

**Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní**

Možnosti modelování extrémních škod

Bc. Kateřina Štefaňaková

**Diplomová práce
2011**

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: Bc. Kateřina ŠTEFAŇAKOVÁ
Osobní číslo: E09851
Studijní program: N6209 Systémové inženýrství a informatika
Studijní obor: Pojistné inženýrství
Název tématu: Možnosti modelování extrémních škod
Zadávající katedra: Ústav matematiky

Zásady pro vypracování:

Modelování škod pomocí kvantilových funkcí.
Paretovo rozdělení extrémních škod.
Využití pořádkových statistik.
Simulace extrémních hodnot.
Využití MS Excel a Statgraphics Centurion XV.

Rozsah grafických prací: —
Rozsah pracovní zprávy: cca 50 stran
Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

- BOLAND, P. J.:** Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science. London: Chapman&Hall/CRC, 2007. ISBN 1-58488-695-1.
GILCHRIST, W. G.: Statistical Modelling with Quantile Functions. New York: Chapman&Hall/CRC, 2000. ISBN 1-58488-174-7.
PACÁKOVÁ, V.: Aplikovaná poistná štatistika - 3. prepracované a doplnené vydanie. Bratislava: IURA EDITION, 2004. ISBN 80-8078-004-8.
PACÁKOVÁ, V., LINDA, B.: Simulations of Extreme Losses in Non-Life instance. E+M Ekonomie a Management, 4/2009.
SIPKOVA, L., SODOMOVA, E.: Modelovanie kvantilovymi funkciami. Vydavateľstvo Ekonom, 2007. ISBN 978-80-225-2346-2.

Vedoucí diplomové práce: **prof. RNDr. Viera Pacáková, Ph.D.**
Ústav matematiky

Datum zadání diplomové práce: **30. června 2010**

Termín odevzdání diplomové práce: **6. května 2011**



doc. Ing. Renáta Myšková, Ph.D.

děkanka

L.S.



doc. Ing. Jiří Křupka, Ph.D.

vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 4. srpna 2010

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 18. 4. 2011

Kateřina Štefaňaková

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych poděkovala své vedoucí práce prof. RNDr. Vieri Pacákové, Ph.D. za odborné vedení, náměty a připomínky, které mi poskytla v průběhu celého období zpracování mé diplomové práce.

SOUHRN

Práce se věnuje modelování individuálních škod v neživotním pojištění. Cílem práce byl teoretický popis metod modelování extrémních škod a jejich praktická aplikace. Hlavní částí této práce je praktická ukázka na reálných údajích s využitím programu Microsoft Office Excel 2007 a statistického programového balíku Statgraphics Centurion XV.

KLÍČOVÁ SLOVA

Katastrofy, odhady parametrů, testy dobré shody, modelování extrémních škod, kvantilová funkce, pořádková statistika, metoda blokového maxima, metoda extrémů překračujících práh, zajištění.

TITLE

Possibilities of Modelling of the Extreme Losses

ABSTRACT

This Thesis deals with the modelling of the individual losses in non-life insurance. Its aim was to find a suitable probabilistic model for the extremely high losses. The main part of this Thesis is practical example on real data using Microsoft Office Excel 2007 and statistical program package STATGRAPHICS Centurion XV.

KEYWORDS

Catastrophes, estimation of parameters, goodness-of-fit tests, modelling of the extreme losses, quantile fiction, order statistics, method of block-maxima, peaks over threshold method, reinsurance.

OBSAH

Úvod	8
1 Katastrofické události a jejich důsledky	10
1.1 Členění katastrof	10
1.2 Vývoj katastrofických událostí	11
1.3 Zemětřesení a tsunami v Japonsku	16
2 Modelování extrémních škod	18
2.1 Kontext	18
2.1.1 Aktuárské problémy související s hranicí r, R	19
2.2 Postup při modelování výšky škod	20
2.2.1 Grafická analýza údajů	20
2.2.2 Odhady parametrů rozdělení pravděpodobnosti	20
2.2.3 Testy dobré shody	22
3 Možnosti modelování extrémních škod	24
3.1 Modelování extrémních škod pomocí kvantilových funkcí	24
3.1.1 Kvantilová funkce	24
3.1.2 Pořádková statistika	25
3.1.3 Simulace	27
3.2 Metoda blokového maxima	29
3.3 Metoda extrémů překračujících práh	32
4 Zajištění	35
4.1 Význam a úloha zajištění	36
4.2 Formy zajištění	37
4.2.1 Fakultativní zajištění	37
4.2.2 Obligatorní zajištění	37
4.3 Typy zajištění	37
4.3.1 Proporcionální zajištění	37
4.3.2 Neproporcionální zajištění	38
4.4 CatXL zajištění	38
5 Aplikace metod modelování extrémních škod	41
5.1 Modelování extrémních škod pomocí kvantilových funkcí	41
5.1.1 Základní charakteristiky náhodného výběru	41
5.1.2 Rozdělení pravděpodobnosti	44
5.1.3 Porovnání zvolených typů rozdělení pravděpodobnosti	49
5.1.4 Testování náhodného výběru pomocí testů dobré shody	50

5.1.5	Simulace 20 nejvyšších škod.....	53
5.2	Metoda extrémů překračujících práh.....	59
5.2.1	Základní charakteristiky náhodného výběru	59
5.2.2	Rozdělení pravděpodobnosti náhodného výběru.....	61
5.2.3	Metoda extrémů překračujících práh.....	63
	Závěr.....	68
	Seznam použité literatury	70
	Seznam obrázků.....	72
	Seznam tabulek.....	74
	Seznam použitých zkratk	75
	Použité programy.....	76

Úvod

Pojišťovnictví se rozvíjí od doby, kdy se po mořích plavily první obchodní lodě. Jedná se o specifické odvětví ekonomiky, zabývající se eliminací určitých rizik. Pojišťovnictví je jedna z klíčových oblastí národního hospodářství, přičemž se jedná o velmi stabilní a prosperující oblast. Pojištění z ekonomického hlediska znamená vytváření rezerv z příspěvků pojistníků, které následně slouží k úhradám vzniklých pojištěných škod. Základním významem pojištění je zmírnění případně odstranění negativních důsledků nahodilých událostí.

Pojistné události mají charakter náhodných událostí, tedy základem pojistných věd je teorie pravděpodobnosti a metody statistické indukce. Matematika používaná v pojistné praxi se nazývá pojistnou matematikou. Za modernější přístup k pojistné matematice lze považovat teorii rizika, neboť spojuje metody teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky, operačního výzkumu i teorie rozhodování. Základem této diplomové práce jsou právě postupy založené na teorii rizika v oblasti neživotního pojištění.

Katastrofy přírodní i ty, které způsobil člověk, ohrožují celý svět. Tyto události mají významný negativní vliv nejen na majetek, přírodu, společnost, ale také na lidské životy. Z pohledu pojišťoven resp. zajišťoven se takovéto události označují jako události katastrofické (příp. mimořádné). Problematika modelování extrémních škod patří mezi důležitý předmět činnosti pojišťoven či zajišťoven. Vhodné určení výšky pojistného, vlastního vrubu pojišťovny či hraničních bodů pojistné vrstvy ovlivňuje, v případě vzniku extrémních škod, postavení pojišťoven, příp. zajišťoven na trhu.

Cílem práce je teoretický popis a praktická aplikace metod modelování extrémních škod.

První kapitola je věnována všeobecnému pohledu na katastrofické události, jejich členění, přehledu některých nejzávažnějších katastrof a vývoje přírodních katastrof. Samotná podkapitola je zaměřena také na nejaktuálnější přírodní katastrofu roku 2011, tedy zemětřesení a přílivovou vlnu tsunami v Japonsku.

Předmětem druhé kapitoly je především kontext modelování extrémních škod a postup při tomto modelování. Důležitou částí jsou nástroje grafické analýzy dat, odhady parametrů rozdělení pravděpodobnosti a testy shody, kterými se ověřuje shoda předpokládaného rozdělení s empirickým rozdělením pravděpodobnosti.

Další kapitola je zaměřena na možnosti modelování extrémních škod. Nachází se zde teoretický popis jednotlivých metod, jako je metoda modelování pomocí kvantilových funkcí, metoda blokového maxima a metoda extrémů překračujících práh.

Jedna z kapitol práce je také věnována zajištění. Jsou v ní definovány základní pojmy, význam, formy a typy zajištění. Hlavní důraz je kladen na CatXL zajištění, které má největší význam právě při katastrofických rizicích.

Poslední kapitola je věnována aplikaci teoretických poznatků na konkrétních souborech údajů. Praktická ukázka metody modelování extrémních škod je aplikována na údajích o výškách škod havarijního pojištění. Analýza je zpracována v statistickém programu Statgraphics Centurion XV a simulace 20 nejvyšších škod v programu Microsoft Excel 2007. Tyto údaje již však nejsou vhodné pro zpracování praktické ukázky metody extrémů překračujících práh. V tomto případě analyzované údaje představují výšky škod způsobených požáry v Dánsku v letech 1980 – 1990.

1 Katastrofické události a jejich důsledky

Katastrofickou událost lze ztotožňovat také s pojmem *mimořádná událost*. Pro takovéto události jsou typické tři základní rysy:

- relativní zřídkaost,
- závažné důsledky,
- náhodný výskyt.

Definice: Mimořádnou událostí se rozumí škodlivé působení sil a jevů vyvolaných činností člověka, přírodními vlivy, a také havárie, které ohrožují život, zdraví, majetek nebo životní prostředí a vyžadují provedení záchranných a likvidačních prací. [31]

Definice: Katastrofa je událost, která negativně ovlivňuje velké množství lidí (ztráty na životech, majetku). [27]

Rozlišujeme dvě hlavní skupiny katastrof:

1. přírodní katastrofy;
2. katastrofy způsobené člověkem (antropogenní).

1.1 Členění katastrof

Přírodní katastrofa se vyznačuje negativním působením přírodních vlivů ať již na lidských životech, nebo na majetku. Tyto katastrofy postihují pevnou Zemi, vodstvo, ale i atmosféru.

Antropogenní katastrofy vznikají v důsledku lidské činnosti (jeho chyby či nedbalosti) a i zde mohou být důsledky značné nejen na majetku, ale i na lidských životech a zdraví.

1. Přírodní katastrofy
 - 1.1. Kosmické katastrofy
 - 1.1.1. Hypernova
 - 1.1.2. Impakt mimozemského tělesa
 - 1.1.3. Sluneční erupce
 - 1.2. Meteorologické katastrofy
 - 1.2.1. Blizzard
 - 1.2.2. Bouřka
 - 1.2.3. Krupobití
 - 1.2.4. Horko
 - 1.2.5. Sucho
 - 1.2.6. Tornádo

- 1.2.7. Tropická bouře a hurikán
 - 1.2.8. Zima
- 1.3. Geologické katastrofy
 - 1.3.1. Sesuv
 - 1.3.2. Sopečná erupce
 - 1.3.3. Lavina
 - 1.3.4. Závrt
 - 1.3.5. Zemětřesení
 - 1.3.6. Tsunami
- 1.4. Ostatní katastrofy
 - 1.4.1. Epidemie a pandemie
 - 1.4.2. Hladomor
 - 1.4.3. Kobyly
 - 1.4.4. Povodeň
 - 1.4.5. Požár
- 2. Antropogenní katastrofy
 - 2.1. Průmyslové katastrofy
 - 2.1.1. Ekologické
 - 2.1.2. Jaderné
 - 2.1.3. Chemické
 - 2.2. Dopravní katastrofy
 - 2.2.1. Dopravní nehody
 - 2.2.2. Letecké nehody
 - 2.2.3. Kosmické neštěstí
 - 2.3. Násilné jednání
 - 2.3.1. Teroristické útoky
 - 2.3.2. Války
 - 2.3.3. Žhářství
 - 2.4. Další
 - 2.4.1. Výpadky energie

1.2 Vývoj katastrofických událostí

Již z názvu vyplývá, že katastrofické události (mimořádné události) jsou příznačné především malou pravděpodobností výskytu. Bohužel se v posledních desetiletích přihodilo

několik mimořádných událostí, které měli především charakter extrémně vysokých škod, s nepříznivým dopadem nejen pro samotné oběti těchto katastrof, ale také pro pojišťovny a zajišťovny.

Úhrada katastrofických škod ze strany pojišťoven je ovlivněna nejen místem výskytu události, ale zejména přístupem ke krytí těchto rizik. Vývoj v posledních letech poukazuje na možnost vzniku katastrofických škod v oblastech, kde se to významně nepředvíдалo a zároveň výskyt takového typu událostí, které se neočekávaly.

Výskyt a rozsah událostí s katastrofickými dopady se zvyšuje. Počet přírodních katastrof se za posledních 30 let několikanásobně zvýšil. Nerostou ovšem pouze škody majtkové, ale přibývá také významně lidských obětí, a to až o 68 %.

Zemětřesení či sopečné erupce ohrožují lidské životy v podobném měřítku, jako tomu bylo dříve, záplavy se ovšem v posledních letech vyskytují mnohem častěji než například před 30 lety. V roce 1980 bylo zaznamenáno na 60 povodní a větrných bouří, v roce 2006 jich bylo již 240.

Dle odhadů zajišťovny Swiss Re pro rok 2010, přírodní katastrofy i ty, které zavinili lidé, vzrostly oproti roku 2009 o 60 %. Pojišťovny stály na 43 miliard USD. Rok 2010 byl charakterizován z hlediska přírodních katastrof zejména silnými zemětřeseními. Zemětřesení bylo příčinou téměř třetiny všech přírodních katastrof v roce 2010. Mimo to došlo také např. k rozsáhlým povodním. Celkem připravily přírodní katastrofy o život 295 000 lidí. Pro srovnání v roce 2009 to bylo 11 000 obětí.

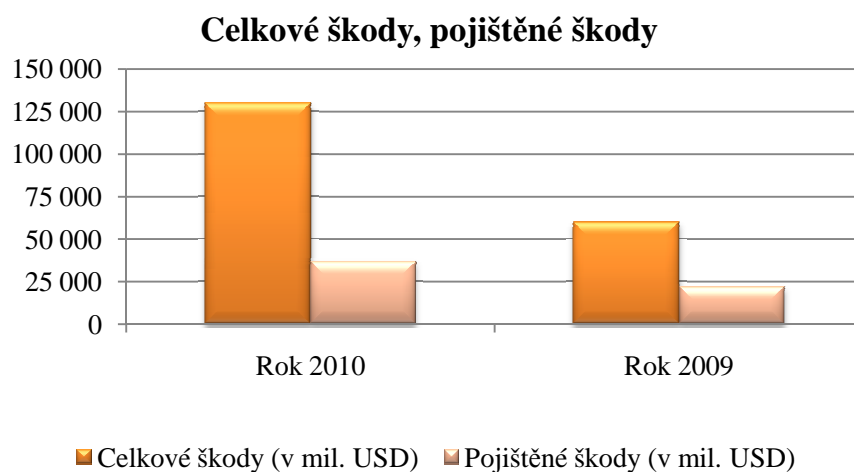
Pro pojišťovny byl rok 2010, co se týče objemu vyplaceného pojistného plnění šestý nejnákladnější od roku 1980.

Tabulka 1 – Přehled nejničivějších přírodních katastrof v dějinách lidstva [28]

Událost	Rok	Země	Počet obětí (v mil.)	Rozsah
Záplavy na Žluté řece	1887	Čína	2,7	Smeteno z povrchu země 600 vesnic a měst, zaplaveno dalších 1 500 vesnic
Zemětřesení v Šan-si	1556	Čína	0,83	850 km široká oblast totálně zničena (zasáhnuto kolem 100 kantonů)
Zemětřesení v Tang-Šan	1976	Čína	0,7	poškozeno 80 % budov (oblast o šířce 8 km)
Tajfun Bhola	1970	východní Pákistán	0,5	škody za 405 mil. dolarů
Tajfun (zemětřesení) v Kalkatě	1737	Indie	0,3	potopeno 20 tis. lodí, poničeno město i okolní vesnice
Tsunami v Indickém moři	2004	Indie, Indonésie, Tchaj-wan	0,27	škody v řádech stovek miliard dolarů
Zemětřesení v Aleppu	1138	Sýrie	0,23	město zcela zničeno, zasáhnuto i několik dalších měst

Tabulka 2 – Přírodní katastrofy v roce 2010 [18]

	Rok 2010	Rok 2009	Průměr za posledních 10 let (2000-2009)	Průměr za posledních 30 let (1980-2009)
Počet událostí	950	900	785	615
Celkové škody (v mil. USD)	130 000	60 000	110 000	95 000
Pojištěné škody (v mil. USD)	37 000	22 000	35 000	23 000
Počet obětí	295 000	11 000	77 000	66 000



Obrázek 1 – Přírodní katastrofy v letech 2009, 2010 [Dle tabulky 2]

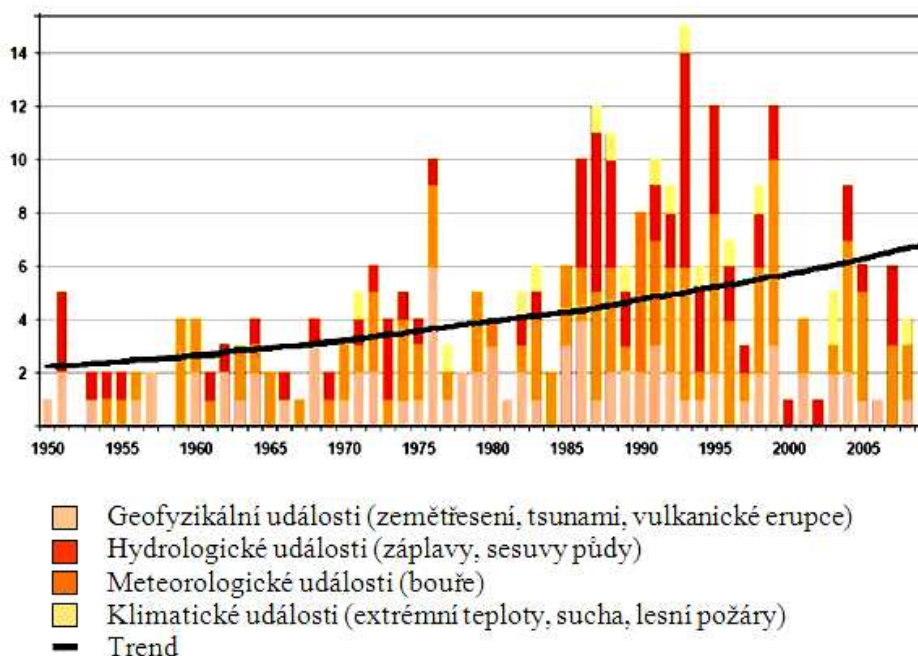
Tabulka 3 – Přehled největších přírodních katastrof roku 2010 – klasifikace dle celkových škod [18]

Datum	Země	Událost	Počet obětí	Celkové škody (v mil. USD)	Pojištěné škody (v mil. USD)
27.2.	Chile	zemětřesení, tsunami	520	30 000	8 000
Červenec – září	Pákistán	záplavy	1 760	9 500	25
12.1.	Haiti	zemětřesení	222 570	8 000	200
26.-28.2.	Evropa	sněhová bouře	65	6 100	3 100
Červen	China	záplavy	260	6 100	

Tabulka 4 – Přehled největších přírodních katastrof roku 2010 – klasifikace dle pojištěných škod [18]

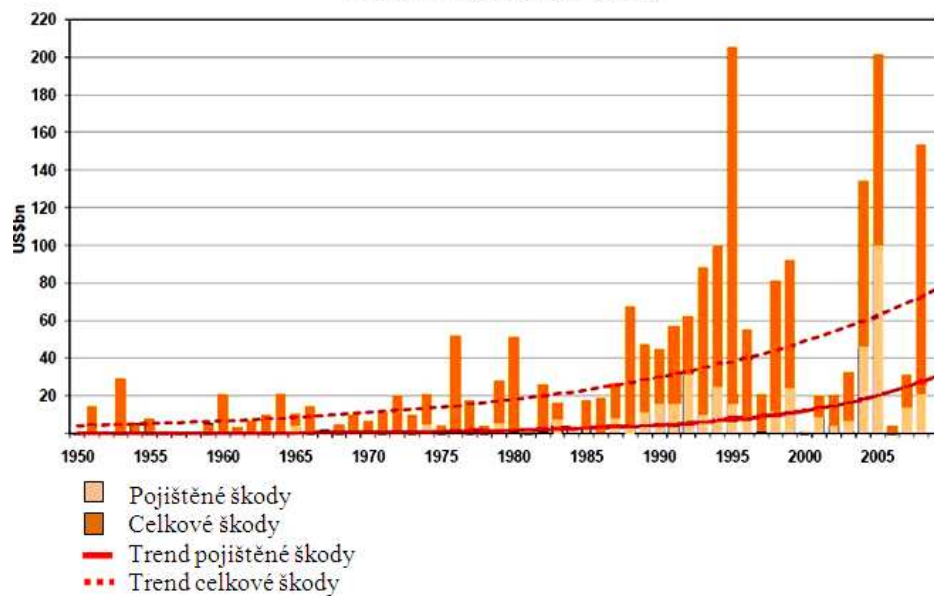
Datum	Země	Událost	Počet obětí	Celkové škody (v mil. USD)	Pojištěné škody (v mil. USD)
27.2.	Chile	zemětřesení, tsunami	520	30 000	8 000
3.9.	Nový Zéland	zemětřesení		3 700	3 300
26.-28.2.	Evropa	sněhová bouře	65	6 100	3 100
12.-16.5.	USA	silné bouře, krupobití	3	2 700	2 000
4.-6.10.	USA	silné bouře, tornáda		2 000	1 450

Největší přírodní katastrofy 1950 – 2009



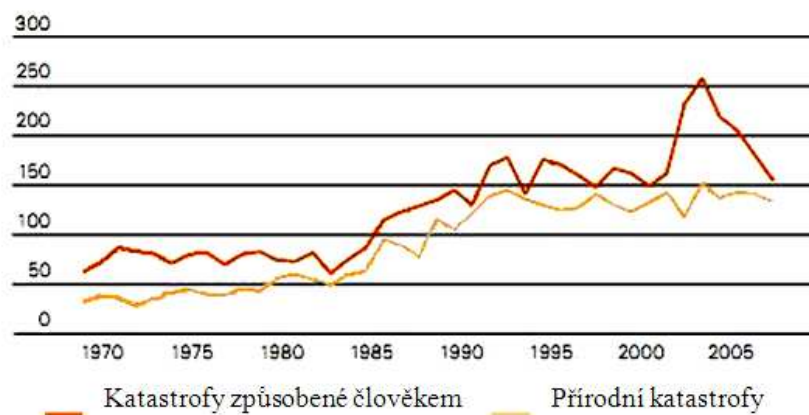
Obrázek 2 – Největší přírodní katastrofy 1950 – 2009 [18]

Největší přírodní katastrofy 1950 – 2009 - celkové a pojištěné škody



Obrázek 3 – Největší přírodní katastrofy 1950 – 2009 – celkové a pojištěné škody [18]

Počet katastrof v letech 1970 - 2009



Obrázek 4 – Počet katastrof v letech 1970 – 2009 [30]

Důsledek katastrofických událostí bývá pro společnost velice silný a také dlouhotrvající. Nejen, že je třeba identifikovat příčiny těchto událostí a vytvářet preventivní plány na ochranu (např. povodňové plány), je také nutné hledat řešení pro krytí velkých finančních škod, které vznikají v jejich důsledku.

Hlavním objektem řešení se v pojišťovnách stává právě krytí rizik vzniklých v důsledku extrémních událostí. Pojistitelé si kupují ochranu svých rizik od velkých společností nazývaných zajišťovny. Zajištění je věnována jedna z následujících kapitol.

1.3 Zemětřesení a tsunami v Japonsku

Posledním příkladem katastrofické události a extrémních škod způsobených přírodními živly se stalo zemětřesení a následná vlna tsunami v Japonsku. Zemětřesení, které udeřilo 11. 3. 2011 na východním pobřeží ostrova Honšú, bylo páté nejsilnější v novodobé historii (od roku 1990). Dosáhlo síly až 8,9 stupně Richterovy škály. Následně zemi zasáhly až desetimetrové vlny tsunami. Před touto ničivou vlnou bylo varováno celé Tichomoří. Avšak nikde z ostatních zasažených zemí nebyly napáchány větší škody.

Vlna tsunami zničila a poškodila mimo aut, lodí a domů, také jadernou elektrárnu Fukušima. Vyřadila z provozu chladicí systém a reaktory se začaly přehřívat. V celém areálu elektrárny poté postupně nastalo několik výbuchů a požárů. Vytvořil se radioaktivní mrak, který zamířil nad Tichý oceán. Z dvacetikilometrové vzdálenosti okolo elektrárny muselo být evakuováno na 200 tisíc lidí.

Japonské jaderné elektrárny nejsou pojištěny proti riziku zemětřesení. Dle zajišťovacích smluv s japonskými energetickými společnostmi jsou ze smluv vyloučeny škody způsobené zemětřesením, přílivovými vlnami a sopečnou činností.

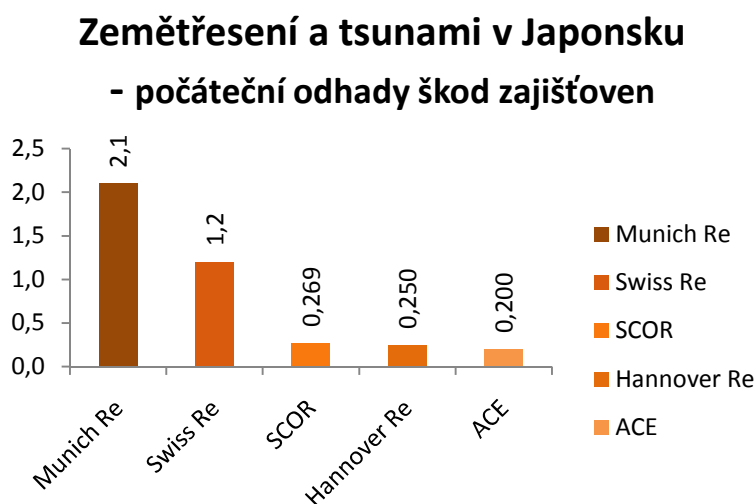
Společnost AIR Worldwide odhaduje prozatím výšku pojištěných škod na 20 až 30 miliard USD. [2] Celkové škody je prozatím těžké přesně sumarizovat, Světová banka je ale odhaduje na 122 miliard a 235 miliard USD. [29] Zastavit či omezit výrobu musel i tamní průmysl, především automobilky. Celý japonský akciový trh zaznamenal historický pokles.

Dle odhadů společnosti EQECAT Inc. (Catastrophe Risk Modeling Software and Consulting), která se zabývá katastrofickým modelováním škod, by se měl rozsah škod v Japonsku pohybovat mezi 12 a 25 miliardami USD. Tento odhad zahrnuje následky zemětřesení, tsunami, požárů včetně škod na poničených automobilech, lodích a na lidských životech či zraněních. Největší položku z pojištěných škod tvoří škody majtkové. Škody způsobené zemětřesením se nejspíše budou pohybovat mezi 8 a 15 miliardami USD. Částky 1 miliardy USD dosáhnout škody na automobilech, na lodích to bude 1 až 3 miliardy USD. Na životní pojištění budou připadat škody v rozsahu 2 až 3 miliard USD. A úrazové pojištění by mělo pojišťovny stát 1 až 2 miliardy USD. [9]

Prvním odhadem japonské vlády bylo, že děsivá katastrofa bude mít za následek až 10 000 lidských obětí. Podle posledních zveřejněných údajů se mluví o více než 18 000 mrtvých. Nadále se ovšem pohřešuje 15 512 osob.

Dle názorů českých ekonomů dojde na finančním trhu k největšímu propadu akcií japonských pojišťoven a jejich zajišťoven. Tyto finanční instituce budou mít nemalé ztráty, neboť je nutné, aby pokryly své závazky z uzavřených pojistek. Pojišťovny mají svá rizika pojištěna u zajišťoven, proto by mohly tuto těžkou situaci zvládnout bez větších potíží. Je zřejmé, že se vše projeví na jejich hospodářských výsledcích za rok 2011.

Tíhu japonské přírodní katastrofy ponесou především největší zajišťovny. Zajišťovna Swiss Re odhaduje, že její očekávané plnění bude 1,2 miliardy USD. Zajišťovna Munich Re se zmiňuje o ztrátě 2,1 miliardy USD. Odhady zajišťoven jsou zobrazeny na obrázku 5. Tato čísla poukazují na význam japonského pojistného trhu na globální zajištění. Zajišťovny prodávaly japonským pojišťovnám nejrozsáhlejší zajištění pro případ zemětřesení.



Obrázek 5 – Odhady podílů zajišťoven na škodách z přírodní katastrofy v Japonsku 2011 (mld. USD)
[1, 13, 18, 23, 30]

Obnova zemětřesením a vlnou tsunami poničeného Japonska může trvat až pět let. Dle odhadů Světové banky by ale dopady na samotnou japonskou ekonomiku mohly mít pouze dočasný charakter, který se projeví zejména zpomalením tempa hospodářského růstu. Tato situace by měla trvat pouze do poloviny roku, ve druhém pololetí by se měl hrubý domácí produkt naopak začít postupně zvyšovat. Jedná se ovšem pouze o prozatímní odhad dle zkušeností z minulých let.

2 Modelování extrémních škod

Počet katastrofických událostí a s nimi spojených škod v posledních letech stále roste, a proto je pro pojišťovny důležité zejména modelování takovýchto škod.

2.1 Kontext

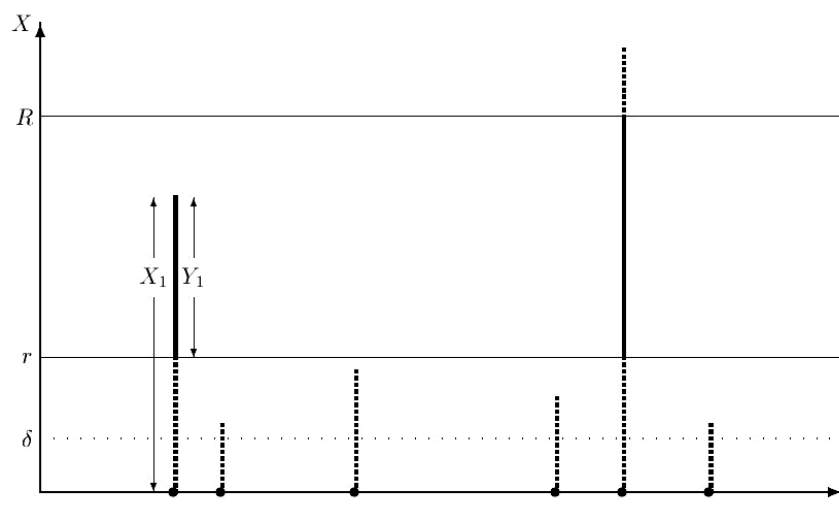
Předpoklad: Pojistné škody jsou vyjádřené náhodnými veličinami X_1, X_2, \dots . Jedná se o nezávislé a zároveň identicky rozdělené náhodné proměnné. Jejich společná distribuční funkce je označena:

$$F_X(x) = P[X \leq x] \text{ kde } x > 0.$$

Hlavním zájmem pojišťovny je hranice významně vysokých škod s dolními a horními hraničními body r a R . Přičemž r (R) je dostatečně vysoké a zároveň platí nerovnost $R > r$. Pak pro pojistná plnění Y_i , reprezentovaná náhodnými veličinami X_i , platí:

$$Y_i = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } 0 < X_i < r, \\ X_i - r & \text{jestliže } r \leq X_i \leq R, \\ R - r & \text{jestliže } R \leq X_i < \infty. \end{cases}$$

Z obrázku je patrný princip vzniku pojistného plnění v pojišťovně. Pouze dvě škody z šesti zaznamenaných splňují sledovanou úroveň r , a generují tak nenulové pojistné plnění. Jedna škoda dokonce přesahuje i horní hranici R , a generuje plně hrazenou pojistnou platbu.



Obrázek 6 – Možné realizace škod v budoucím časovém období [11]

2.1.1 Aktuárské problémy související s hranicí $[r, R]$

1. *Oceňovací problém.* Kolik by za pojistné krytí měl zákazník zaplatit?
2. *Problém optimálního stanovení hraničních bodů.* Jak velké r je třeba určit, aby byla pojistná plnění vyšší než pevně stanovená suma a nepřesahovala stanovenou frekvenci?

Při hledání odpovědí na tyto otázky je nutné zejména stanovit pojistné období a frekvenci škod během tohoto období. X_1, X_2, \dots, X_N jsou škody, které vzniknou v průběhu pojistného období. Celkové pojistné plnění lze vyjádřit vztahem:

$$S = \sum_{i=1}^N Y_i.$$

Problém ocenění se zjednoduší na hledání základních momentů celkové proměnné S .

$$\text{Cena pojistného krytí} = E(S) + k \cdot D(S),$$

kde $E(S)$ je očekávaná platba (nettopojistné), $k \cdot D(S)$ je riziková přírážka.

Přičemž $E(S)$ vyjádříme vztahem:

$$E(S) = E(Y_i) \cdot E(N).$$

Co se týká vytyčení hraničních bodů pojistného krytí, je důležité stanovit r tak, že v průběhu pojistného období celkové nenulové pojistné plnění vzniká s pravděpodobností menší než p . což lze vyjádřit vztahem:

$$P(Z > 0) < p.$$

Pro značně vysoké pojistné plnění se stanovuje hodnota p velmi malá. Záležitost určení hraničních bodů se odkazuje na odhad vysokých kvantilů distribuční funkce extrémních škod $F_X(x)$.

K úspěšnému řešení obou výše zmíněných problémů je třeba dobrý odhad nejen distribuční funkce extrémních škod, ale také odhad distribuční funkce počtu škod N .

2.2 Postup při modelování výšky škod

Nejprve je nutné odhadnout parametry rozdělení a otestovat shodu empirického rozdělení s předpokládaným teoretickým rozdělením. Všeobecný postup při výběru vhodného rozdělení výšky škod je shrnut v následujících třech krocích:

1. návrh předpokládaného typu rozdělení pravděpodobnosti (např. na základě grafických metod),
2. odhad parametrů vybraného rozdělení (např. metodou momentů, metodou maximální věrohodnosti),
3. ověření vhodného výběru rozdělení pomocí testů dobré shody (např. Kolmogorovův-Smirnovův test, Pearsonův χ^2 test).

2.2.1 Grafická analýza údajů

Tato část popisuje jednotlivé metody grafického zobrazení analyzovaných dat.

Graf časové řady umožňuje vizuálně identifikovat extrémní hodnoty a zároveň přibližný čas jejich výskytu. Může také poskytovat obraz o případném shromažďování extrémních hodnot v krátkém časovém období, což by ovšem znamenalo porušení předpokladu nezávislosti a identického rozdělení náhodného výběru.

Histogram je sloupcový graf, na jehož základě lze odhadnout přibližný tvar rozdělení výběrových údajů.

Q-Q graf umožňuje posoudit shodu výběrového rozdělení, jež je charakterizováno kvantilovou funkcí s kvantilovou funkcí zvoleného teoretického rozdělení. Jestliže leží body na přímce, můžeme data považovat za výběr z daného rozdělení pravděpodobnosti. Pokud se ovšem body od přímky vzdalují, jedná se o jiné rozdělení pravděpodobnosti.

2.2.2 Odhady parametrů rozdělení pravděpodobnosti¹

Všechna rozdělení pravděpodobnosti výšky pojistných plnění X jsou závislá na jednom, případně více parametrech. Při hledání vhodného pravděpodobnostního modelu je nejprve nutné určit právě tyto parametry. Tato úloha se řeší na základě neúplných informací o individuálních pojistných situacích, proto se zde mluví o statistické indukci, tedy o *odhadu parametrů rozdělení*.

¹ Celá kapitola čerpána z [21]

K odhadu parametrů lze využít některou z následujících metod.

1. *Metoda maximální věrohodnosti.* Nejvyužívanější metoda odhadů parametrů. Odhady, získané pomocí této metody, mají velmi dobré vlastnosti. Jedná se tedy o velmi kvalitní odhady.

Definice: Maximálně věrohodný odhad $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(\mathbf{x})$ je takový vektor Θ , který maximalizuje $L(\Theta; \mathbf{x})$, resp. $l(\Theta; \mathbf{x})$.

Funkci věrohodnosti $L(\Theta; \mathbf{x})$ vyjadřuje vztah:

$$L(\Theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \Theta),$$

a její přirozený logaritmus

$$l(\Theta; \mathbf{x}) = \ln L(\Theta; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \Theta).$$

Maximálně věrohodný odhad má tyto vlastnosti:

- $\hat{\Theta}$ má asymptoticky normální rozdělení pravděpodobnosti,
- $\hat{\Theta}$ je asymptoticky neskreslený,
- $\hat{\Theta}$ je asymptoticky vydatný,
- $\hat{\Theta}$ je konzistentní,
- $\hat{\Theta}$ je invariantní, tzn. že $\hat{\gamma}(\Theta) = \gamma(\hat{\Theta})$, přičemž $\gamma(\Theta)$ je libovolná funkce odhadovaných parametrů.

2. *Metoda momentů.* Podstatně jednodušší metoda než metoda maximální věrohodnosti. Použití má zejména při numerické náročnosti. Takto získané výsledky nemají ovšem vlastnosti dobrých odhadů.

Při této metodě jsou nahrazeny charakteristiky základního souboru odpovídajícími výběrovými charakteristikami.

3. *Metoda kvantilů.* Základem této metody je nahrazení kvantilů, resp. percentilů Q_k rozdělení s distribuční funkcí $F(x; \Theta)$ s neznámým vektorem parametrů Θ ,

kvantily q_k , určenými v empirickém výběrovém souboru. Odhady parametrů metodou kvantilů lze najít řešením systému rovnic:

$$F(q_k) = \frac{k}{100} \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, 99.$$

Jestliže se odhaduje p parametrů, je třeba určit p kvantilů z výběrového souboru a řešit systém p rovnic. Při odhadu jednoho neznámého parametru se využívá obvykle medián, při odhadu dvou parametrů dolní (q_{25}) a horní (q_{75}) kvartil.

Při všech pravděpodobnostních modelech výšky pojistných plnění jsou nejlepší odhady získané metodou maximální věrohodnosti. Při odhadu metodou momentů nebo metodou kvantilů mají odhady z různých výběrových souborů velmi vysokou variabilitu. Je patrné, že jsou málo vydatné, což vyplývá z dost pravděpodobného výskytu extrémních hodnot.

Použití metody maximální věrohodnosti je značně numericky náročné. Proto se doporučuje využít některý ze statistických softwarů.

2.2.3 Testy dobré shody²

Testy dobré shody poskytují přesnější posouzení shody teoretického rozdělení s empirickým rozdělením analyzovaných údajů.

Na ověření vhodnosti zvoleného rozdělení lze použít některý z těchto testů:

1. Pearsonův χ^2 test dobré shody,
2. Kolmogorovův-Smirnovův test dobré shody.

Pearsonův χ^2 test dobré shody

Tento test vyžaduje dostatečně velký rozsah základního souboru. Výsledkem testu je přijetí, příp. zamítnutí nulové hypotézy:

H_0 : náhodná proměnná X má rozdělení s hustotou $f(x; \theta)$.

Principem testu jsou empirické údaje x_1, x_2, \dots, x_n náhodné proměnné X , rozříděné do k skupin s četnostmi O_1, O_2, \dots, O_k . Pak testovací kritérium má tvar:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

² Celá kapitola čerpána z [21]

kde náhodná veličina χ^2 má χ^2 rozdělení pravděpodobnosti s $k - 1 - p$ stupni volnosti, přičemž p je počet odhadnutých parametrů předpokládaného rozdělení.

Nulová hypotéza se přijímá na hladině významnosti α za předpokladu, že je splněna nerovnost $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(k - 1 - p)$. Naopak nepotvrzení nerovnosti naznačuje platnost alternativní hypotézy, tedy že náhodná proměnná X nemá předpokládané rozdělení pravděpodobnosti.

Kolmogorovův-Smirnovův test

Jestliže je možné použít oba dva testy dobré shody, pak Kolmogorovův-Smirnovův test má vyšší sílu testu, tedy vyšší pravděpodobnost zamítnutí nulové hypotézy jestliže rozdělení skutečně není vhodné.

Jestliže základní soubor x_1, x_2, \dots, x_n pochází ze spojitého rozdělení, a rozsah n není dostačující pro využití Pearsonova χ^2 testu, potom je možno použít Kolmogorovův-Smirnovův test, při němž se testuje nulová hypotéza:

$$H_0: \text{náhodná proměnná } X \text{ má rozdělení s distribuční funkcí } F(x).$$

Tento test vychází z netříděných, vzestupně uspořádaných údajů:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}.$$

Tomuto uspořádanému základnímu souboru náleží empirická distribuční funkce, definována vztahem:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_{(1)}, \\ \frac{j}{n} & x_j < x \leq x_{(j+1)} \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1 & x > x_{(n)}. \end{cases}$$

Testovací kritérium pak lze vypočítat jako:

$$d_n = \sup |F_n(x) - F(x)|.$$

Nulová hypotéza se přijímá na hladině významnosti α , jestliže $d_n < d_{n; 1-\alpha}$.

3 Možnosti modelování extrémních škod

Z výše popsaných katastrofických rizik je zřejmé, že výskyt takovýchto událostí má během posledních let stoupající tendenci. Mimo to je patrné, že i počet pojištěných škod způsobených extrémními událostmi se zvyšuje. Tento zvyšující se trend je velice alarmující pro samotné pojišťovny, které tedy musí hodnoty extrémních škod správně modelovat a následně volit vhodnou možnost krytí takovýchto rizik.

Metod modelování extrémních škod je několik, v následujících kapitolách budou popsány pouze ty nejzákladnější z nich.

3.1 Modelování extrémních škod pomocí kvantilových funkcí

Tato metoda je prozatím jedna z málo využívaných způsobů modelování katastrofických škod.

Rozdělení pravděpodobnosti spojitě náhodné proměnné X vyjadřujeme ve tvaru distribuční funkce, definované vztahem:

$$F(x) = P(X \leq x) = p.$$

Funkci hustoty pravděpodobnosti získáme derivací distribuční funkce:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Nejvhodnějším rozdělením pravděpodobnosti pro modelování pomocí kvantilových funkcí je Paretovo rozdělení, neboť pravděpodobnost nejvyšších hodnot konverguje k nule pomaleji než při rozdělení exponenciálním.

3.1.1 Kvantilová funkce

Definice: Necht' $F(x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny X . Kvantilovou funkcí této náhodné veličiny nazýváme funkci: [16]

$$\tilde{F}(\alpha) = \inf\{x: F(x) \geq \alpha\}, \alpha \in (0; 1).$$

V případě spojitě náhodné veličiny je kvantilová funkce inverzní funkcí k distribuční funkci: [16]

$$Q(p) = F^{-1}(\alpha).$$

Kvantilovou funkci hustoty dostaneme derivací $Q(p)$ podle p :

$$q(p) = \frac{dQ(p)}{dp}.$$

Kvantilová funkce je definována pro každé reálné p , $0 \leq p \leq 1$, tedy pro každou hodnotu pravděpodobnosti p vztahem:

$$Q(p) = x.$$

Kvantilová funkce $Q(p)$ je neklesající funkcí p , pak derivace $q(p)$ je nezápornou funkcí pro $0 \leq p \leq 1$.

Rozdělení vyjádřené ve formě kvantilové distribuční funkce (případně kvantilové funkce hustoty) se nazývá kvantilové rozdělení.

Kvantilová funkce pak přiřadí pravděpodobnosti p právě tu hodnotu x náhodné proměnné X , pro kterou platí vztah distribuční funkce.

Definice: Necht' $Q(p)$ je kvantilová funkce náhodné veličiny X . Číslo $x_p = Q(p)$ nazýváme p -kvantilem náhodné veličiny X , když $F(x_p) = p$. [16]

p -kvantil rozděluje množinu hodnot náhodné proměnné na dvě části, pravděpodobnost ležící vpravo od něj má pravděpodobnost $1 - \alpha$. [16]

3.1.2 Pořádková statistika

Definice: Je dán náhodný výběr $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ z daného rozdělení. Necht' $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ je též náhodný výběr uspořádaný vzestupně podle velikosti. Pak $X_{(i)}$ se nazývá i -tá pořádková statistika, $i = 1, 2, \dots, n$. Vektor $X = (X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)})$ se nazývá uspořádaný výběr z daného rozdělení. [15]

Tyto pořádkové statistiky mají významnou úlohu při modelování právě kvantilovými funkcemi.

Největší zjištěnou hodnotu náhodného výběru představuje náhodná veličina $X_{(n)}$ s distribuční funkcí $F_{(n)}(x) = p_{(n)}$. Potom $F_{(n)}(x) = p_{(n)} = P(X_{(n)} \leq x)$ je pravděpodobnost, že všechna n pozorování náhodné veličiny X jsou menší nebo rovna hodnotě x . Tato pravděpodobnost je pro každou proměnnou rovna p , podle věty o násobení pravděpodobností platí:

$$p_{(n)} = p^n.$$

$$\text{Tedy } p = p_{(n)}^{1/n} \text{ a } F(x) = p = p_{(n)}^{1/n}.$$

Důležitý vztah dostaneme vyjádřením x jako inverzní funkce k $F(x)$ a také k $F_{(n)}(x)$

$$Q_{(n)}(p_{(n)}) = Q\left(p_{(n)}^{\frac{1}{n}}\right).$$

Předpokládejme, že máme r -tou pořádkovou statistiku $X_{(r)}$. Výpočet její kvantilové funkce bude náročnější.

Pravděpodobnost, že nejméně r nezávislých pozorování je menších nebo rovno reálné hodnotě z , je $P(X_{(r)} \leq z)$. Distribuční funkci proměnné $X_{(r)}$ označíme $F_{(r)}(z)$.

Binomická formule $P(s \text{ pozorování } \leq z) = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}$, $p = F(z)$, vyjadřuje Pravděpodobnost, že právě s pozorování je menších nebo rovno hodnotě z .

Funkci $p_{(r)} = \sum_{s=r}^n \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}$ nazýváme *neúplnou beta funkcí* a označujeme ji $p_{(r)} = I(p, r, n - r + 1)$.

Její inverzní funkci můžeme zapsat ve tvaru $p = \text{BETAINV}(p_{(r)}, r, n - r + 1)$.

Poté dostáváme důležitý vztah, kterým je rovnost

$$Q_{(r)}(p_{(r)}) = Q\left(\text{BETAINV}(p_{(r)}, r, n - r + 1)\right).$$

Pravidlo rozdělení pořádkových statistik

Jestliže je náhodný výběr n pozorování, z rozdělení s kvantilovou funkcí $Q(p)$, uspořádaný, pak kvantilová funkce rozdělení r -té pořádkové statistiky je definována vztahem

$$Q_{(r)}(p_{(r)}) = Q\left(\text{BETAINV}(p_{(r)}, r, n - r + 1)\right).$$

Kvantily pořádkových statistik můžeme vyjádřit přímo z kvantilové funkce $Q(p)$. K tomu můžeme využít například statistickou funkci $\text{BETAINV}(p\text{-st}; \alpha; \beta; A; B)$ v tabulkovém procesoru MS Excel.

Na ukázkou si můžeme uvést pár příkladů:

$$- p_{(r)} = 0,5$$

$$Q(\text{BETA}INV(0,5, r, n - r + 1))$$

Jedná se o medián r -té pořádkové statistiky $X_{(r)}$.

$$- p_{(r)} = 0,99$$

$$Q(\text{BETA}INV(0,99, r, n - r + 1))$$

Jedná se 99-tý percentil pořádkové statistiky $X_{(r)}$.

3.1.3 Simulace

Využití počítačových simulací postupem času stále roste. Simulacím nahrává nejen fakt, že umožňují rychle zkoušet různé varianty řešení, ale také že analytické metody pro řešení jsou často omezeny svými možnostmi. Využitím některé ze simulací můžeme minimalizovat rizika chybného rozhodnutí.

Téměř všechny statistické programy, tabulkové procesory a kapesní kalkulačky poskytují jednoduchý způsob generování náhodných čísel. Základní náhodná čísla pocházejí z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a představují náhodná pozorování ze spojitého rovnoměrného rozdělení na tomto intervalu.

Kvantilovou funkci rovnoměrného rozdělení na intervalu hodnot $\langle 0, 1 \rangle$ vyjádříme jednoduchým vztahem

$$S(p) = p, \text{ pro } 0 \leq p \leq 1.$$

Právě pomocí generátoru náhodných čísel můžeme vygenerovat nezávislé hodnoty u_1, u_2, \dots, u_n z rovnoměrného rozdělení. Simulací pak nazýváme použití těchto vygenerovaných čísel v jakémkoliv typu pravděpodobnostního modelu.

Za základ simulace můžeme považovat dvě následující pravidla:

- 1) pravidlo Q-transformace,
- 2) jednotné pravidlo transformace.

Pravidlo Q-transformace

Nechť $z = T(x)$ je neklesající funkce x a $Q(p)$ je kvantilová funkce, pak $T(Q(p))$ je také kvantilová funkce.

Jednotné pravidlo transformace

Nechť U má rovnoměrné rozdělení, pak náhodná proměnná X , kde $x = Q(u)$, má rozdělení s kvantilovou funkcí $Q(p)$. Tedy data a rozdělení mohou být zobrazena generováním z rovnoměrného rozdělení transformací $Q(\cdot)$, kde $Q(p)$ je kvantilová funkce.

Toto pravidlo vyplývá z pravidla Q-transformace, kde je zjištěno, že kvantilová funkce rovnoměrného rozdělení je právě p . Jednotné pravidlo transformace ukazuje, že hodnoty x z jakéhokoliv rozdělení s kvantilovou funkcí $Q(p)$ lze simulovat jako

$$x_i = Q(u_i) \text{ pro } i = 1, 2, \dots, n,$$

kde u_1, u_2, \dots, u_n jsou simulované hodnoty z rovnoměrného rozdělení z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Neklesající charakter $Q(\cdot)$ zajišťuje řádné uspořádání hodnot x . Kvantilová funkce tedy poskytuje způsob, jak simulovat hodnoty pro ta rozdělení, pro něž je explicitní funkcí p .

V řadě aplikací kvantilové funkce v neživotním pojištění se věnuje pozornost zejména na extrémní pozorování z konce rozdělení. Kvantilová funkce umožňuje simulovat pouze nejvyšší hodnoty, aniž bychom simulovali centrální hodnoty náhodné proměnné X .

Předpokládejme pravý konec rozdělení pravděpodobnosti. Prokázali jsme, že rozdělení pravděpodobnosti nejvyšší pozorované hodnoty můžeme vyjádřit vztahem $Q(p^{\frac{1}{n}})$. Tedy nejvyšší hodnotu pozorování simulujeme jako $x_{(n)} = Q(u_{(n)})$, kde $u_{(n)} = v_n^{\frac{1}{n}}$, přičemž v_n je náhodné číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Nyní definujme posloupnost transformovaných proměnných

$$u_{(n)} = v_n^{\frac{1}{n}}$$

$$u_{(n-1)} = (v_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \cdot u_{(n)}$$

$$u_{(n-2)} = (v_{n-2})^{\frac{1}{n-2}} \cdot u_{(n-1)}$$

⋮

přičemž v_i , pro $i = n, n - 1, n - 2, \dots$, je množina hodnot vygenerovaných jako náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení. Následně dle jejich definice hodnoty $u_{(i)}$, pro $i = n, n - 1, n - 2, \dots$, tvoří neklesající posloupnost hodnot

$$u_{(i-1)} < u_{(i)}.$$

Hodnoty $u_{(i)}$ tvoří uspořádanou posloupnost hodnot rovnoměrného rozdělení. Získáme-li jednu hodnotu u_n , pak vztah pro simulaci má tento jednotný tvar:

$$u_{(m)} = (v_m)^{\frac{1}{m}} \cdot u_{(m+1)}, \text{ pro } m = n - 1, n - 2, \dots$$

Pořádkové statistiky pro největší pozorování náhodné proměnné X simulujeme jako

$$x_n = Q(u_{(n)})$$

$$x_{(n-1)} = Q(u_{(n-1)})$$

$$x_{(n-2)} = Q(u_{(n-2)})$$

⋮

.....Zpravidla v každé simulační studii o n pozorování jsou generovány vzorky, jejichž analýza, opakovaná m -krát, poskytuje přehled o jejich celkovém chování. Technika, která je někdy používána jako alternativní, je použití jen jednoho výběru ideálních pozorování, který nazýváme *profil*. Takové pozorování můžeme získat pomocí využití mediánových hodnot

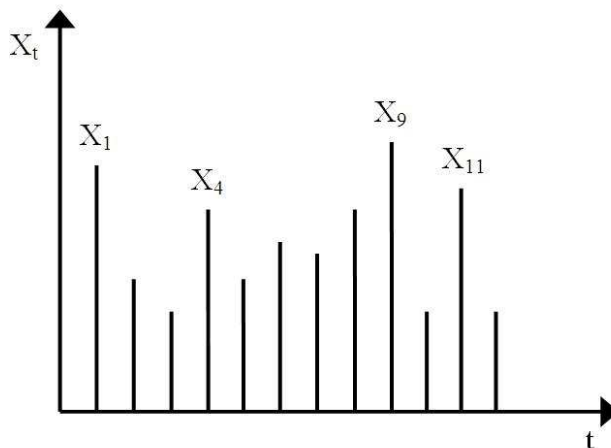
$$M_r u_{(n)} = v_n^{\frac{1}{r}}, r = 1, 2, \dots, n.$$

3.2 Metoda blokového maxima

Jiný přístup k modelování extrémních škod nabízí metoda blokového maxima. V tomto případě se za extrémní hodnoty považují maxima z n nezávislých pozorování, která se získávají v za sebou následujících obdobích stejné délky (např. měsíce, roky).

Potom $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ je *blokové maximum*.

Obrázek ukazuje princip této metody, přičemž hodnoty X_1, X_4, X_9, X_{11} jsou bloková maxima, $M_3 = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.



Obrázek 7 – Metoda blokového maxima [25]

Rozdělení blokového maxima je dáno Fisher-Tippetovou větou.

Fisher-Tippetova věta: Necht' X_1, X_2, \dots, X_n je posloupnost identicky rozdělených náhodných veličin. Jestliže existují konstanty $c_n > 0$ a $d_n \in \mathbb{R}$ a nějaká nedegenerovaná distribuční funkce $H(x)$ taková, že

$$P(c_n^{-1}(M_n - d_n) \leq x) \rightarrow H(x).$$

Potom $H(x)$ přísluší jednomu z následujících tří typů rozdělení:

1) Fréchet

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \leq 0, \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & \text{pro } x > 0, \alpha > 0. \end{cases}$$

2) Weibull

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{-\alpha}\}, & \text{pro } x \leq 0, \alpha > 0, \\ 1, & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

3) Gumbel

$$\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}, x \in \mathbb{R}.$$

Tyto tři typy rozdělení se zdají být velmi odlišné, avšak mezi nimi existuje jednoznačný vztah. Předpokládejme, že $X > 0$, potom:

X má distribuční funkci $\Phi_\alpha(x) \Leftrightarrow \ln X^\alpha$ má distribuční funkci $\Lambda(x) \Leftrightarrow -X^{-1}$ má distribuční funkci $\Psi_\alpha(x)$.

Rozdělení se nazývají *max-stabilní* rozdělení. Zachovávají typ rozdělení pro maximum identicky rozdělených náhodných proměnných.

Jedná se o speciální případy zevšeobecněného rozdělení extrémních hodnot, definovaného následně.

Definice: Distribuční funkce H_ξ definovaná vztahem

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(1 + \xi x\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right\}, & \text{pro } \xi \neq 0, \\ \exp\{-e^{-x}\}, & \text{pro } \xi = 0, \end{cases}$$

kde $1 + \xi x > 0$, se nazývá *zevšeobecněná distribuční funkce extrémních hodnot* (GEV). [26]

Tvar rozdělení H_ξ je významně ovlivňuje parametr ξ , nazývaný *index extrémních hodnot*. Pro různé hodnoty parametru ξ je získáno jedno z rozdělení z Fisher-Tippetovy věty:

- Fréchetovo rozdělení pro $\xi = \alpha^{-1}$, $x > -\xi^{-1}$,
- Weibullovo rozdělení pro $\xi = \alpha^{-1}$, $x < -\xi^{-1}$,
- Gumbelovo rozdělení pro $\xi = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Kladná hodnota ξ znamená „těžké ocasy“. Jestliže $\alpha = \xi^{-1} \in (0, 2)$, pak H_ξ nemá konečný druhý moment. Proto je velice podstatné odhadnout parametr ξ , nebo sestavit interval spolehlivosti, případně vhodný test o jeho hodnotě. Očekávaná hodnota α pro pojistná data se nachází v intervalu (1, 2). [8]

V případě praktických aplikací je vhodnější využít flexibilního rozdělení extrémních hodnot, které je vyjádřeno pomocí tří parametrů ξ, μ, σ :

$$H(x) = \exp\left\{-\left[1 + \xi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right]\right\}.$$

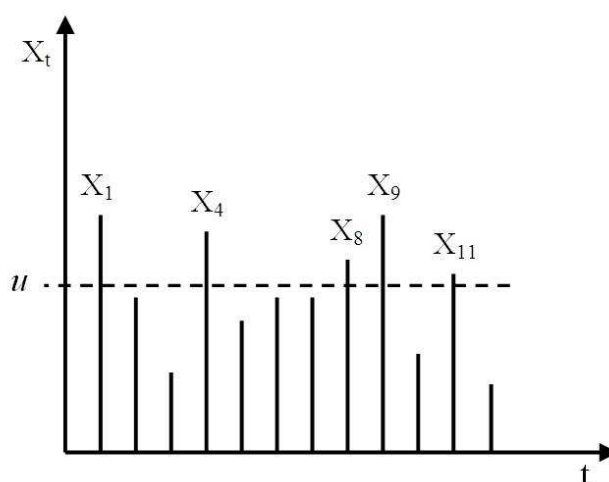
Typy rozdělení, která byla definována výše, mají různý typ „ocasu“ a jsou limitním rozdělením pro maximum některých typů rozdělení:

- Fréchetovo rozdělení – má dlouhý „ocas“, je limitním rozdělením pro maximum Paretova, Cauchyho a Studentova rozdělení.
- Gumbelovo rozdělení – má mírně dlouhý „ocas“, je limitním rozdělením pro maximum exponenciálního, normálního, lognormálního či gama rozdělení.
- Weibullovo rozdělení – má krátký „ocas“, je limitním rozdělením pro maximum rovnoměrného nebo beta rozdělení.

Metoda blokového maxima má jednu významnou nevýhodu, v analýze používá pouze jednu hodnotu pro každý blok, ale v bloku může být také další vysoká hodnota, která není uvažována. Další nevýhodou metody může být to, že vyžaduje velmi velký počet pozorování.

3.3 Metoda extrémů překračujících práh

Základní princip metody extrémů překračujících práh říká, že za extrém jsou považovány všechny hodnoty, které překročí předem zvolený vysoký práh u . Tento princip je znázorněn na obrázku 8, extrémů překračujících práh jsou $X_1, X_4, X_8, X_9, X_{11}$.



Obrázek 8 – Metoda extrémů překračujících práh [25]

Definice: Necht' náhodná veličina X má distribuční funkci $F(x)$ s pravým koncovým bodem $x_F = \sup\{x \in \mathbb{R}; F(x) < \infty\}$. Potom rozdělení extrémů překračujících práh vyjadřuje *podmíněná distribuční funkce*

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x + u) - F(u)}{\bar{F}(u)},$$

pro $0 \leq u < x_F$. [26]

Podmíněná střední hodnota jako funkce zvoleného práhu $e(u)$ se nazývá *funkce průměrných extrémů překračujících práh u* a je definována vztahem:

$$e(u) = E(X - u | X > u).$$

Výpočtový tvar funkce $e(u)$ je:

$$e(u) = \frac{1}{\bar{F}(u)} \cdot \int_u^{x_F} \bar{F}(x) dx.$$

Funkce $e(u)$ opisuje průměrnou výšku očekávaného přesáhnutí prahu, tedy vyjadřuje průměr extrémů náhodné proměnné X překračující měnící se práh u .

Pro extrémů převyšující určitý práh u je limitním rozdělením *všeobecné Paretovo rozdělení*.

Následující tabulka uvádí funkce průměrných excedentů v případě některých vybraných rozdělení, asymptoticky pro $u \rightarrow \infty$.

Tabulka 5 – Funkce průměrných extrémů některých vybraných rozdělení [8]

Rozdělení	$e(u)$	Parametry
Paretovo	$\frac{K + u}{\alpha - 1}$	$\alpha > 1$
Burrovo	$\frac{u}{\alpha\beta - 1} (1 + o(1))$	$\alpha\beta > 1,$ $\alpha, \beta > 0$
Loggama	$\frac{u}{\alpha - 1} (1 + o(1))$	$\alpha > 1$
Lognormální	$\frac{\sigma^2 u}{\ln u - \mu} (1 + o(1))$	$\mu \in \mathbb{R},$ $\sigma > 0$
Weibullovo	$\frac{u^{1-\alpha}}{\beta\alpha} (1 + o(1))$	$\alpha \geq 1,$ $\beta > 0$
Exponenciální	$\frac{1}{\lambda}$	$\lambda > 0$
Gama	$\beta^{-1} (1 + \frac{\alpha - 1}{\beta u} + o(\frac{1}{u}))$	$\alpha, \beta > 0$

Zobrazení funkce průměrných extrémů jako funkce proměnné u je prospěšným nástrojem při výběru vhodného prahu u .

Empirickou funkci průměrných extrémů překračujících práh u je možné z výběrových údajů x_1, x_2, \dots, x_n odhadnout:

$$\widehat{e}_n(u) = \frac{\sum_{x_i > u} x_i}{\#\{i: x_i > u\}} - u.$$

Limitním rozdělením extrémů překračujících práh je zevšeobecněné Paretovo rozdělení. Toto tvrzení je dáno následující větou.

Věta (Pickands, Balkema a de Haan): Funkce $F_u(x)$ je distribuční funkcí extrémů překračujících práh u právě tehdy, když $\forall \xi > 0$ existuje kladná funkce $\beta = \beta(u)$ taková, že platí

$$\lim_{u \uparrow x_F} \sup_{0 \leq x \leq x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0,$$

kde x_F je pravý koncový bod distribuční funkce F_u a $G_{\xi, \beta}$ je zevšeobecněné Paretovo rozdělení.

Definice: Náhodná veličina X má *zevšeobecněné Paretovo rozdělení*, jestliže má distribuční funkci pro $1 + \xi x > 0$ definovanou

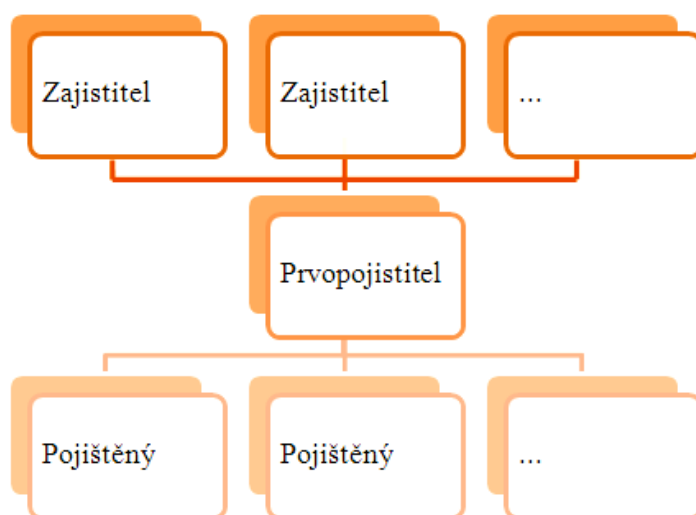
$$G_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{pro } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x}, & \text{pro } \xi = 0. \end{cases} \quad [26]$$

4 Zajištění

Rostoucí trend extrémních událostí nutí pojišťovny k hledání účinné metody krytí rizik. Mezi něž můžeme zařadit právě zajištění.

Definice: Zajištění je převod části rizika, které pojistitel pojistil v zájmu pojištěného formou přímého pojištění, na jiného nositele rizika, který není s pojištěným v žádném smluvním vztahu. [7]

Principem zajišťovací činnosti je vertikální rozklad rizika mezi prvopojistitele a zajistitele, který je zobrazen na obrázku 9.



Obrázek 9 – Vertikální rozklad rizika [Vlastní]

Zajištění je pojištění rizika převzatého od přímého pojistitele (prvopojistitele) jiným právnickým subjektem (zajistitelem) s cílem snížit důsledky možných vzniklých škod.

Pojistná smlouva je smlouvou o finančních službách, ve které se pojistitel zavazuje v případě vzniku nahodilé události poskytnout ve sjednaném rozsahu plnění a pojistník se zavazuje platit pojistiteli pojistné. [31]

Pro potřeby krytí svých závazků vůči pojišťovatelům si zajišťovna vytváří zvláštní rezervy podobně jako komerční pojišťovna.

Zajištění je jedním z nejlepších způsobů pro rozložení rizik v čase, v prostoru i v homogenitě pojistných částek. [14]

Základní pojmy, které se týkají zajištění:

- *provopojistitel* (zajištěný, cedent) je pojistitel převádějící část rizika, které již pojistil, na zajistitele;
- *zajistitel* přebírá část rizika, která již byla pojištěna nějakým pojistitelem;
- *cedovat* znamená převést část rizika z provopojistitele na zajistitele;
- *cese* představuje objem převedené části rizika;
- *priorita* (vlastní vrub) je maximální část vzniklé škody, kterou hradí prvopojistitel;
- *vrstva* je maximální část vzniklé škody nad prioritou prvopojistitele, kterou hradí zajistitel;
- *kapacita* je součet priority prvopojistitele a vrstvy zajistitele (pokud celková škoda tuto kapacitu přesáhne, jde nadbytečná část na vrub prvopojistitele nebo častěji do vrstvy dalšího zajistitele);
- *zajišťovacím portfoliem* se nazývají pojistné smlouvy uzavřené prvopojistitelem postoupené do zajištění.

4.1 Význam a úloha zajištění

Prvotním impulsem, proč prvopojistitel volil možnost krytí rizika od zajišťovny, byl v podstatě obdobný jako u samotných klientů pojišťoven, tedy eliminace nebezpečí škod.

Jedním z nejdůležitějších významů zajištění bývá zvýšení kapacity pojistitele. Je zřejmé, že prvopojistitel musí při upisování rizik brát na zřetel svou kapacitu (v tomto významu se pojmem kapacita rozumí maximální objem rizika, který v rámci daného pojištění může pojistit). Pojistitel tedy převede část svých závazků na zajistitele. Pojistitel pak nemusí hledat náhradní řešení, může získat větší podíl na trhu a rozšířit svůj pojistný kmen, nemusí odmítat pojistné obchody a také využije efektivněji fixní správní náklady.

Velmi důležitá je také homogenizace pojistného kmene, neboť pojistný kmen prvopojistitele poté neobsahuje vybočující smlouvy s vysokými riziky či vysokými pojistnými částkami.

V neposlední řadě lze mezi významy zajištění zařadit stabilizaci výsledků prvopojistitele. Rozlišují se tři rizikové vlivy, které se ovlivňují vhodným zajištěním:

- a) riziko náhodného kolísání (např. výskyt katastrofických událostí);
- b) riziko ekonomických, sociálních a technologických změn (např. inflace, klimatické změny, nová legislativa, technický pokrok aj.);
- c) riziko chyb (např. chybné předpoklady pojistně-technických výpočtů).

Dalším z důvodů proč prvopojistitel využívá služeb zajištění je rozprostření a diverzifikace rizik: Zajistné portfolio zahrnuje navzájem se kompenzující rizika. Přičemž se rozlišuje:

- a) teritoriální diverzifikace;
- b) produktová diverzifikace;
- c) časová diverzifikace.

4.2 Formy zajištění

Formy zajištění lze rozdělit do dvou skupin, a to na fakultativní a obligatorní.

4.2.1 Fakultativní zajištění

Zajištění se sjednává individuálně pro jednotlivé pojistné smlouvy. Prvopojistitel i zajistitel zvažují situaci jednotlivě, tedy případ po případu. Pojistitel není smluvně povinen smlouvu k zajištění nabídnout a zajistitel není smluvně povinen ji k zajištění přijmout.

4.2.2 Obligatorní zajištění

Toto zajištění se sjednává pro celé portfolio pojistných smluv. Pojistitel je povinen všechny tyto smlouvy do zajištění nabídnout a zajistitel je nesmí odmítnout vzít do zajištění.

4.3 Typy zajištění

Typy zajištění se mohou rozdělit také do dvou skupin, proporcionální a neproporcionální zajištění.

4.3.1 Proporcionální zajištění

Principem tohoto typu zajištění je, že se pojistná částka, pojistné plnění a pojistné dělí mezi prvopojistitele a zajistitele ve sjednaném poměru. Tento poměr se stanovuje pro každou pojistnou smlouvu a dělí původní pojištěné riziko, následně se v tom samém poměru dělí i skutečné finanční toky (pojistné plnění, pojistné). Tento poměr nezávisí na výši vzniklé škody. U tohoto zajištění není shora omezena výše plnění prvopojistitele, proto v některých případech nemusí být dostatečnou ochranou proti vysokým škodám.

V praxi se využívají nejčastěji tyto dva typy proporcionálního zajištění:

- 1) *kvótové zajištění* – poměr pro dělení rizika je pro každou smlouvu stejný;
- 2) *surplus zajištění* – pojistitel převádí v každé pojistné smlouvě pouze tu část rizika, která přesahuje pevně sjednanou hodnotu stejnou pro všechny pojistné smlouvy (poměr pro dělení rizika může být pro každou smlouvu jiný).

4.3.2 Neproporcionální zajištění

V tomto případě zajistitel přebírá tu část pojistného plnění, která přesáhne sjednanou prioritu prvopojistitele. Plnění zajistitele je určováno výlučně výší skutečně vzniklých škod přesahujících pevně sjednanou prioritu prvopojistitele. Zajistné pro zajistitele je zde speciálně stanovené. V praxi se využívají především dva konkrétní typy neproporcionálního zajištění:

- 1) *zajištění škodního nadměrku* (XL zajištění) – jedná se o zajištění s pevně sjednanou prioritou, která se uplatňuje buď zvlášť pro jednotlivé smlouvy (WXL/R zajištění), souhrnně pro více pojistných smluv s kumulací škod vzniklých v důsledku jedné škodní události (WXL/E zajištění), anebo pro kumulaci škod v důsledku katastrofického charakteru škodní události (CatXL zajištění);
- 2) *zajištění nadměrku škodovosti* (SL zajištění) – spoluúčast prvopojistitele se uplatňuje v rámci celoročního objemu škod.

Lze ovšem využít i některý z další typů neproporcionálního zajištění:

- 1) *umbrella cover* – toto zajištění zohledňuje kumulaci škod z jedné škodní události přes různá pojistná odvětví (např. kumulace škod v rámci požárního, živelního, havarijního, úrazového aj. pojištění);
- 2) *zajištění druhého rizika* – zajistné plnění se řídí stejnými zásadami jako neproporcionální zajištění WXL/R, kalkulace zajistného se ovšem řídí principem proporcionálního zajištění (využití např. v pojištění odpovědnosti);
- 3) *zajištění nejvyšších škod* ($LCR(p)$) – zajistitel hradí pouze p největších škod, symbolicky můžeme zapsat jako $X_Z = X_{(1)} + X_{(2)} + \dots + X_{(p)}$ (využívá se např. v havarijním pojištění, povinném ručení);
- 4) *ECOMOR zajištění* – zajistitel v daném období hradí pouze části škod, které přesáhly p -tou největší škodu, symbolický zápis je $X_Z = (X_1 - X_{(p)}) + (X_{(p-1)} - X_{(p)}) = X_1 + \dots + X_{(p-1)} - (p - 1) \cdot X_{(p)}$.

4.4 CatXL zajištění

Pro nás je důležité zejména právě zajištění CatXL. Vzniklá škoda musí mít charakter katastrofické události, u které je obvyklá velká kumulace škod. Škodní událost je nutno přesně vymezit se zohledněním časových i prostorových souvislostí.

Mluvíme-li o kumulaci škod, mluvíme pak většinou o tzv. neznámé kumulaci, jejíž vznik je náhodný (např. povodně, zemětřesení). Můžeme ovšem i vznik předem znát, pak mluvíme o tzv. známé kumulaci (např. letecké úrazové pojištění), v tomto případě je nutný speciální souhlas zajistitele doprovázený navýšením pojistného.

Při CatXL zajištění je velice důležité správně definovat pojem škodní událost. Je tedy zapotřebí zohlednit časové a prostorové souvislosti, které mohou mít charakter meteorologický (např. bouře), technický (např. při požáru), tektonický a geologický (např. při zemětřesení).

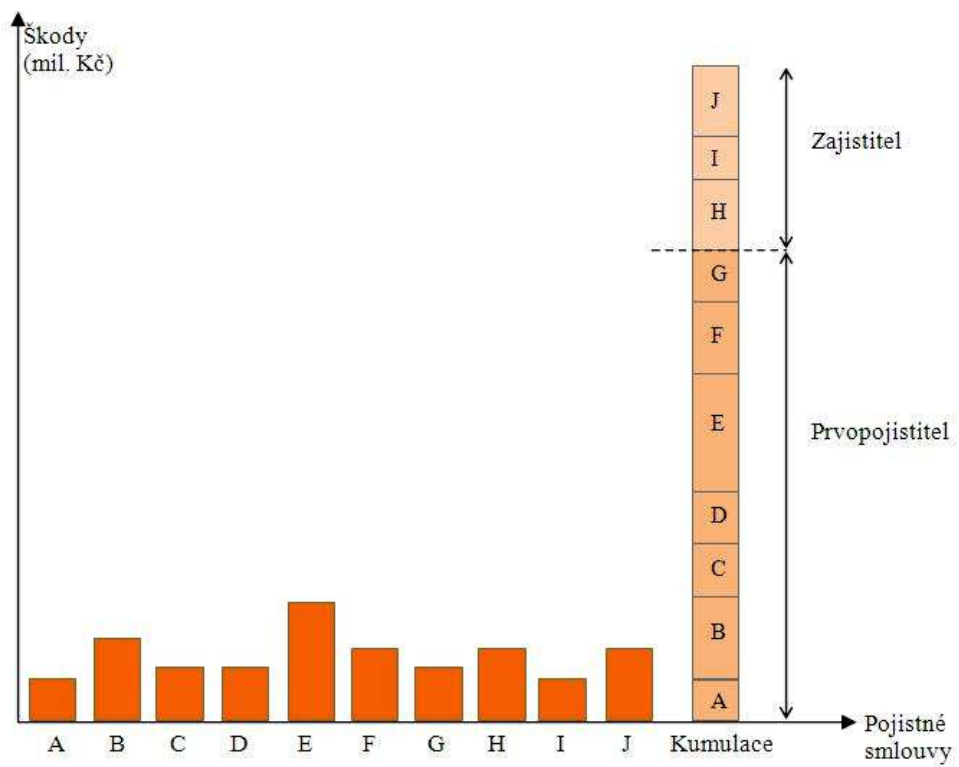
Zejména při přírodních katastrofách, jejichž škodní expozice se může týkat delšího časového intervalu, se uplatňuje tzv. n-hodinová klauzule. Při vzniku škodní události jsou kryty pouze ty škody, které se kumulují během intervalu délky n hodin (viz tabulka). Trvá-li ovšem kumulace škod déle než sjednaných n hodin, pak je nutné začít čerpat kapacitu další škodní události. Podobně lze sjednat také prostorové omezení.

Tabulka 6 – n-hodinová klauzule [7]

Počet hodin	Typ katastrofy
48 hodin	Hurikány
72 hodin	Zemětřesení
168 hodin	Povodně, záplavy

Priorita u CatXL zajištění je tak vysoká, že ji překročí jen velké kumulativní škody. Také v tomto případě existuje limit plnění zajistitele, tedy vrstva zajistitele. Často je zajistné plnění omezeno roční horní hranicí.

Princip CatXL zajištění zobrazuje obrázek 10, kde jsou uvedeny pouze pojistné smlouvy ze zajišťovaného portfolia, které byly postiženy příslušnou katastrofickou událostí)



Obrázek 10 – Příklad CatXL zajištění [7]

5 Aplikace metod modelování extrémních škod

Tato kapitola je zaměřena na samotnou aplikaci možností modelování extrémních škod, tedy pomocí kvantilových funkcí a metodou extrémů překračujících práh.

5.1 Modelování extrémních škod pomocí kvantilových funkcí

Tabulka 7 – Individuální výše škod v neživotním pojištění v Kč [22]

10478	13334	16525	20987	26621	32536	43237	59145	84714	135804
11248	13789	17450	22853	27201	36171	46759	61038	93375	165259
12028	14014	18900	23754	27344	39617	46879	64874	94310	189872
12421	14533	19384	25730	28606	39854	49763	67488	104030	285750
12456	14657	19543	25748	30950	40867	54977	76147	117160	578486
12657	15189	20414	26606	31196	41155	57487	82348	123075	648748

Tabulka 7 obsahuje individuální výšky škod při havarijním pojištění. Pomocí statistického programu Statgraphics Centurion XV byly nejprve zjištěny základní charakteristiky tohoto náhodného výběru.

5.1.1 Základní charakteristiky náhodného výběru

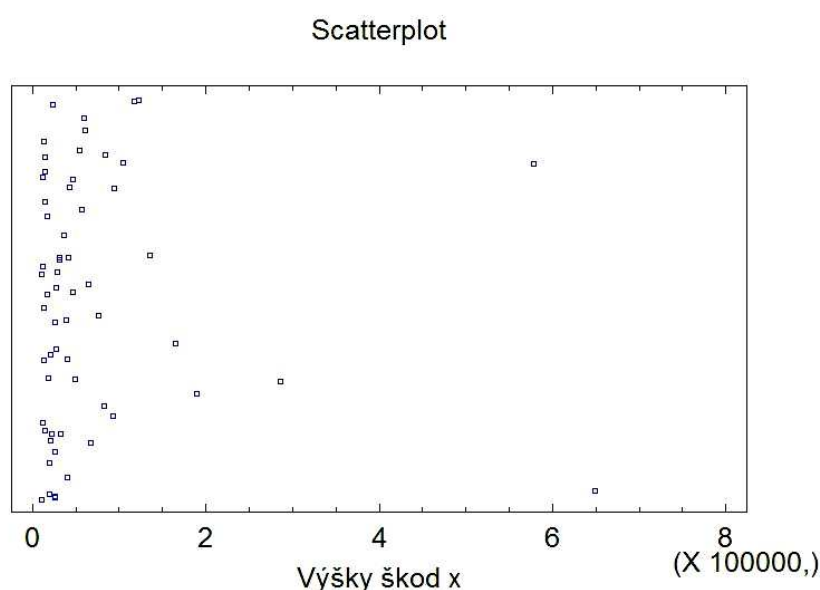
Tabulka 8 – Základní charakteristiky náhodného výběru [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Summary Statistics for Výšky škod x

Count	60
Average	69125,7
Median	31866,0
Geometric mean	38908,9
Variance	1,29146E10
Standard deviation	113642,
Minimum	10478,0
Maximum	648748,
Std. skewness	12,7041
Std. kurtosis	27,5448

Tabulka 8 zobrazuje základní statistické charakteristiky jednotlivých škod náhodného výběru:

- počet individuálních škod je 60,
- průměrná výše škod je 69 125,7 Kč,
- medián je roven 31 866 Kč,
- geometrický průměr škod je 38 908,9 Kč,
- rozptyl je 1,29E+10 směrodatná odchylka 11 364,2,
- minimální výše škody je rovna 10 478 Kč a maximální výše škody 648 748 Kč,
- koeficient šikmosti je 12,7041, koeficient špičatosti 27,5448.

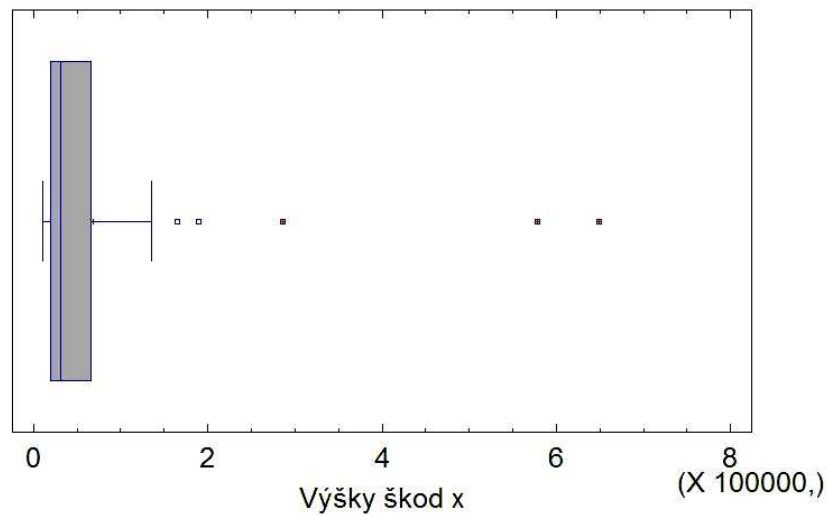


Obrázek 9 – Korelační graf [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Na obrázku 11 je vidět rozmístění individuálních škod. Je patrné, že nejvíce škod je v intervalu $\langle 0; 100\ 000 \rangle$. Dále můžeme pozorovat dvě nejvyšší škody, které jsou v intervalu $\langle 500\ 000; 700\ 000 \rangle$.

Následující obrázek 12, tzv. box plot, zobrazuje totéž, pouze s tím rozdílem, že jsou hodnoty zesumarizované do skupin.

Box-and-Whisker Plot



Obrázek 10 – Krabicový graf [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

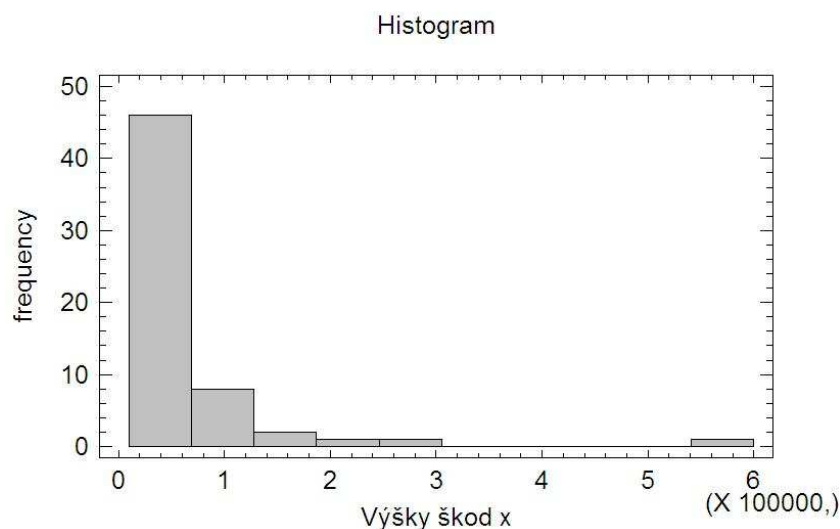
Tabulka 9 – Tabulka frekvencí v jednotlivých intervalech [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Frequency Tabulation for Výšky škod x

Class	Lower Limit	Upper Limit	Midpoint	Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency	Cum. Rel. Frequency
	at or below	10000,0		0	0,0000	0	0,0000
1	10000,0	69000,0	39500,0	46	0,7667	46	0,7667
2	69000,0	128000,0	98500,0	8	0,1333	54	0,9000
3	128000,0	187000,0	157500,0	2	0,0333	56	0,9333
4	187000,0	246000,0	216500,0	1	0,0167	57	0,9500
5	246000,0	305000,0	275500,0	1	0,0167	58	0,9667
6	305000,0	364000,0	334500,0	0	0,0000	58	0,9667
7	364000,0	423000,0	393500,0	0	0,0000	58	0,9667
8	423000,0	482000,0	452500,0	0	0,0000	58	0,9667
9	482000,0	541000,0	511500,0	0	0,0000	58	0,9667
10	541000,0	600000,0	570500,0	1	0,0167	59	0,9833
	above	600000,0		1	0,0167	60	1,0000

Tabulka 9 obsahuje rozdělení základního souboru do 10 intervalů. Jejichž zastoupení je možné vidět již na předcházejících grafických znázorněních (viz korelační graf a krabicový graf). Frekvence ukazují počet hodnot v každém intervalu, zatímco relativní četnosti ukazují poměry v každém intervalu.

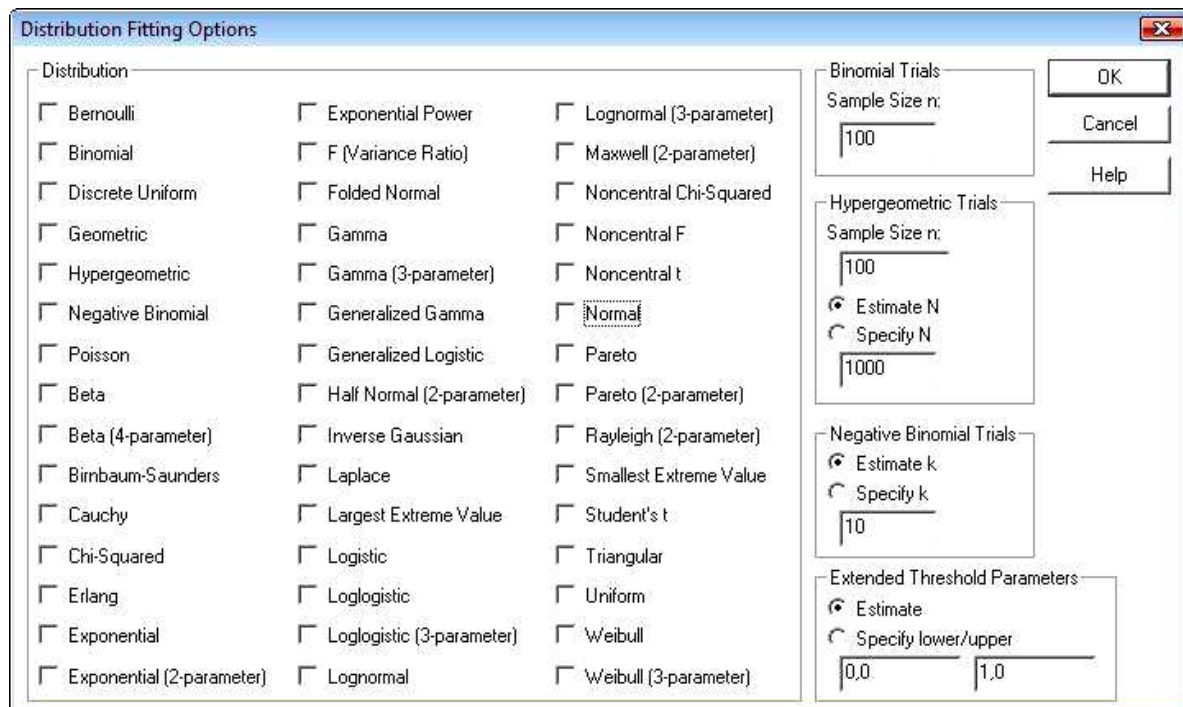
Tato tabulka je vyjádřena také graficky a to zobrazením histogramu, obrázek 13.



Obrázek 11 – Histogram [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

5.1.2 Rozdělení pravděpodobnosti

Program Statgraphics Centurion XV nabízí 45 různých rozdělení pravděpodobnosti (obrázek 14), a to od těch známých (např. Normální, Poissonovo, Paretovo, Exponenciální, Gama) až po ty méně známé (např. Erlang, Triangular, Rayleigh).



Obrázek 12 – Pravděpodobnostní rozdělení v programu Statgraphics Centurion XV [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

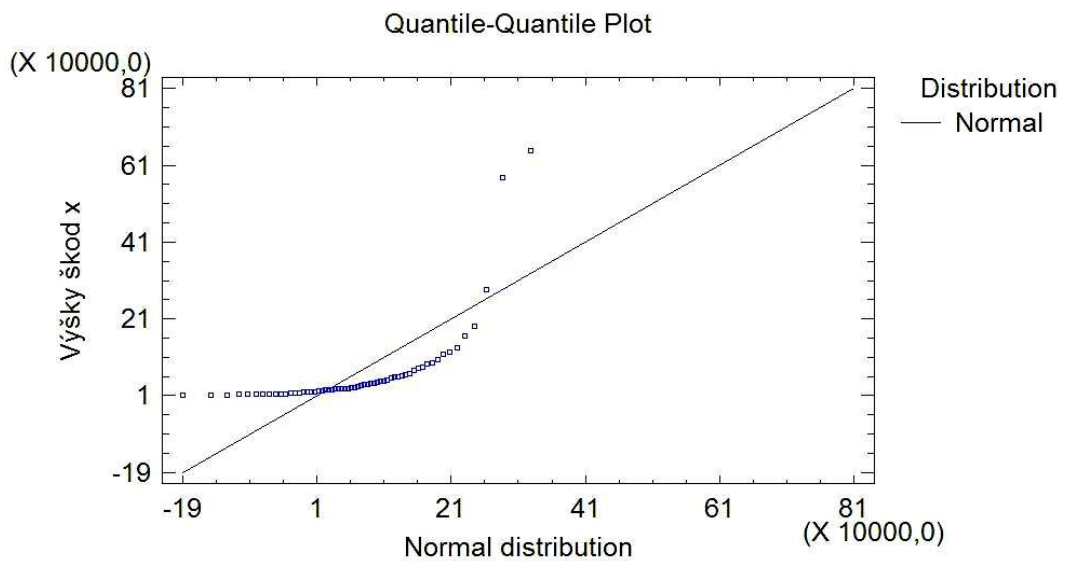
Quantile – Quantile Plot (Q-Q graf) a histogram

Q-Q graf umožňuje posoudit shodu výběrového rozdělení, jež je charakterizováno kvantilovou funkcí s kvantilovou funkcí zvoleného teoretického rozdělení. Jeho interpretace byla popsána výše.

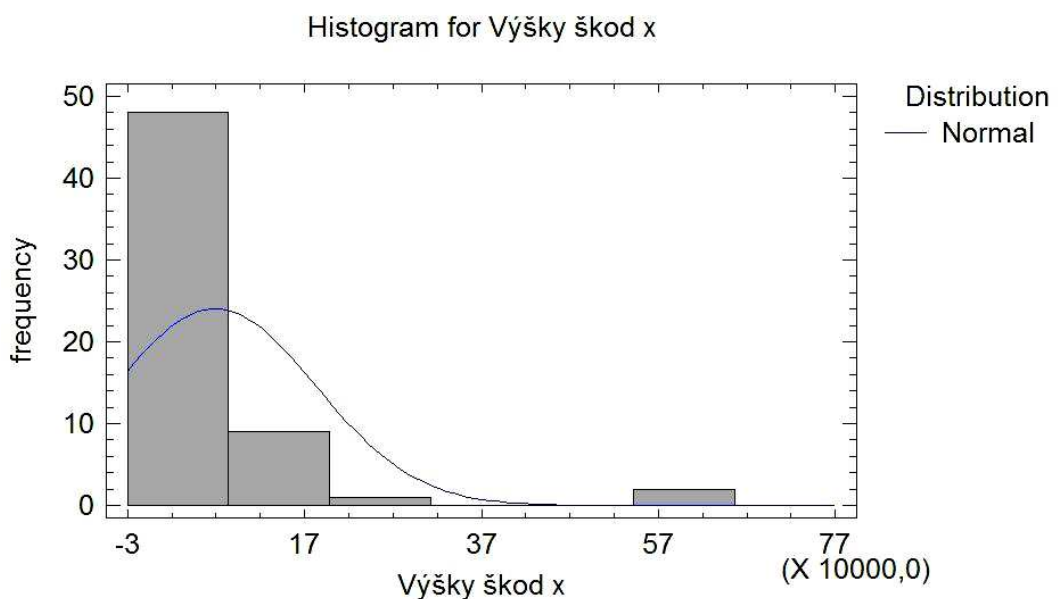
Dobrou shodu s daným rozdělením pravděpodobnosti můžeme také usuzovat pomocí histogramu.

Nyní se pokusíme najít vhodné rozdělení pravděpodobnosti právě pro náš náhodný výběr.

5.1.2.1 Normální rozdělení pravděpodobnosti



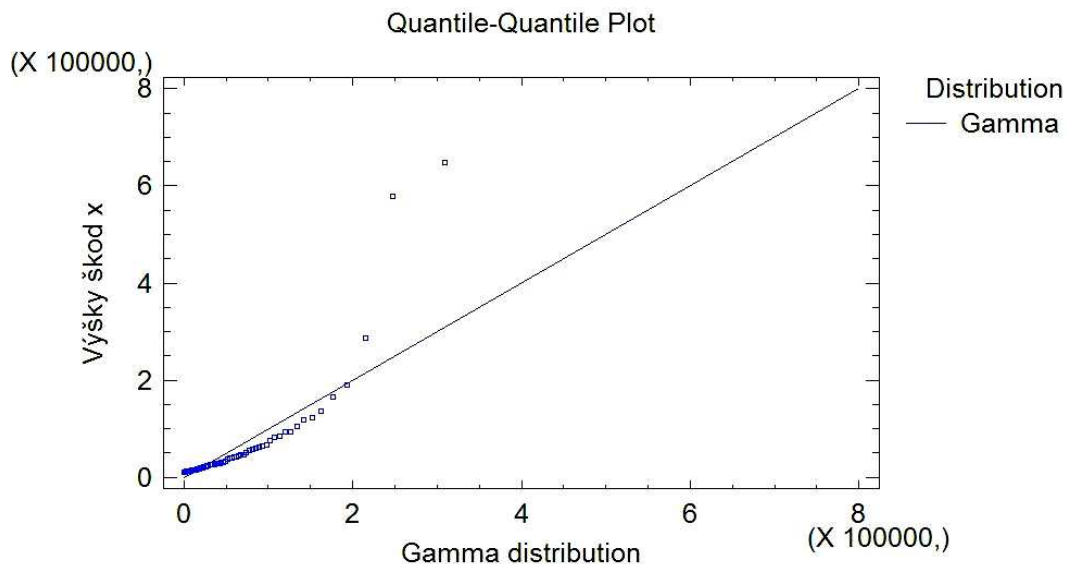
Obrázek 13 – Q-Q graf porovnání shody s normálním rozdělením pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]



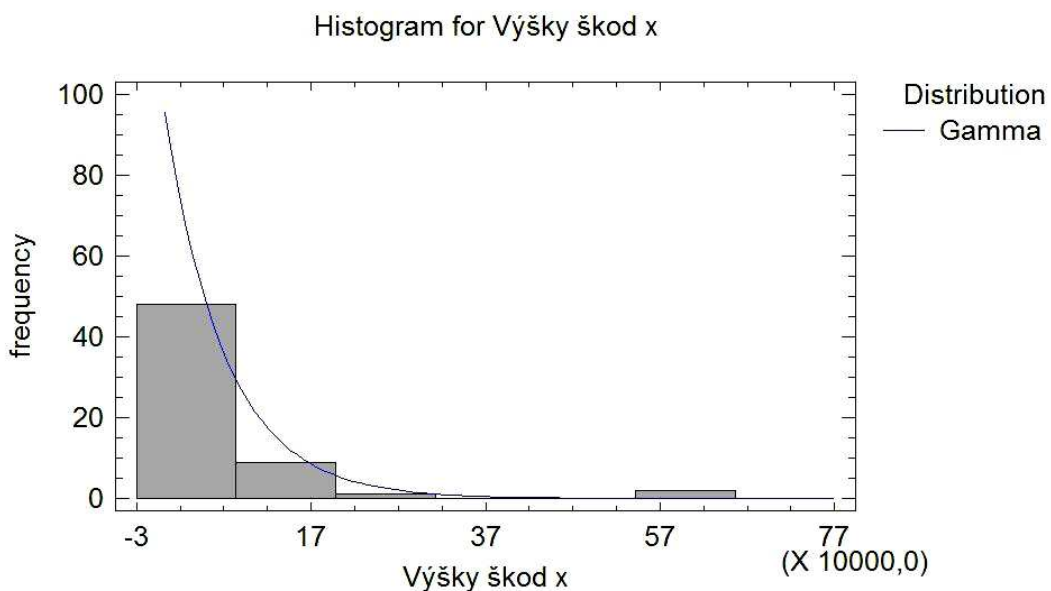
Obrázek 14 – Histogram porovnání shody s normálním rozdělením pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Dle obrázků 15, 16 je zřejmé, že náhodný výběr nepochází z normálního rozdělení a je tedy vhodné využít rozdělení jiné.

5.1.2.2 Gama rozdělení pravděpodobnosti



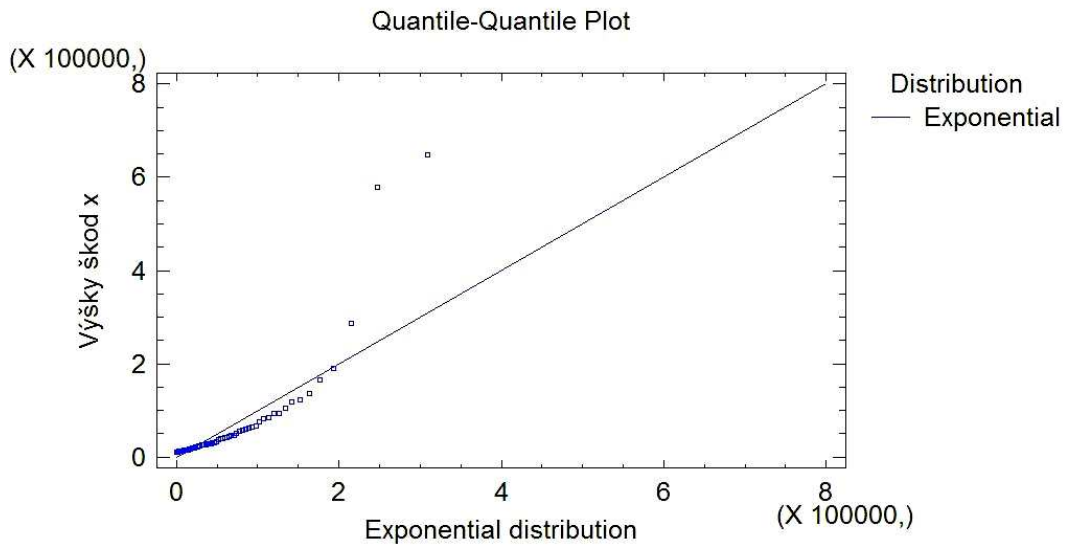
Obrázek 15 – Q-Q graf porovnání shody s gama rozdělením pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]



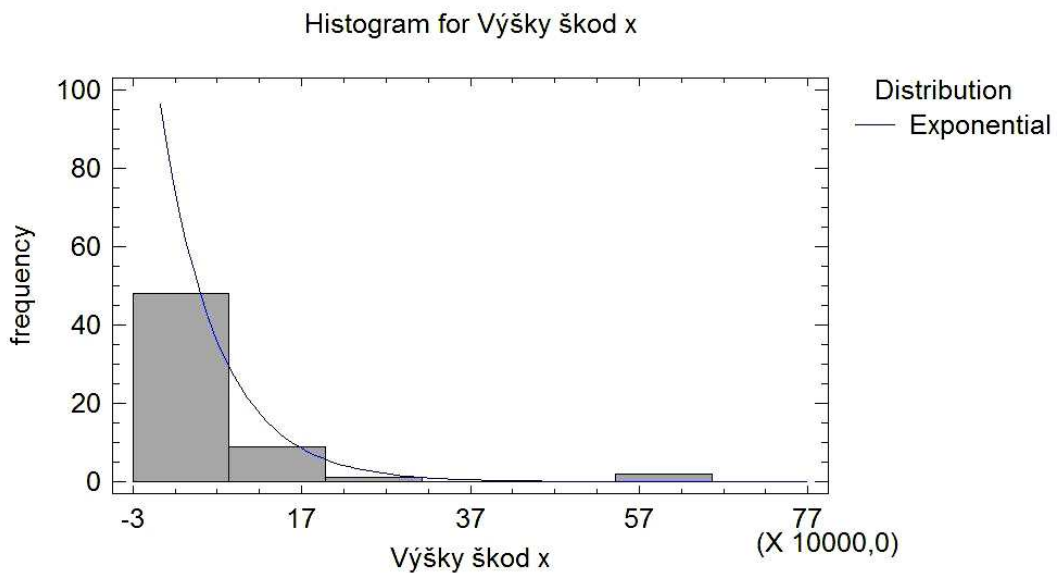
Obrázek 16 – Histogram porovnání shody s gama rozdělením pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Obrázky 17, 18 ukazují, že gama rozdělení pravděpodobnosti se zdá jako vhodné rozdělení našeho výběru, věrně kopíruje přímku s výjimkou několika výkyvů. Je ovšem nutné podívat se, zda-li některé jiné rozdělení nekopíruje výběr přesněji.

5.1.2.3 Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti



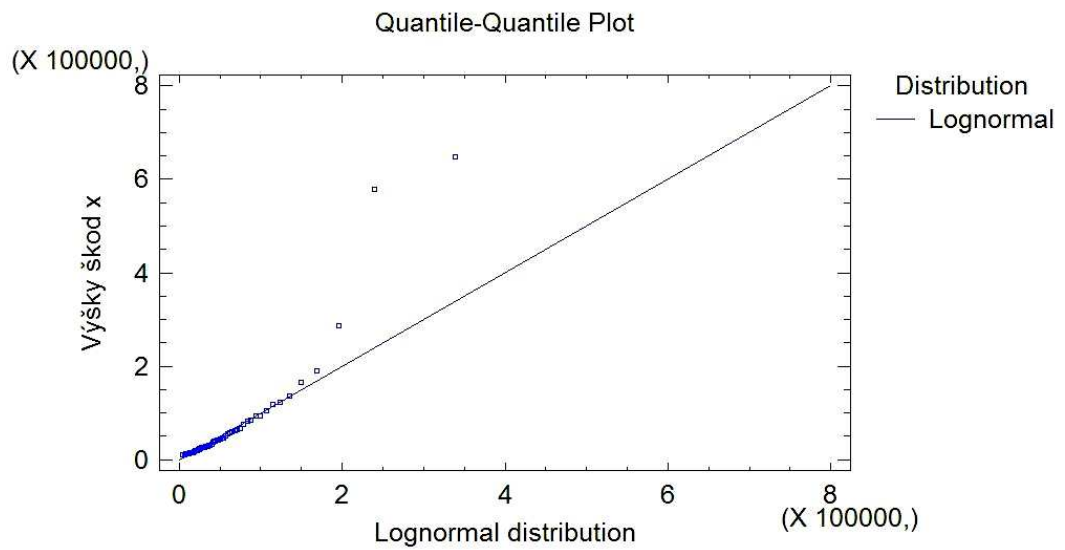
Obrázek 19 – Q-Q graf porovnání shody s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]



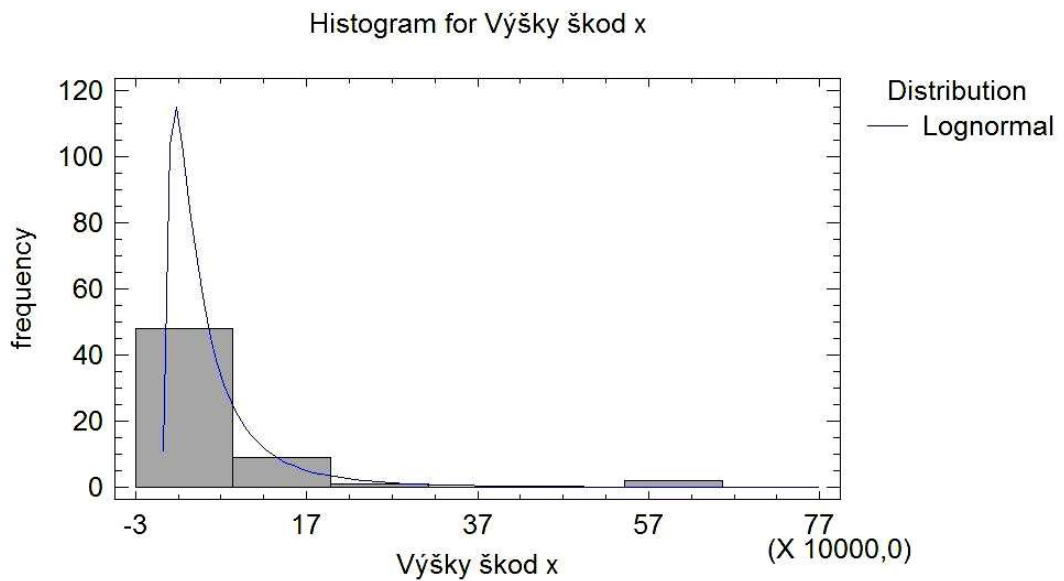
Obrázek 17 – Histogram porovnání shody s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Grafy exponenciálního rozdělení (obrázky 19, 20) se v podstatě shodují s rozdělením gama. I zde je proto nutné podívat se, zda-li jiný pravděpodobnostní model nebude vhodnější.

5.1.2.4 Lognormální rozdělení pravděpodobnosti



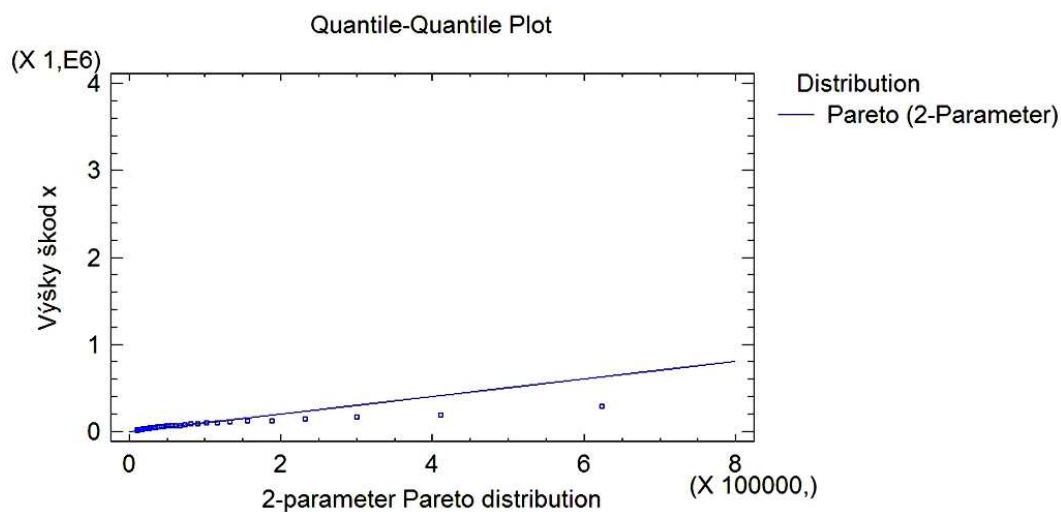
Obrázek 18 – Q-Q graf porovnání shody s lognormálním rozdělením pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]



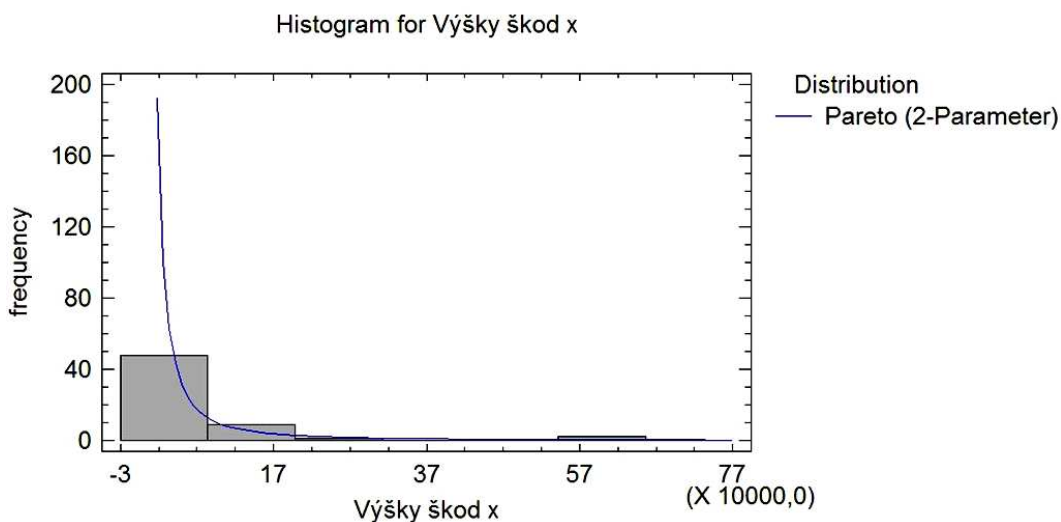
Obrázek 19 – Histogram porovnání shody s lognormálním rozdělením pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Toto rozdělení se zdá pro náhodný výběr ještě vhodnější než předcházející dvě rozdělení.

5.1.2.5 Paretovo rozdělení pravděpodobnosti



Obrázek 20 – Q-Q graf porovnání shody s Paretovým rozdělením pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

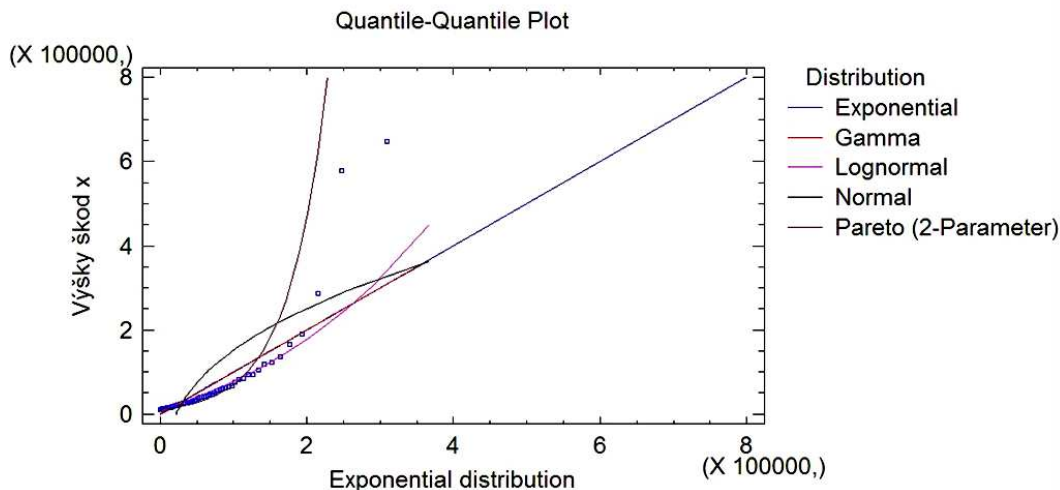


Obrázek 21 – Histogram porovnání shody s Paretovým rozdělením pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

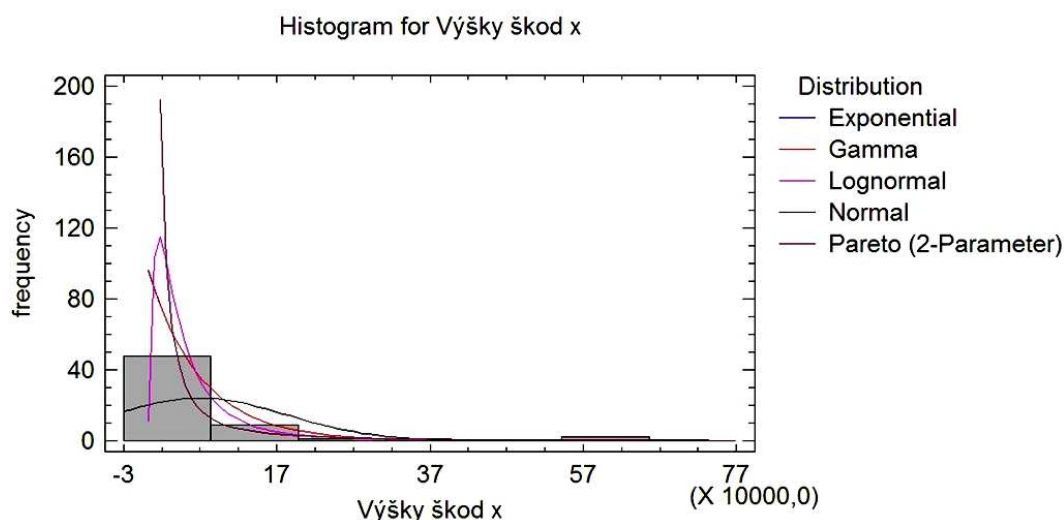
Z obrázků 23, 24 vyplývá, že náš náhodný výběr pochází právě z Paretova rozdělení pravděpodobnosti. Jednotlivé škody kopírují nejlépe křivku tohoto rozdělení.

5.1.3 Porovnání zvolených typů rozdělení pravděpodobnosti

Dle níže uvedených obrázků 25, 26 je provedeno vizuální porovnání vhodnosti zvolených pravděpodobnostních modelů. Jako nejlépe vhodné se zdá Paretovo rozdělení pravděpodobnosti, naopak nejméně vhodné exponenciální rozdělení.



Obrázek 22 – Q-Q graf pro vybraná rozdělení pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]



Obrázek 23 – Histogram pro vybraná rozdělení pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

5.1.4 Testování náhodného výběru pomocí testů dobré shody

Tato část práce je zaměřena na ověření správnosti hypotézy o pravděpodobnostním rozdělení náhodného výběru. Statgraphics Centurion XV nám nabízí 7 různých testů dobré shody. Zde bude ukázka dvou nejvíce využívaných, a to Pearsonův χ^2 test dobré shody a Kolmogorovův-Smirnovův test.

5.1.4.1 Pearsonův χ^2 test dobré shody

Tento test ověřuje shodu empirického rozdělení s předpokládaným teoretickým rozdělením. Nulová hypotéza H_0 se přijímá, jestliže hodnota P-Value překročí stanovenou hodnotu α (v tomto případě $\alpha = 0,05$). Čím více se hodnota P-Value blíží k hodnotě 1, tím lépe se dané rozdělení blíží skutečnému rozdělení náhodného výběru.

Tabulka 10 – Odhady parametrů vybraných rozdělení pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Fitted Distributions				
<i>Exponential</i>	<i>Gamma</i>	<i>Lognormal</i>	<i>Normal</i>	<i>Pareto (2-Parameter)</i>
mean = 69125,7	shape = 1,00388	mean = 61102,1	mean = 69125,7	shape = 0,762227
	scale = 0,0000145226	standard deviation = 73984,7	standard deviation = 113642,	lower threshold = 10478,0
		Log scale: mean = 10,569		
		Log scale: std. dev. = 0,950078		

V tabulce 10 se nachází odhady parametrů jednotlivých vybraných rozdělení. Tyto odhady byly provedeny metodou maximální věrohodnosti.

Výsledky Pearsonova χ^2 testu zobrazuje následující tabulka 11. Z této tabulky vyplývá, že náš předpoklad byl správný a Paretovo rozdělení je nejvhodnějším rozdělením pravděpodobnosti našeho náhodného výběru. P-Value toho rozdělení překračuje hodnotu 0,05 a zároveň se nejvíce blíží hodnotě 1.

Tabulka 11 – Pearsonův χ^2 test dobré shody [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Goodness-of-Fit Tests for Výšky škod x

Chi-Squared Test

	<i>Exponential</i>	<i>Gamma</i>	<i>Lognormal</i>	<i>Normal</i>	<i>Pareto (2-Parameter)</i>
Chi-Squared	41,3333	35,3333	18,6666	177,334	14,9179
D.f.	18	17	17	17	17
P-Value	0,00136913	0,00562317	0,348	0,0	0,601393

5.1.4.1.1 Pearsonův χ^2 test dobré shody pro Paretovo rozdělení pravděpodobnosti

H_0 : náhodný výběr pochází z Paretova rozdělení pravděpodobnosti.

H_1 : náhodný výběr nepochází z Paretova rozdělení pravděpodobnosti.

Tabulka 12 – Pearsonův χ^2 test dobré shody pro Paretovo rozdělení pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Goodness-of-Fit Tests for x

Chi-Squared Test

	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>	<i>Observed</i>	<i>Expected</i>	
	<i>Limit</i>	<i>Limit</i>	<i>Frequency</i>	<i>Frequency</i>	<i>Chi-Squared</i>
at or below:		65000,0	45	45,07	0,00
	65000,0	130000,	9	6,13	1,35
	130000,	195000,	3	2,34	0,19
	195000,	325000,	1	2,08	0,56
above	325000,		1	2,80	1,15

Chi-Squared = 3,25213 with 2 d.f. P-Value = 0,196703

Postup výpočtu testu znázorňuje tabulka 12. Hodnota testovacího kritéria je rovna 14,9179. P-Value je 0,601393. Lze říci, že nulovou hypotézu na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ H_0 nelze zamítnout, tedy náhodný výběr pochází z Paretova rozdělení pravděpodobnosti.

5.1.4.2 Kolmogorovův-Smirnovův test

Tabulka 13 – Kolmogorovův-Smirnovův test dobré shody [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Goodness-of-Fit Tests for Výšky škod x					
Kolmogorov-Smirnov Test					
	<i>Exponential</i>	<i>Gamma</i>	<i>Lognormal</i>	<i>Normal</i>	<i>Pareto (2-Parameter)</i>
DPLUS	0,157545	0,15799	0,0947799	0,272418	0,0598954
DMINUS	0,14065	0,139915	0,0836573	0,3029	0,145793
DN	0,157545	0,15799	0,0947799	0,3029	0,145793
P-Value	0,101751	0,100049	0,653867	0,0000330764	0,156093

Výsledky Kolmogorova-Smirnovova testu zobrazuje tabulka 13. I tento test dovoluje potvrdit předpoklad, že náhodný výběr má právě Paretovo rozdělení pravděpodobnosti.

5.1.4.2.1 Kolmogorovův-Smirnovův test pro Paretovo rozdělení pravděpodobnosti

H_0 : náhodný výběr pochází z Paretova rozdělení pravděpodobnosti.

H_1 : náhodný výběr nepochází z Paretova rozdělení pravděpodobnosti.

Tabulka 14 – Kolmogorovův-Smirnovův test dobré shody pro Paretovo rozdělení pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Goodness-of-Fit Tests for Výšky škod x	
Kolmogorov-Smirnov Test	
	<i>Pareto (2-Parameter)</i>
DPLUS	0,0598954
DMINUS	0,145793
DN	0,145793
P-Value	0,156093

I v tomto případě převyšuje P-Value hodnotu 0,05 (tabulka 14). Lze tedy nulovou hypotézu H_0 přijmout. I tento test potvrdil dobrou shodu empirických dat s tímto rozdělením.

5.1.5 Simulace 20 nejvyšších škod

K dispozici jsou údaje o 60 pojistných škodách z havarijního pojištění. Pomocí programu Statgraphics Centurion XV bylo zjištěno, že tato data mají Paretovo rozdělení pravděpodobnosti (v americkém tvaru). Právě toho rozdělení modeluje nejlépe škody extrémních hodnot.

Parametry Paretova rozdělení α , λ byly odhadnuty metodou maximální věrohodnosti. Využita byla funkce Solver v tabulkovém procesoru MS Excel 2007.

Celá simulace byla provedena v programu Microsoft Excel 2007. Tabulka 15 zobrazuje pomocné výpočty k odhadu parametrů metodou maximální věrohodnosti a tabulka 16 již samotný výsledek této metody.

Tabulka 15 – Tabulka pomocných výpočtů k odhadu parametrů metodou maximální věrohodnosti

[Vlastní]

Výška škod - x	$\ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right)$	$\frac{1}{(\lambda + x_i)}$	$\frac{x_i}{(\lambda \cdot (\lambda + x_i))}$
10478	0,06416220	0,00000593	0,00000039
11248	0,06871883	0,00000590	0,00000042
12028	0,07331356	0,00000588	0,00000045
12421	0,07562062	0,00000586	0,00000046
12456	0,07582583	0,00000586	0,00000046
12657	0,07700348	0,00000586	0,00000047
13334	0,08095984	0,00000583	0,00000049
13789	0,08361007	0,00000582	0,00000051
14014	0,08491803	0,00000581	0,00000051
14533	0,08792855	0,00000579	0,00000053
14657	0,08864649	0,00000579	0,00000054
15189	0,09172084	0,00000577	0,00000055
16525	0,09939997	0,00000573	0,00000060
17450	0,10468239	0,00000570	0,00000063
18900	0,11290720	0,00000565	0,00000068
19384	0,11563759	0,00000563	0,00000069
19543	0,11653294	0,00000563	0,00000070
20414	0,12142345	0,00000560	0,00000072
20987	0,12462775	0,00000558	0,00000074
22853	0,13499209	0,00000553	0,00000080
23754	0,13995833	0,00000550	0,00000083
25730	0,15076429	0,00000544	0,00000089

<i>Výška škod - x</i>	$\ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right)$	$\frac{1}{(\lambda + x_i)}$	$\frac{x_i}{(\lambda \cdot (\lambda + x_i))}$
25748	0,15086219	0,00000544	0,00000089
26606	0,15551768	0,00000541	0,00000091
26621	0,15559888	0,00000541	0,00000091
27201	0,15873346	0,00000540	0,00000093
27344	0,15950478	0,00000539	0,00000093
28606	0,16628622	0,00000536	0,00000097
30950	0,17876111	0,00000529	0,00000104
31196	0,18006136	0,00000528	0,00000104
32536	0,18711447	0,00000524	0,00000108
36171	0,20600056	0,00000515	0,00000118
39617	0,22358122	0,00000506	0,00000127
39854	0,22477905	0,00000505	0,00000127
40867	0,22988279	0,00000503	0,00000130
41155	0,23132906	0,00000502	0,00000131
43237	0,24172263	0,00000497	0,00000136
46759	0,25906258	0,00000488	0,00000144
46879	0,25964812	0,00000488	0,00000145
49763	0,27361831	0,00000481	0,00000151
54977	0,29839012	0,00000469	0,00000163
57487	0,31009987	0,00000464	0,00000169
59145	0,31776030	0,00000460	0,00000172
61038	0,32643535	0,00000456	0,00000176
64874	0,34378713	0,00000448	0,00000184
67488	0,35544115	0,00000443	0,00000189
76147	0,39310335	0,00000427	0,00000206
82348	0,41922867	0,00000416	0,00000217
84714	0,42901965	0,00000412	0,00000221
93375	0,46406441	0,00000398	0,00000235
94310	0,46777526	0,00000396	0,00000236
104030	0,50555785	0,00000381	0,00000251
117160	0,55442941	0,00000363	0,00000269
123075	0,57568888	0,00000356	0,00000277
135804	0,61996144	0,00000340	0,00000292
165259	0,71546463	0,00000309	0,00000323
189872	0,78881870	0,00000287	0,00000345
285750	1,03216976	0,00000225	0,00000407
578486	1,53868948	0,00000136	0,00000497

Výška škod - x	$\ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right)$	$\frac{1}{(\lambda + x_i)}$	$\frac{x_i}{(\lambda \cdot (\lambda + x_i))}$
648748	1,62979619	0,00000124	0,00000508
Suma	17,90110041	0,00029226	0,00008720
s2	12914587403		
průměr	69125,68333		
průměr2	4778360096		

Tabulka 16 – Metoda momentů, metoda maximální věrohodnosti [Vlastní]

Metoda momentů:	$\hat{\alpha}$	3,174588643
	$\hat{\lambda}$	150319,9259
Metoda maximální věrohodnosti:	$\hat{\alpha}$	3,351749258
	$\hat{\lambda}$	158121,89913

Odhadnuté parametry Paretova rozdělení pravděpodobnosti metodou maximální věrohodnosti jsou $\alpha = 3,351749258$, $\lambda = 158121,89913$.

Paretovo rozdělení pravděpodobnosti – $Pa(\alpha, \lambda)$ má distribuční funkci ve tvaru:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\alpha$$

K simulaci 20 největších škod je třeba znát kvantilovou funkci Paretova rozdělení. Ta se vyjádří jako inverzní funkci k distribuční funkci a to ve tvaru:

$$Q(p) = \lambda \cdot (1 - p)^{\frac{-1}{\alpha}} - \lambda$$

Tabulka 17 ukazuje 20 vygenerovaných náhodných čísel programem Statgraphics Centurion XV, které jsou nutné k simulaci škod.

Tabulka 17 – Vygenerovaná náhodná čísla [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

	RAND1
	Random Numbers for Dist. 1
1	0,420647
2	0,0569012
3	0,6498
4	0,501947
5	0,455816
6	0,411327
7	0,0815771
8	0,93098
9	0,521315
10	0,225565
11	0,227603
12	0,27337
13	0,777937
14	0,754131
15	0,145334
16	0,237543
17	0,268139
18	0,371671
19	0,56931
20	0,703721

Postup a výsledek simulace největších škod při 1 000 pojistných plnění pomocí kvantilové funkce ukazuje tabulka 19. Tabulka 18 obsahuje pouze pomocné výpočty.

Tabulka 18 – Pomocná tabulka k simulaci 20 největších škod [Vlastní]

v	n	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	u(n)	Q(u(n))
0,4206470	1000	0,001	0,999134	0,9991344	1138312,59
0,0569012	999	0,001001	0,997135	0,9962717	680441,21
0,6498000	998	0,001002	0,999568	0,9958414	653557,61
0,5019470	997	0,001003	0,999309	0,9951532	617305,31
0,4558160	996	0,001004	0,999211	0,9943685	583355,51
0,4113270	995	0,001005	0,999108	0,9934811	551680,33
0,0815771	994	0,001006	0,997482	0,9909794	486122,66
0,9309800	993	0,001007	0,999928	0,990908	484609,68
0,5213150	992	0,001008	0,999344	0,9902575	471494,73
0,2255650	991	0,001009	0,998498	0,9887706	445370,48
0,2276030	990	0,00101	0,998506	0,9872934	423523,47
0,2733700	989	0,001011	0,99869	0,9859996	406937,29
0,7779370	988	0,001012	0,999746	0,985749	403954,64

v	n	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	u(n)	Q(u(n))
0,7541310	987	0,001013	0,999714	0,9854672	400680,63
0,1453340	986	0,001014	0,998046	0,9835414	380314,47
0,2375430	985	0,001015	0,998542	0,9821072	367058,28
0,2681390	984	0,001016	0,998663	0,9807944	356080,24
0,3716710	983	0,001017	0,998994	0,9798073	348449,05
0,5693100	982	0,001018	0,999427	0,9792454	344317,70
0,7037210	981	0,001019	0,999642	0,9788947	341812,26

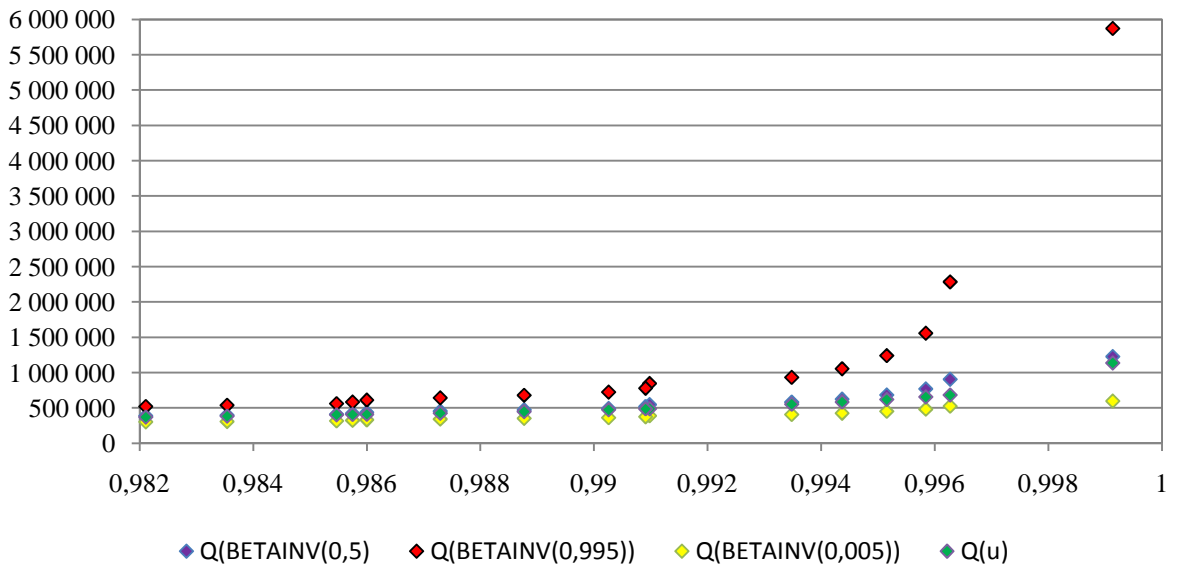
Tabulka 19 – Simulace 20 největších škod pomocí kvantilové funkce [Vlastní]

r	Q(u)	$\frac{(r-0,5)}{n}$	u	n - r + 1	BETAINV (0,5;r;n-r+1)	BETAINV (0,995;r;n-r+1)	BETAINV (0,005;r;n-r+1)
1000	1138312,59	0,9995	0,999134	1	0,99930709	0,99999499	0,99471569
999	680441,21	0,9985	0,996272	2	0,99832222	0,99989646	0,99259377
998	653557,61	0,9975	0,995841	3	0,99732684	0,99966186	0,99075985
997	617305,31	0,9965	0,995153	4	0,99632917	0,99932700	0,98906624
996	583355,51	0,9955	0,994369	5	0,99533066	0,99892050	0,98745990
995	551680,33	0,9945	0,993481	6	0,99433174	0,99846041	0,98591483
994	486122,66	0,9935	0,990979	7	0,99333259	0,99795860	0,98441577
993	484609,68	0,9925	0,990908	8	0,99233332	0,99742317	0,98295307
992	471494,73	0,9915	0,990258	9	0,99133395	0,99685997	0,98151994
991	445370,48	0,9905	0,988771	10	0,99033452	0,99627322	0,98011136
990	423523,47	0,9895	0,987293	11	0,98933505	0,99566633	0,97872400
989	406937,29	0,9885	0,986	12	0,98833553	0,99504185	0,97735476
988	403954,64	0,9875	0,985749	13	0,98733600	0,99440187	0,97600150
987	400680,63	0,9865	0,985467	14	0,98633645	0,99374813	0,97466254
986	380314,47	0,9855	0,983541	15	0,98533688	0,99308199	0,97333598
985	367058,28	0,9845	0,982107	16	0,98433730	0,99240470	0,97202110
984	356080,24	0,9835	0,980794	17	0,98333771	0,99171722	0,97071671
983	348449,05	0,9825	0,979807	18	0,98233811	0,99102032	0,96942163
982	344317,70	0,9815	0,979245	19	0,98133850	0,99031496	0,96813536
981	341812,26	0,9805	0,978895	20	0,98033889	0,98960161	0,96685696

Q(BETAINV(0,5;r;n-r+1))	Q(BETAINV(0,995;r;n-r+1))	Q(BETAINV(0,005;r;n-r+1))
1227299,773	5870843,84	597565,6935
906014,1574	2284691,38	525161,9901
767947,2548	1557968,30	481517,3190
684337,1469	1239403,78	450192,9952
625981,7652	1055644,31	425816,5609
581916,1352	933656,74	405920,7142
546925,2064	845521,67	389155,3177
518152,4011	778143,59	374701,5825
493876,4101	724522,80	362022,5312
472986,5009	680543,35	350747,1597
454727,4776	643629,80	340611,9688
438564,4959	612066,88	331417,2588
424106,2411	584670,10	323012,9482
411058,2777	560592,11	315282,1751
399194,0738	539206,24	308129,0747
388335,844	520042,48	301480,9520
378341,9547	502735,33	295275,0271
369097,5554	486997,49	289458,6142
360508,5907	472606,00	283990,0662
352497,0717	459373,22	278831,8089

Obrázek 27 znázorňuje simulovanou extrémní škodu $Q(u)$ pro každou pořádkovou statistiku $X_{(1\ 000)}$, $X_{(999)}$, ..., $X_{(981)}$, ale také její medián a kvantily $\chi_{0,995}$, $\chi_{0,005}$, které ohraničují interval, z kterého hodnoty příslušné pořádkové statistiky s pravděpodobností 0,99 pocházejí.

Simulace extrémních škod



Obrázek 24 – Grafické zobrazení výsledků simulace extrémních škod [Vlastní]

Simulace p nejvyšších škod v portfoliu neživotní pojišťovny je užitečná v případě zajištění. Takto získané informace lze použít také v jiném než neproporcionálním zajištění. Například u zajištění typu LCR (p), kdy pojišťovna postoupí p největších škod zajistiteli, a také v zajištění ECOMOR, kdy zajišťovna hradí škody, které přesahují p -tou největší hodnotu.

5.2 Metoda extrémů překračujících práh

V této části je praktická ukázka metody extrémů překračujících práh. Údaje o havarijním pojištění motorových vozidel, z nichž byla vytvořena simulace extrémních škod pomocí kvantilových funkcí, nejsou pro tuto analýzu již dostatečné. Bylo nutné tedy zpracovat údaje nové, týkající se pojištění požárů v letech 1980 – 1990 v Dánsku. Soubor obsahuje 2 167 údajů o individuálních výškách škod, vyjádřených v milionech dánských korun (DKK), které ovšem převyšují částku 1 mil. DKK.

Data jsou dostupná na <http://www.ma.hw.ac.uk/~mcneil/ftp/Danish-multivariate.txt>.

Praktická ukázka byla opět realizována pomocí programu Statgraphics Centurion XV.

5.2.1 Základní charakteristiky náhodného výběru

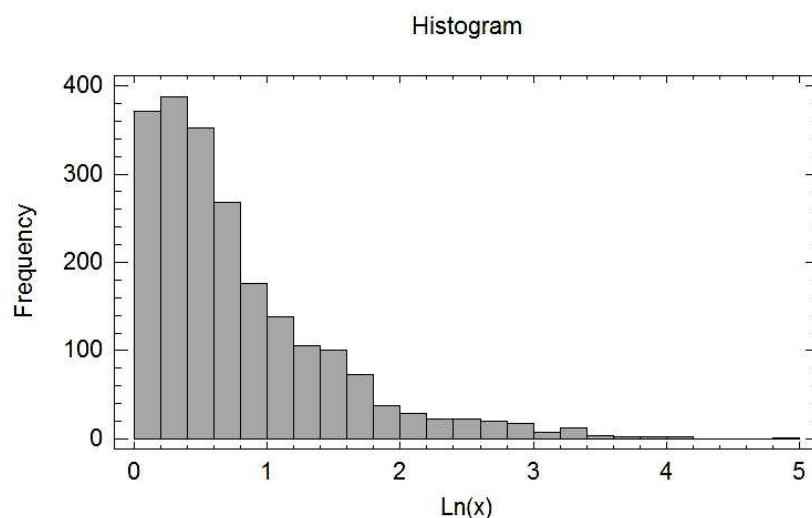
Tato část popisuje základní charakteristiky náhodného výběru. Tedy především grafickou analýzu a výběrové charakteristiky výběru.

Tabulka 20 – Základní charakteristiky individuálních škod [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Summary Statistics for x	
Count	2167
Average	3,38509
Median	1,77815
Geometric mean	2,19669
Variance	72,3767
Standard deviation	8,50745
Minimum	1,0
Maximum	263,25
Std. skewness	356,576
Std. kurtosis	4596,82

Tabulka 20 zobrazuje základní statistické charakteristiky náhodného výběru škod z pojištění požárů v Dánsku:

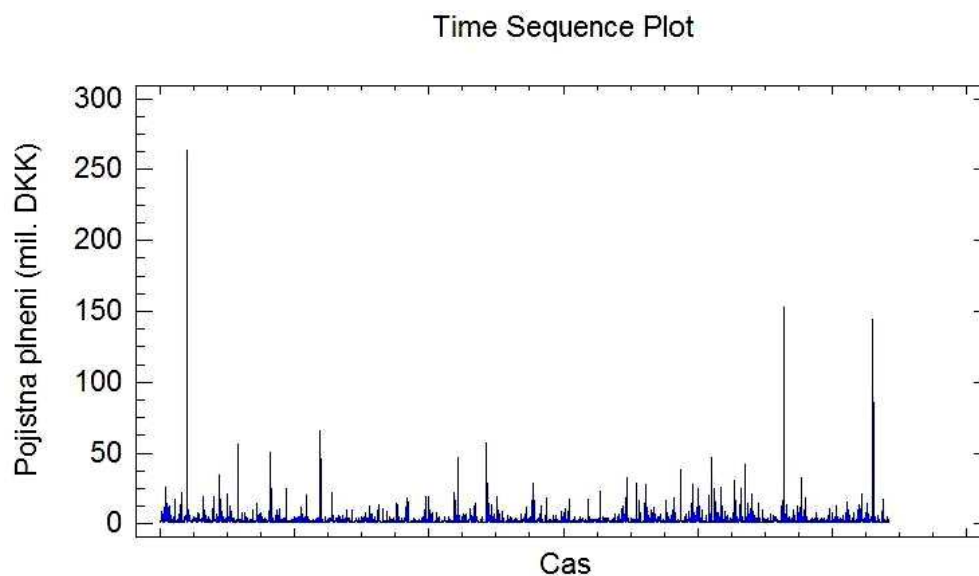
- počet individuálních škod je 2 167 mil. DKK,
- průměrná výše škod 3,38509 mil. DKK,
- medián je roven 1,77815 mil. DKK,
- geometrický průměr škod 2,19669 mil. DKK,
- rozptyl je 72,3767 mil. směrodatná odchylka 8,50745 mil.,
- minimální výše škod je 1 mil. DKK a maximální výše škod 263,25 mil. DKK,
- koeficient šikmosti je roven 356,576 mil., koeficient špičatosti 4 596,82 mil..



Obrázek 25 – Histogram [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Kvůli lepší přehlednosti a srozumitelnosti jsou data náhodného výběru transformována pomocí přirozeného logaritmu.

Z obrázku 28 je patrné, že náhodný výběr má škody s nízkými hodnotami, avšak pravděpodobnost jejich výskytu je vysoká. Je zde ovšem také výskyt extrémně vysokých hodnot, jejichž přítomnost je charakterizována nízkou pravděpodobností.

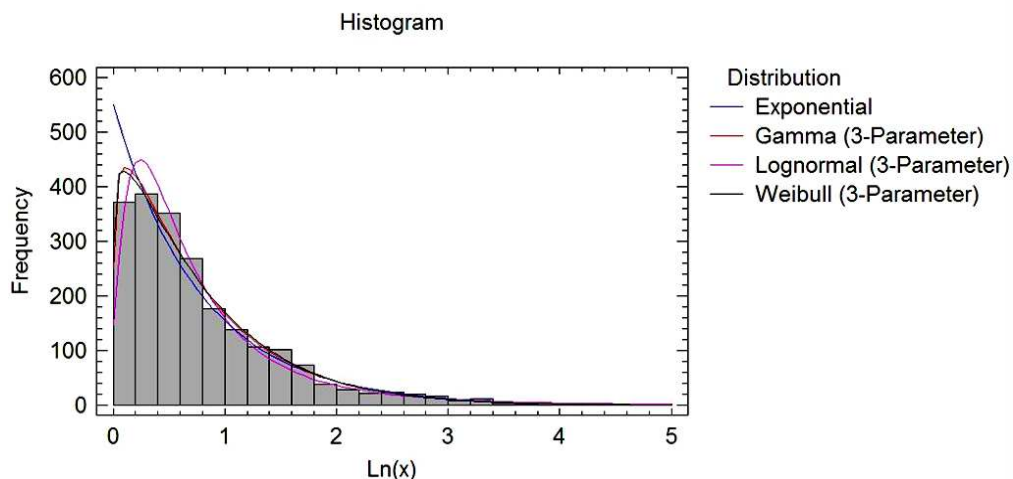


Obrázek 29 – Graf časové řady [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Obrázek 29, na kterém jsou výšky škod, způsobených požáry v Dánsku od roku 1980 do roku 1990, seřazené chronologicky, umožňuje identifikovat extrémní hodnoty a přibližný čas jejich výskytu. Je patrné, že náhodný výběr splňuje podmínku nezávislosti i identického rozdělení individuálních škod.

5.2.2 Rozdělení pravděpodobnosti náhodného výběru

Dle níže uvedeného obrázku 30 bylo provedeno vizuální porovnání vhodností vybraných pravděpodobnostních modelů.

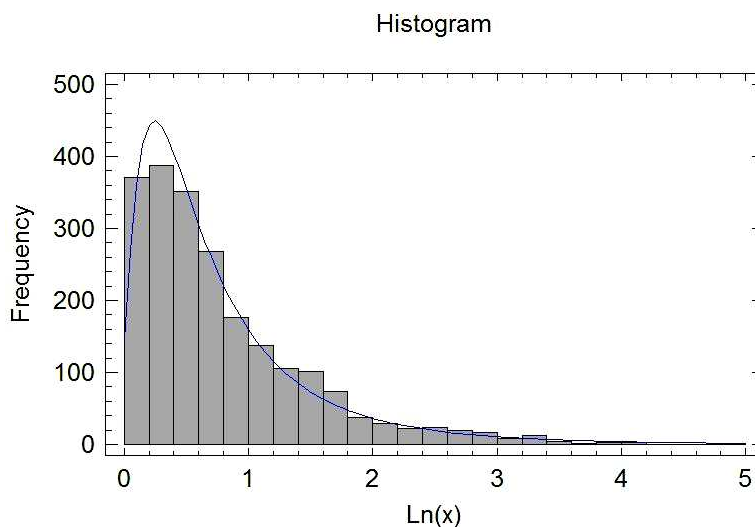


Obrázek 26 - Histogram pro vybraná rozdělení pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Jako nejvhodnější rozdělení pravděpodobnosti náhodného výběru se zdá být 3parametrické lognormální rozdělení, naopak nejméně vhodné exponenciální rozdělení.

5.2.2.1 Tří-parametrické lognormální rozdělení pravděpodobnosti

Jak již bylo řečeno, nejlépe vhodným rozdělením pro analyzovaná data je právě tří-parametrické lognormální rozdělení pravděpodobnosti.



Obrázek 27 – Histogram porovnání shody s tří-parametrickým lognormálním rozdělením pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Shodu empirického a předpokládaného teoretického rozdělení pravděpodobnosti potvrzuje i Kolmogorovův-Smirnovův test dobré shody, výsledky zobrazuje tabulka 21.

Tabulka 21 – Kolmogorovův-Smirnovův test dobré shody [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Kolmogorov-Smirnov Test	
	<i>Lognormal (3-Parameter)</i>
DPLUS	0,0267068
DMINUS	0,0252914
DN	0,0267068
P-Value	0,0908965

Program Statgraphics Centurion XV odhadl také parametry tří-parametrického lognormálního rozdělení pravděpodobnosti (tabulka 22).

Tabulka 22 – Odhadnuté parametry tří-parametrického lognormálního rozdělení pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Fitted Distributions	
<i>Lognormal (3-Parameter)</i>	
mean =	0,805278
standard deviation =	0,860362
lower threshold =	-0,105903

5.2.3 Metoda extrémů překračujících práh

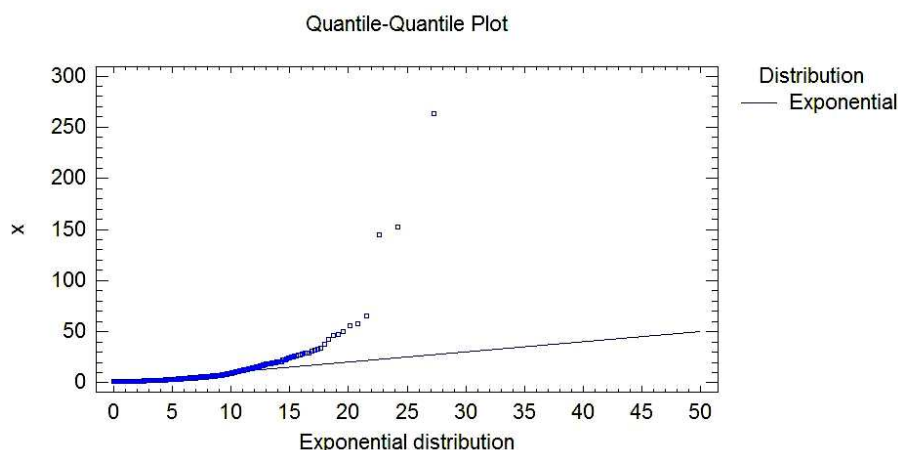
V této části byl nalezen vhodný model pro škody, které překročí předem stanovený vysoký práh u . Hodnoty, které ho překračují, jsou pro pojišťovnu velice důležité, neboť pro ni mají závažný finanční dopad.

Zásadním problémem při modelování škod byla správná volba prahu. Práh je vhodné zvolit z intervalu $(x_{0,90}; x_{0,95})$. Vypočtené hodnoty percentilů zobrazuje tabulka 23.

Tabulka 23 – Percentily analyzovaných dat [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Percentiles for x	
	Percentiles
1,0%	1,0066
5,0%	1,05751
10,0%	1,11317
25,0%	1,32112
50,0%	1,77815
75,0%	2,9703
90,0%	5,56173
95,0%	10,0111
99,0%	26,2146

Při volbě vhodného prahu lze využít také grafického zobrazení. Na obrázku 32 je znázorněn Q-Q graf shody empirického rozdělení s exponenciálním rozdělením.



Obrázek 28 – Q-Q graf empirických údajů a exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

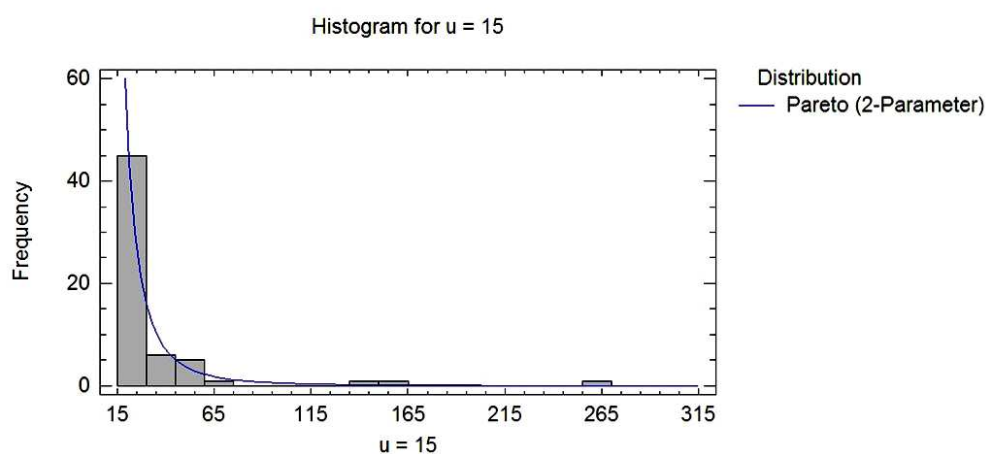
Funkce roste lineárně a body na Q-Q grafu začínají být roztroušené přibližně od hodnoty 15. Zdá se tedy vhodná volba prahu na úrovni $u = 15$. Bylo zjištěno, že tomuto prahu odpovídá právě 60 extrémů. Tyto extrémy je nyní třeba modelovat pomocí Paretova rozdělení.

Tabulka 24 zobrazuje maximálně věrohodné odhady parametrů Paretova rozdělení pravděpodobnosti.

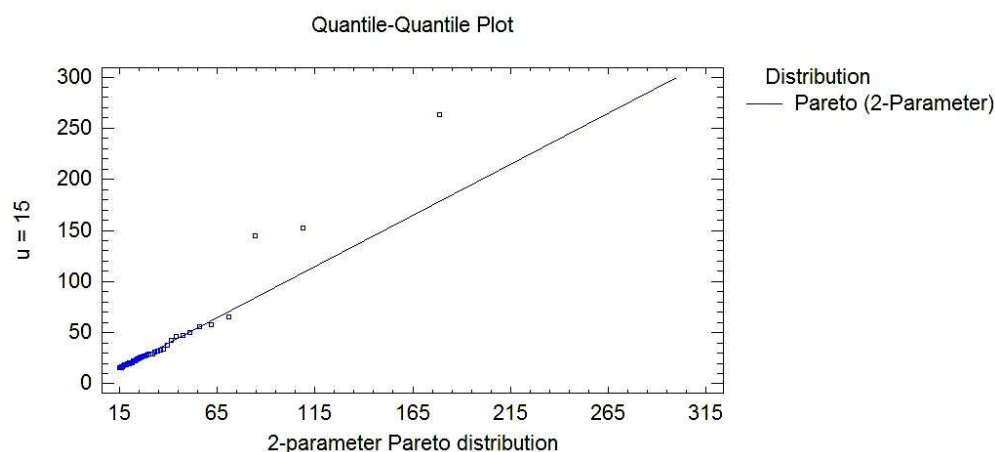
Tabulka 24 – Odhady parametrů Paretova rozdělení pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Fitted Distributions	
<i>Pareto (2-Parameter)</i>	
shape =	1,82344
lower threshold =	15,2847

Porovnání shody empirického rozdělení extrémů překračujících práh $u = 15$ zobrazují následující obrázky 33, 34.



Obrázek 29 – Histogram porovnání shody s Paretovým rozdělením pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]



Obrázek 30 – Q-Q graf porovnání shody s Paretovým rozdělením pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

V tabulce 25 se nachází vhodné modely rozdělení individuálních škod pro různý práh u a také p-hodnoty Kolmogorova-Smirnovova testu. Tato hodnota je nejvyšší (tučně zvýrazněna) pro práh $u = 15$, čemuž odpovídá právě 60 extrémů.

Tabulka 25 – Porovnání p-hodnot Kolmogorova-Smirnovova testu pro různý práh [Vlastní]

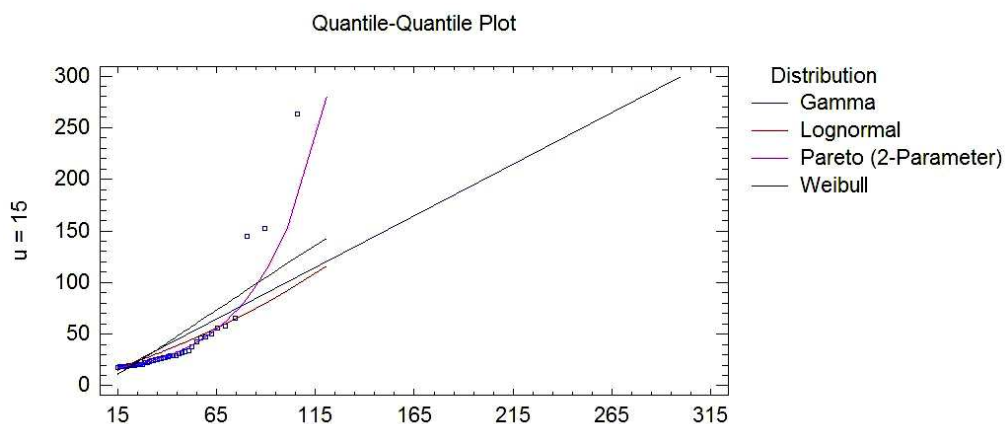
Rozdělení	Prah u	Počet extrémů	P-hodnota Kolmogorova-Smirnovova testu
Lognormální	0	2 167	0,090896
Pareto	5	254	0,444256
Pareto	10	109	0,767173
Pareto	15	60	0,962803
Pareto	20	36	0,913898

V následující tabulce 26 je zpracováno porovnání různých rozdělení pravděpodobností, běžně používaných na modelování škod v pojišťovně, dle p-hodnot Kolmogorova-Smirnovova testu dobré shody pro různou úroveň prahu u . Z tohoto srovnání vyplývá, že Pareto rozdělení je nejvhodnějším rozdělením pro modelování extrémních hodnot.

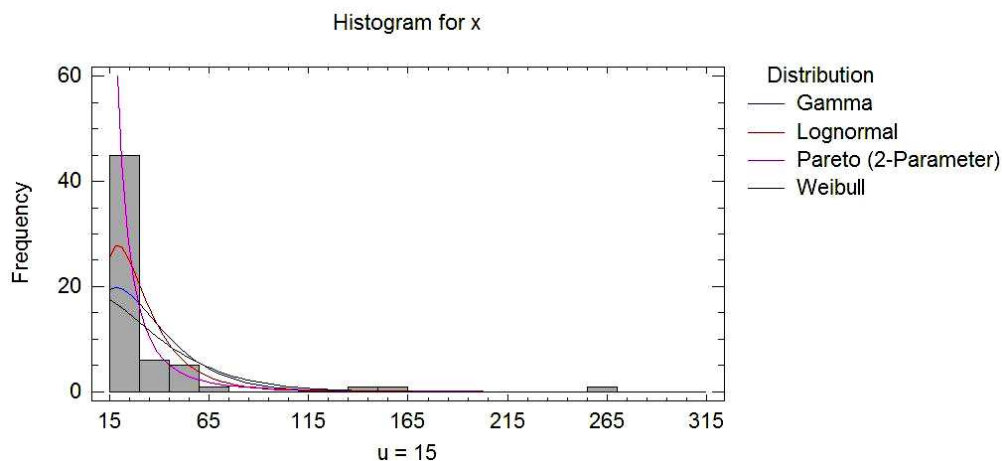
Tabulka 26 – P-hodnota Kolmogorova-Smirnovova testu pro různý práh a různé rozdělení pravděpodobnosti [Vlastní]

Prah u	Gama rozdělení	Lognormální rozdělení	Weibullovo rozdělení	Pareto rozdělení
5	1,173E-08	0,0000568	0,00000000	0,444256
10	0,0003575	0,0208521	1,26384E-7	0,767173
15	0,0014148	0,0323151	0,00009828	0,962803
20	0,0217934	0,0797695	0,00728631	0,913898

Vhodnost Pareto rozdělení pravděpodobnosti pro modelování extrémních hodnot lze ověřit též pomocí grafického zobrazení. Na obrázcích níže (35, 36) je vidět porovnání shody pravděpodobnostního rozdělení extrémů překračujících práh $u = 15$ s nejčastěji volenými pravděpodobnostními modely.



Obrázek 31 – Q-Q graf porovnání shody s vybranými typy rozdělení pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]



Obrázek 32 – Histogram porovnání shody s vybranými typy rozdělení pravděpodobnosti [Výstup z program Statgraphics Centurion XV]

Stanovení vhodného prahu u je možné využít především při analýze zajištění. Při zajištění škodního nadměřku s pevně sjednanou prioritou a se na základě předcházející analýzy dat o výškách škod z požárního pojištění v Dánsku, zvolí prioritou na úrovni $a = 15$ mil. DKK.

Závěr

Diplomová práce sledovala jeden základní cíl, kterým byl teoretický popis a praktická aplikace metod modelování extrémních škod.

V práci jsou uvedena základní teoretická východiska modelování rozdělení pravděpodobnosti výšek individuálních škod. Diplomová práce vychází z metod moderní pojistné matematiky, statistiky a teorie rizika v rámci neživotního pojištění.

Práce byla rozdělena do pěti hlavních kapitol. První kapitola je věnována charakteristice extrémních událostí, členění katastrofických rizik na přírodní katastrofy a katastrofy způsobené člověkem. Obsahem je také graficky zpracovaný přehled vývoje přírodních katastrof, příklady nejzávažnějších extrémních událostí. Také se zdálo vhodné do této kapitoly zařadit nejzávažnější přírodní katastrofu roku 2011, tedy zemětřesení a vlnu tsunami v Japonsku. Tato událost dosáhla takových rozměrů, že škody jí způsobené budou extrémně vysoké.

Druhá kapitola je zaměřena na modelování extrémních škod, kontext modelování a jeho postup. Je zde popsána velmi důležitá grafická analýza údajů. Také je možné se zde seznámit s postupy založenými na teorii rizika, ke kterým se řadí především odhady parametrů rozdělení pravděpodobnosti a testy shody, kterými ověřujeme shodu zvoleného pravděpodobnostního modelu s empirickým rozdělením.

Následující třetí kapitola popisuje již samotné možnosti modelování extrémních škod. Nachází se zde teoretický popis základních možností modelování extrémních škod, jako je modelování pomocí kvantilových funkcí, metoda blokového maxima a metoda extrémů překračujících práh.

Ve čtvrté kapitole je charakteristika pojmu zajištění, jeho význam, formy a typy. Více dopodrobna je definováno CatXL zajištění, které je nejvýznamnějším typem neproporcionálního zajištění právě pro katastrofická rizika, která mají nejvyšší pravděpodobnost extrémních škod.

V poslední páté kapitole je praktická ukázka metod modelování extrémních škod. Teoretické poznatky popsané v kapitole třetí byly aplikovány na reálných údajích. Metoda modelování extrémních škod pomocí kvantilových funkcí je ukázána na údajích o výškách škod z havarijního pojištění. Metoda extrémů překračujících práh na údajích o výškách škod z pojištění požárů v Dánsku v letech 1980 – 1990. Obě metody jsou zpracovány ve statistickém softwaru Statgraphics Centurion XV. První z metod vyžadovala také

provedení simulace 20 nejvyšších škod, která byla zpracována v programu Microsoft Office Excel 2007.

Obsah předložené diplomové práce splňuje předem stanovený cíl a poskytuje teoretické a následně i praktické poznatky z dané problematiky. Posouzení a modelování rizik v pojišťovnách je velice náročným, klíčovým a stále diskutovaným problémem. Jeho úspěšné řešení se ovšem stává základem pro řešení ostatních otázek jako je například stanovení pojistného.

Seznam použité literatury

- [1] *ACE group* [online]. 2011 [cit. 2011-04-2]. Dostupné z WWW: <www.acegroup.com>.
- [2] *AIR Worldwide* [online]. 2010 [cit. 2011-03-20]. Dostupné z WWW: <www.air-worldwide.com>.
- [3] BEIRLANT, J., et al. *Statistics of Extremes: Theory and Applications*. New York : Wiley, 2004. 522 s. ISBN 0471976474.
- [4] BOLAND, P. J. *Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science*. London : Chapman&Hall/CRC, 2007. 351 s. ISBN 1-58488-695-1.
- [5] *Cenia* [online]. 2010 [cit. 2011-03-30]. Dostupné z WWW: <www.cenia.cz>.
- [6] CIPRA, T. *Pojistná matematika: teorie a praxe*. Praha : Ekopress, 2006. 411 s. ISBN 80-86929-11-6.
- [7] CIPRA, Tomáš. *Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví*. 1. vyd. Praha : Grada, 2004. 260 s. ISBN 80-247-0838-8.
- [8] EMBRECHTS, P.; KLÜPPELBERG, C.; MIKOSCH, T. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. 1. vyd. Německo : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997. 648 s. ISBN 978-3-540-60931-5.
- [9] *EQECAT* [online]. 2011 [cit. 2011-03-20]. Dostupné z WWW: <www.eqecat.com>.
- [10] FIALOVÁ, A. Odhad parametrů chvostů distribuční funkce. *Robust*. 2000, 2000, s. 42-49.
- [11] GILCHRIST, W. G. *Statistical Modelling with Quantile Functions*. New York : Chapman&Hall/CRC, 2000. 320 s. ISBN 1-58488-174-7.
- [12] *Gnosis9* [online]. 2010 [cit. 2011-03-201]. Dostupné z WWW: <www.gnosis9.net>.
- [13] *Hannover Re* [online]. 2010 [cit. 2011-03-24]. Dostupné z WWW: <www.hannover-re.com>.
- [14] Kolektiv autorů. *Vybrané kapitoly z pojišťovnictví*. 2. vyd. Praha : Česká asociace pojišťoven, 1999. 176 s.
- [15] KUBANOVÁ, Jana. *Statistické metody pro ekonomickou a technickou praxi*. Bratislava : Stasis, 2003. 247 s. ISBN 80-85659-31-X.
- [16] LINDA, Bohdan. *Pravděpodobnost*. 1. vyd. Pardubice : Univerzita Pardubice, 2010. 168 s. ISBN 978-80-7395-303-4.

- [17] MCNEIL, A. J. Estimating the Tails of Loss Severity Distributions using Extreme Value Theory. *Astin Bulletin*. 1997, č. 27, s. 117-137.
- [18] *Munich Re* [online]. 2010 [cit. 2011-02-17]. Dostupné z WWW: <www.munichre.com>.
- [19] *Novinky.cz* [online]. 2011 [cit. 2011-03-26]. Dostupné z WWW: <www.novinky.cz>.
- [20] *OPojištění* [online]. 2010 [cit. 2011-02-24]. Dostupné z WWW: <www.opojisteni.cz>.
- [21] PACÁKOVÁ, Viera. *Aplikovaná poistná štatistika*. 3 přeprac. a dopl. vyd. Bratislava : Iura Edition, 2004. 261 s. ISBN 80-8078-004-8.
- [22] PACÁKOVÁ, V.; LINDA, B. Simulations of Extreme Losses in Non-Life Insurance. *E + M*. 2009, č. 4, s. 97 - 103.
- [23] *SCOR* [online]. 2011 [cit. 2011-03-22]. Dostupné z WWW: <www.scor.com>.
- [24] SIPKOVÁ, L.; SODOMOVÁ, E. *Modelovanie kvantilovými funkciami*. 1. vyd. Bratislava : Ekonom, 2007. 175 s. ISBN 978-80-225-2346-2.
- [25] SKŘIVÁNKOVÁ, Valéria; TARTALOŤOVÁ, Alena. Catastrophic Risk Management in Non-life Insurance. *E + M*. 2008, č. 2, s. 65-72.
- [26] SKŘIVÁNKOVÁ, Valéria. Štatistická analýza extrémnych hodnôt a metódy ich registrácie v neživotnom poistení. *Mezinárodní konference Řízení a modelování finančních rizik*. 2006, č. 3, s. 270-277.
- [27] SMITH, K. *Environmental Hazards: Assesing Risk and Reducing Disaster*. 3. vyd. Londýn : Routledge, 2002. 392 s. ISBN 0-415-22463-2.
- [28] SOUKUPOVÁ, P. *7 nejničivějších přírodních katastrof v dějinách lidstva*. 21. Století, 2007.
- [29] *Světová banka* [online]. 2011 [cit. 2011-04-2]. Dostupné z WWW: <www.worldbank.org>.
- [30] *Swiss Re* [online]. 2010 [cit. 2011-02-17]. Dostupné z WWW: <www.swissre.com>.
- [31] Zákon č. 37/2004 Sb., o pojistné smlouvě a o změně souvisejících zákonů.
- [32] Zákon č. 239/2000 Sb., o integrovaném záchranném system a o změně některých zákonů.
- [33] ZHONGXIAN, H. *Actuarial modelling of extremal events using transformed generalized extreme value distributions and generalized Pareto distribution*. Ohio : The Ohio State University, 2003. 81 s.

Seznam obrázků

Obrázek 1 – Přírodní katastrofy v letech 2009, 2010	13
Obrázek 2 – Největší přírodní katastrofy 1950 – 2009.....	14
Obrázek 3 – Největší přírodní katastrofy 1950 – 2009 – celkové a pojištěné škody	15
Obrázek 4 – Počet katastrof v letech 1970 – 2009	15
Obrázek 5 – Odhady podílů zajišťoven na škodách z přírodní katastrofy v Japonsku 2011.....	17
Obrázek 6 – Možné realizace škod v budoucím časovém období.....	18
Obrázek 7 – Metoda blokového maxima.....	30
Obrázek 8 – Metoda extrémů překračujících práh.....	32
Obrázek 9 – Korelační graf.....	42
Obrázek 10 – Krabicový graf.....	43
Obrázek 11 – Histogram	44
Obrázek 12 – Pravděpodobnostní rozdělení v programu Statgraphics Centurion XV	44
Obrázek 13 – Q-Q graf porovnání shody s normálním rozdělením pravděpodobnosti	45
Obrázek 14 – Histogram porovnání shody s normálním rozdělením pravděpodobnosti	45
Obrázek 15 – Q-Q graf porovnání shody s gama rozdělením pravděpodobnosti	46
Obrázek 16 – Histogram porovnání shody s gama rozdělením pravděpodobnosti	46
Obrázek 17 – Histogram porovnání shody s exponenciálním rozdělením pravděpodobnost.....	47
Obrázek 18 – Q-Q graf porovnání shody s lognormálním rozdělením pravděpodobnosti..	48
Obrázek 19 – Histogram porovnání shody s lognormálním rozdělením pravděpodobnosti.....	48
Obrázek 20 – Q-Q graf porovnání shody s Paretovým rozdělením pravděpodobnosti	49
Obrázek 21 – Histogram porovnání shody s Paretovým rozdělením pravděpodobnosti.....	49
Obrázek 22 – Q-Q graf pro vybraná rozdělení pravděpodobnosti.....	50
Obrázek 23 – Histogram pro vybraná rozdělení pravděpodobnosti	50
Obrázek 24 – Grafické zobrazení výsledků simulace extrémních škod	59
Obrázek 25 – Histogram	60
Obrázek 26 - Histogram pro vybraná rozdělení pravděpodobnosti	62
Obrázek 27 – Histogram porovnání shody s tří-parametrickým lognormálním rozdělením pravděpodobnosti.....	62

Obrázek 28 – Q-Q graf empirických údajů a exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti..	
.....	64
Obrázek 29 – Histogram porovnání shody s Paretovým rozdělením pravděpodobnosti.....	65
Obrázek 30 – Q-Q graf porovnání shody s Paretovým rozdělením pravděpodobnosti	65
Obrázek 31 – Q-Q graf porovnání shody s vybranými typy rozdělení pravděpodobnosti ..	67
Obrázek 32 – Histogram porovnání shody s vybranými typy rozdělení pravděpodobnosti	
.....	67

Seznam tabulek

Tabulka 1 – Přehled nejničivějších přírodních katastrof v dějinách lidstva	13
Tabulka 2 – Přírodní katastrofy v roce 2010	13
Tabulka 3 – Přehled největších přírodních katastrof roku 2010 – klasifikace dle celkových škod	14
Tabulka 4 – Přehled největších přírodních katastrof roku 2010 – klasifikace dle pojištěných škod	14
Tabulka 5 – Funkce průměrných extrémů některých vybraných rozdělení	33
Tabulka 6 – n-hodinová klauzule	39
Tabulka 7 – Individuální výše škod v neživotním pojištění v KČ	41
Tabulka 8 – Základní charakteristiky náhodného výběru	41
Tabulka 9 – Tabulka frekvencí v jednotlivých intervalech	43
Tabulka 10 – Odhady parametrů vybraných rozdělení pravděpodobnosti	51
Tabulka 11 – Pearsonův χ^2 test dobré shody	51
Tabulka 12 – Pearsonův χ^2 test dobré shody pro Paretovo rozdělení pravděpodobnosti	51
Tabulka 13 – Kolmogorovův-Smirnovův test dobré shody	52
Tabulka 14 – Kolmogorovův-Smirnovův test dobré shody pro Paretovo rozdělení pravděpodobnosti	52
Tabulka 15 – Tabulka pomocných výpočtů k odhadu parametrů metodou maximální věrohodnosti	53
Tabulka 16 – Metoda momentů, metoda maximální věrohodnosti	55
Tabulka 17 – Vygenerovaná náhodná čísla	56
Tabulka 18 – Pomocná tabulka k simulaci 20 největších škod	56
Tabulka 19 – Simulace 20 největších škod pomocí kvantilové funkce	57
Tabulka 20 – Základní charakteristiky individuálních škod	60
Tabulka 21 – Kolmogorovův-Smirnovův test dobré shody	63
Tabulka 22 – Odhadnuté parametry tří-parametrického lognormálního rozdělení pravděpodobnosti	63
Tabulka 23 – Percentily analyzovaných dat	64
Tabulka 24 – Odhady parametrů Paretova rozdělení pravděpodobnosti	65
Tabulka 25 – Porovnání p-hodnot Kolmogorova-Smirnovova testu pro různý práh	66
Tabulka 26 – P-hodnota Kolmogorova-Smirnovova testu pro různý práh a různé rozdělení pravděpodobnosti	66

Seznam použitých zkratk

CatXL	Catastrophe excess of loss cover CatXL, zajištění škodního nadměrku katastrofické události
DKK	Dánská koruna
ECOMOR	Excedent du cout moyen relatif
LCR	Largest Claims Reinsurance
SL	Stop Loss
USD	Americký dolar
WXL/E	Working excess of loss cover per event, zajištění škodního nadměrku jednotlivých událostí
WXL/R	Working excess of loss cover per risk, zajištění škodního nadměrku jednotlivých smluv

Použité programy

Microsoft Office Excel 2007

Statgraphics Centurion XV