

UNIVERZITA PARDUBICE

Fakulta elektrotechniky a informatiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2025

Vojtěch Launa

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Řešení lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů s podporou Matlabu
Bakalářská práce

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Akademický rok: 2024/2025

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Vojtěch Launa**
Osobní číslo: **I22113**
Studijní program: **B0688A140009 Informační technologie**
Téma práce: **Řešení lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů s podporou Matla-
bu.**
Zadávající katedra: **Katedra informačních technologií**

Zásady pro vypracování

Zpracovat metody řešení lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů a seznámit se s prostředky Matla-
bu pro jejich řešení. Realizovat řešení vybraných diferenciálních rovnic s podporou Matlabu, popř. i tra-
dičním způsobem. Vypracovat příslušné M-skripty, doplnit vizualizaci získaných funkcí pomocí grafiky
Matlabu.

Rozsah pracovní zprávy: **30 – 60**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

1. Prachař, O., Jelínková, J. *Průvodce předmětem matematika II (pátá část) – Úlohy z obyčejných diferenciálních rovnic*, Pardubice, Univerzita Pardubice, 2005. ISBN 80-7194-747-4.
2. Zahrádka, J. *Matematický seminář – MATLAB*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2013. ISBN 978-80-7395-691-2.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Jaromír Zahrádka, Ph.D.**
Katedra automatizace a matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **15. prosince 2024**
Termín odevzdání bakalářské práce: **16. května 2025**

prof. Ing. Petr Doležel, Ph.D. v.r.
děkan

LS.

Ing. Jan Panuš, Ph.D. v.r.
vedoucí katedry

V Pardubicích dne 28. února 2025

Prohlašuji:

Práci s názvem Řešení lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů s podporou Matlabu jsem vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 7/2019 Pravidla pro odevzdávání, zveřejňování a formální úpravu závěrečných prací, ve znění pozdějších dodatků, bude práce zveřejněna prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 22.5. 2025

Vojtěch Launa v.r.

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych tímto poděkoval RNDr. Jaromíru Zahradkovi, Ph.D., za cenné rady, odbornou pomoc a podporu během tvorby této bakalářské práce. Dále děkuji UPCE FEI za kvalitní vzdělání a za veškeré vědomosti, které mi umožnily úspěšně zvládnout studium a vypracovat tento projekt.

ANOTACE

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou diferenciálních rovnic. V práci jsou popsány a vysvětleny základní metody řešení diferenciálních rovnic, včetně analytických i numerických přístupů. Součástí práce je také úvod do prostředí Matlab a jeho využití při řešení diferenciálních rovnic, kdy jsou demonstrovány praktické výpočty a vizualizace. Kromě softwarových metod jsou v práci prezentovány i výpočty vybraných příkladů bez použití počítačových nástrojů, což umožňuje lepší pochopení teoretických principů.

KLÍČOVÁ SLOVA

Diferenciální rovnice, Matlab, metody řešení diferenciálních rovnic

TITLE

Solution of Higher-Order Linear Differential Equations with MATLAB Support

ANNOTATION

This bachelor's thesis deals with differential equations. The work describes and explains fundamental methods for solving differential equations, including both analytical and numerical approaches. It also includes an introduction to the MATLAB environment and its application in solving differential equations, demonstrating practical calculations and visualizations. In addition to software-based methods, the thesis presents manual calculations of selected examples without the use of computational tools, which facilitates a better understanding of the underlying theoretical principles.

KEYWORDS

Differential equations, Matlab, methods for solving differential equations

OBSAH

SEZNAM ILUSTRACÍ A TABULEK.....	11
SEZNAM ZKRATEK A ZNAČEK	12
TERMINOLOGIE	13
ÚVOD.....	14
1. DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE	15
1.1 Obyčejné a parciální diferenciální rovnice	15
1.1.1 Obyčejné diferenciální rovnice	15
1.1.2 Parciální diferenciální rovnice	16
1.2 Lineární a nelineární diferenciální rovnice	16
1.2.1 Lineární diferenciální rovnice.....	16
1.2.2 Nelineární diferenciální rovnice	17
1.3 Homogenní a nehomogenní diferenciální rovnice.....	18
1.3.1 Homogenní diferenciální rovnice	18
1.3.2 Nehomogenní diferenciální rovnice.....	18
1.4 Řád diferenciálních rovnic.....	19
1.5 Počáteční a okrajové podmínky	20
1.5.1 Počáteční podmínky	20
1.5.2 Okrajové podmínky	21
2 METODY ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC	22
2.1 Analytické metody řešení	22
2.1.1 Metoda charakteristických kořenů.....	22
2.1.2 Metoda variace konstant	23
2.1.3 Metoda prosté integrace.....	25
2.1.4 Metoda Laplaceovy transformace.....	26
2.1.5 Metoda separace proměnných	27
2.1.6 Metoda Fourierovy transformace.....	29
2.2 Numerické metody řešení	30
2.2.1 Eulerova metoda	30
2.2.2 Metoda Runge-Kutta.....	31
2.2.3 Metoda středního bodu	32
2.2.4 Metoda Adams-Bashforth.....	33

2.2.5	Metoda Adams-Moulton.....	34
2.2.6	Metoda konečných diferencí.....	36
3	MATLAB A JEHO VYUŽITÍ PRO ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC.....	38
3.1	Úvod do prostředí Matlab.....	38
3.2	Základní práce se skripty (M-files).....	40
3.2.1	Skripty.....	40
3.2.2	Funkce.....	40
3.2.3	Komentáře a dokumentace.....	41
3.3	Numerické funkce pro řešení ODE.....	41
3.3.1	Základní funkce pro řešení ODE.....	41
3.3.2	Definice rovnice.....	42
3.3.3	Řešení soustav ODE.....	43
3.4	Analytické funkce pro řešení ODE.....	44
3.4.1	Základní funkce pro analytické řešení ODE.....	44
3.5	Grafické nástroje a vizualizace řešení.....	45
3.5.1	Základní funkce pro vykreslení grafů.....	45
3.5.2	Více průběhů v jednom grafu.....	45
3.5.3	Třídídimenzionální grafy.....	46
3.5.4	Vektorová pole a směrníkové pole.....	46
3.5.5	Uložení grafů.....	46
3.5.6	Další možnosti úprav grafů.....	46
4	ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC VYŠŠÍCH ŘÁDŮ.....	47
4.1	Přehled vybraných diferenciálních rovnic a postup řešení.....	47
4.2	Homogenní diferenciální rovnice druhého řádu.....	47
4.2.1	Analytické řešení metodou charakteristických kořenů bez použití softwaru.....	48
4.2.2	Numerické řešení metodou Runge-Kutta 4. řádu bez použití softwaru.....	49
4.2.3	Řešení diferenciální rovnice v Matlabu.....	52
4.3	Nehomogenní diferenciální rovnice druhého řádu.....	57
4.3.1	Analytické řešení metodou variace konstant bez použití softwaru.....	57
4.3.2	Řešení diferenciální rovnice v Matlabu.....	59
4.4	Diferenciální rovnice třetího a vyššího řádu.....	64
4.4.1	Analytické řešení rovnice třetího řádu pomocí Laplaceovy transformace.....	64

4.4.2 Řešení diferenciální rovnice v Matlabu	66
4.5 Shrnutí výsledků a porovnání metod	71
ZÁVĚR	73
POUŽITÁ LITERATURA	74
SEZNAM PŘÍLOH.....	76

SEZNAM ILUSTRACÍ A TABULEK

Obrázek 1: Vývojové prostředí Matlabu	39
Obrázek 2: Graf řešení diferenciální rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$	54
Obrázek 3: Graf rozdílů mezi numerickým a analytickým řešením diferenciální rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$ (ode45).....	55
Obrázek 4: Ukázka odchylky v průběhu řešení (ode45).....	56
Obrázek 5: Graf řešení diferenciální rovnice $y'' - 3y' + 2y = et$	61
Obrázek 6: Graf rozdílů mezi numerickým a analytickým řešením diferenciální rovnice $y'' - 3y' + 2y = et$ (ode23)	62
Obrázek 7: Ukázka odchylky v průběhu řešení (ode23).....	63
Obrázek 8: Graf řešení diferenciální rovnice $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$	68
Obrázek 9: Graf rozdílů mezi numerickým a analytickým řešením diferenciální rovnice $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ (ode113)	69
Obrázek 10: Ukázka odchylky v průběhu (ode113)	70
Tabulka 1: Analytické hodnoty řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$ pro vybrané hodnoty t.....	49
Tabulka 2: Numerické hodnoty řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$ pomocí metody Runge-Kutta 4. řádu	51
Tabulka 3: Analytické hodnoty řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = et$ pro vybrané hodnoty t.....	58
Tabulka 4: Analytické hodnoty řešení rovnice $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ pro vybrané hodnoty t	65
Tabulka 5: Použité analytické metody	71
Tabulka 6: Použité numerické metody	71

SEZNAM ZKRATEK A ZNAČEK

Matlab.....	Matrix laboratory (MATLAB)
ODR / ODE.....	Obyčejná diferenciální rovnice
PDR / PDE.....	Parciální diferenciální rovnice
Nestiff.....	Netuhá
Stiff.....	Tuhá

TERMINOLOGIE

- **Diferenciální rovnice (Differential equation)**
Rovnice, která obsahuje neznámou funkci a její derivace.
- **Lineární diferenciální rovnice (Linear differential equation)**
Diferenciální rovnice, kde neznámá funkce a její derivace vstupují lineárně.
- **Řád diferenciální rovnice (Order of differential equation)**
Nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.
- **Homogenní diferenciální rovnice (Homogeneous differential equation)**
Diferenciální rovnice, kde pravá strana je rovna nule.
- **Nehomogenní diferenciální rovnice (Nonhomogeneous differential equation)**
Diferenciální rovnice, která má nenulovou pravou stranu.
- **Analytické řešení (Analytical solution)**
Přesný matematický výraz pro řešení diferenciální rovnice.
- **Numerické řešení (Numerical solution)**
Přibližné řešení získané pomocí numerických metod a algoritmů.
- **Matlab**
Software pro numerické výpočty, který umožňuje řešení diferenciálních rovnic a jejich vizualizaci.

ÚVOD

Diferenciální rovnice patří mezi základní nástroje matematické analýzy a mají široké využití ve fyzice, inženýrství, biologii a dalších vědeckých disciplínách. Pomocí těchto rovnic lze popisovat vztahy mezi funkcemi a jejich derivacemi, což umožňuje modelování dynamických procesů, jako jsou mechanické kmity, elektrické obvody, šíření tepla nebo růst populací.

V této práci se zaměříme na lineární diferenciální rovnice vyšších řádů, tedy rovnice druhého a vyššího stupně, které se v praxi objevují například při analýze mechanických soustav s tlumením, elektromagnetických vln či proudění tekutin. Cílem práce je nejen vysvětlit základní principy řešení těchto rovnic, ale také ukázat, jak lze tyto metody efektivně implementovat v prostředí Matlab. Tento software nabízí širokou škálu nástrojů pro analytické i numerické řešení diferenciálních rovnic, a proto se stal běžně používaným nástrojem v technických a přírodovědných oborech.

Práce je rozdělena do několika částí. Nejprve se seznámíme se základní teorií lineárních diferenciálních rovnic, včetně metod jejich analytického řešení, jako jsou metoda charakteristických kořenů, variace konstant nebo Laplaceova transformace. Dále se budeme věnovat numerickým metodám, jako je Eulerova metoda nebo Runge-Kutta metody, které umožňují aproximaci řešení diferenciálních rovnic v situacích, kdy analytické metody selhávají.

V praktické části se zaměříme na implementaci těchto metod v Matlabu a ukážeme konkrétní příklady jejich využití. Pomocí symbolických výpočtů Matlabu budeme hledat analytická řešení vybraných diferenciálních rovnic a následně porovnáme jejich přesnost s numerickými výsledky. Výsledky budou prezentovány formou grafických výstupů a tabulek, což umožní lepší pochopení a interpretaci chování řešených systémů.

Cílem této práce je tedy nejen poskytnout teoretický přehled o řešení lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů, ale především ukázat praktické aplikace těchto metod v Matlabu, který je vhodným nástrojem pro modelování a analýzu dynamických systémů.

1. DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

(Podle [1, 2, 3, 4, 5, 9, 12])

Diferenciální rovnice jsou rovnice, které obsahují neznámou funkci a její derivace. Používají se k modelování dynamických systémů v přírodních vědách, inženýrství, ekonomii a dalších oborech. Pomocí diferenciálních rovnic lze například popsat pohyb těles, šíření tepla nebo změny v elektrických obvodech.

1.1 Obyčejné a parciální diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice se obecně dělí do dvou hlavních kategorií: obyčejné diferenciální rovnice (ODR) a parciální diferenciální rovnice (PDR). Obě tyto kategorie mají specifické vlastnosti a uplatnění v různých vědeckých a technických disciplínách.

1.1.1 Obyčejné diferenciální rovnice

Obyčejná diferenciální rovnice (ODR / ODE) je rovnice, která obsahuje neznámou funkci závislou na jedné nezávislé proměnné a alespoň jednu její derivaci. Neznámá funkce je často označována jako $y(x)$, přičemž x je obvykle čas nebo jiná nezávislá proměnná. Derivace funkce, které se v ODR objevují, mohou být prvního nebo vyššího řádu, rovnice může zahrnovat i složitější výrazy, například součiny těchto derivací.

Obyčejné diferenciální rovnice lze klasifikovat podle několika kritérií. Můžeme je dělit na lineární a nelineární či homogenní a nehomogenní.

1.1.2 Parciální diferenciální rovnice

Parciální diferenciální rovnice (PDR / PDE) jsou rovnice, které obsahují více než jednu nezávislou proměnnou a alespoň jednu parciální derivaci neznámé funkce podle jedné z těchto proměnných. Na rozdíl od obyčejných diferenciálních rovnic, které se zabývají závislostí mezi funkcí a jejími derivacemi vzhledem k jedné proměnné, PDR modelují situace, kde závislost na více proměnných je klíčová.

Příkladem parciální diferenciální rovnice může být rovnice pro šíření tepla nebo vlnová rovnice. V těchto případech závisí změna určité veličiny (například teploty nebo amplitudy vlny) na více faktorech, jako je čas a prostor.

PDR jsou často složitější na analytické řešení a vyžadují pokročilé metody, včetně numerických přístupů, jako jsou metody konečných rozdílů nebo konečných prvků. Tyto rovnice mají široké využití v inženýrských a přírodovědných oborech, například při modelování turbulentního proudění tekutin, elektromagnetických polí nebo při analýze akustických a mechanických vln.

1.2 Lineární a nelineární diferenciální rovnice

Linearita a nelinearita rovnic určují jejich strukturu a obtížnost řešení. Lineární rovnice obsahují neznámou funkci a její derivace pouze v první mocnině, bez jejich součinů či složitějších výrazů. Nelineární rovnice naopak obsahují vyšší mocniny, součiny nebo jiné nelineární vztahy, což vede ke složitějšímu chování a nutnosti speciálních metod řešení.

1.2.1 Lineární diferenciální rovnice

Lineární diferenciální rovnice jsou rovnice, ve kterých neznámá funkce a její derivace vystupují pouze v první mocnině, bez vyšších mocnin nebo jejich součinů. Řešení těchto rovnic je jednodušší na analýzu, protože u homogenní rovnice je řešení tvořeno lineárními kombinacemi základních řešení. Lineární rovnice jsou typické tím, že pro počáteční podmínky existuje jedno jediné řešení.

Tento typ rovnic je dobře zvládnutelný a pro jeho analýzu existuje množství dobře vyvinutých metod.

1.2.2 Nelineární diferenciální rovnice

Nelineární diferenciální rovnice jsou rovnice, ve kterých se neznámá funkce nebo její derivace objevují v jiných než lineárních výrazech, například v druhé mocnině, součinu funkcí nebo dalších nelineárních formách. Na rozdíl od lineárních diferenciálních rovnic, kde je neznámá funkce a její derivace v první mocnině, nelineární rovnice mohou mít složitější strukturu, která činí jejich analýzu a řešení výrazně obtížnějšími.

Typickým příkladem nelineární diferenciální rovnice je rovnice, která zahrnuje členy jako $y'(x) \cdot y(x)$ nebo $y(x)^2$. Nelineární rovnice mohou popisovat složitější dynamiku než lineární rovnice a jsou běžně používané v modelování procesů, kde jsou vztahy mezi proměnnými složitější.

Nelineární diferenciální rovnice mohou mít více než jedno řešení, mohou vést k chaosu nebo jiným složitým dynamickým jevům, což činí jejich studium velmi zajímavým, ale také obtížným. Tyto rovnice se často řeší numerickými metodami, protože jejich analytické řešení bývá málokdy možné.

I přesto, že je obtížnější najít explicitní řešení nelineárních rovnic, existuje mnoho metod a technik pro jejich aproximaci, například metoda iterací, variace parametru, nebo numerické integrace.

1.3 Homogenní a nehomogenní diferenciální rovnice

Homogenita a nehomogenita diferenciálních rovnic souvisí s přítomností nebo nepřítomností vnějšího působení v rovnici. Homogenní rovnice neobsahují žádný vnější zdroj nebo budící člen, zatímco nehomogenní rovnice takový člen mají a ovlivňuje jejich řešení.

1.3.1 Homogenní diferenciální rovnice

Homogenní diferenciální rovnice jsou takové rovnice, u kterých je pravá strana rovnice rovna nule.

Homogenní rovnice mají důležitou vlastnost – jejich řešení mohou být vyjádřena jako lineární kombinace základních řešení. Pokud například nalezneme dvě nezávislá řešení $y_1(x)$ a $y_2(x)$ pak obecné řešení bude ve tvaru:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Tato vlastnost je klíčová při řešení lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů.

Homogenní rovnice se často vyskytují v přírodních vědách a technice, například při popisu oscilací mechanických soustav, elektromagnetických vln nebo stabilních stavů dynamických systémů.

1.3.2 Nehomogenní diferenciální rovnice

Nehomogenní diferenciální rovnice jsou rovnice, které na pravé straně obsahují nenulový člen, tedy mají tvar:

$$L(y) = f(x)$$

kde $L(y)$ je lineární diferenciální operátor, který působí na neznámou funkci $y(x)$ a její derivace. Tento operátor obvykle zahrnuje derivace funkce $y(x)$ v různých řádech a může zahrnovat i funkce, které tuto derivaci modifikují (např. $p(x)$, $q(x)$ atd.). V příkladu operátor $L(y)$ může mít například následující formu:

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y$$

$f(x)$ je daná funkce, která nepřímo ovlivňuje řešení rovnice. Tento člen se nazývá zdrojový člen nebo též nehomogenní člen.

Nehomogenní rovnice se od homogenních liší tím, že jejich řešení není pouze lineární kombinací základních řešení. Obecné řešení nehomogenní rovnice lze vyjádřit jako součet partikulárního řešení $y_p(x)$, které závisí na tvaru funkce $f(x)$, a obecného řešení odpovídající homogenní rovnice $y_h(x)$:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Tento přístup umožňuje nejprve najít homogenní řešení a poté hledat speciální funkci $y_p(x)$, která splňuje celou rovnici.

Nehomogenní diferenciální rovnice se vyskytují v mnoha aplikacích, například v mechanice při působení vnějších sil na těleso, v elektrotechnice při analýze obvodů s vnějším zdrojem napětí nebo v dynamických modelech přírodních jevů, kde působí vnější vlivy.

1.4 Řád diferenciálních rovnic

Řád diferenciální rovnice odpovídá nejvyššímu řádu derivace neznámé funkce, která se v rovnici vyskytuje.

Příklady řádů diferenciálních rovnic:

- **prvního řádu:**

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Nejvyšší derivace je y' jde tedy o diferenciální rovnici prvního řádu.

- **druhého řádu:**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

Nejvyšší derivace je y'' jde tedy o diferenciální rovnici druhého řádu.

- **n-tého řádu:**

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = f(x)$$

Nejvyšší derivace je $y^{(n)}$ takže jde o rovnici n-tého řádu.

Diferenciální rovnice vyšších řádů většinou lze převést na soustavy rovnic prvního řádu, což usnadňuje jejich numerické řešení.

1.5 Počáteční a okrajové podmínky

Počáteční a okrajové podmínky určují konkrétní řešení diferenciálních rovnic. Počáteční podmínky udávají hodnotu neznámé funkce (a jejích derivací) v jednom bodě a používají se u úloh s časovou závislostí. Okrajové podmínky specifikují hodnoty funkce nebo jejích derivací zpravidla na hranicích definičního oboru a jsou typické pro prostorově rozložené problémy.

1.5.1 Počáteční podmínky

Počáteční podmínky jsou dodatečné informace, které umožňují jednoznačně určit konkrétní řešení diferenciální rovnice. Udávají hodnotu neznámé funkce a případně jejích derivací v určitém bodě.

Obecná podoba počátečních podmínek:

Pro diferenciální rovnici n -tého řádu mají počáteční podmínky obvykle tvar:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

kde x_0 je bod, ve kterém jsou podmínky zadány, a y_0, y_1, \dots, y_{n-1} jsou konkrétní hodnoty funkce a jejích derivací.

Význam počátečních podmínek:

- **Jednoznačnost řešení** – u lineárních rovnic platí, že pro dané počáteční podmínky existuje právě jedno řešení.
- **Fyzikální interpretace** – v mechanice mohou určovat například počáteční polohu a rychlost tělesa, v elektrotechnice počáteční napětí a proud v obvodu.

Diferenciální rovnice s počátečními podmínkami se často nazývají počáteční úlohy a jsou klíčové například v modelování dynamických systémů.

1.5.2 Okrajové podmínky

Okrajové podmínky (nebo také podmínky na okraji intervalu) jsou doplňující podmínky, které určují hodnoty neznámé funkce na koncových bodech definičního oboru. Používají se především při řešení úloh, kde je nutné určit chování funkce nejen v jednom bodě (jako u počátečních podmínek), ale na celém intervalu.

Příklady okrajových podmínek:

- **Dirichletovy podmínky** – určují hodnotu funkce na okraji intervalu:

$$y(a) = A, y(b) = B$$

- **Neumannovy podmínky** – určují hodnotu derivace funkce na okraji intervalu:

$$y'(a) = C, y'(b) = D$$

- **Smišené (Robinovy) podmínky** – kombinují hodnotu funkce i její derivace:

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = A, \gamma y(b) + \delta y'(b) = B$$

Okrajové podmínky se často vyskytují ve fyzikálních a technických úlohách, jako jsou problémy vedení tepla, mechanika pružných těles nebo elektrodynamika. Například při výpočtu teplotního pole v tyči fixované na obou koncích je nutné znát teplotu (Dirichletovy podmínky) nebo tok tepla (Neumannovy podmínky) na okrajích.

2 METODY ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Řešení diferenciálních rovnic umožňuje předpovědět chování systému na základě známých vztahů mezi veličinami.

Existují dva hlavní přístupy k řešení diferenciálních rovnic: analytické metody, které vedou k přesnému vyjádření řešení ve formě uzavřeného výrazu, a numerické metody, které umožňují přibližné řešení v případech, kdy analytické postupy selhávají. Výběr vhodné metody závisí na konkrétní rovnici, požadované přesnosti a praktických možnostech výpočtu.

2.1 Analytické metody řešení

(Podle [1, 3, 4, 6, 9, 12])

Analytické metody řešení diferenciálních rovnic slouží k nalezení přesného vyjádření řešení pomocí matematických nástrojů, jako jsou transformace, integrace a manipulace s rovnicemi. Tyto metody jsou vhodné pro rovnice, které umožňují získat uzavřené řešení bez nutnosti přibližných výpočtů. Mezi hlavní analytické metody patří:

2.1.1 Metoda charakteristických kořenů

Metoda charakteristických kořenů je standardní postup pro řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Tato metoda se používá především u homogenních diferenciálních rovnic, kde neexistuje žádný vnější člen. Základem je předpoklad, že řešení má exponenciální tvar $y(x) = e^{rx}$, kde r je kořen, který musíme nalézt.

Postup řešení

1. **Předpoklad řešení:** Předpokládáme, že řešení má tvar $y(x) = e^{rx}$, kde r je neznámý kořen, který je třeba určit.
2. **Dosazení do diferenciální rovnice:** Tento tvar řešení se dosadí do původní diferenciální rovnice. Po dosazení do rovnice vznikne charakteristická rovnice, což je algebraická rovnice pro r . Charakteristická rovnice má obvykle tvar polynomu, jehož kořeny (reálné nebo komplexní) odpovídají kořenům hledané rovnice.

3. **Určení kořenů:** Kořeny charakteristické rovnice mohou být:
- **Reálné a různé:** Pokud má rovnice dva různé reálné kořeny r_1 a r_2 , řešení je kombinací exponenciálních funkcí $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, kde C_1 a C_2 jsou konstanty určené počátečními podmínkami.
 - **Opakované reálné kořeny:** Pokud jsou kořeny stejné (např. $r_1 = r_2$), řešení je ve tvaru $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{r x}$.
 - **Komplexní kořeny:** Pokud jsou kořeny komplexní, řešení obsahuje sinusové a kosinusové funkce. Například pro kořeny $r = \alpha \pm \beta i$, kde i je imaginární jednotka, bude řešení ve tvaru $y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$.
4. **Získání obecného řešení:** Lineární kombinací všech nezávislých řešení (podle počtu různých kořenů) dostaneme obecné řešení diferenciální rovnice.

2.1.2 Metoda variace konstant

Metoda variace konstant je užitečná pro řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic, kde je přítomný vnější člen, který ovlivňuje řešení. Tato metoda umožňuje získat obecné řešení těchto rovnic pomocí známých metod řešení homogenních rovnic a následné úpravy pomocí proměnných funkcí. Tato metoda je velmi užitečná, protože umožňuje nalezení řešení i pro složitější rovnice, u kterých by jiné metody byly méně efektivní.

Postup řešení

1. **Řešení homogenní rovnice:** Nejprve se vyřeší příslušná homogenní rovnice, což znamená, že v původní rovnici odstraníme vnější člen. Tím získáme homogenní diferenciální rovnici, kterou můžeme řešit pomocí metod jako metoda charakteristických kořenů.
2. **Variace konstant:** Po získání řešení homogenní rovnice předpokládáme, že konstanty, které se objevují v jejím řešení, nejsou pevné, ale závisí na proměnné x . To znamená, že tyto konstanty považujeme za funkce, které se mění v čase nebo prostoru. Tento předpoklad se nazývá variace konstant.

3. **Dosazení do původní nehomogenní rovnice:** Takto upravené řešení (kde jsou konstanty nahrazeny funkcemi) se dosadí zpět do původní nehomogenní diferenciální rovnice. Tím vznikne algebraická rovnice, kterou je potřeba vyřešit. Derivace funkcí, které nahrazují původní konstanty, se následně vyřeší a integrací se získají příslušné funkce.
4. **Určení funkcí pro variaci konstant:** Po dosazení do rovnice získáme soustavu rovnic pro neznámé funkce, které nahrazují původní konstanty. Tyto funkce se poté integrují, což nám poskytne konkrétní tvar řešení.
5. **Získání obecného řešení:** Obecné řešení nehomogenní rovnice je kombinací řešení homogenní rovnice a částí řešení vycházejících z variace konstant. Výsledné řešení tedy obsahuje jak exponenciální části, tak i funkce, které odpovídají vnějšímu působení.

Příklad

Pro rovnici $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ se postupuje následovně:

- Nejprve se vyřeší homogenní rovnice $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, jejíž řešení bude mít tvar $y_h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.
- Poté se použije variace konstant, tedy místo konstant C_1 a použijeme funkce $C_1(x)$ a $C_2(x)$.
- Výsledná rovnice se dosadí zpět do původní nehomogenní rovnice a zjednoduší, abychom získali konkrétní funkce pro $C_1(x)$ a $C_2(x)$.

2.1.3 Metoda prosté integrace

Metoda prosté integrace je jedním z nejzákladnějších přístupů k řešení diferenciálních rovnic, který se používá především u rovnic prvního řádu, kde lze přímo vyjádřit derivaci hledané funkce. Princip této metody spočívá v převedení diferenciální rovnice na integrál, který lze následně vyřešit.

Postup řešení

1. **Úprava rovnice na separovatelný tvar:** Pokud je diferenciální rovnice zadána ve tvaru

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

přepíšeme ji tak, aby bylo možné vyjádřit diferenciál jedné proměnné.

2. **Neurčité integrování:** Pro získání hledané funkce $y(x)$ stačí obě strany rovnice integrovat:

$$y(x) = \int f(x) dx + C$$

kde C je integrační konstanta.

3. **Určení konkrétního řešení:** Pokud jsou zadány počáteční nebo okrajové podmínky, lze určit hodnotu konstanty C dosazením konkrétního bodu.

Příklad

- Mějme jednoduchou diferenciální rovnici prvního řádu:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

- Použitím neurčitého integrálu dostaneme:

$$y(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

Tímto jsme našli obecné řešení této diferenciální rovnice.

2.1.4 Metoda Laplaceovy transformace

Laplaceova transformace je účinná metoda pro řešení lineárních diferenciálních rovnic, zejména těch, které obsahují počáteční podmínky nebo členy závislé na časové proměnné. Využívá transformaci diferenciální rovnice do algebraické rovnice v obrazové oblasti, která se následně řeší a výsledné řešení se převede zpět do původní proměnné pomocí inverzní Laplaceovy transformace.

Postup řešení

1. Aplikace Laplaceovy transformace

Na obě strany diferenciální rovnice aplikujeme Laplaceovu transformaci, která převede derivace na algebraické výrazy. Pro obecnou funkci $y(t)$ platí:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

kde $Y(s)$ je Laplaceova transformace hledané funkce $y(t)$.

2. Řešení algebraické rovnice

Po transformaci získáme algebraickou rovnici pro $Y(s)$, kterou vyřešíme běžnými algebraickými metodami.

3. Aplikace inverzní Laplaceovy transformace

Výslednou funkci $Y(s)$ převedeme zpět do původní oblasti pomocí inverzní Laplaceovy transformace, čímž získáme řešení v časové doméně.

Příklad

- Mějme diferenciální rovnici:

$$y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

- Aplikujeme Laplaceovu transformaci:

$$s^2Y(s) - s \cdot 1 - 0 + 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) = 0$$

- Po úpravách získáme:

$$Y(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

- Rozkladem na parciální zlomky a aplikací inverzní Laplaceovy transformace nalezneme:

$$y(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$$

kde A a B určíme z počátečních podmínek.

2.1.5 Metoda separace proměnných

Metoda separace proměnných je jednou z nejjednodušších a nejpřímějších analytických metod pro řešení diferenciálních rovnic. Používá se pro separabilní rovnice, tedy rovnice, které lze přepsat do tvaru:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

kde funkce $f(x)$ závisí pouze na proměnné x a funkce $g(y)$ pouze na y . Princip metody spočívá v tom, že obě proměnné oddělíme na opačné strany rovnice a následně integrujeme.

Postup řešení

1. **Separace proměnných** – přepíšeme rovnici tak, aby členy s y byly na jedné straně a členy s x na druhé.
2. **Integrace obou stran** – provedeme integraci levou stranou vzhledem k y a pravou stranou vzhledem k x .
3. **Vyjádření obecného řešení** – po integraci získáme vztah mezi x a y , případně můžeme vyjádřit $y(x)$.
4. **Dosazení počátečních podmínek** – pokud jsou k dispozici počáteční podmínky, dosadíme je a dopočítáme integrační konstantu.

Příklad

Mějme diferenciální rovnici:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^3y$$

Separujeme proměnné:

$$\frac{dy}{y} = 3x^2 dx$$

Integrujeme:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 3x^2 dx$$

Vyjádříme y :

$$y = Ce^{x^3}$$

Pokud máme počáteční podmínku $y(0) = 2$, dopočítáme C a získáme konkrétní řešení.

2.1.6 Metoda Fourierovy transformace

Metoda Fourierovy transformace se používá zejména pro řešení parciálních lineárních diferenciálních rovnic. Základem této metody je převedení rovnice z časové nebo prostorové oblasti do frekvenční domény, kde se diferenciální operace přemění na algebraické operace.

Postup řešení

1. Aplikace Fourierovy transformace

Fourierova transformace funkce $f(x)$ je definována jako:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$$

Použitím této transformace na diferenciální rovnici převedeme derivace na násobení frekvenční proměnnou ω , což výrazně zjednoduší řešení.

2. Transformace diferenciální rovnice

Derivace se v transformované rovnici změní podle pravidla:

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = (i\omega)^n Y(\omega)$$

3. Řešení v algebraickém tvaru

Po aplikaci transformace řešíme získanou algebraickou rovnici pro $Y(\omega)$.

4. Inverzní Fourierova transformace

Po nalezení $Y(\omega)$ převedeme řešení zpět do původní oblasti pomocí inverzní Fourierovy transformace:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

2.2 Numerické metody řešení

(Podle [4, 7, 8, 9])

Numerické metody řešení diferenciálních rovnic jsou přibližné výpočetní postupy, které umožňují získat řešení i v případech, kdy není možné nalézt analytické vyjádření. Tyto metody pracují s diskrétními hodnotami řešení a postupně je aproximují v malých krocích. Používají se zejména tehdy, když rovnice obsahují složité funkce, nelineární členy nebo když není možné najít uzavřené řešení.

Mezi hlavní numerické metody patří:

2.2.1 Eulerova metoda

Eulerova metoda je základní numerická metoda pro přibližné řešení obyčejných diferenciálních rovnic (ODE). Používá se zejména tehdy, když nelze nalézt analytické řešení. Metoda spočívá v postupném aproximování hodnot řešení na diskrétní množině bodů pomocí jednoduchého přírůstkového vztahu.

Princip metody

Eulerova metoda vychází z diferenciální rovnice ve tvaru:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

kde y_0 je počáteční podmínka.

Předpokládáme, že řešení postupně aproximujeme v bodech x_n s konstantním krokem h , přičemž nové hodnoty y_{n+1} vypočítáme jako:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Tento vzorec jednoduše říká, že nový bod y_{n+1} získáme přičtením změny funkce odhadnuté na základě směrnice (derivace) v bodě (x_n, y_n) .

Postup řešení

1. Definování počátečních podmínek

- Známe počáteční hodnotu y_0 v bodě x_0 .
- Určíme krok h , který udává, jak daleko se posuneme na ose x .

2. Výpočet iterací

- Použijeme vzorec Eulerovy metody k postupnému výpočtu hodnot y_n pro další body x_n .

3. Přibližné řešení

- Po dostatečném počtu iterací získáme aproximaci řešení diferenciální rovnice v zadaném intervalu.

Přesnost a omezení

- Eulerova metoda je jednoduchá, ale má relativně nízkou přesnost a může vést k chybám, pokud krok h není dostatečně malý.
- Chyba metody je úměrná velikosti kroku h , tedy čím menší krok použijeme, tím přesnější bude výsledek.
- Pro lepší přesnost se často používají pokročilejší metody, jako například Runge-Kutta.

Eulerova metoda poskytuje intuitivní přístup k numerickému řešení diferenciálních rovnic a je základem pro složitější numerické metody.

2.2.2 Metoda Runge-Kutta

Metoda Runge-Kutta je jednou z nejběžnějších numerických metod pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Je to metoda, která poskytuje velmi přesné výsledky pro širokou škálu problémů, přičemž vyžaduje menší počet výpočtů než některé jiné metody, jako je metoda Eulerova. Metody Runge-Kutta jsou variace na metodu aproximace pomocí sečítání, kde se využívají různé váhy pro výpočty v jednotlivých krocích.

Existuje několik verzí této metody, přičemž nejběžnější je metoda čtvrtého řádu Runge-Kutta (RK4), která je velmi přesná a používá čtyři různé aproximace v každém kroku.

Postup řešení

1. **Základní formulace:** Pokud máme diferenciální rovnici ve tvaru:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

kde $y(x)$ je hledaná funkce, a $f(x, y)$ je známá funkce závislá na x a y , metoda Runge-Kutta spočívá v iterativním výpočtu hodnoty y pro každé x .

2. **Výpočet aproximace pro každý krok:** Pro každý krok h (krokový interval) počítáme čtyři hodnoty:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

Poté je nová hodnota y_{n+1} vypočítána jako:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

2.2.3 Metoda středního bodu

Metoda středního bodu je vylepšením Eulerovy metody, protože místo derivace na začátku intervalu používá hodnotu derivace v jeho středu. Tím lépe aproximuje průběh funkce na daném intervalu a poskytuje přesnější výsledek.

Postup řešení:

Pokud máme diferenciální rovnici ve tvaru:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

kde $y(x_0) = y_0$ je počáteční podmínka, metoda středního bodu spočítá nový bod y_{n+1} pomocí následujícího postupu:

1. **Výpočet střední hodnoty derivace:** Nejprve počítáme hodnotu derivace na začátku intervalu $f(x_n, y_n)$, a poté počítáme střední hodnotu derivace na středním bodě intervalu, tedy $f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right)$
2. **Aktualizace hodnoty:** Pomocí této střední hodnoty derivace pak vypočítáme novou hodnotu y_{n+1} :

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right)$$

kde h je krok integrace.

2.2.4 Metoda Adams-Bashforth

Metoda Adams-Bashforth využívá více bodů k aproximaci hodnoty funkce na novém bodě. Používá historické hodnoty, tedy hodnoty funkce a jejich derivací v předchozích bodech, a na jejich základě vypočítá novou hodnotu.

Metoda má různé varianty v závislosti na tom, kolik předchozích bodů se použije k výpočtu nového bodu. Základní verze metody je Adams-Bashforth 2. řádu, která používá dva předchozí body. Existují však i vyšší řády metody, jako například Adams-Bashforth 3. řádu, které používají tři předchozí body, a tak dál.

Postup řešení pro metodu Adams-Bashforth 2. řádu:

Pokud máme obyčejnou diferenciální rovnici ve tvaru:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$, metoda Adams-Bashforth 2. řádu používá následující vzorec pro výpočet hodnoty y_{n+1} :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1}))$$

kde:

- y_n je aktuální hodnota řešení,
- $f(x_n, y_n)$ je hodnota funkce $f(x, y)$ v bodě (x_n, y_n) ,
- h je krok integrace,
- y_{n+1} je hodnota řešení na dalším bodě.

Pro Adams-Bashforth 3. řádu by vzorec vypadal takto:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (23f(x_n, y_n) - 16f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 5f(x_{n-2}, y_{n-2}))$$

Tento vzorec využívá tři předchozí body, což zvyšuje přesnost metody.

2.2.5 Metoda Adams-Moulton

Adams-Moulton metoda je založena na extrapolaci a využívá více bodů k nalezení přesné hodnoty řešení. Využívá historické hodnoty derivací a hodnoty funkce na aktuálním bodě, což ji činí implicitní metodou.

Stejně jako Adams-Bashforth, metoda Adams-Moulton má různé varianty podle počtu bodů, které se používají k výpočtu nové hodnoty. Jedná se o implicitní metodu, což znamená, že pro každý nový bod je nutné řešit rovnice, které zahrnují hodnoty na předchozím i následujícím bodě.

Postup řešení pro metodu Adams-Moulton 2. řadu:

Pokud máme obyčejnou diferenciální rovnici ve tvaru:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$, metoda Adams-Moulton 2. řadu (také známá jako trapezoidální pravidlo) používá následující vzorec pro výpočet hodnoty y_{n+1} :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n))$$

kde:

- y_n je hodnota řešení v předchozím bodě,
- $f(x_n, y_n)$ je hodnota funkce $f(x, y)$ v bodě (x_n, y_n) ,
- h je krok integrace,
- y_{n+1} je hodnota řešení na novém bodě,
- $f(x_{n+1}, y_{n+1})$ je hodnota derivace na novém bodě, kterou musíme získat iterativně.

Pro výpočet y_{n+1} je třeba znát hodnotu y_{n+1} , což vyžaduje iterativní řešení soustavy rovnic.

Adams-Moulton 3. řadu:

Pokud bychom použili vyšší řád metody Adams-Moulton, například 3. řadu, vzorec by vypadal následovně:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 19f(x_n, y_n) - 5f(x_{n-1}, y_{n-1}))$$

Opět je třeba použít iterativní řešení pro výpočet y_{n+1} .

2.2.6 Metoda konečných diferencí

Metoda konečných diferencí je jednou z nejčastěji používaných numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic, zejména parciálních diferenciálních rovnic (PDE), ale dá se použít i pro obyčejné diferenciální rovnice (ODE). Jejím principem je nahrazení derivací pomocí diferencí mezi hodnotami funkce v diskrétních bodech. Tento přístup umožňuje aproximovat řešení na předem definované mřížce (síti) hodnot.

Postup řešení

1. Diskretizace definičního oboru

- Interval (např. časový nebo prostorový) rozdělíme na rovnoměrnou mřížku bodů.
- Například pro interval $[a, b]$ se zvoleným krokem h vytvoříme uzly x_0, x_1, \dots, x_n kde $x_i = a + i \cdot h$.

2. Nahrazení derivací pomocí diferencí

- Derivace v rovnici se nahradí pomocí konečných diferencí. Například:

- První derivace:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \text{ (dopředná diference)}$$

nebo

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \text{ (centrální diference)}$$

- Druhá derivace:

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

3. Sestavení soustavy algebraických rovnic

- Po nahrazení derivací dosadíme difference do původní rovnice ve všech vnitřních bodech mřížky. Tím vznikne soustava lineárních nebo nelineárních rovnic, kterou lze vyřešit např. maticovými metodami.

4. Zohlednění okrajových/počátečních podmínek

- Okrajové (nebo počáteční) podmínky jsou důležité pro správnou formulaci celé soustavy a ovlivní první a poslední řádek v matici rovnic.

3 MATLAB A JEHO VYUŽITÍ PRO ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

(Podle [10, 11, 13])

3.1 Úvod do prostředí Matlab

Matlab (zkratka pro MATrix LABoratory) je výpočetní prostředí určené především pro technické výpočty, simulace, modelování a vizualizaci dat. V oblasti diferenciálních rovnic představuje jeden z nejčastěji využívaných nástrojů díky svým bohatým výpočetním možnostem, přehledné syntaxi a podpoře pro numerické i symbolické výpočty.

Matlab se používá v celé řadě vědních oborů, od matematiky a fyziky až po strojírenství, ekonomii a biomedicínu.

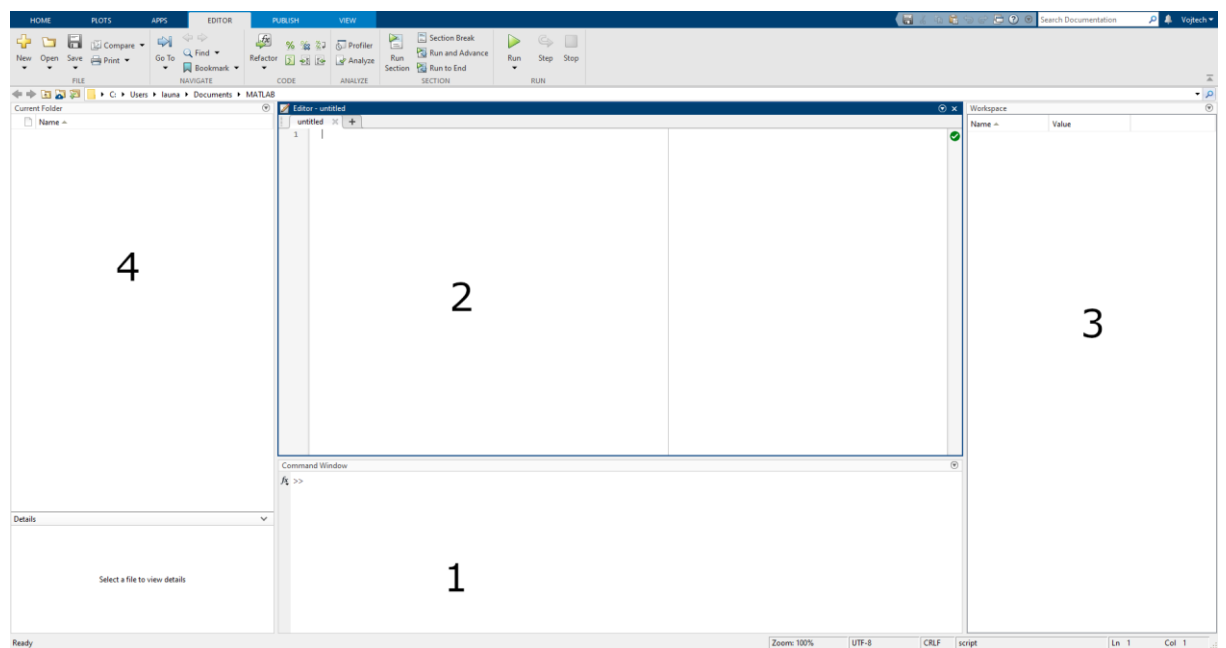
Základní vlastnosti Matlabu

- **Numerické výpočty** – práce s maticemi, vektory a funkcemi.
- **Symbolické výpočty** – řešení rovnic, derivace a integrace s využitím Symbolic Math Toolbox, rozšíření Matlabu pro symbolické operace.
- **Vizualizace** – jednoduché i pokročilé grafy, 2D a 3D vykreslování.
- **Programování** – psaní vlastních funkcí, skriptů a algoritmů.
- **Simulace** – dynamické systémy, řízení, modelování (např. pomocí Simulinku).

Uživatelské rozhraní

Po spuštění Matlabu se otevře vývojové prostředí, které obsahuje:

1. **Command Window** – příkazová řádka pro okamžité výpočty.
2. **Editor** – slouží k psaní a úpravám skriptů (.m soubory).
3. **Workspace** – přehled proměnných v paměti.
4. **Current Folder** – přístup k souborům v aktuálním adresáři.



Obrázek 1: Vývojové prostředí Matlabu

3.2 Základní práce se skripty (M-files)

M-soubory jsou základním stavebním prvkem programování v prostředí Matlab. Jedná se o textové soubory s příponou .m, které mohou obsahovat buď skripty, nebo funkce. Pomocí M-souborů je možné automatizovat výpočty, vytvářet opakovaně použitelné algoritmy a strukturovaně řešit matematické úlohy včetně diferenciálních rovnic.

3.2.1 Skripty

Skript je soubor příkazů, které se vykonávají postupně – stejně, jako kdyby byly zadány ručně do příkazové řádky. Skripty se používají zejména pro sekvenční výpočty a vizualizaci dat.

Příklad skriptu:

```
% Výpočet hodnoty funkce sin(x) a její vykreslení
x = 0:0.1:2*pi;
y = sin(x);
plot(x, y);
title('Graf funkce sin(x)');
xlabel('x'); ylabel('sin(x)');
```

Skript se spouští příkazem:

```
>> jmeno_skriptu
```

(např. graf_sin pro soubor graf_sin.m).

3.2.2 Funkce

Funkce je M-soubor, který přijímá vstupní argumenty a vrací výsledky. Na rozdíl od skriptu má vlastní pracovní prostor – proměnné definované uvnitř funkce neovlivňují proměnné v základním workspace.

Struktura funkce:

```
function vystup = jmeno_funkce(vstup)
    % Popis funkce
    vystup = zpracovani(vstup);
end
```

Příklad:

```
function y = kvadraticka(x)
```

```
function y = kvadraticka(x)
    % Vrací hodnotu kvadratické funkce y = x^2 + 2x + 1
    y = x.^2 + 2*x + 1;
end
```

Funkce se volá například takto:

```
>> kvadraticka(3)
```

3.2.3 Komentáře a dokumentace

Komentáře v Matlabu začínají znakem %. První blok komentářů pod hlavičkou funkce slouží jako nápověda, která se zobrazí při použití příkazu help.

Příklad:

```
function y = faktorial(n)
    %FAKTORIAL Vypočítá faktoriál čísla n
    % y = faktorial(n) vrátí n!
    y = 1;
    for i = 2:n
        y = y * i;
    end
end
```

3.3 Numerické funkce pro řešení ODE

Matlab nabízí sadu vestavěných funkcí pro numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Tyto funkce implementují různé numerické metody, jako je Eulerova metoda, Runge-Kutta nebo adaptivní metody vyššího řádu.

3.3.1 Základní funkce pro řešení ODE

- ode45 - Adaptivní Runge-Kutta metoda 4.–5. řádu (nejběžnější volba)
- ode23 - Runge-Kutta 2.–3. řádu pro méně přesné, rychlejší výpočty
- ode113 - Vícekroková Adams-Bashforth-Moulton metoda
- ode15s - Pro tuhé rovnice (stiff problems)
- ode23s, ode23t, ode23tb - Další varianty pro tuhé soustavy

Volání funkce:

```
[t, y] = ode45(@f, [t0 tf], y0);
```

- @f – název funkce, která definuje pravou stranu rovnice,
- [t0 tf] – počáteční a koncový čas,
- y0 – počáteční podmínka,
- t – vektor časových bodů, ve kterých je řešení počítáno,
- y – matice výsledků (každý řádek odpovídá hodnotě y v čase t(i)).

3.3.2 Definice rovnice

Pravou stranu rovnice lze zadat jako samostatnou nebo anonymní funkci.

Příklad – rovnice:

$$\frac{dy}{dt} = -2y, y(0) = 1$$

Definice pomocí souboru f.m:

```
function dydt = f(t, y)
    dydt = -2*y;
end
```

Řešení pomocí ode45:

```
[t, y] = ode45(@f, [0 5], 1);
plot(t, y);
title('Řešení rovnice dy/dt = -2y');
xlabel('t'); ylabel('y(t)');
```

Nebo pomocí anonymní funkce:

```
f = @(t, y) -2*y;
[t, y] = ode45(f, [0 5], 1);
```

3.3.3 Řešení soustav ODE

Pro řešení soustav rovnic stačí definovat vektorový výstup.

Příklad:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1 \end{cases}$$

Funkce:

```
function dydt = f(t, y)
    dydt = zeros(2,1);
    dydt(1) = y(2);
    dydt(2) = -y(1);
end
```

Řešení:

```
[t, y] = ode45(@f, [0 10], [1 0]);
plot(t, y(:,1)); % y1
hold on;
plot(t, y(:,2)); % y2
legend('y_1', 'y_2');
title('Harmonický oscilátor');
```

3.4 Analytické funkce pro řešení ODE

Matlab obsahuje symbolický toolbox, který umožňuje řešit obyčejné diferenciální rovnice analyticky, tj. ve formě přesného matematického výrazu. Nejčastěji se k tomu používá funkce `dsolve`.

3.4.1 Základní funkce pro analytické řešení ODE

- `dsolve` – řeší symbolicky ODE nebo soustavy ODE, vrací přesný výraz (ne číselnou aproximaci)
- `syms` – deklaruje symbolické proměnné a funkce
- `diff` – reprezentuje derivace symbolických funkcí

Volání funkce:

```
y = dsolve(rovnice, podmínky)
```

- `rovnice` – rovnice ve formátu symbolického výrazu (např. `diff(y, 2) + y == 0`)
- `podmínky` – počáteční nebo okrajové podmínky ve formátu `y(0)==1`, `Dy(0)==0`, atd.
- `y` – analytické (symbolické) řešení rovnice

Příklad – rovnice:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Kód v Matlabu:

```
syms y(t)
Dy = diff(y, t);
eqn = diff(y, t, 2) - 3*Dy + 2*y == 0;
sol = dsolve(eqn, y(0) == 1, Dy(0) == 0);
disp(sol)
```

Výstup:

Řešením je funkce $y(t)$ ve formě:

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t$$

nebo konkrétně po dosazení počátečních podmínek:

$$y(t) = e^t(1 - t)$$

Výhody symbolického řešení:

- Poskytuje přesný matematický tvar řešení, vhodný pro teoretickou analýzu.
- Umožňuje snadnou derivaci, integraci a další symbolické operace.

Omezení:

- Hodí se hlavně pro jednodušší rovnice (nižšího řádu nebo s konstantními koeficienty).
- U složitějších rovnic nemusí být možné najít uzavřené řešení, nebo výpočet trvá dlouho.

3.5 Grafické nástroje a vizualizace řešení

Vizualizace je důležitou součástí analýzy výsledků numerického řešení diferenciálních rovnic. Matlab poskytuje širokou škálu nástrojů pro tvorbu grafů, díky kterým je možné efektivně interpretovat chování řešení.

3.5.1 Základní funkce pro vykreslení grafů

Nejčastěji používaná funkce pro zobrazení průběhu řešení je `plot(x, y)`

- `x` – vektor nezávislé proměnné (např. čas),
- `y` – vektor hodnot funkce (např. řešení rovnice).

Příklad:

```
f = @(t, y) -2*y;  
[t, y] = ode45(f, [0 5], 1);  
plot(t, y);  
title('Exponenciální pokles: y'' = -2y');  
xlabel('čas t');  
ylabel('y(t)');  
grid on;
```

3.5.2 Více průběhů v jednom grafu

Při řešení soustav diferenciálních rovnic je možné zobrazit více proměnných:

```
plot(t, y(:,1), 'b', t, y(:,2), 'r--');  
legend('y_1(t)', 'y_2(t)');  
title('Řešení soustavy ODE');  
xlabel('čas t');  
ylabel('y(t)');
```

3.5.3 Třídídimenzionální grafy

Pro vizualizaci ve 3D prostoru slouží funkce jako plot3, mesh, surf:

```
plot3(y(:,1), y(:,2), t); % trajektorie v prostoru (x, y, čas)
xlabel('y_1'); ylabel('y_2'); zlabel('čas t');
grid on;
```

3.5.4 Vektorová pole a směrníkové pole

Matlab umožňuje zobrazit směrníkové pole pomocí funkce quiver.

Příklad směrníkového pole pro ODE:

```
[x, y] = meshgrid(-3:0.3:3, -3:0.3:3);
u = y;
v = -x;
quiver(x, y, u, v);
xlabel('y_1'); ylabel('y_2');
title('Směrníkové pole soustavy dy_1/dt = y_2, dy_2/dt = -y_1');
```

3.5.5 Uložení grafů

Grafy lze ukládat do souborů pomocí:

```
saveas(gcf, 'graf1.png');
nebo exportem do PDF:
print('graf1', '-dpdf');
```

3.5.6 Další možnosti úprav grafů

- **Barevné křivky:** 'r', 'g', 'b--', 'k:' apod.
- **Změna tloušťky čáry:** plot(x, y, 'LineWidth', 2)
- **Mřížka:** grid on
- **Popisky:** xlabel, ylabel, title, legend

4 ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

4.1 Přehled vybraných diferenciálních rovnic a postup řešení

V této kapitole jsou uvedena konkrétní řešení vybraných lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů. Výběr rovnic byl proveden tak, aby pokryl různé typy rovnic (homogenní i nehomogenní), různé řády, a zároveň umožnil demonstrovat možnosti řešení pomocí analytických metod i nástrojů Matlabu. Cílem je ukázat efektivitu symbolického a numerického řešení a schopnosti Matlabu při jejich implementaci a vizualizaci.

Každá rovnice bude řešena následujícím postupem:

1. **Analytické řešení (pokud je to možné)** – využitím teoretických metod jako charakteristická rovnice nebo variace konstant.
2. **Symbolické řešení v Matlabu** – pomocí funkce `dsolve`, která vrací obecné řešení rovnice.
3. **Numerické řešení v Matlabu** – převod rovnice na soustavu prvního řádu a použití numerického solveru `ode45`.
4. **Vizualizace výsledků** – pomocí grafických funkcí Matlabu, s důrazem na srovnání různých metod.

Při numerickém řešení budou stanoveny počáteční podmínky, aby výpočet byl dobře definován. U symbolického řešení budou uvedeny obecné i partikulární řešení (u nehomogenních rovnic).

4.2 Homogenní diferenciální rovnice druhého řádu

Zadání:

Vyřešme homogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

4.2.1 Analytické řešení metodou charakteristických kořenů bez použití softwaru

1. Tvar rovnice:

Jedná se o lineární homogenní diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

2. Charakteristická rovnice:

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

Řešíme kvadratickou rovnicí:

$$r = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$r_1 = 2, r_2 = 1$$

3. Obecné řešení:

Protože jsou kořeny reálné a různé, obecné řešení rovnice je:

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1 e^{2t} + C_2 e^t$$

4. Určení konstant pomocí počátečních podmínek:

Dosadíme do obecného řešení:

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 1$$

Spočteme derivaci:

$$y'(t) = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^t$$

Dosadíme $y'(0) = 0$:

$$y'(0) = 2C_1 + C_2 = 0$$

Řešíme soustavu:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{matrix}$$

5. Konkrétní řešení:

$$y(t) = -e^{2t} + 2e^t$$

t	e^t	e^{2t}	Výpočet	$y(t) = -e^{2t} + 2e^t$
0.0	1.0000	1.0000	$-1 + 2 \cdot 1$	1.0000
0.2	0.2214	1.4918	$-1.4918 + 2 \cdot 1.2214$	0.9510
0.4	0.4918	2.2255	$-2.2255 + 2 \cdot 1.4918$	0.7581
0.6	1.8221	3.3201	$-3.3201 + 2 \cdot 1.8221$	0.3241
0.8	2.2255	4.9530	$-4.9530 + 2 \cdot 2.2255$	-0.5020
1.0	2.7183	7.3891	$-7.3891 + 2 \cdot 2.7183$	-1.9525

Tabulka 1: Analytické hodnoty řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$ pro vybrané hodnoty t

4.2.2 Numerické řešení metodou Runge-Kutta 4. řádu bez použití softwaru

1. Tvar rovnice:

Jedná se o lineární homogenní diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty:

$$y'' - 3y' + 2y = 0, y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$$

2. Výpočet hodnoty v $t = 0.2$ s krokem $h = 0.2$

Připomenutí funkcí:

$$f_1 = y_2, f_2 = 3y_2 - 2y_1$$

Výpočty k_1, k_2, k_3, k_4 :

$$y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $k_1 = h \cdot f(t_0, y^0)$:

$$f(0, y^0) = \begin{pmatrix} y_2^0 \\ 3y_2^0 - 2y_1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$k_1 = 0.2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.4 \end{pmatrix}$$

- $k_2 = h \cdot f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y^0 + \frac{k_1}{2}\right)$:

$$y^0 + \frac{k_1}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2 \end{pmatrix}$$

$$f\left(0.1, \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 3 \cdot (-0.2) - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -2.6 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = 0.2 \cdot \begin{pmatrix} -0.2 \\ -2.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.04 \\ -0.52 \end{pmatrix}$$

- $k_3 = h \cdot f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y^0 + \frac{k_2}{2}\right)$:

$$y^0 + \frac{k_2}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -0.04 \\ -0.52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.98 \\ -0.26 \end{pmatrix}$$

$$f\left(0.1, \begin{pmatrix} 0.98 \\ -0.26 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -0.26 \\ 3 \cdot (-0.26) - 2 \cdot 0.98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.26 \\ -2.74 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = 0.2 \cdot \begin{pmatrix} -0.26 \\ -2.74 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.052 \\ -0.548 \end{pmatrix}$$

- $k_4 = h \cdot f(t_0 + h, y^0 + k_3)$:

$$y^0 + k_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.052 \\ -0.548 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.948 \\ -0.548 \end{pmatrix}$$

$$f\left(0.2, \begin{pmatrix} 0.948 \\ -0.548 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -0.548 \\ 3 \cdot (-0.548) - 2 \cdot 0.948 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.548 \\ -3.54 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = 0.2 \cdot \begin{pmatrix} -0.548 \\ -3.54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1096 \\ -0.708 \end{pmatrix}$$

3. Výpočet hodnoty y^1 v $t = 0.2$

$$y^1 = y^0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Sečteme složky:

- Pro y_1 :

$$0 + \frac{1}{6}(0 + 2 \cdot (-0.04) + 2 \cdot (-0.052) + (-0.1096))$$

$$= \frac{1}{6}(-0.08 - 0.104 - 0.1096) = -\frac{0.2936}{6} = -0.04893$$

- Pro y_2 :

$$0 + \frac{1}{6}(-0.4 + 2 \cdot (-0.52) + 2 \cdot (-0.548) + (-0.708))$$

$$= \frac{1}{6}(-0.4 - 1.04 - 1.096 - 0.708) = -\frac{3.244}{6} = -0.5407$$

4. Výsledné hodnoty

$$y_1(0.2) \approx 1 - 0.04893 = 0.95107$$

$$y_2(0.2) \approx 0 - 0.5407 = -0.5407$$

A takto pokračujeme i pro další kroky, kdy vždy spočítáme hodnoty k_1, k_2, k_3, k_4 podle vzorce Runge-Kutta 4. řádu a následně vypočteme nové hodnoty y_1 a pro další bod t . Tento postup opakujeme pro všechna požadovaná t , abychom získali přibližné řešení diferenciální rovnice v daných bodech.

t	$y_1(t)$	$y_2(t)$
0.0	1.0000	0.0000
0.2	0.9511	-0.5407
0.4	0.7584	-1.4670
0.6	0.3247	-2.9949
0.8	-0.5008	-5.4528
1.0	-1.9504	-9.3374

Tabulka 2: Numerické hodnoty řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$ pomocí metody Runge-Kutta 4. řádu

Můžete si všimnout, že numerické řešení se lehce liší od analytického. Je to proto, že numerické metody, jako je Runge-Kutta 4. řádu, poskytují přibližné hodnoty, které závisí na velikosti kroku h . Čím menší krok zvolíme, tím přesnější bude výsledek, ale výpočet bude náročnější. Navíc zaokrouhlování a numerické chyby při výpočtech také způsobují drobné odchylky oproti přesnému analytickému řešení.

4.2.3 Řešení diferenciální rovnice v Matlabu

```
clc; clear; close all;

% Symbolické řešení
syms y(t)
eqn = diff(y, 2) - 3*diff(y) + 2*y == 0; % Definice rovnice
sol_general = dsolve(eqn); % Obecné řešení

% Počáteční podmínky
Dy = diff(y, t); % Definice první derivace
sol_specific = dsolve(eqn, y(0) == 1, Dy(0) == 0); % Konkrétní řešení
s počátečními podmínkami

% Výpis výsledků do konzole
disp('Obecné řešení:');
disp(sol_general);

disp('Konkrétní řešení s počátečními podmínkami:');
disp(sol_specific);

% Numerické řešení pomocí ode45
f = @(t, Y) [Y(2); 3*Y(2) - 2*Y(1)]; % Převedení na soustavu 1. řádu
t_span = [0 1.1]; % Interval pro řešení (0 až 1.1)
y0 = [1; 0]; % Počáteční podmínky [y(0); y'(0)]

[t_num, y_num] = ode45(f, t_span, y0); % Numerické řešení

% Grafické znázornění - původní graf
figure;
fplot(sol_specific, [0 1.1], 'r', 'LineWidth', 2); % Symbolické řešení
hold on;
plot(t_num, y_num(:,1), 'bo', 'MarkerSize', 3); % Numerické řešení
legend('Analytické řešení', 'Numerické řešení (ode45)', 'Location', 'southwest');
xlabel('t');
ylabel('y(t)');
title('Řešení diferenciální rovnice y'''' - 3y'' + 2y = 0');
grid on;
ylim([-3 1.5]);

% Výpočet rozdílů (chyby) v bodech numerického řešení
y_exact = double(subs(sol_specific, t, t_num)); % Analytické hodnoty
v numerických bodech
error = y_num(:,1) - y_exact; % Rozdíl (chyba)

% Nový graf rozdílů
figure;
plot(t_num, error, 'k.-', 'MarkerSize', 15);
xlabel('t');
ylabel('Rozdíl y_{numerické} - y_{analytické}');
title('Rozdíl mezi numerickým a analytickým řešením');
grid on;
xlim([0 1.1]);
```

Vysvětlení kódu

V tomto příkladu jsme použili dvě různé metody pro řešení diferenciální rovnice: symbolické a numerické.

1. Symbolické řešení (dsolve):

- Použili jsme funkci dsolve pro analytické řešení diferenciální rovnice. Tato funkce nám umožňuje získat obecné a specifické řešení rovnice symbolicky, tedy bez potřeby aproximace.
- Nejprve jsme definovali rovnici pomocí diff, která reprezentuje derivace funkce $y(t)$. Poté jsme použili dsolve k získání obecného řešení, které jsme následně upravili pro konkrétní počáteční podmínky ($y(0) = 1, y'(0) = 0$).

2. Numerické řešení (ode45):

- Pro numerické řešení jsme použili funkci ode45, což je metoda adaptivního Runge-Kutta 4.–5. řádu, která je ideální pro řešení běžných problémů s nespecifikovanými počátečními podmínkami.
- V tomto případě jsme rovnici převedli na soustavu 1. řádu (pomocí substituce $y' = z$), abychom ji mohli řešit numericky. Funkce ode45 pak vypočítala hodnoty y v daných bodech t a poskytla numerické řešení, které jsme následně znázornili na grafu.
- Adaptivní krok: Funkce ode45 používá adaptivní metodu, což znamená, že se dynamicky přizpůsobuje velikost kroku v závislosti na požadované přesnosti řešení. Tento přístup zajišťuje, že výpočty jsou efektivní, a to jak v oblastech s malými změnami, tak v těch, kde dochází k rychlým změnám.

3. Vizualizace:

- Obě řešení jsme zakreslili do jednoho grafu, kde je červeně zobrazeno symbolické (přesné) řešení a modrými kolečky numerické řešení.

4. Analýza rozdílů:

- Dále jsme spočítali rozdíly mezi numerickými hodnotami a přesným analytickým řešením v bodech výpočtu a tyto chyby zobrazili na samostatném grafu. To nám pomáhá vizualizovat přesnost numerického řešení.

Výsledky:

Výpis z konzole

Obecné řešení:

$$C1 \cdot \exp(t) + C2 \cdot \exp(2 \cdot t)$$

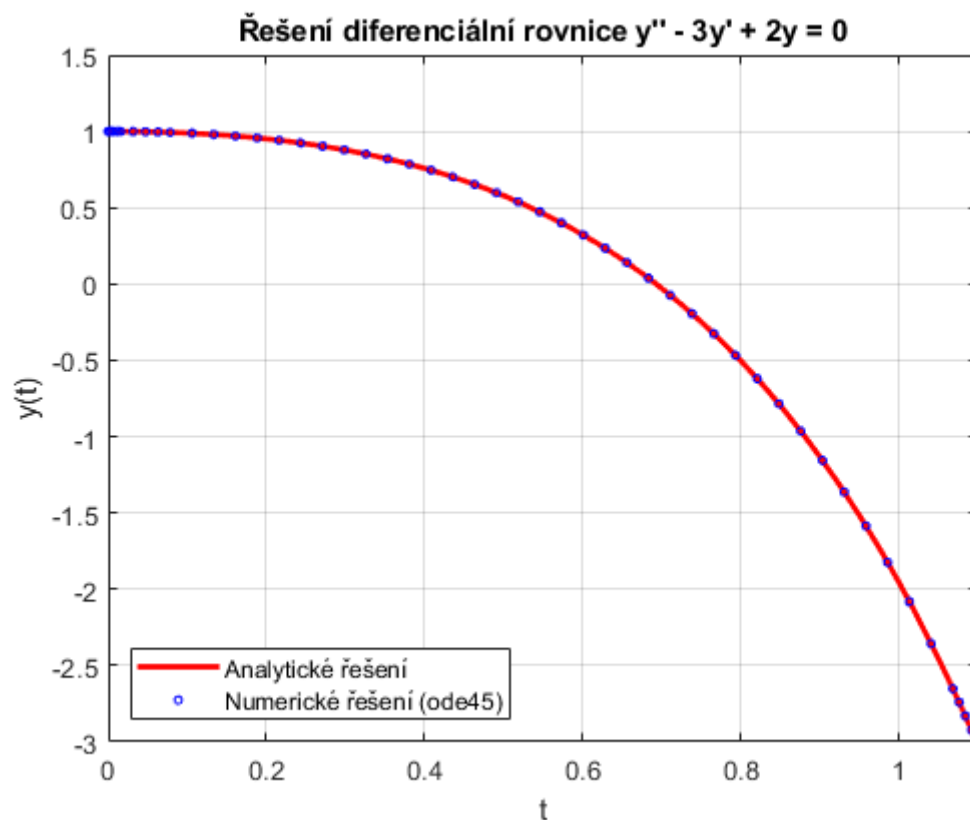
Konkrétní řešení s počátečními podmínkami:

$$2 \cdot \exp(t) - \exp(2 \cdot t)$$

Grafické zobrazení výsledků

- Analytické řešení je znázorněno červenou křivkou, která je výsledkem symbolických výpočtů.
- Numerické řešení je zobrazeno jako modré body, které reprezentují hodnoty získané metodou ode45. Tyto body ukazují aproximace řešení v jednotlivých bodech t .

Tímto způsobem lze efektivně porovnat přesnost a chování obou metod na stejném problému.



Obrázek 2: Graf řešení diferenciální rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$

Graf rozdílů mezi numerickým a analytickým řešením

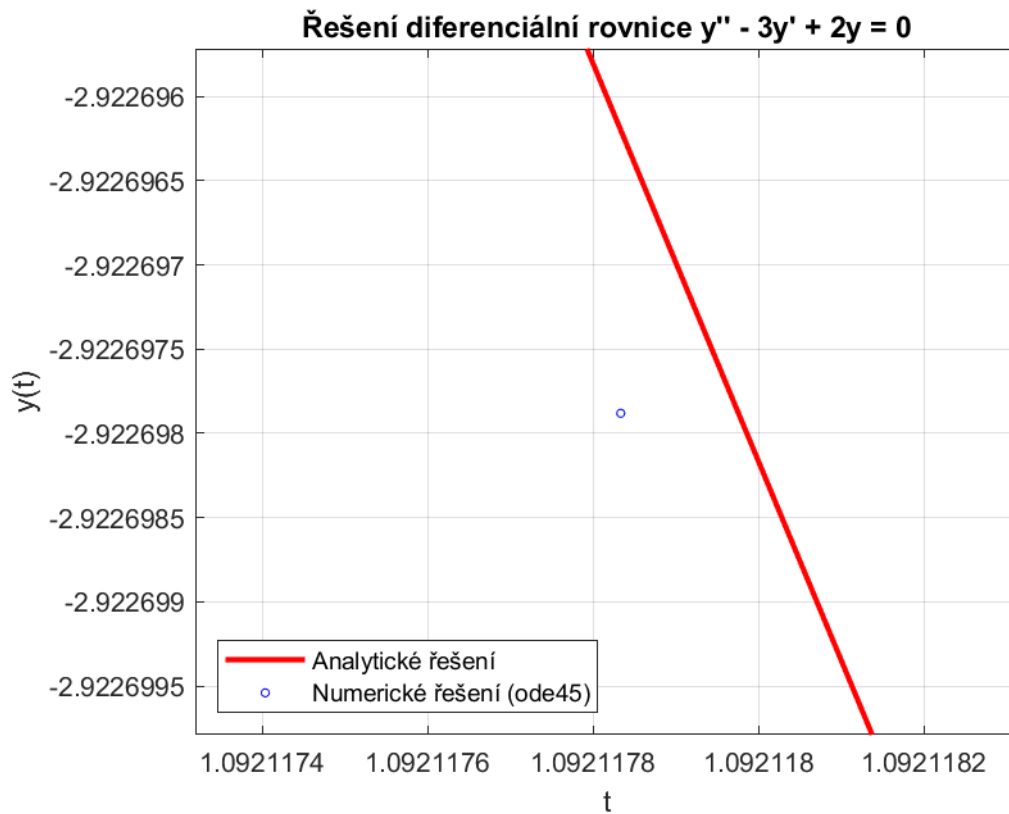
Ačkoliv se může na první pohled zdát, že numerické řešení pomocí metody ode45 a analytické řešení získané symbolickým výpočtem jsou téměř totožná, mezi těmito výsledky existují malé rozdíly. Tyto rozdíly jsou způsobeny především zaokrouhlovacími chybami a numerickými aproximacemi, které jsou inherentní k numerickým metodám. Metoda ode45 totiž řeší diferenciální rovnice aproximativně krok za krokem, což může vést k drobným odchylkám oproti přesnému analytickému řešení.

Zobrazený graf rozdílů mezi numerickým a analytickým řešením (v mikro měřítku) ukazuje právě tyto malé odchylky. I když jsou řádu jednotek mikro, je důležité si uvědomit, že v mnoha praktických aplikacích může taková chyba ovlivnit výsledky, proto je kontrola přesnosti numerických metod klíčová.



Obrázek 3: Graf rozdílů mezi numerickým a analytickým řešením diferenciální rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$ (ode45)

Pokud si přiblížíme graf průběhu řešení ke konci intervalu, můžeme se jasně přesvědčit, že numerické řešení skutečně neleží přesně na křivce analytického řešení. Tento detail ukazuje drobné, ale významné odchylky, které numerická metoda vytváří, a proto je důležité volit metodu podle požadované přesnosti výsledku.



Obrázek 4: Ukázka odchylky v průběhu řešení (ode45)

4.3 Nehomogenní diferenciální rovnice druhého řádu

Zadání:

Vyřešme nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^t, y(0) = 0, y'(0) = 0$$

4.3.1 Analytické řešení metodou variace konstant bez použití softwaru

1. Tvar rovnice:

Jde o nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s pravou stranou e^t a dvěma počátečními podmínkami:

$$y'' - 3y' + 2y = e^t$$

2. Homogenní část:

Nejprve vyřešíme příslušnou homogenní rovnici:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Charakteristická rovnice:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 2$$

Obecné řešení homogenní části:

$$y_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$$

3. Variace konstant:

Předpokládáme, že partikulární řešení má tvar:

$$y_p(t) = u_1(t)e^t + u_2(t)e^{2t}$$

kde $u_1(t), u_2(t)$ jsou neznámé funkce, které určíme.

Upravíme pomocí pomocného systému:

$$\begin{cases} u_1'(t)e^t + u_2'(t)e^{2t} = 0 \\ u_1'(t)e^t + 2u_2'(t)e^{2t} = e^t \end{cases}$$

Odečtením první rovnice od druhé:

$$(2u_2'(t)e^{2t} - u_2'(t)e^{2t}) = e^t \Rightarrow u_2'(t)e^{2t} = e^t \Rightarrow u_2'(t) = e^t/e^{2t} = e^{-t}$$

Integrujeme:

$$u_2(t) = \int e^{-t} dt = -e^{-t} + C$$

Z první rovnice:

$$u_1'(t)e^t + u_2'(t)e^{2t} = 0 \Rightarrow u_1'(t)e^t = -u_2'(t)e^{2t} = -e^{-t} \cdot e^{2t} = -e^t \Rightarrow u_1'(t) = -1 \\ \Rightarrow u_1(t) = -t + C$$

4. Partikulární řešení

Dosadíme $u_1(t), u_2(t)$ zpět:

$$y_p(t) = (-t)e^t + (-e^{-t})e^{2t} = -te^t - e^t$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} - te^t - e^t = (C_1 - 1)e^t + C_2e^{2t} - te^t$$

Můžeme přepsat:

$$y(t) = C_1'e^t + C_2e^{2t} - te^t, \text{ kde } C_1' = C_1 - 1$$

5. Určení konstant z počátečních podmínek

Podmínky:

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1' + C_2 = 0$$

$$y'(t) = C_1'e^t + 2C_2e^{2t} - (e^t + te^t) \Rightarrow y'(0) = C_1' + 2C_2 - 1 = 0$$

Dostaneme soustavu:

$$\begin{cases} C_1' + C_2 = 0 \\ C_1' + 2C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_2 = 1, C_1' = -1$$

Dosadíme zpět:

$$y(t) = -e^t + e^{2t} - te^t$$

6. Řešení:

$$y(t) = e^{2t} - (1 + t)e^t$$

t	e^t	e^{2t}	Výpočet	$y(t) = e^{2t} - (1 + t)e^t$
0.0	1.0000	1.0000	$1.0000 - (1 + 0) \cdot 1.0000$	0.0000
0.2	1.2214	1.4918	$1.4918 - (1 + 0.2) \cdot 1.2214$	0.0261
0.4	1.4918	2.2255	$2.2255 - (1 + 0.4) \cdot 1.4918$	0.1370
0.6	1.8221	3.3201	$3.3201 - (1 + 0.6) \cdot 1.8221$	0.4047
0.8	2.2255	4.9530	$4.9530 - (1 + 0.8) \cdot 2.2255$	0.9470
1.0	2.7183	7.3891	$7.3891 - (1 + 1) \cdot 2.7183$	1.9525

Tabulka 3: Analytické hodnoty řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = e^t$ pro vybrané hodnoty t

4.3.2 Řešení diferenciální rovnice v Matlabu

```
clc; clear; close all;

% Symbolické řešení
syms y(t)
Dy = diff(y, t);          % První derivace
D2y = diff(y, t, 2);     % Druhá derivace
ode = D2y - 3*Dy + 2*y == exp(t); % Nehomogenní rovnice

% Počáteční podmínky
cond1 = y(0) == 0;
cond2 = Dy == 0;
cond2 = subs(cond2, t, 0);

conds = [cond1, cond2];
ySol(t) = dsolve(ode, conds); % Symbolické řešení
disp('Symbolické řešení:');
pretty(ySol)

% Numerické řešení pomocí ode45
f = @(t, Y) [Y(2); 3*Y(2) - 2*Y(1) + exp(t)]; % Soustava 1. řádu
t_span = [0 1.1];
y0 = [0; 0]; % y(0) = 0, y'(0) = 0

[t_num, y_num] = ode23(f, t_span, y0);

% Grafické znázornění
figure;
fplot(ySol, t_span, 'r', 'LineWidth', 2); % Symbolické řešení
hold on;
plot(t_num, y_num(:,1), 'bo', 'MarkerSize', 3); % Numerické řešení
legend('Analytické řešení', 'Numerické řešení (ode23)', 'Location', 'northwest');
xlabel('t');
ylabel('y(t)');
title('Řešení nehomogenní rovnice y'''' - 3y'' + 2y = e^t');
grid on;
hold off;

% Výpočet rozdílů (chyby) v bodech numerického řešení
y_exact = double(subs(ySol, t, t_num)); % Analytické hodnoty v numerických bodech
error = y_num(:,1) - y_exact;          % Rozdíl (chyba)

% Nový graf rozdílů
figure;
plot(t_num, error, 'k.-', 'MarkerSize', 15);
xlabel('t');
ylabel('Rozdíl y_{numerické} - y_{analytické}');
title('Rozdíl mezi numerickým a analytickým řešením');
grid on;
xlim([0 1.1]);
```

Vysvětlení kódu

V tomto příkladu jsme řešili nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu dvěma způsoby: symbolicky a numericky.

1. Symbolické řešení (`dsolve`):

- Pomocí funkce `dsolve` jsme získali přesné analytické řešení rovnice za daných počátečních podmínek $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$.
- Nejprve jsme definovali diferenciální rovnici pomocí symbolických derivací `diff`. Poté jsme zadali počáteční podmínky a získali explicitní vzorec řešení, který jsme vypsali v přehledné formě.

2. Numerické řešení (`ode23`):

- Pro numerické řešení jsme rovnici převedli na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu substitucí $y_1 = y$ a $y_2 = y'$.
- Funkce `ode23` (metoda Runge-Kutta řádu 2/3) pak spočítala aproximované hodnoty $y(t)$. Počáteční podmínky byly stejné jako u symbolického řešení.

3. Vizualizace:

- Obě řešení jsme zakreslili do jednoho grafu, kde je červeně zobrazeno symbolické (přesné) řešení a modrými kolečky numerické řešení.

4. Analýza rozdílů:

- Dále jsme spočítali rozdíly mezi numerickými hodnotami a přesným analytickým řešením v bodech výpočtu a tyto chyby zobrazili na samostatném grafu. To nám pomáhá vizualizovat přesnost numerického řešení.

5. Poznámka k metodě `ode23`:

- Funkce `ode23` je vhodná pro problémy, kde není potřeba velmi vysoká přesnost, a díky adaptivnímu kroku automaticky přizpůsobuje velikost kroku tak, aby efektivně pokryla oblast řešení.

Výsledky:

Výpis z konzole

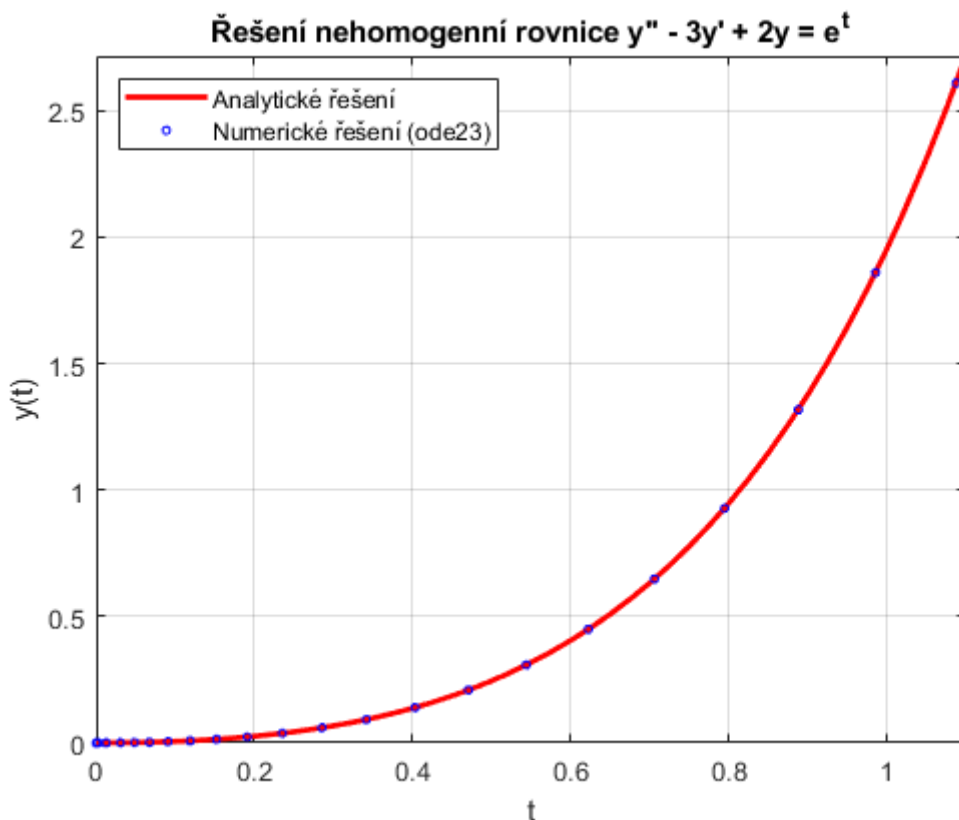
Symbolické řešení:

```
exp(2 t) - exp(t) - t exp(t)
```

Grafické zobrazení výsledků

- Analytické řešení je znázorněno červenou spojitou křivkou, která představuje přesné řešení získané pomocí symbolických výpočtů.
- Numerické řešení je vyznačeno modrými body, které zobrazují aproximované hodnoty funkce $y(t)$ vypočítané metodou ode23. Tyto body ukazují hodnoty v diskrétních bodech t zvolených automaticky podle potřeby přesnosti.
- Graf umožňuje přímé vizuální srovnání obou metod – jak dobře se numerické řešení přibližuje analytickému řešení.

Tímto způsobem lze přehledně analyzovat chování řešení, jeho přesnost a případné odchylky mezi oběma přístupy.



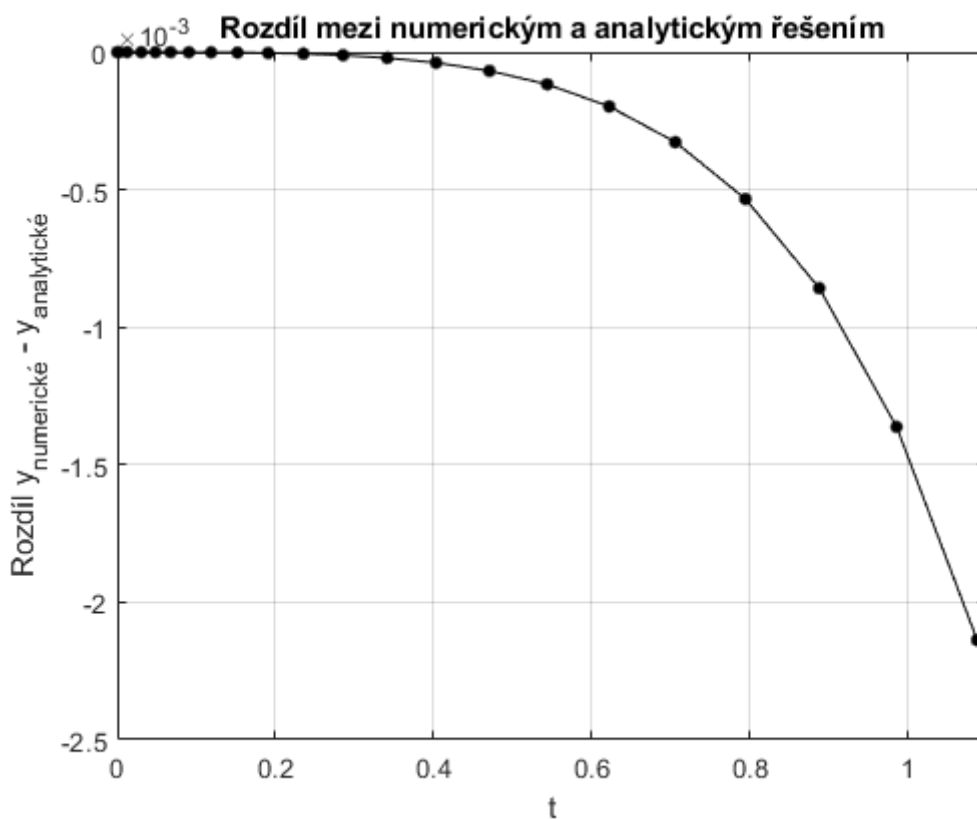
Obrázek 5: Graf řešení diferenciální rovnice $y'' - 3y' + 2y = e^t$

Graf rozdílů mezi numerickým a analytickým řešením

Ačkoliv numerické řešení metodou ode23 sleduje celkový průběh analytického řešení poměrně dobře, z grafu rozdílů je patrné, že odchylky jsou výrazně větší než v případě metody ode45. Zatímco u ode45 byly rozdíly v řádu mikro jednotek, zde se chyby pohybují až v mili jednotkách. To je způsobeno tím, že ode23 je metoda nižšího řádu (explicitní Runge-Kutta metoda 2.–3. řádu), která není tak přesná jako ode45 (4.–5. řádu).

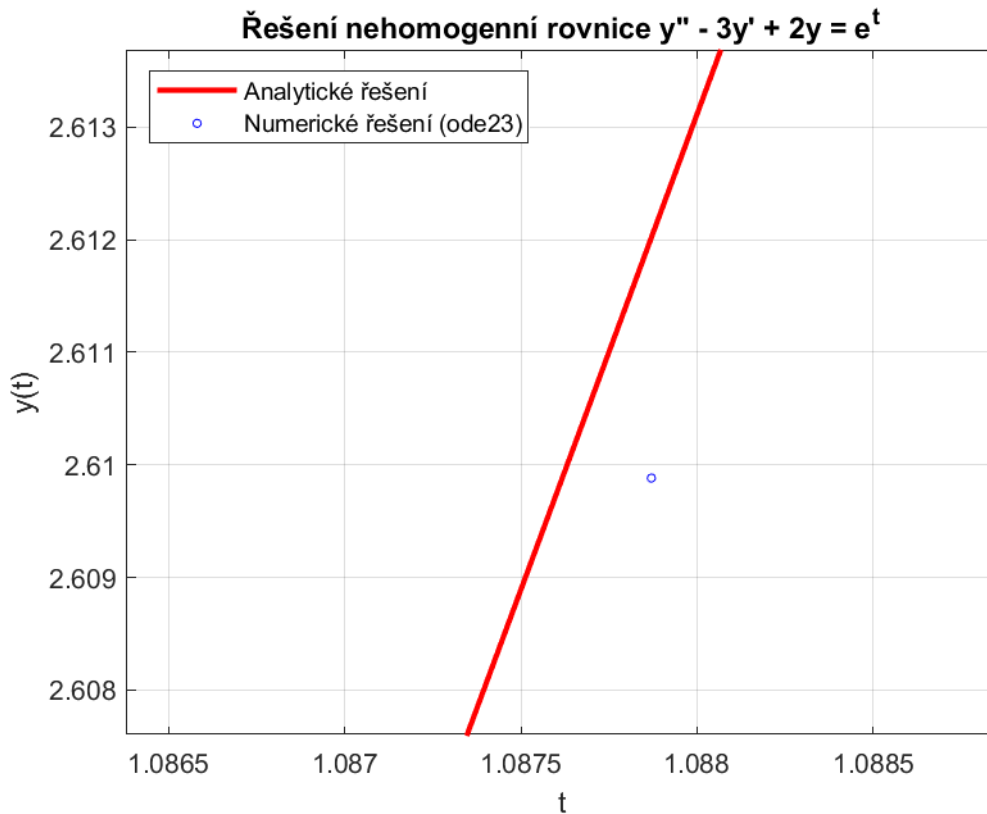
Rozdíl je způsoben nejen zaokrouhlovacími chybami, ale i nižší schopností ode23 zachytit jemné změny v řešení při stejném rozsahu hodnot t . Vzhledem k tomu, že ode23 volí větší krok, může docházet k větší kumulaci chyb v oblastech, kde je řešení zakřivenější nebo se rychleji mění.

Tento graf jasně ukazuje, jak výběr numerické metody ovlivňuje přesnost výsledku, a proč je důležité přizpůsobit volbu metody požadované přesnosti výpočtů.



Obrázek 6: Graf rozdílů mezi numerickým a analytickým řešením diferenciální rovnice $y'' - 3y' + 2y = e^t$ (ode23)

Pokud si přiblížíme graf průběhu řešení ke konci intervalu, můžeme se jasně přesvědčit, že numerické řešení skutečně neleží přesně na křivce analytického řešení. Na rozdíl od metody ode45 ale není třeba graf přibližovat tolik, protože odchylky u metody ode23 jsou výrazně větší. Tento detail ukazuje, jak se může lišit přesnost různých numerických metod, a proto je důležité volit metodu podle požadované přesnosti výsledku.



Obrázek 7: Ukázka odchylky v průběhu řešení (ode23)

4.4 Diferenciální rovnice třetího a vyššího řádu

4.4.1 Analytické řešení rovnice třetího řádu pomocí Laplaceovy transformace

1. Tvar rovnice:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0$$

2. Laplaceova transformace celé rovnice

Použijeme lineární vlastnosti Laplaceovy transformace a vzorce:

- $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0)$
- $\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$
- $\mathcal{L}\{y'''(t)\} = s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)$

Aplikujme Laplaceovu transformaci:

$$\mathcal{L}\{y''' - 6y'' + 11y' - 6y\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$(s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)) - 6(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 11(sY(s) - y(0)) - 6Y(s) = 0$$

Dosadíme počáteční podmínky:

$$(s^3Y(s) - s^2) - 6(s^2Y(s) - s) + 11(sY(s) - 1) - 6Y(s) = 0$$

3. Úprava výrazu:

$$s^3Y(s) - s^2 - 6s^2Y(s) + 6s + 11sY(s) - 11 - 6Y(s) = 0$$

Sečteme členy:

- $Y(s)(s^3 - 6s^2 + 11s - 6)$
- Konstanty: $-s^2 + 6s - 11$

Dostáváme:

$$Y(s)(s^3 - 6s^2 + 11s - 6) = s^2 - 6s + 11$$

4. Vyřešíme $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{s^2 - 6s + 11}{s^3 - 6s^2 + 11s - 6}$$

Nejprve rozložíme jmenovatel. Zkusíme najít kořeny charakteristického polynomu:

$$s^3 - 6s^2 + 11s - 6$$

Zkoušíme racionální kořeny: 1 je kořenem!

Dělíme (polynomiálně nebo Hornerem):

$$(s - 1)(s^2 - 5s + 6) = (s - 1)(s - 2)(s - 3)$$

takže:

$$Y(s) = \frac{s^2 - 6s + 11}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

5. Rozklad na parciální zlomky

Najdeme:

$$\frac{s^2 - 6s + 11}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$$

Násobíme a upravíme:

$$s^2 - 6s + 11 = A(s-2)(s-3) + B(s-1)(s-3) + C(s-1)(s-2)$$

Dosadíme:

- Pro $s = 1$: $1 - 6 + 11 = A(-1)(-2) \Rightarrow 6 = 2A \Rightarrow A = 3$
- Pro $s = 2$: $4 - 12 + 11 = B(1)(-1) \Rightarrow 3 = -B \Rightarrow B = -3$
- Pro $s = 3$: $9 - 18 + 11 = C(2)(1) \Rightarrow 2 = 2C \Rightarrow C = 1$

Takže:

$$Y(s) = \frac{3}{s-1} - \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s-3}$$

6. Inverzní Laplaceova transformace

Použijeme:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$$

7. Řešení:

$$y(t) = 3e^t - 3e^{2t} + e^{3t}$$

t	e^t	e^{2t}	e^{3t}	Výpočet	$y(t) = 3e^t - 3e^{2t} + e^{3t}$
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	$3 \cdot 1.0000 - 3 \cdot 1.0000 + 1.0000$	1.0000
0.2	1.2214	1.4918	1.8221	$3 \cdot 1.2214 - 3 \cdot 1.4918 + 1.8221$	1.0109
0.4	1.4918	2.2255	3.3201	$3 \cdot 1.4918 - 3 \cdot 1.22255 + 3.3201$	1.1189
0.6	1.8221	3.3201	6.0496	$3 \cdot 1.8221 - 3 \cdot 3.3201 + 6.0496$	1.5556
0.8	2.2255	4.9530	11.0232	$3 \cdot 2.2255 - 3 \cdot 4.9530 + 11.0232$	2.8406
1.0	2.7183	7.3891	20.0855	$3 \cdot 2.7183 - 3 \cdot 7.3891 + 20.0855$	6.0731

Tabulka 4: Analytické hodnoty řešení rovnice $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ pro vybrané hodnoty t

4.4.2 Řešení diferenciální rovnice v Matlabu

```
clc; clear; close all;

% Symbolické řešení
syms y(t)
Dy = diff(y,t);
D2y = diff(y,t,2);
D3y = diff(y,t,3);

ode = D3y - 6*D2y + 11*Dy - 6*y == 0;
conds = [y(0)==1, subs(Dy ,t,0)==0, subs(D2y,t,0)==0];

ySol(t) = dsolve(ode,conds); % analytické řešení
disp('Analytické (symbolické) řešení:'); pretty(ySol)

% Soustava 1. řádu Y = [y; y'; y'']
f = @(t,Y) [Y(2); Y(3); 6*Y(3) - 11*Y(2) + 6*Y(1)];

y0 = [1;0;0];
t_span = [0 1.1];

% numerické řešení nejpřesnějším nestiff solverem
opts = odeset('RelTol',1e-9,'AbsTol',1e-12);
[t_num,y_num] = ode113(f,t_span,y0,opts);

% Graf řešení
figure;
fplot(ySol,t_span,'r','LineWidth',2); hold on
plot(t_num,y_num(:,1),'bo','MarkerSize',3)
legend('Analytické řešení','Numerické řešení (ode113)',...
'Location','northwest');
xlabel('t'); ylabel('y(t)');
title('Řešení rovnice  $y^{(3)} - 6y^{(2)} + 11y^{(1)} - 6y = 0$ ');
grid on;

% Graf rozdílu
y_exact = double(subs(ySol,t,t_num));
error = y_num(:,1) - y_exact;

figure;
plot(t_num,error,'k.-','MarkerSize',15);
xlabel('t');
ylabel('Rozdíl  $y_{\text{numerické}} - y_{\text{analytické}}$ ');
title('Rozdíl mezi numerickým a analytickým řešením');
grid on; xlim(t_span);
```

Vysvětlení kódu

Tento skript řeší lineární homogenní diferenciální rovnici třetího řádu dvěma způsoby – symbolicky a numericky.

1. Symbolické řešení (dsolve)

- Nejprve jsme rovnici zapsali pomocí symbolických derivací diff a stanovili počáteční podmínky.
- Funkce dsolve vrátila přesný uzavřený tvar řešení, který jsme vypsali v přehledné podobě příkazem pretty.

2. Numerické řešení (ode113)

- Abychom mohli rovnici integrovat numericky, převedli jsme ji na soustavu prvního řádu substitucí $Y = [y, y', y'']^T$.
- Pravá strana soustavy je zapsána v anonymní funkci f.
- Pro výpočet jsme zvolili solver ode113 – vícekrokovou Adams-Bashforth-Moulton metodu, která při nestiff problémech poskytuje velmi vysokou přesnost. Toleranci jsme zpřísnili ($\text{RelTol} = 1e-9$, $\text{AbsTol} = 1e-12$), takže numerické řešení kopíruje analytické s chybou hluboko pod 10^{-8} .

3. Vizualizace výsledků

- Obě řešení jsme vykreslili do jednoho grafu:
 - červená spojitá křivka představuje symbolické (přesné) řešení,
 - modré body zobrazují hodnoty spočtené pomocí ode113.
- Legenda je v levém horním rohu grafu.

4. Analýza rozdílů

- Pro každý vypočtený bod jsme odečetli hodnotu analytického řešení od numerické aproximace a tyto rozdíly zobrazili v druhém grafu. Křivka rozdílů leží kolem nuly s maximální odchylkou zhruba 10^{-9} , což potvrzuje, že numerické řešení je prakticky totožné s přesným vzorcem.

Výsledky:

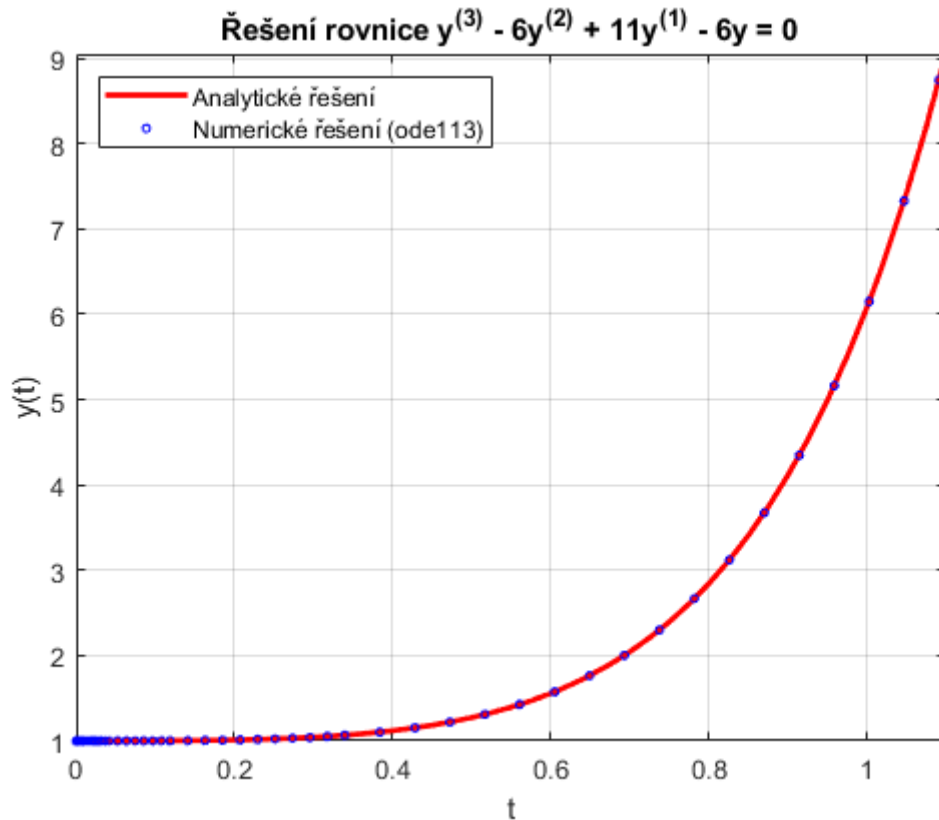
Výpis z konzole

Analytické (symbolické) řešení:
 $\exp(3t) - \exp(2t) - 3 + 3\exp(t)$

Grafické zobrazení výsledků

- Analytické řešení je znázorněno červenou spojitou křivkou. Tato křivka pochází ze symbolického řešení rovnice a představuje přesný průběh funkce $y(t)$.
- Numerické řešení je vyznačeno modrými body. Body odpovídají hodnotám $y(t)$ vypočteným metodou ode113; časové uzly si řešič volí adaptivně tak, aby splnil nastavené tolerance přesnosti.
- Jeden společný graf umožňuje okamžité vizuální porovnání obou přístupů a ukazuje, jak těsně se numerická aproximace přibližuje k analytické křivce v celém intervalu.

Tento způsob zobrazení dává přehled o chování řešení, potvrzuje vysokou přesnost metody ode113 a zároveň odhalí případné odchylky, pokud by se v některém bodě objevily.



Obrázek 8: Graf řešení diferenciální rovnice $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

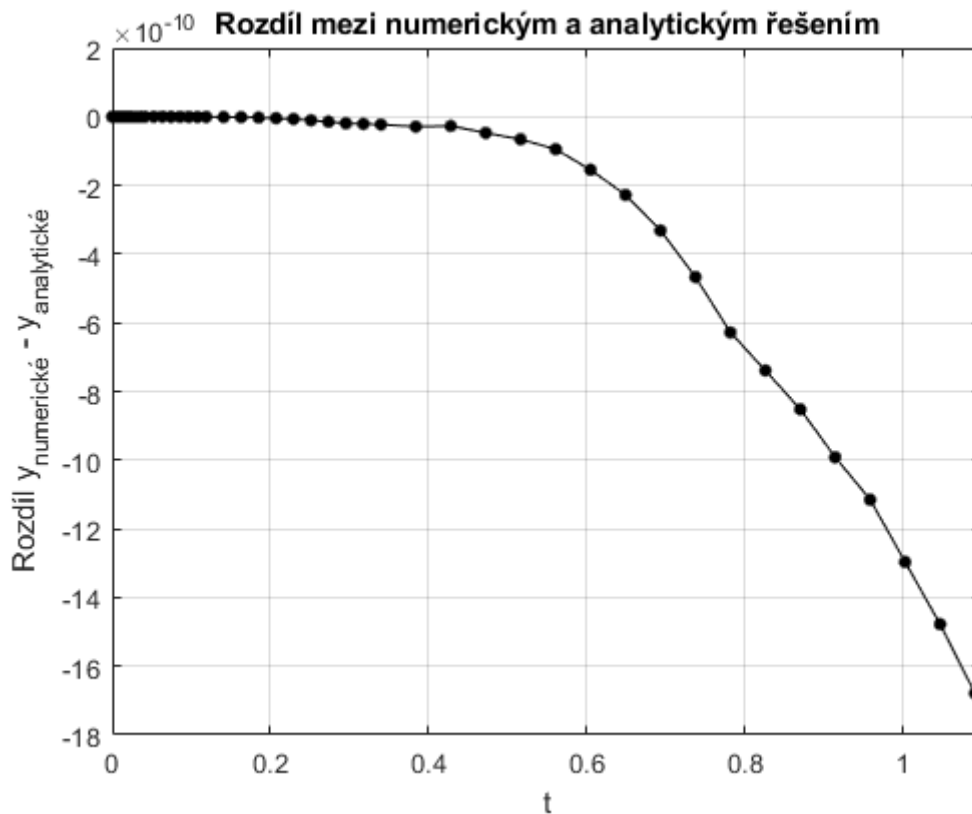
Graf rozdílů mezi numerickým a analytickým řešením

Graf rozdílů nám ukazuje odchylky mezi numericky vypočtenými hodnotami a přesným analytickým řešením v jednotlivých bodech intervalu proměnné t . Na rozdíl od metod jako ode23, které mohou mít vyšší chyby kvůli nižšímu řádu a adaptivnímu kroku, metoda ode113 patří mezi přesnější numerické metody.

Ode113 je vícestupňová metoda založená na proměnném řádu Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector schématu, což jí umožňuje dosahovat vysoké přesnosti i při relativně menších chybách. Proto jsou odchylky v tomto grafu velmi malé — často v řádu desetin až setin mikro jednotek.

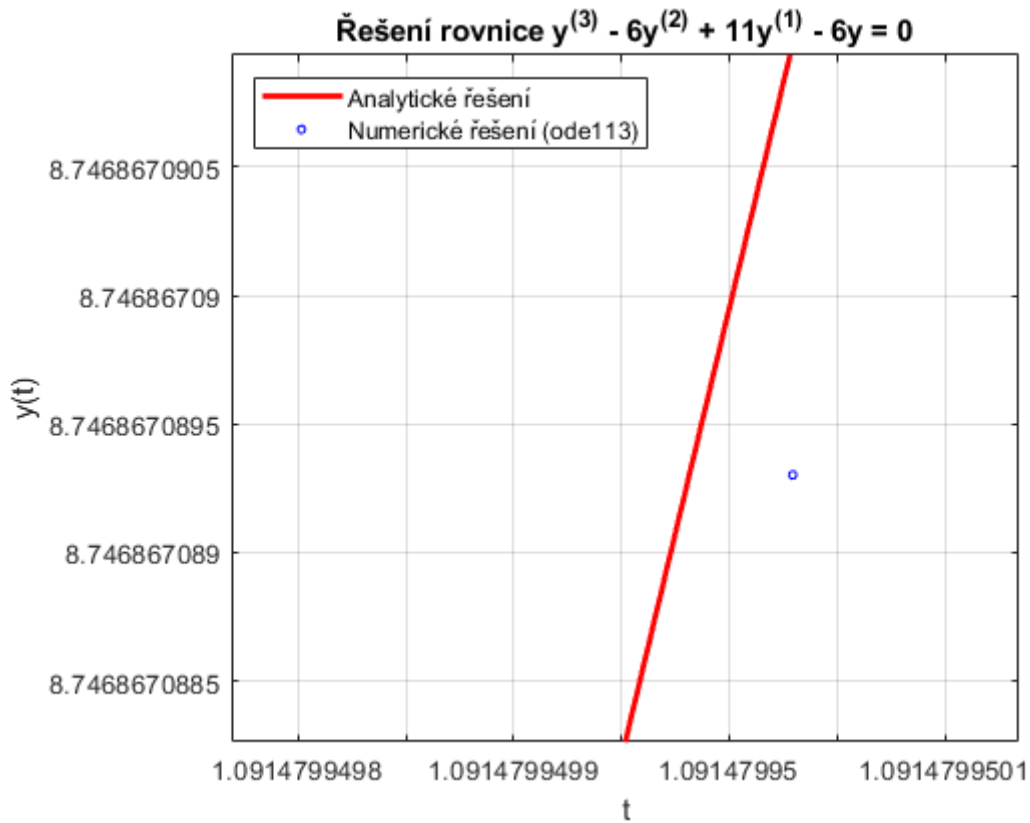
Používání ode113 je výhodné zejména tehdy, když požadujeme co nejpřesnější výsledky a jsme ochotni akceptovat delší dobu výpočtu. Díky své adaptivní povaze automaticky upravuje velikost kroku v nezávislé proměnné t tak, aby minimalizovala chybu, zvláště v oblastech, kde se řešení rychle mění.

Tento graf proto jasně ukazuje, že volba kvalitní numerické metody významně ovlivňuje přesnost výsledku a že ode113 je vhodnou volbou pro náročnější výpočty, kde je přesnost klíčová.



Obrázek 9: Graf rozdílů mezi numerickým a analytickým řešením diferenciální rovnice $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ (ode113)

Pokud si přiblížíme graf průběhu řešení ke konci intervalu, můžeme se opět přesvědčit, že numerické řešení neleží dokonale na křivce analytického řešení. Na rozdíl od předchozích solverů ode23 a ode45 však musíme graf zvětšit opravdu hodně. Teprve při detailním přiblížení uvidíme drobné rozdíly řádu 10^{-10} , což potvrzuje, že ode113 poskytuje z těchto tří metod nejvyšší přesnost.



Obrázek 10: Ukázka odchylky v průběhu (ode113)

4.5 Shrnutí výsledků a porovnání metod

V této kapitole jsem řešil tři reprezentativní lineární diferenciální rovnice vyšších řádů dvěma hlavními způsoby – analyticky (symbolicky) a numericky. Niže jsou shrnuty výsledky a porovnávám použité postupy a solvery v MATLABu.

Použité analytické metody

Rovnice	Použitá symbolická metoda	Nástroj MATLABu
homogenní 2. řádu $y'' - 3y' + 2y = 0$	charakteristické kořeny	dsolve
nehomogenní 2. řádu $y'' - 3y' + 2y = e^t$	variace konstant	dsolve
homogenní 3. řádu $y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = 0$	Laplaceova transformace	dsolve

Tabulka 5: Použité analytické metody

Použité numerické metody MATLABu

Solver	Řád metody / typ	Přesnost (přibližně)	Výhody	Nevýhody
ode23	Runge-Kutta 2/3	chyby v řádu 10^{-3} až 10^{-2}	rychlý a jednoduchý	nižší přesnost
ode45	Runge-Kutta 4/5	chyby v řádu 10^{-6} až 10^{-5}	dobrá poměr přesnost / rychlost	Pomalejší než ode23, ne tak přesná jako ode113
ode113	Adams-Bashforth-Moulton (proměnný řád)	chyby v řádu 10^{-9}	vysoká přesnost, minimální chyby	delší výpočet, vyšší nároky na paměť

Tabulka 6: Použité numerické metody

Hlavní poznatky

1. Přesnost roste s řádem metody. Metoda ode23 měla největší chyby, ode45 podstatně menší a ode113 dosahuje téměř strojové přesnosti.
2. Viditelnost odchylky odpovídá kvalitě solveru.
3. Cena za přesnost je čas a počet kroků. ode113 pracuje s proměnným řádem a počtem kroků, což vede k delší době výpočtu oproti jednodušším solverům.
4. Symbolické a numerické řešení se vzájemně doplňují. Symbolické řešení přesně ukazuje očekávaný průběh, numerické metody pak slouží pro efektivní výpočet přibližných hodnot a ověření.
5. Ruční výpočty, jak analytické, tak numerické, plně souhlasí s výsledky získanými v Matlabu. V obou případech je možné pozorovat drobné odchylky numerických metod od analytických, které jsou způsobeny zaokrouhlovacími chybami a numerickými aproximacemi. Tyto malé rozdíly však nemají významný vliv na celkovou správnost řešení.

ZÁVĚR

V této práci jsem se věnoval problematice řešení diferenciálních rovnic, a to jak z teoretického, tak z praktického hlediska. Nejprve jsem představil základní pojmy a klasifikace diferenciálních rovnic, včetně jejich řádu, lineárnosti a typů počátečních či okrajových podmínek. Dále jsem popsal vybrané analytické metody řešení, jako jsou metoda charakteristických kořenů, variace konstant nebo Laplaceova transformace, které umožňují přesné vyjádření řešení některých typů rovnic.

Vedle toho jsem se věnoval i numerickým metodám, které jsou často nezbytné v případech, kdy není možné nalézt explicitní analytické řešení. Popsal jsem základní numerické přístupy, zejména metody Runge-Kutta, Adamsovy metody a Eulerovu metodu, a jejich implementaci v prostředí Matlab.

Hlavní část práce byla zaměřena na řešení lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů v Matlabu. Zde jsem ukázal, jak lze využít jak symbolické funkce (`dsolve`) pro přesné analytické řešení, tak numerické solvery (`ode23`, `ode45`, `ode113`) pro aproximaci řešení v případech, kde je analýza komplikovanější. Důkladně jsem porovnal přesnost a vlastnosti jednotlivých numerických metod, včetně rozdílů v adaptivních krocích a chybových tolerancích.

Výsledky získané ručními výpočty, jak analytické, tak numerické, plně souhlasily s výsledky z Matlabu, což potvrzuje správnost a spolehlivost použitých postupů. Přestože numerické metody vykazují drobné odchylky od analytických řešení, jsou tyto rozdíly v rámci přijatelné tolerance a většinou nemají významný vliv na praktické použití.

Celkově práce ukazuje, že kombinace teoretických znalostí s efektivním využitím softwarových nástrojů, jako je Matlab, umožňuje řešit široké spektrum diferenciálních rovnic s vysokou přesností a efektivitou. Volba vhodné numerické metody je klíčová, přičemž metody jako `ode113` nabízí vysokou přesnost za cenu delší doby výpočtu, zatímco metody jako `ode23` mohou být vhodné pro rychlejší, ale méně přesné aproximace.

Tato práce tak poskytuje komplexní přehled o možnostech řešení diferenciálních rovnic, který může sloužit jako užitečný zdroj jak pro studenty, tak pro odborníky zabývající se aplikovanou matematikou a inženýrskými výpočty.

Při kontrole jazykové správnosti a stylistiky textu bakalářské práce byl využit nástroj ChatGPT (OpenAI). Úpravy byly autorsky posouzeny a podle uvážení zapracovány.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] BREZINA, Miroslav a VESELÝ, Jiří. *Obyčejné (lineární) diferenciální rovnice a jejich systémy*. Online. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2011. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/Brz_ves/difrov.pdf. [cit. 2025-02-01].
- [2] MAŘÍK, Robert. *Diferenciální rovnice*. Online. Dostupné z: <https://robert-marik.github.io/matematika/ode/>. [cit. 2025-02-01].
- [3] KUBEN, Jaromír. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Online. Brno: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1995. Dostupné z: <https://www1.karlin.mff.cuni.cz/~halas/MA/MA3/ODR.pdf>. [cit. 2025-02-01].
- [4] MLÁDEK, Daniel, 2024. *Řešení vybraných typů diferenciálních rovnic s podporou Matlabu*. PDF, Bakalářská práce, vedoucí RNDr. Jaromír Zahrádka, Ph.D. Náměstí Čs. legií 565, Pardubice.: Univerzita Pardubice, Fakulta elektrotechniky a informatiky. Dostupné z: <https://dk.upce.cz/server/api/core/bitstreams/67d1d762-97b1-4350-9a60-bee76184e61b/content>. [cit. 2025-02-01].
- [5] WALET, Niels. *Boundary and Initial Conditions*. Online. Dostupné z: https://math.libretexts.org/Bookshelves/Differential_Equations/Partial_Differential_Equations_%28Walet%29/03%3A_Boundary_and_Initial_Conditions. [cit. 2025-03-11].
- [6] TOMICZEK, Petr. *Matematická analýza 2*. Online. Dostupné z: <https://home.zcu.cz/~tomiczek/www/MA2/MA2.pdf>. [cit. 2025-03-18].
- [7] KNOBLOCH, Petr. *Metoda konečných diferencí*. Online. Univerzita Karlova. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~knobloch/FILES/UPDR_16_17/MKD.pdf. [cit. 2025-03-18].
- [8] NAVARA, Mirko. *Numerické řešení diferenciálních rovnic*. Online. Praha: Centrum strojového vnímání, katedra kybernetiky FEL ČVUT. Dostupné z: https://cw.fel.cvut.cz/old/_media/courses/a4b01num/prednasky/difrov_print.pdf. [cit. 2025-04-01].
- [9] KAMARÝT, Ladislav, 2012. *Lineární diferenciální rovnice*. Bakalářská práce, vedoucí RNDr. Martin Svoboda. Náměstí Čs. legií 565, Pardubice.: Univerzita Pardubice, Fakulta elektrotechniky a informatiky. Dostupné z: <https://dk.upce.cz/items/766ea686-999f-4887-a18b-8bf3e763dd5f>. [cit. 2025-04-12].
- [10] NOVOTNÝ, Radek, 2011. *Používání knihoven Matlabu v programu*. Bakalářská práce, vedoucí doc. Ing. František Dušek, CSc. Náměstí Čs. legií 565, Pardubice.: Univerzita Pardubice, Fakulta elektrotechniky a informatiky. Dostupné z: <https://dk.upce.cz/server/api/core/bitstreams/d52bfb44-79a0-44a2-b93e-1ad767359488/content>. [cit. 2025-04-12].
- [11] MATHWORKS. *MATLAB Documentation*. Online. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/matlab/>. [cit. 2025-04-01].

[12] PRACHAŘ, O., JELÍNKOVÁ, J. *Průvodce předmětem matematika II (pátá část) - Úlohy z obyčejných diferenciálních rovnic*, Pardubice, Univerzita Pardubice, 2005. ISBN 80-7194-747-4.

[13] ZAHŘÁDKA, J. *Matematický seminář - MATLAB*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2013. ISBN 978-80-7395-691-2.

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha A – M-files s výpočty v MATLABu