.2020	27930,33	22.10.2020	28363,66
22.04.2020	23475,82	23.06.2020	26156,1	24.08.2020	28308,46	23.10.2020	28335,57
23.04.2020	23515,26	24.06.2020	25445,94	25.08.2020	28248,44	26.10.2020	27685,38
24.04.2020	23775,27	25.06.2020	25745,6	26.08.2020	28331,92	27.10.2020	27463,19
27.04.2020	24133,78	26.06.2020	25015,55	27.08.2020	28492,27	28.10.2020	26519,95
28.04.2020	24101,55	29.06.2020	25595,8	28.08.2020	28653,87	29.10.2020	26659,11
29.04.2020	24633,86	30.06.2020	25812,88	31.08.2020	28430,05	30.10.2020	26501,6
30.04.2020	24345,72	01.07.2020	25734,97	01.09.2020	28645,66	02.11.2020	26925,05
01.05.2020	23723,69	02.07.2020	25827,36	02.09.2020	29100,5	03.11.2020	27480,03
04.05.2020	23749,76	03.07.2020	26057,2	03.09.2020	28292,73	04.11.2020	27847,66
05.05.2020	23883,09	06.07.2020	26287,03	04.09.2020	28133,31	05.11.2020	28390,18
06.05.2020	23664,64	07.07.2020	25890,18	07.09.2020	27817,1	06.11.2020	28323,4
07.05.2020	23875,89	08.07.2020	26067,28	08.09.2020	27500,89	09.11.2020	29157,97
08.05.2020	24331,32	09.07.2020	25706,09	09.09.2020	27940,47	10.11.2020	29420,92
11.05.2020	24221,99	10.07.2020	26075,3	10.09.2020	27534,58	11.11.2020	29397,63
12.05.2020	23764,78	13.07.2020	26085,8	11.09.2020	27665,64	12.11.2020	29080,17
13.05.2020	23247,97	14.07.2020	26642,59	14.09.2020	27993,33	13.11.2020	29479,81
14.05.2020	23625,34	15.07.2020	26870,1	15.09.2020	27995,6	16.11.2020	29950,44

Date	Close	Date	Close	Date	Close	Date	Close
17.11.2020	29783,35	18.01.2021	30872,39	19.03.2021	32627,97	20.05.2021	34084,15
18.11.2020	29438,42	19.01.2021	30930,52	22.03.2021	32731,2	21.05.2021	34207,84
19.11.2020	29483,23	20.01.2021	31188,38	23.03.2021	32423,15	24.05.2021	34393,98
20.11.2020	29263,48	21.01.2021	31176,01	24.03.2021	32420,06	25.05.2021	34312,46
23.11.2020	29591,27	22.01.2021	30996,98	25.03.2021	32619,48	26.05.2021	34323,05
24.11.2020	30046,24	25.01.2021	30960	26.03.2021	33072,88	27.05.2021	34464,64
25.11.2020	29872,47	26.01.2021	30937,04	29.03.2021	33171,37	28.05.2021	34529,45
26.11.2020	29891,42	27.01.2021	30303,17	30.03.2021	33066,96	31.05.2021	34552,38
27.11.2020	29910,37	28.01.2021	30603,36	31.03.2021	32981,55	01.06.2021	34575,31
30.11.2020	29638,64	29.01.2021	29982,62	01.04.2021	33153,21	02.06.2021	34600,38
01.12.2020	29823,92	01.02.2021	30211,91	02.04.2021	33340,2	03.06.2021	34577,04
02.12.2020	29883,79	02.02.2021	30687,48	05.04.2021	33527,19	04.06.2021	34756,39
03.12.2020	29969,52	03.02.2021	30723,6	06.04.2021	33430,24	07.06.2021	34630,24
04.12.2020	30218,26	04.02.2021	31055,86	07.04.2021	33446,26	08.06.2021	34599,82
07.12.2020	30069,79	05.02.2021	31148,24	08.04.2021	33503,57	09.06.2021	34447,14
08.12.2020	30173,88	08.02.2021	31385,76	09.04.2021	33800,6	10.06.2021	34466,24
09.12.2020	30068,81	09.02.2021	31375,83	12.04.2021	33745,4	11.06.2021	34479,6
10.12.2020	29999,26	10.02.2021	31437,8	13.04.2021	33677,27	14.06.2021	34393,75
11.12.2020	30046,37	11.02.2021	31430,7	14.04.2021	33730,89	15.06.2021	34299,33
14.12.2020	29861,55	12.02.2021	31458,4	15.04.2021	34035,99	16.06.2021	34033,67
15.12.2020	30199,31	15.02.2021	31490,58	16.04.2021	34200,67	17.06.2021	33823,45
16.12.2020	30154,54	16.02.2021	31522,75	19.04.2021	34077,63	18.06.2021	33290,08
17.12.2020	30303,37	17.02.2021	31613,02	20.04.2021	33821,3	21.06.2021	33876,97
18.12.2020	30179,05	18.02.2021	31493,34	21.04.2021	34137,31	22.06.2021	33945,58
21.12.2020	30216,45	19.02.2021	31494,32	22.04.2021	33815,9	23.06.2021	33874,24
22.12.2020	30015,51	22.02.2021	31521,69	23.04.2021	34043,49	24.06.2021	34196,82
23.12.2020	30129,83	23.02.2021	31537,35	26.04.2021	33981,57	25.06.2021	34433,84
24.12.2020	30199,87	24.02.2021	31961,86	27.04.2021	33984,93	28.06.2021	34283,27
25.12.2020	30301,92	25.02.2021	31402,01	28.04.2021	33820,38	29.06.2021	34292,29
28.12.2020	30403,97	26.02.2021	30932,37	29.04.2021	34060,36	30.06.2021	34502,51
29.12.2020	30335,67	01.03.2021	31535,51	30.04.2021	33874,85	01.07.2021	34633,53
30.12.2020	30409,56	02.03.2021	31391,52	03.05.2021	34113,23	02.07.2021	34786,35
31.12.2020	30606,48	03.03.2021	31270,09	04.05.2021	34133,03	05.07.2021	34681,86
01.01.2021	30415,19	04.03.2021	30924,14	05.05.2021	34230,34	06.07.2021	34577,37
04.01.2021	30223,89	05.03.2021	31496,3	06.05.2021	34548,53	07.07.2021	34681,79
05.01.2021	30391,6	08.03.2021	31802,44	07.05.2021	34777,76	08.07.2021	34421,93
06.01.2021	30829,4	09.03.2021	31832,74	10.05.2021	34742,82	09.07.2021	34870,16
07.01.2021	31041,13	10.03.2021	32297,02	11.05.2021	34269,16	12.07.2021	34996,18
08.01.2021	31097,97	11.03.2021	32485,59	12.05.2021	33587,66	13.07.2021	34888,79
11.01.2021	31008,69	12.03.2021	32778,64	13.05.2021	34021,45	14.07.2021	34933,23
12.01.2021	31068,69	15.03.2021	32953,46	14.05.2021	34382,13	15.07.2021	34987,02
13.01.2021	31060,47	16.03.2021	32825,95	17.05.2021	34327,79	16.07.2021	34687,85
14.01.2021	30991,52	17.03.2021	33015,37	18.05.2021	34060,66	19.07.2021	33962,04
15.01.2021	30814,26	18.03.2021	32862,3	19.05.2021	33896,04	20.07.2021	34511,99

Date	Close	Date	Close	Date	Close	Date	Close
21.07.2021	34798	21.09.2021	33919,84	22.11.2021	35619,25	21.01.2022	34265,37
22.07.2021	34823,35	22.09.2021	34258,32	23.11.2021	35813,8	24.01.2022	34364,5
23.07.2021	35061,55	23.09.2021	34764,82	24.11.2021	35804,38	25.01.2022	34297,73
26.07.2021	35144,31	24.09.2021	34798	25.11.2021	35351,86	26.01.2022	34168,09
27.07.2021	35058,52	27.09.2021	34869,37	26.11.2021	34899,34	27.01.2022	34160,78
28.07.2021	34930,93	28.09.2021	34299,99	29.11.2021	35135,94	28.01.2022	34725,47
29.07.2021	35084,53	29.09.2021	34390,72	30.11.2021	34483,72	31.01.2022	35131,86
30.07.2021	34935,47	30.09.2021	33843,92	01.12.2021	34022,04	01.02.2022	35405,24
02.08.2021	34838,16	01.10.2021	34326,46	02.12.2021	34639,79	02.02.2022	35629,33
03.08.2021	35116,4	04.10.2021	34002,92	03.12.2021	34580,08	03.02.2022	35111,16
04.08.2021	34792,67	05.10.2021	34314,67	06.12.2021	35227,03	04.02.2022	35089,74
05.08.2021	35064,25	06.10.2021	34416,99	07.12.2021	35719,43	07.02.2022	35091,13
06.08.2021	35208,51	07.10.2021	34754,94	08.12.2021	35754,75	08.02.2022	35462,78
09.08.2021	35101,85	08.10.2021	34746,25	09.12.2021	35754,69	09.02.2022	35768,06
10.08.2021	35264,67	11.10.2021	34496,06	10.12.2021	35970,99	10.02.2022	35241,59
11.08.2021	35484,97	12.10.2021	34378,34	13.12.2021	35650,95	11.02.2022	34738,06
12.08.2021	35499,85	13.10.2021	34377,81	14.12.2021	35544,18	14.02.2022	34566,17
13.08.2021	35515,38	14.10.2021	34912,56	15.12.2021	35927,43	15.02.2022	34988,84
16.08.2021	35625,4	15.10.2021	35294,76	16.12.2021	35897,64	16.02.2022	34934,27
17.08.2021	35343,28	18.10.2021	35258,61	17.12.2021	35365,44	17.02.2022	34312,03
18.08.2021	34960,69	19.10.2021	35457,31	20.12.2021	34932,16	18.02.2022	34079,18
19.08.2021	34894,12	20.10.2021	35609,34	21.12.2021	35492,7	21.02.2022	33837,90
20.08.2021	35120,08	21.10.2021	35603,08	22.12.2021	35753,89	22.02.2022	33596,61
23.08.2021	35335,71	22.10.2021	35677,02	23.12.2021	35950,56	23.02.2022	33131,76
24.08.2021	35366,26	25.10.2021	35741,15	24.12.2021	36126,47	24.02.2022	33223,83
25.08.2021	35405,5	26.10.2021	35756,88	27.12.2021	36302,38	25.02.2022	34058,75
26.08.2021	35213,12	27.10.2021	35490,69	28.12.2021	36398,21	28.02.2022	33892,6
27.08.2021	35455,8	28.10.2021	35730,48	29.12.2021	36488,63	01.03.2022	33294,95
30.08.2021	35399,84	29.10.2021	35819,56	30.12.2021	36398,08	02.03.2022	33891,35
31.08.2021	35360,73	01.11.2021	35913,84	31.12.2021	36338,3	03.03.2022	33794,66
01.09.2021	35312,53	02.11.2021	36052,63	03.01.2022	36585,06	04.03.2022	33614,8
02.09.2021	35443,82	03.11.2021	36157,58	04.01.2022	36799,65	07.03.2022	32817,38
03.09.2021	35369,09	04.11.2021	36124,23	05.01.2022	36407,11	08.03.2022	32632,64
06.09.2021	35234,55	05.11.2021	36327,95	06.01.2022	36236,47	09.03.2022	33286,25
07.09.2021	35100	08.11.2021	36432,22	07.01.2022	36231,66	10.03.2022	33174,07
08.09.2021	35031,07	09.11.2021	36319,98	10.01.2022	36068,87	11.03.2022	32944,19
09.09.2021	34879,38	10.11.2021	36079,94	11.01.2022	36252,02	14.03.2022	32945,24
10.09.2021	34607,72	11.11.2021	35921,23	12.01.2022	36290,32	15.03.2022	33544,34
13.09.2021	34869,63	12.11.2021	36100,31	13.01.2022	36113,62		
14.09.2021	34577,57	15.11.2021	36087,45	14.01.2022	35911,81		
15.09.2021	34814,39	16.11.2021	36142,22	17.01.2022	35640,14		
16.09.2021	34751,32	17.11.2021	35931,05	18.01.2022	35368,47		
17.09.2021	34584,88	18.11.2021	35870,95	19.01.2022	35028,65		
20.09.2021	33970,47	19.11.2021	35601,98	20.01.2022	34715,39		

Příloha C – Vstupní data indexu Nikkei 225 [48]

Date	Close	Date	Close	Date	Close	Date	Close
16.03.2020	17002,04	15.05.2020	20037,47	16.07.2020	22770,36	16.09.2020	23475,53
17.03.2020	17011,53	18.05.2020	20133,73	17.07.2020	22696,42	17.09.2020	23319,37
18.03.2020	16726,55	19.05.2020	20433,45	20.07.2020	22717,48	18.09.2020	23360,3
19.03.2020	16552,83	20.05.2020	20595,15	21.07.2020	22884,22	21.09.2020	23212,98
20.03.2020	16720,31	21.05.2020	20552,31	22.07.2020	22751,61	22.09.2020	23287,64
23.03.2020	16887,78	22.05.2020	20388,16	23.07.2020	22590,11	23.09.2020	23346,49
24.03.2020	18092,35	25.05.2020	20741,65	24.07.2020	22527,39	24.09.2020	23087,82
25.03.2020	19546,63	26.05.2020	21271,17	27.07.2020	22715,85	25.09.2020	23204,62
26.03.2020	18664,6	27.05.2020	21419,23	28.07.2020	22657,38	28.09.2020	23511,62
27.03.2020	19389,43	28.05.2020	21916,31	29.07.2020	22397,11	29.09.2020	23539,1
30.03.2020	19084,97	29.05.2020	21877,89	30.07.2020	22339,23	30.09.2020	23185,12
31.03.2020	18917,01	01.06.2020	22062,39	31.07.2020	21710	01.10.2020	23184,93
01.04.2020	18065,41	02.06.2020	22325,61	03.08.2020	22195,38	02.10.2020	23029,9
02.04.2020	17818,72	03.06.2020	22613,76	04.08.2020	22573,66	05.10.2020	23312,14
03.04.2020	17820,19	04.06.2020	22695,74	05.08.2020	22514,85	06.10.2020	23433,73
06.04.2020	18576,3	05.06.2020	22863,73	06.08.2020	22418,15	07.10.2020	23422,82
07.04.2020	18950,18	08.06.2020	23178,1	07.08.2020	22329,94	08.10.2020	23647,07
08.04.2020	19353,24	09.06.2020	23091,03	10.08.2020	22540,09	09.10.2020	23619,69
09.04.2020	19345,77	10.06.2020	23124,95	11.08.2020	22750,24	12.10.2020	23558,69
10.04.2020	19498,5	11.06.2020	22472,91	12.08.2020	22843,96	13.10.2020	23601,78
13.04.2020	19043,4	12.06.2020	22305,48	13.08.2020	23249,61	14.10.2020	23626,73
14.04.2020	19638,81	15.06.2020	21530,95	14.08.2020	23289,36	15.10.2020	23507,23
15.04.2020	19550,09	16.06.2020	22582,21	17.08.2020	23096,75	16.10.2020	23410,63
16.04.2020	19290,2	17.06.2020	22455,76	18.08.2020	23051,08	19.10.2020	23671,13
17.04.2020	19897,26	18.06.2020	22355,46	19.08.2020	23110,61	20.10.2020	23567,04
20.04.2020	19669,12	19.06.2020	22478,79	20.08.2020	22880,62	21.10.2020	23639,46
21.04.2020	19280,78	22.06.2020	22437,27	21.08.2020	22920,3	22.10.2020	23474,27
22.04.2020	19137,95	23.06.2020	22549,05	24.08.2020	22985,51	23.10.2020	23516,59
23.04.2020	19429,44	24.06.2020	22534,32	25.08.2020	23296,77	26.10.2020	23494,34
24.04.2020	19262	25.06.2020	22259,79	26.08.2020	23290,86	27.10.2020	23485,8
27.04.2020	19783,22	26.06.2020	22512,08	27.08.2020	23208,86	28.10.2020	23418,51
28.04.2020	19771,19	29.06.2020	21995,04	28.08.2020	22882,65	29.10.2020	23331,94
29.04.2020	19982,44	30.06.2020	22288,14	31.08.2020	23139,76	30.10.2020	22977,13
30.04.2020	20193,69	01.07.2020	22121,73	01.09.2020	23138,07	02.11.2020	23295,48
01.05.2020	19619,35	02.07.2020	22145,96	02.09.2020	23247,15	03.11.2020	23495,36
04.05.2020	19926,93	03.07.2020	22306,48	03.09.2020	23465,53	04.11.2020	23695,23
05.05.2020	20081,51	06.07.2020	22714,44	04.09.2020	23205,43	05.11.2020	24105,28
06.05.2020	20152,75	07.07.2020	22614,69	07.09.2020	23089,95	06.11.2020	24325,23
07.05.2020	19674,77	08.07.2020	22438,65	08.09.2020	23274,13	09.11.2020	24839,84
08.05.2020	20179,09	09.07.2020	22529,29	09.09.2020	23032,54	10.11.2020	24905,59
11.05.2020	20390,66	10.07.2020	22290,81	10.09.2020	23235,47	11.11.2020	25349,6
12.05.2020	20366,48	13.07.2020	22784,74	11.09.2020	23406,49	12.11.2020	25520,88
13.05.2020	20267,05	14.07.2020	22587,01	14.09.2020	23559,3	13.11.2020	25385,87
14.05.2020	19914,78	15.07.2020	22945,5	15.09.2020	23454,89	16.11.2020	25906,93

Date	Close	Date	Close	Date	Close	Date	Close
17.11.2020	26014,62	18.01.2021	28242,21	19.03.2021	29792,05	20.05.2021	28098,25
18.11.2020	25728,14	19.01.2021	28633,46	22.03.2021	29174,15	21.05.2021	28317,83
19.11.2020	25634,34	20.01.2021	28523,26	23.03.2021	28995,92	24.05.2021	28364,61
20.11.2020	25527,37	21.01.2021	28756,86	24.03.2021	28405,52	25.05.2021	28553,98
23.11.2020	25846,48	22.01.2021	28631,45	25.03.2021	28729,88	26.05.2021	28642,19
24.11.2020	26165,59	25.01.2021	28822,29	26.03.2021	29176,7	27.05.2021	28549,01
25.11.2020	26296,86	26.01.2021	28546,18	29.03.2021	29384,52	28.05.2021	29149,41
26.11.2020	26537,31	27.01.2021	28635,21	30.03.2021	29432,7	31.05.2021	28860,08
27.11.2020	26644,71	28.01.2021	28197,42	31.03.2021	29178,8	01.06.2021	28814,34
30.11.2020	26433,62	29.01.2021	27663,39	01.04.2021	29388,87	02.06.2021	28946,14
01.12.2020	26787,54	01.02.2021	28091,05	02.04.2021	29854	03.06.2021	29058,11
02.12.2020	26800,98	02.02.2021	28362,17	05.04.2021	30089,25	04.06.2021	28941,52
03.12.2020	26809,37	03.02.2021	28646,5	06.04.2021	29696,63	07.06.2021	29019,24
04.12.2020	26751,24	04.02.2021	28341,95	07.04.2021	29730,79	08.06.2021	28963,56
07.12.2020	26547,44	05.02.2021	28779,19	08.04.2021	29708,98	09.06.2021	28860,8
08.12.2020	26467,08	08.02.2021	29388,5	09.04.2021	29768,06	10.06.2021	28958,56
09.12.2020	26817,94	09.02.2021	29505,93	12.04.2021	29538,73	11.06.2021	28948,73
10.12.2020	26756,24	10.02.2021	29562,93	13.04.2021	29751,61	14.06.2021	29161,8
11.12.2020	26652,52	11.02.2021	29541,5	14.04.2021	29620,99	15.06.2021	29441,3
14.12.2020	26732,44	12.02.2021	29520,07	15.04.2021	29642,69	16.06.2021	29291,01
15.12.2020	26687,84	15.02.2021	30084,15	16.04.2021	29683,37	17.06.2021	29018,33
16.12.2020	26757,4	16.02.2021	30467,75	19.04.2021	29685,37	18.06.2021	28964,08
17.12.2020	26806,67	17.02.2021	30292,19	20.04.2021	29100,38	21.06.2021	28010,93
18.12.2020	26763,39	18.02.2021	30236,09	21.04.2021	28508,55	22.06.2021	28884,13
21.12.2020	26714,42	19.02.2021	30017,92	22.04.2021	29188,17	23.06.2021	28874,89
22.12.2020	26436,39	22.02.2021	30156,03	23.04.2021	29020,63	24.06.2021	28875,23
23.12.2020	26524,79	23.02.2021	29913,87	26.04.2021	29126,23	25.06.2021	29066,18
24.12.2020	26668,35	24.02.2021	29671,7	27.04.2021	28991,89	28.06.2021	29048,02
25.12.2020	26656,61	25.02.2021	30168,27	28.04.2021	29053,97	29.06.2021	28812,61
28.12.2020	26854,03	26.02.2021	28966,01	29.04.2021	28933,3	30.06.2021	28791,53
29.12.2020	27568,15	01.03.2021	29663,5	30.04.2021	28812,63	01.07.2021	28707,04
30.12.2020	27444,17	02.03.2021	29408,17	03.05.2021	29344,6	02.07.2021	28783,28
31.12.2020	27157,65	03.03.2021	29559,1	04.05.2021	29402,51	05.07.2021	28598,19
01.01.2021	27240,77	04.03.2021	28930,11	05.05.2021	29204,03	06.07.2021	28643,21
04.01.2021	27258,38	05.03.2021	28864,32	06.05.2021	29331,37	07.07.2021	28366,95
05.01.2021	27158,63	08.03.2021	28743,25	07.05.2021	29357,82	08.07.2021	28118,03
06.01.2021	27055,94	09.03.2021	29027,94	10.05.2021	29518,34	09.07.2021	27940,42
07.01.2021	27490,13	10.03.2021	29036,56	11.05.2021	28608,59	12.07.2021	28569,02
08.01.2021	28139,03	11.03.2021	29211,64	12.05.2021	28147,51	13.07.2021	28718,24
11.01.2021	28151,69	12.03.2021	29717,83	13.05.2021	27448,01	14.07.2021	28608,49
12.01.2021	28164,34	15.03.2021	29766,97	14.05.2021	28084,47	15.07.2021	28279,09
13.01.2021	28456,59	16.03.2021	29921,09	17.05.2021	27824,83	16.07.2021	28003,08
14.01.2021	28698,26	17.03.2021	29914,33	18.05.2021	28406,84	19.07.2021	27652,74
15.01.2021	28519,18	18.03.2021	30216,75	19.05.2021	28044,45	20.07.2021	27388,16

Date	Close	Date	Close	Date	Close	Date	Close
21.07.2021	27548	21.09.2021	29839,71	22.11.2021	29774,11	21.01.2022	27522,26
22.07.2021	27795,06	22.09.2021	29639,4	23.11.2021	29538,39	24.01.2022	27588,37
23.07.2021	27791,9	23.09.2021	29944,11	24.11.2021	29302,66	25.01.2022	27131,34
26.07.2021	27833,29	24.09.2021	30248,81	25.11.2021	29499,28	26.01.2022	27011,33
27.07.2021	27970,22	27.09.2021	30240,06	26.11.2021	28751,62	27.01.2022	26170,3
28.07.2021	27581,66	28.09.2021	30183,96	29.11.2021	28283,92	28.01.2022	26717,34
29.07.2021	27782,42	29.09.2021	29544,29	30.11.2021	27821,76	31.01.2022	27001,98
30.07.2021	27283,59	30.09.2021	29452,66	01.12.2021	27935,62	01.02.2022	27078,48
02.08.2021	27781,02	01.10.2021	28771,07	02.12.2021	27753,37	02.02.2022	27533,6
03.08.2021	27641,83	04.10.2021	28444,89	03.12.2021	28029,57	03.02.2022	27241,31
04.08.2021	27584,08	05.10.2021	27822,12	06.12.2021	27927,37	04.02.2022	27439,99
05.08.2021	27728,12	06.10.2021	27528,87	07.12.2021	28455,6	07.02.2022	27248,87
06.08.2021	27820,04	07.10.2021	27678,21	08.12.2021	28860,62	08.02.2022	27284,52
09.08.2021	27854,1	08.10.2021	28048,94	09.12.2021	28725,47	09.02.2022	27579,87
10.08.2021	27888,15	11.10.2021	28498,2	10.12.2021	28437,77	10.02.2022	27696,08
11.08.2021	28070,51	12.10.2021	28230,61	13.12.2021	28640,49	11.02.2022	27387,84
12.08.2021	28015,02	13.10.2021	28140,28	14.12.2021	28432,64	14.02.2022	27079,59
13.08.2021	27977,15	14.10.2021	28550,93	15.12.2021	28459,72	15.02.2022	26865,19
16.08.2021	27523,19	15.10.2021	29068,63	16.12.2021	29066,32	16.02.2022	27460,4
17.08.2021	27424,47	18.10.2021	29025,46	17.12.2021	28545,68	17.02.2022	27232,87
18.08.2021	27585,91	19.10.2021	29215,52	20.12.2021	27937,81	18.02.2022	27122,07
19.08.2021	27281,17	20.10.2021	29255,55	21.12.2021	28517,59	21.02.2022	26910,87
20.08.2021	27013,25	21.10.2021	28708,58	22.12.2021	28562,21	22.02.2022	26449,61
23.08.2021	27494,24	22.10.2021	28804,85	23.12.2021	28798,37	23.02.2022	26210,22
24.08.2021	27732,1	25.10.2021	28600,41	24.12.2021	28782,59	24.02.2022	25970,82
25.08.2021	27724,8	26.10.2021	29106,01	27.12.2021	28676,46	25.02.2022	26476,5
26.08.2021	27742,29	27.10.2021	29098,24	28.12.2021	29069,16	28.02.2022	26526,82
27.08.2021	27641,14	28.10.2021	28820,09	29.12.2021	28906,88	01.03.2022	26844,72
30.08.2021	27789,29	29.10.2021	28892,69	30.12.2021	28791,71	02.03.2022	26393,03
31.08.2021	28089,54	01.11.2021	29647,08	31.12.2021	29040,61	03.03.2022	26577,27
01.09.2021	28451,02	02.11.2021	29520,9	03.01.2022	28900,1	04.03.2022	25985,47
02.09.2021	28543,51	03.11.2021	29657,64	04.01.2022	29301,79	07.03.2022	25221,41
03.09.2021	29128,11	04.11.2021	29794,37	05.01.2022	29332,16	08.03.2022	24790,95
06.09.2021	29659,89	05.11.2021	29611,57	06.01.2022	28487,87	09.03.2022	24717,53
07.09.2021	29916,14	08.11.2021	29507,05	07.01.2022	28478,56	10.03.2022	25690,4
08.09.2021	30181,21	09.11.2021	29285,46	10.01.2022	28350,52	11.03.2022	25162,78
09.09.2021	30008,19	10.11.2021	29106,78	11.01.2022	28222,48	14.03.2022	25307,85
10.09.2021	30381,84	11.11.2021	29277,86	12.01.2022	28765,66	15.03.2022	25346,48
13.09.2021	30447,37	12.11.2021	29609,97	13.01.2022	28489,13		
14.09.2021	30670,1	15.11.2021	29776,8	14.01.2022	28124,28		
15.09.2021	30511,71	16.11.2021	29808,12	17.01.2022	28333,52		
16.09.2021	30323,34	17.11.2021	29688,33	18.01.2022	28257,25		
17.09.2021	30500,05	18.11.2021	29598,66	19.01.2022	27467,23		
20.09.2021	30169,88	19.11.2021	29745,87	20.01.2022	27772,93		