

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní

Stochastické modely zásob

Bc. Gabriela Stuchlíková

Diplomová práce

2019

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2018/2019

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Gabriela Stuchlíková**
Osobní číslo: **E17905**
Studijní program: **N6208 Ekonomika a management**
Studijní obor: **Ekonomika a management podniku**
Název tématu: **Stochastické modely zásob**
Zadávající katedra: **Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Cíl práce: Provést optimalizaci zásobovacího systému u vybraného podniku. Zaměřit se na teoretický popis základních i pokročilých stochastických modelů zásob. Jejich fungování pak prezentovat na praktických příkladech.

Osnova:

- Úvod do teorie zásob.
- Deterministické modely zásob.
- Stochastické modely zásob.
- Statické modely zásob.
- Aplikace modelů zásob na praktických příkladech.
- Optimalizace zásobovacího systému u vybraného podniku.

Rozsah grafických prací: —
Rozsah pracovní zprávy: cca 50 stran
Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická
Seznam odborné literatury:

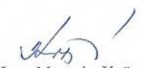
EMMETT, S. Řízení zásob: jak minimalizovat náklady a maximalizovat hodnotu. Přeložil Markéta HENYCHOVÁ. Brno: Computer Press, 2008. ISBN 978-80-251-1828-3.
HILLIER, S., F., LIEBERMAN, G., J. Introduction to Operations Research. McGraw Hill, 2001. ISBN 0-07-121744-4.
JABLONSKÝ, J. Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování. 3. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3.
LINDA, B., VOLEK, J. Lineární programování. Vyd. 5. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2014. ISBN 978-80-7395-844-2.
PELIKÁN, J., CHÝNA, V. Kvantitativní management. Praha: Oeconomica, 2011. ISBN 978-80-245-1830-5.

Vedoucí diplomové práce:  Mgr. Jana Heckenbergerová, Ph.D.
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: 3. září 2018
Termín odevzdání diplomové práce: 30. dubna 2019


doc. Ing. Romana Provažníková, Ph.D.
děkanka

L.S.


doc. Ing. Marcela Kožená, Ph.D.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 3. září 2018

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil/a, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena/a s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako Školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 9/2012, bude práce zveřejněna v Univerzitní knihovně a prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 30. 4. 2019

Bc. Gabriela Stuchlíková

PODĚKOVÁNÍ:

Tímto bych ráda poděkovala své vedoucí práce paní Mgr. Janě Heckenbergerové Ph.D., za její odbornou pomoc, cenné rady a poskytnuté materiály, které mi pomohly při zpracování diplomové práce.

ANOTACE

Cílem diplomové práce je provést optimalizaci zásobovacího systému u vybraného podniku. Zaměřit se na teoretický popis základních i pokročilých stochastických modelů zásob. Jejich fungování pak prezentovat na praktických příkladech.

KLÍČOVÁ SLOVA

zásoby, stochastické modely, optimalizace, náklady

TITLE

Stochastic models of stocks

ANNOTATION

The aim of the thesis is to optimize the supply system of the selected company. To focus on theoretical descriptions of basic and advanced stochastic models of stocks and then present them on practical examples.

KEYWORDS

stocks, stochastic models, optimization, costs

OBSAH

ÚVOD (ÚROVEŇ 1; STYL NAD1 BEZ).....	10 -
1 ÚVOD DO TEORIE ZÁSOb	12 -
1.1 ZÁKLADNÍ PRVKY TEORIE ZÁSOb	12 -
1.2 ZÁSObY	14 -
1.2.1 Klasifikace zásob.....	16 -
1.2.2 Řízení zásob	18 -
1.3 MODEL Y ZÁSOb	19 -
1.3.1 Převodní tabulky	20 -
2 DETERMINISTICKÉ MODEL Y ZÁSOb	21 -
2.1 MODEL OPTIMÁLNÍ VELIKOST OBJEDNÁVKY.....	21 -
2.2 MODEL MNOŽSTEVNÍ RABATY	23 -
2.3 MODEL BEZ POVOLENÉHO PŘECHODNÉHO NEDOSTATKU ZÁSObY.....	23 -
2.4 PRODUKČNÍ MODEL	24 -
2.5 MODEL – PŘECHODNÉ NEUSPOKOJENÍ POPTÁVKY	25 -
3 STOCHASTICKÉ MODEL Y ZÁSOb	28 -
3.1 PROMĚNNÉ VELIČINY	28 -
3.1.1 Neřiditelné proměnné	28 -
3.1.2 Řiditelné proměnné	29 -
3.2 KLASIFIKACE STOCHASTICKÝCH MODELŮ	29 -
3.3 MODEL – SIGNALIZACE ZMĚN A ODLOŽENÁ SPOTŘEBA	29 -
3.4 MODEL - SIGNALIZACE ZMĚN A ZTRACENÉ PRODEJE.....	31 -
3.5 MODEL – STOCHASTICKÁ SPOJITÁ POPTÁVKA	32 -
3.6 MODEL – NÁHODNÁ A PROMĚNLIVÁ SPOTŘEBA V ČASE.....	35 -
3.6.1 P-systém, Q- systém	35 -
4 STATICKÉ MODEL Y ZÁSOb	39 -
4.1 MODEL – OPTIMALIZACE JEDNORÁZOVĚ VYTVOŘENÉ ZÁSObY	39 -
5 APLIKACE MODELŮ ZÁSOb NA PRAKTICKÝCH PŘÍKLADECH	41 -
5.1 PŘEDSTAVENÍ PODNIKU	41 -
5.2 PRAKTICKÝ PŘÍKLAD Č. 1.....	42 -
5.2.1 Borovice	43 -
5.2.2 Shrnutí výpočtů jednotlivých druhů kulatiny	43 -
5.3 PRAKTICKÝ PŘÍKLAD Č. 2.....	44 -
5.4 PRAKTICKÝ PŘÍKLAD Č. 3.....	45 -
5.5 PRAKTICKÝ PŘÍKLAD Č. 4.....	46 -
5.5.1 Normální rozdělení.....	46 -
5.5.2 Rovnoměrné rozdělení	48 -
5.5.3 Exponenciální rozdělení	49 -
5.5.4 Deterministický přístup	50 -
5.6 PRAKTICKÝ PŘÍKLAD Č. 5.....	50 -
5.6.1 Normální rozdělení.....	51 -
5.6.2 Rovnoměrné rozdělení	52 -
5.6.3 Exponenciální rozdělení	53 -
6 OPTIMALIZACE ZÁSObOVACÍHO SYSTÉMU U VYBRANÉHO PODNIKU	56 -
ZÁVĚR	59 -
POUŽITÁ LITERATURA	61 -

SEZNAM ILUSTRACÍ A TABULEK

Obrázek 1: Graf popisující běžnou a pojistnou zásobu.....	13
Obrázek 2: Grafické znázornění nákladové funkce.....	22
Obrázek 3: Výrobní a spotřební cyklus.....	24
Obrázek 4: Dodávkový cyklus Modelu přechodné neuspokojení poptávky.....	26
Obrázek 5: Grafické znázornění průběhu Modelu se signalizací změn a odloženou spotřebou.....	31
Obrázek 6: Grafické znázornění průběhu Modelu se signalizací změn a ztracenými prodeji.....	31
Obrázek 7: Průběh modelu při stochastické poptávky.....	33
Obrázek 8: Zobrazení P-systému.....	35
Obrázek 9: Zobrazení Q-systému.....	36
Tabulka 1: Převodní tabulka.....	20
Tabulka 2: Vzorce pro speciální rozdělení spotřeby $S(L)$	32
Tabulka 3: Vstupní data kulatiny borovice.....	43
Tabulka 4: Výsledky výpočtů jednotlivých druhů kulatin.....	44
Tabulka 5: Vstupní údaje praktického příkladu č. 2.....	44
Tabulka 6: Kategorizace slev.....	45
Tabulka 7: Výsledky jednotlivých rozdělení pravděpodobnosti.....	54
Tabulka 8: Vyhodnocení úspor optimálních dodávek.....	58

SEZNAM ZKRATEK A ZNAČEK

AK – akát

BO – borovice

DB – dub

Kč – korun českých

MCN – minimální celkové náklady

MO – modřín

SM – smrk

s. r. o., spol. s r. o. – společnost s ručením omezeným

Úvod

Zásoby jsou významným činitelem, který ovlivňuje hospodářský výsledek každého podniku. Velikost zásob by proto měla být na jedné straně co nejmenší z důvodu vázání kapitálu v ní, ale na druhé straně by měla být co největší, kvůli dostatečné pohotovosti dodávek. A právě z těchto dvou hledisek, která jsou protichůdná, musí podnik volit určitý kompromis. Tohoto kompromisu lze docílit řízením zásob, jehož cílem je udržování zásob na takové úrovni a v takovém složení, aby byla zabezpečována nepřerušovaná výroba, přičemž celkové náklady s tím spojené, by měly být co nejmenší, a to jak pořizovací náklady, náklady na skladování materiálu, tak i náklady na plynulý výrobní proces.

Podnik tedy prostřednictvím řízení zásob prognózuje, analyzuje, plánuje, operativně rozhoduje a kontroluje jednotlivé skupiny zásob a snaží se vytvářet podmínky pro plnění stanovených podnikových cílů. Důležitou úlohou v zásobách je jejich rozdělení do jednotlivých skupin, jako např. běžná zásoba, pojistná zásoba, sezónní zásoba atd., z důvodu toho, že každá zásoba v podniku má jinou funkci.

Dobré řízení zásob může přispět ke zlepšení hospodářského výsledku a k úspěchu podniku na trhu. Avšak systém řízení zásob není možné v žádném případě považovat za všelék, za jediný prostředek k zajištění bezporuchového chodu podniku.

Jedny z možných metod při řízení zásob jsou matematické metody, a jelikož řízení zásob patří ve výrobě hospodářských organizací k obtížnějším úkolům, setkáváme se v posledních desetiletích s intenzivními snahami používat při řízení zásob právě tyto matematické metody spolu s moderní výpočetní technikou. Přitom si však musíme uvědomit, že nemohou existovat univerzální modely zásob, které by se pouze zaváděly do konkrétních případů, protože problematika řízení zásob je natolik specifická, že každý případ vyžaduje samostatné řešení.

Cílem této práce je optimalizovat zásobovací systém vybraného podniku prostřednictvím matematických metod. Právě matematika má nespornou výhodu v možnosti objektivního a formalizovaného vyjádření skutečnosti. Pomocí matematického aparátu je možné formalizovat jakékoliv jevy za podmínek, že je jejich obsah přesně definován, vymezen a je také určen cíl řešení.

Matematické metody řízení zásob jsou součástí disciplíny teorie zásob, které bude věnována první část práce. Poté budou rozebrány jednotlivé modely zásob, ke kterým bude uvedena nezbytná teorie, tj. jak se modely chovají, jejich klasifikace, k čemu jsou, jejich vstupní

parametry a jednotlivé vzorce pro výpočet hodnot. Přičemž stochastické modely zásob budou, co se obsahu týče, rozebrány nejvíce. Následně budou na vybrané modely řízení zásob aplikovány na konkrétní druhy zásob společnosti Kavyl, spol. s r. o.

Na praktických příkladech budou aplikovány některé deterministické a stochastické modely. Statické modely nebudou v praktických příkladech figurovat vůbec, a to z důvodu, že v těchto modelech se řeší problémy zásob jen během jednoho období a používají se tam, kde je potřeba celé množství zásob, které bude později spotřebováno, objednat najednou. V případě stochastických modelů není průběh zásob lineární, ale je popsán náhodnou veličinou spotřeby a pro výpočet budou použity tři charakteristiky rozdělení pravděpodobnosti. Poslední část práce bude hodnotit výsledky získané z praktických příkladů.

1 ÚVOD DO TEORIE ZÁSOb

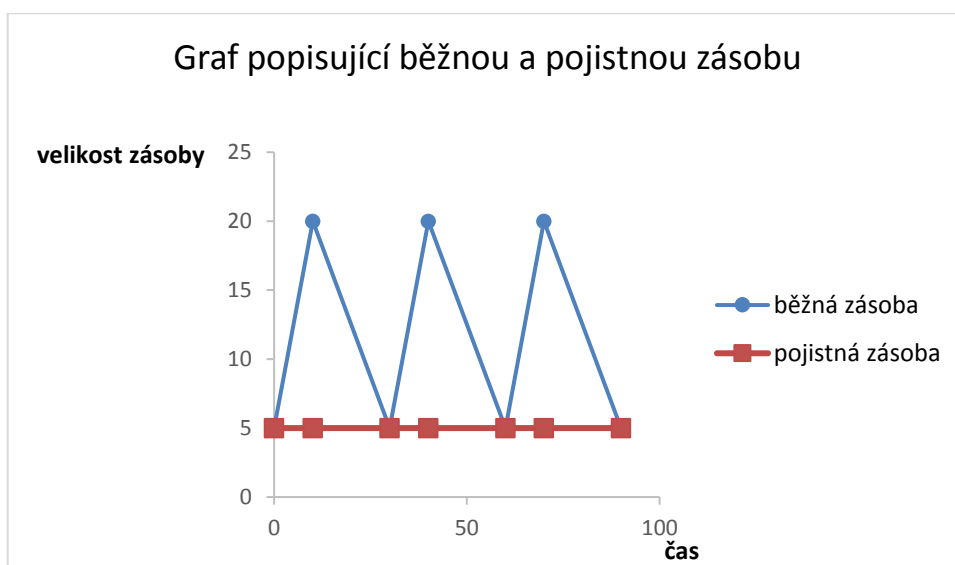
Teorie zásob je relativně mladá disciplína a snaží se optimalizovat zásoby s cílem snížit náklady na jejich udržování. Jejím hlavním úkolem je tedy minimalizace nákladů a optimální řízení zásob (Pelikán, 2011). Lze ji označit souhrnem matematických metod používaných k modelování a optimalizaci procesu hromadění různých položek zásob k zabezpečení bezporuchového chodu firmy. Tato disciplína vytváří modely, pomocí nichž hledá způsob nakládání se zásobami, tak aby byla zajištěna jejich ekonomicky efektivní funkce, a nalézá odpověď na otázku, kdy a kolik zdrojů objednat ve vztahu ke skladovým zásobám (Emmett, 2008).

1.1 Základní prvky teorie zásob

V teorii zásob se obecně vše, co se ve skladech může skladovat, nazývá substrátem. Substrát, který vstupuje do skladu, se nazývá dodávka či výroba a substrát vystupující ze skladu se nazývá spotřeba nebo výdaj.

Spotřeba může nabývat různých podob a může být spojitá v čase, nepravidelná v čase, spojitá v množství, která může nabývat různých hodnot nebo nespojitá v množství, která může nabývat jen předem stanovených hodnot. Příkladem spotřeby v čase je například elektřina v nějaké oblasti. Nepravidelná spotřeba se zase například projevuje u velkoobchodních organizací, kde se objednávají zásoby po celých paletách.

Pro potřeby teorie zásob se rozlišuje obratová (běžná) zásoba a pojistná zásoba. Běžná zásoba je proměnná v čase a závislá na způsobu pořizování a čerpání zásob. Naproti tomu pojistná zásoba je v čase konstantní a využívá se jako rezerva při náhodných výkyvech, např. poruchy v dodávkách (Gros, 2009).



Obrázek 1: Graf popisující běžnou a pojistnou zásobu

Zdroj: Vlastní zpracování

Významný prvek, jenž je součástí teorie zásob, je kritériální funkce. Podle ní je rozhodováno o optimálním fungování modelu. Nejčastěji používaná kritériální funkce je funkce nákladů, která se obvykle skládá ze tří částí, tj. nákladů na dodávku, nákladů na skladování a nákladů deficitu. Náklady na dodávku jsou režie, které jsou spjaté s pořízením substrátů a nejsou závislé na velikosti řízené proměnné. Lze je dělit na fixní a variabilní. Fixní náklady jsou nezávislé na velikosti dodávky, zatímco variabilní náklady jsou přímo úměrně závislé na množství dodávky. Druhá část, skladovací náklady, je závislá na velikosti řízené proměnné a lze k ní zařadit úvěry ze zásob, odvody z vlastních prostředků, náklady potřebné na udržení a manipulaci zásob. Třetí a poslední část, objevující se v nákladové funkci, jsou náklady deficitu. Tyto náklady vznikají, jestliže poptávka není plně uspokojena nebo je uspokojena opožděně a je potřeba u těchto nákladů rozlišit, zda se jedná o případ s odkladem nebo se ztracenými prodeji.

Dalšími důležitými prvky modelů teorie zásob je vstup, výstup a skladování. Mechanismus vstupu systému je soubor pravidel, podle kterých je sklad doplňován dodávkami, a tyto dodávky se rozlišují do čtyř typů dodávek. První typ je dodávka deterministická, určená co do velikosti i času, kdy se dodávky uskutečňují v předem známých okamžicích. Druhý typ je dodávka deterministická, určená co do velikosti, ale náhodně rozložená v čase. Třetím typem je dodávka náhodně určená co do velikosti, ale deterministicky rozložená v čase a posledním typem je dodávka náhodně určená co do velikosti a času (Jablonský, 2007).

Podle mechanismu výstupu ze systému se skladované substráty spotřebují ve formě interní spotřeby podniku nebo ve formě dodávek ze skladu mimo firmu. Podle množství spotřeby

skladovaného substrátu se rozlišují modely se spojitou a diskrétní spotřebou. Spojitá spotřeba představuje neustále spotřebovávání, které je možné jen u tekutých a sypkých substrátů a modely s diskrétní spotřebou se využívají v případech, kde se substrát spotřebovává zřídka. S mechanismem výstupu se také pojí otázka deficitu zásob. Deficit vzniká v okamžiku, kdy systém neuspokojuje spotřebu vzhledem ke stavu zásob. Existují dva systémy deficitu a to systém s deficitem a systém s vyloučením deficitu. Podle toho, jakým způsobem se řeší vyčerpání zásob, se systémy s deficitem dělí na systémy s odloženou spotřebou a systémy se ztracenou spotřebou. Systémy s odloženou spotřebou jsou systémy, ve kterých se neuspokojená spotřeba vyřeší z nejbližší dodávky. Oproti tomu systémy se ztracenou spotřebou jsou systémy, kde neuspokojenou spotřebu nelze vyřešit z další dodávky.

Mechanismus skladování určuje, jakým způsobem se vstupující substráty mění na výstupy. Jedná se o soubor pravidel, které řídí provoz zásobovacího systému. Skladovatelnost zásob má určitý vliv na konstrukci modelu. Při použití běžného modelu zásob se předpokládá neomezená skladovatelnost a v případě, kdy skutečnost je ve výrazném nepoměru s předpokladem, používají se modely s omezenou skladovatelností (Horáková, 1999).

Systémy se signalizací změn a systémy s periodickou kontrolou se uplatňují v souvislosti s organizací systému jako celku, se zvláštním důrazem na organizaci informačního systému. Systémy se signalizací změn jsou systémy, kde prostřednictvím vhodně zvolené organizace je zabezpečeno, že každá změna stavu substrátů se ihned eviduje. Díky této evidenci je možné okamžitě nalézt dosahování kritických hladin zásob, které signalizují potřebu další objednávky substrátu. Naproti tomu se systémy s periodickou kontrolou využívají tehdy, když je mechanismus sledování změn v reálném čase velmi náročný, potom se srovnání s určitými hladinami provádí jen v jistých periodicky opakovaných momentech.

Poslední důležité pojmy jsou období a pořizovací lhůta, jenž jsou označovány jako časové intervaly. Pořizovací lhůta je doba potřebná od zadání objednávky až ke konečnému převzetí dodávky. Období lze zase chápat jako úsek, po kterém je sledována daná zásoba (Jablonský 2007).

1.2 Zásoby

Zásoby jsou nedílnou součástí podniků a jsou pro podnik velkou a nákladovou investicí. Jsou charakterizovány svojí krátkodobostí a lze je chápat jako přirozený prvek, který je součástí výrobních i distribučních organizací. Zásobami se označuje část užitných hodnot, které byly již vyrobeny, ale nebyly ještě spotřebovány (Lambert, 2005).

V odborné literatuře či člancích existuje řada definic, které pojednávají o charakteristice zásob.

„Zásobu lze definovat jako určité množství zboží, času nebo výkonové kapacity, které je alokováno mezi jednotlivé procesy nebo jejich části za účelem zajištění cílů v podobě nižších nákladů, nižšího rizika nebo vyššího využití určitého zdroje“ (Jirsák, 2012, str. 87).

„Zásoba je charakterizována jako určité množství materiálu, které je v daném časovém okamžiku k dispozici v daném podniku“ (Buchta, 2011, str. 44).

Mezi zásoby patří materiál, zboží a zásoby vlastní výroby a řeší se v nich především problematika časového a kapacitního nesouladu mezi výrobou a spotřebou a kryjí možné výkyvy a poruchy. Projevují se však i negativním způsobem. Negativní vliv spočívá v tom, že zásoby váží kapitál, nesou s sebou riziko znehodnocování, neprodejnosti a spotřebovávají další práci a prostředky (Horáková, 1999).

Dle Lamberta, Stocka, a Ellrama jsou zásoby v podniku udržovány za pět účelů:

1. Vyrovnávají poptávku a nabídku.
2. Umožňují specializaci výroby.
3. Umožňují podnikům dosáhnout efektů a úspor založených na rozsahu výroby.
4. Poskytují jakýsi tlumič mezi kritickými spoji v rámci distribučního kanálu.
5. Poskytují ochranu před nevyzpytatelnými výkyvy v poptávce a v době cyklu objednávky.

Vyrovnávání poptávky a nabídky prostřednictvím udržování zásob je zapříčiněno sezónními výkyvy těchto dvou veličin. Například v období zimy je zvýšený zájem o sportovní vybavení na hory, a kdyby měl výrobce přizpůsobit výrobní kapacitu tak, aby v tomto období velkého zájmu zvládnul vyrábět veškeré sportovní vybavení, které se poptává, znamenalo by to pro něj značné náklady. A proto udržování relativně stabilního objemu zásob je pro výrobce méně nákladnější. Opačně se také může stát, že poptávka je po celý rok stabilní, ale potřebný materiál na výrobu produktu je možné získat jen v určité době. Tento problém nastává například u různého druhu ovoce a právě z toho důvodu se musí také udržovat zásoby.

Druhým důvodem, proč se udržují zásoby, je možnost specializace výroby. Zásluhou zásob se mohou jednotlivé výrobní oddělení podniku specializovat na výrobu určitých výrobků a hotové výrobky jsou pak odesílány do sběrných skladů, kde jsou podle zákaznických objednávek kombinovány a expedovány konečnému spotřebiteli.

Úspory plynoucí z nákupu, dopravy a výroby ve velkém rozsahu lze dosáhnout pouze při udržování určité úrovně zásob. Pokud například výrobce objednává ve velkém množství suroviny na výrobu, může od dodavatele využít nabízených slev při objednání ve velkém a zároveň při nákupu ve velkém množství lze docílit nižších nákladů na dopravu objednaných surovin a následně to snižuje i celkové náklady zásob. Dalšího efektu lze dosáhnout při velkovýrobě s minimem změn výrobních linek a realizace rozsáhlé výrobní série. Tento efekt zvyšuje výrobní kapacity a náklady na výrobu jednotky se snižují.

Je potřeba, aby byly zásoby udržovány v průběhu celého dodavatelského řetězce, a to z důvodu geografického oddělení účastníků kanálu a suroviny by tak byly plynule přemístěny od zdroje dodávek do místa výroby, kde se stávají vstupem výrobního procesu. Posledním a důležitým důvodem, proč jsou zásoby v podniku drženy, je ochrana před nejistotou, aby se předešlo vyčerpání zásob v případě variability dodávek a variability poptávky.

Udržování zásob však s sebou nese i řadu úskalí, a proto existuje i řada důvodů, proč zásoby neudržovat. Mezi tyto důvody se řadí způsobování znehodnocení výrobků, zakrývání nedostatečné jakosti výroby, nevyužití kapacity výroby a další. Proto by se náklady na udržování zásob měly porovnávat s realizovanými úsporami, které vznikly díky držení zásob, a poté na základě tohoto porovnání by se měly podniky rozhodovat, zda zásoby udržovat či ne.

1.2.1 Klasifikace zásob

Zásoby lze klasifikovat z různých hledisek a v odborné literatuře existuje mnoho odlišných dělení. V zásadě se však vždy setkáme s členěním zásob podle stupně zpracování. Z tohoto hlediska se zásoby dělí do těchto skupin:

- Zásoby zboží – jedná se o výrobky, které byly nakoupené za účelem dalšího prodeje.
- Zásoby hotových výrobků – jsou výrobky, které podnik sám vyrobí a dále je skladuje formou zásob.
- Zásoby rozpracovaných výrobků – do rozpracovaných výrobků se řadí polotovary vlastní výroby a nedokončená výroba. Oba tyto druhy již prošly nějakými stádii výroby, ale ještě je nelze brát jako hotové výrobky.
- Výrobní zásoby – do zásob výroby patří zejména základní, pomocné a režijní materiály, suroviny, paliva, náhradní díly, obaly a obalové materiály a nakupované díly spotřebované při výrobě.

Další základní členění zásob, které je dobré zmínit, je členění podle jejich účelu využití, Z tohoto pohledu je lze členit do kategorií:

- Běžné zásoby
- Pojistné zásoby
- Zásoby na cestě
- Technologická zásoba
- Spekulativní zásoby
- Mrtvé zásoby

Běžné zásoby (také se jim říká obrátkové) jsou zásoby, které se průběžně vydávají ze skladu podle požadavků výroby. Touto zásobou se kryje období mezi dvěma dodávkami a slouží k pokrytí poptávky. Její hlavní funkcí je zabezpečit plynulost výroby. Čerpání zásob probíhá zcela plynule, nebo často po menších dávkách. Naproti tomu nákupy běžných zásob jsou uskutečňovány periodicky ve větších dávkách. Tyto zásoby dosahují svého minima i maxima. Minima je docíleno před pravidelnou dodávkou a maxima naopak v okamžiku přijetí pravidelné dodávky (Jirsák, 2012).

Pojistné zásoby lze charakterizovat jako pojistku proti neočekávaným výkyvům dodávek, popřípadě čerpání zásob. Využívají se v případech, kdy dodavatel má zpoždění s dodávkou nebo dodá jen část objednaných zásob a při nejhorším dodávku nedodá vůbec. Lze jimi krýt i situace, kdy odběratel neplánovaně navýší svou objednávku mimo stanovenou obvyklou objednávku.

Technologická zásoba je ta část zásob, která je uložena na skladech, ale nelze s ní nakládat k okamžité spotřebě. Důvodem této situace je, že v ní ještě probíhají technologické procesy jako je například zrání, sušení.

Spekulativní zásoby, které podnik pořizuje, umožňují dosáhnout mimořádného zisku a to prostřednictvím vhodného nákupu. Nejsou tedy udržovány pro uspokojování běžné poptávky, ale z jiných důvodů jako je získání množstevních slev či očekávané zvýšení nákupních cen zásob. Specifickou složkou spekulativních zásob jsou sezónní zásoby. Tyto zásoby jsou typické pro určité období a představují akumulované zásoby. Jsou typické například pro potravinářský průmysl.

Poslední složkou zásob členěných z hlediska jejich účelu jsou mrtvé zásoby. Tyto zásoby jsou nežádoucím jevem a není možné je již zpracovat a prodat z důvodu jejich zastaralosti. Může

se jednat o zásoby, které již nejsou poptávány na trhu nebo o zásoby s prošlou lhůtou (Lambert, 2005).

1.2.2 Řízení zásob

Řízení zásob se řadí k důležitým manažerským aktivitám moderního podniku a povinností moderního podniku je udržování zásob na určité úrovni, která vyrovnává časový a množství nesoulad mezi výrobou dodavatele a spotřebou odběratele. Jejím úkolem je předvídání dopadů podnikových strategií na stav zásob a snaha o minimalizaci veškerých nákladů souvisejících s logistickou činností podniku s cílem zvyšování rentability podniku.

Existuje řada důvodů, proč řídit zásoby. Mezi tyto důvody se řadí bezpečnost, Bezpečnost ve smyslu ochrany proti nejistotě vůči dodavatelům. V případě velkého zájmu ze strany zákazníků se bezpečností rozumí pokrytí neočekávané poptávky nebo fyzická ochrana zásob. Dalším důvodem je očekávání poptávky, což se projevuje například zvyšováním poptávky z důvodu sezony a posledním důvodem je odstranění vazby mezi nabídkou a poptávkou, kdy sklady stojí právě mezi těmito dvěma systémy.

Řízení stavu zásob se v podniku běžně provádí na strategické a operativní úrovni. Strategické řízení se zabývá otázkou vázanosti finančních prostředků a jejich výše v zásobách. Operativní řízení se zaměřuje na činnosti, které se týkají řízením konkrétních zásob a snaží se zařídit, aby požadované zásoby byly v konkrétním množství, potřebné struktury a v daném čase na stanoveném místě. Operativní řízení má také za úkol udržovat určitou kvantitativní hladinu zásob tak, aby tato hladina odpovídala požadavkům vnitropodnikových zákazníků.

Do řízení zásob se řadí analýza zásob, její evidence, kontrola a popřípadě vlastní regulace. Evidence zásob je jedna z hlavních činností řízení zásob a jsou v ní zachycovány jevy, které jsou zdrojem informací o změně a stavu zásob na skladu. Analýza zásob prozkoumává, kteří činitelé ovlivňují stav zásob a hodnotí kvalitativní, kvantitativní a strukturální změny stavů zásob. Následující kontrola se snaží zhodnotit dodržování pravidel s nakládáním zásob. Výsledkem použití předchozích činností dochází k vlastní regulaci.

Řízení zásob se neobejde bez finančních prostředků a tím podniku vznikají náklady zásob, které se management podniku snaží minimalizovat. Do celkových nákladů souvisejících s vedením zásob se řadí náklady na přepravu, skladovací náklady, náklady na udržování zásob a náklady na vyřizování objednávek a informační systém. Náklady na udržování zásob lze rozčlenit na náklady kapitálu, náklady na skladovací prostory, náklady na služby a náklady rizika znehodnocení zásob (Emmett, 2008).

Řízení zásob neprobíhá v podnicích vždy správně, proto se může stát, že dojde ke špatnému řízení skladovacích zásob. Špatné řízení zásob je rozpoznáno pomocí následujících příznaků:

- počet objednávek, které se zrušily, se zvyšuje,
- v podniku dochází k opakujícímu nedostatku skladových prostor,
- existuje vysoká kolísavost zákazníků,
- dochází k rostoucímu počtu nevyřízených objednávek a rostou investice vázané v zásobách.

1.3 Modely zásob

Podstatou modelů zásob je nalezení optimální strategie pro řízení zásob. Aby mohla být stanovena optimální strategie, je potřeba určit optimalizační kritéria, pomocí nichž je možné vyjádřit v kvantitativní podobě konkrétní optimalizační cíl. Správně zvolené kritérium bude poté v systému řízení zásob rozhodovat o výši běžné zásoby. Z ekonomického hlediska optimalizace se rozlišují kritéria na nákladově orientovaná, nákladově neorientovaná a smíšená. Cílem nákladově orientované optimalizace je výběr takové strategie, která minimalizuje nákladovou funkci celkových nákladů za určitou časovou jednotku. Použití modelů s nákladovou funkcí je poměrně náročné, jelikož je podmíněno podrobnou analýzou jednotlivých nákladů, tj. nákladů na pořízení, udržení či nedostatku zásob.

Pokud nelze použít pro optimalizaci nákladovou funkci, následuje systém bez nákladové orientace. Jako beznákladové kritérium zde může být dosažení přijatelného rizika vyčerpání zásob. Poslední možností optimalizace je smíšený typ, který zohledňuje náklady a zároveň pro určité prvky systému volí nenákladová měřítka.

Existuje řádově několik desítek různých skladovacích modelů zásob, které lze dělit v mnoha hledisek a zde je jejich výčet.

- Podle způsobu zohlednění vývoje spotřeby v čase.
- Podle stacionární spotřeby.
- Podle spojitosti spotřeby.
- Podle způsobu řešení vyčerpání zásob.
- Podle počtu skladovaných substrátů.
- Podle počtu skladů.
- Podle úplnosti informací a zohlednění náhodných vlivů v modelu.

Z hlediska způsobu zohlednění vývoje spotřeby v čase se dělí modely na statické a dynamické. Statické modely jsou takové, u kterých se bere v potaz pouze jeden dodávkový cyklus a naopak u modelů dynamických se uvažuje o více dodávkových cyklech. Další členění modelů na stacionární a nestacionární je od sebe odlišeno tím, že u stacionárních modelů se veličiny, které charakterizují model v jednotlivých cyklech, nemění a naopak u nestacionárních modelů se tyto veličiny mění. Z hlediska spojitosti spotřeby jsou modely členěny se spojitou spotřebou a s diskretní spotřebou. Podle způsobu řešení vyčerpání zásob se dělí na modely s odkladem a se ztracenými prodeji. Další dělení podle počtu skladovaných substrátů dělí modely na jednoprvkové, kdy je skladován jeden substrát a na víceprvkové, kdy je skladováno více substrátů. Z pohledu počtu skladů jsou, jak už název napovídá, modely děleny na modely s jedním skladem nebo s více sklady. Poslední členění modelů z hlediska zohledňování náhodných vlivů působících na model se dělí modely na stochastické a deterministické.

Důležitou úlohu v modelech zásob hraje charakter poptávky. Poptávka může nabývat dvou typů a to stochastickou poptávku a deterministickou poptávku. Deterministická poptávka je v rámci uvažovaného období předem daná, zatímco stochastická poptávka se vyznačuje neurčitostí a její velikost lze odhadnout pouze s jistou pravděpodobností (Linda, 2004).

Z důvodu velké variability modelů budou v následujících kapitolách probrány pouze některé základní typy modelů, a tedy modely statické, deterministické a stochastické a v praktické části budou aplikovány deterministické a stochastické modely.

1.3.1 Převodní tabulky

Vzhledem k tomu, že při počítání příkladů bude nutné přepočítat rok na jiné jednotky, je potřeba si tyto přepočty stanovit. V následující tabulce č. 1 jsou tři možnosti stanovení jednotlivých jednotek. Pozdější výpočty budou přepočítány podle druhé možnosti, kdy rok má 364 dnů. Tuto možnost jsem si zvolila proto, abych byla dny nejbližší roku, z toho důvodu není přepis na měsíce přesný.

Tabulka 1: Převodní tabulka

Možnost č. 1	1 rok	12 měsíců	48 týdnů	336 dnů
Možnost č. 2	1 rok	12 měsíců	52 týdnů	364 dnů
Možnost č. 3	1 rok	12 měsíců	50 týdnů	350 dnů

Zdroj: Vlastní zpracování

2 DETERMINISTICKÉ MODEL Y ZÁS OB

Deterministické modely jsou historicky prvními pokusy o optimalizaci řízení. Ve své původní verzi se již v dnešní době moc nevyužívají, ale je možné se s nimi setkat v řadě modifikací. Jsou charakterizovány úplnou ovladatelností a úplnou informovaností. Jak už bylo v předchozí kapitole uvedeno, deterministický model předpokládá, že poptávka je předem určena. Dále Vaněček (2003) ještě dodává, že včetně dodávky je předem známá i dodací lhůta, spotřeba a momenty dodávek.

Tyto modely lze buď používat samostatně, nebo kombinovaně se stochastickými modely, popřípadě jako náhrada stochastického modelu.

Tento typ modelů vychází z následujících předpokladů:

- zásoby jsou doplňovány v jednom čase,
- čerpání zásob je rovnoměrné, jelikož poptávka je konstantní,
- pořizovací lhůta, velikost dodávek jsou konstantní.

Existuje řada různých typů deterministických modelů zásob, v této práci budou probrány jen některé typy (Jablonský, 2007).

2.1 Model Optimální velikost objednávky

Tento model je také nazýván jako Model se spojitou spotřebou a je založen na předpokladu, že čerpání zásob ze skladu je rovnoměrné, čas dodávky je možné, jakkoliv měnit, dodací lhůta je konstantní a poptávka je dopředu známá a konstantní. K doplňování skladu dochází v okamžiku jeho vyčerpání a není tedy připuštěn možný vznik nedostatku zásoby. Dodávka na sklad je realizovaná najednou a její velikost je konstantní. Funguje zde více dodávkových cyklů.

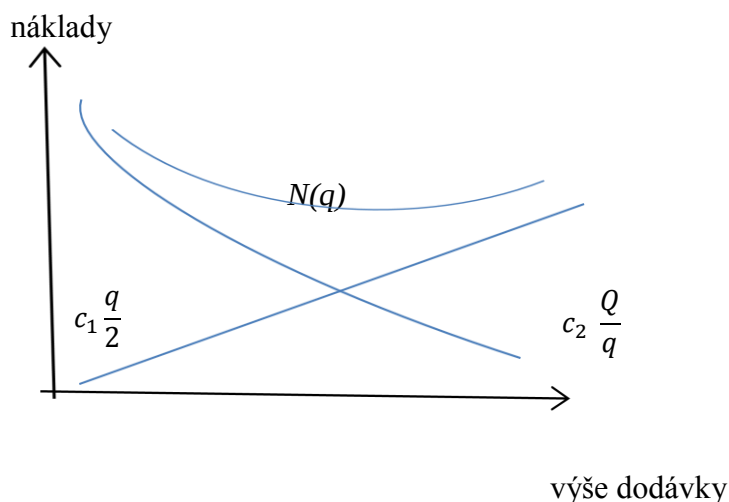
Cílem modelu je nalézt optimální velikost dodávky, kterou budeme označovat q^* , která minimalizuje celkové náklady, které lze vyjádřit rovnicí

$$N(q) = c_1 \frac{q}{2} + c_2 \frac{Q}{q} \quad (1)$$

kde $N(q)$ je označení pro celkové náklady, první součin $c_1 \frac{q}{2}$ označuje skladovací náklady za časovou jednotku a druhý součin $c_2 \frac{Q}{q}$ vyjadřuje náklady na dodávku za časovou jednotku.

Zlomek $\frac{q}{2}$ vyjadřuje průměrnou velikost zásob a zlomek $\frac{Q}{q}$ je počet dodávkových cyklů,

kdy dodávkový cyklus je čas, který uplyne mezi dvěma po sobě jdoucími dodávkami. Výraz c_1 jsou jednotkové skladovací náklady za rok, c_2 jsou pořizovací náklady na jednu dodávku, q označuje velikost jedné dodávky a Q je velikost poptávky za rok.



Obrázek 2: Grafické znázornění nákladové funkce

Zdroj: Překresleno od (Jablonský, 2007)

Položí-li se první derivace $N(q)$ podle q rovnu nule: $\frac{dN}{dq} = \frac{c_1}{2} = \frac{c_2 q}{q^2} = 0$, poté lze na základě tohoto vztahu získat optimální velikost dodávky q^* .

$$q^* = \sqrt{\frac{2 Q c_2}{c_1}}. \quad (2)$$

Jelikož $\frac{d^2 N}{dq^2} = \frac{2 c_2}{q^3} > 0$ je proto q^* optimální velikost dodávky a $N^* = N(q^*)$ minimum funkce. Následným dosazením optimální velikosti dodávky q^* do nákladové funkce $N(q)$ lze dostat po úpravě minimální hodnotu (optimální hodnotu) celkových nákladů.

Minimální hodnota nákladů je ilustrována

$$N^* = \sqrt{2 Q c_1 c_2} \quad (3)$$

Optimální délka dodávkového cyklu, která bude značena t^* , se vypočte

$$t^* = \frac{q^*}{Q} = \sqrt{\frac{2 c_2}{Q c_1}}. \quad (4)$$

Za zmínku v tomto modelu stojí i bod znovuobjednávky r^* , který udává při jakém množství jednotek na skladu je potřeba vystavit objednávku tak, aby k doplnění skladu došlo

v požadovaném čase. Pro výpočet tohoto bodu je potřeba znát pořizovací lhůta dodávky (d), optimální výši dodávky (q^*) a očekávanou poptávku, kterou lze vyjádřit jako pořizovací lhůtou násobenou celkovou poptávkou (Qd). Poté lze bod znovuobjednávky vyjádřit jako zbytek po dělení očekávané poptávky Qd hodnotou q^* .

2.2 Model množstevní rabaty

Tento model předpokládá, že dodavatel nabízí v několika úrovních množstevní slevu pro odběratele. Pokud tedy odběratel objedná určité množství, které přesahuje stanovenou mez, bude mu účtována nižší nákupní cena a tím se také sníží jednotkové skladovací náklady. Nákladová funkce je tedy pouze upravena oproti modelu Optimální velikost objednávky o nákupní cenu, protože ta se pro různé úrovně objednávek může lišit (Jablonský, 2007).

2.3 Model bez povoleného přechodného nedostatku zásoby

V tomto modelu je poptávka v čase konstantní a čerpání zásob probíhá rovnoměrně. Zásoba je doplňována právě v okamžiku, kdy je zcela vyčerpána. Není zde připuštěno nedostatek zásoby. V kritériální funkci se pracuje pouze s pořizovacími a skladovacími náklady. Prostřednictvím tohoto modelu se určí výše dodávky, při které bude funkce celkových nákladů na svém minimu (Gros, 2009).

Celkové náklady za určitou dobu T se vypočítají na základě vztahu $N(q) = \frac{Q}{q} (c_1 \int_0^t D(x)dx + c_2)$, kde $N(q)$ jsou celkové náklady, Q je celková potřeba zásob za délku sledovaného období T , q je konstantní velikost dodávky, c_1 jsou skladovací náklady jedné jednotky zásob za dobu T a c_2 jsou fixní pořizovací náklady jedné dodávky. Po úpravách a dosazení za t dostaneme

$$N(q) = c_1 \frac{q}{2} T + c_2 \frac{Q}{q}. \quad (5)$$

Obdobně získáme optimální velikost dodávky q_{opt} . Nákladová funkce se derivuje podle proměnné q a první derivace se položí rovna 0 a poté

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{2c_2 Q}{c_1 T}}. \quad (6)$$

Optimální délka dodávkového cyklu t_{opt} se vyjádří jako

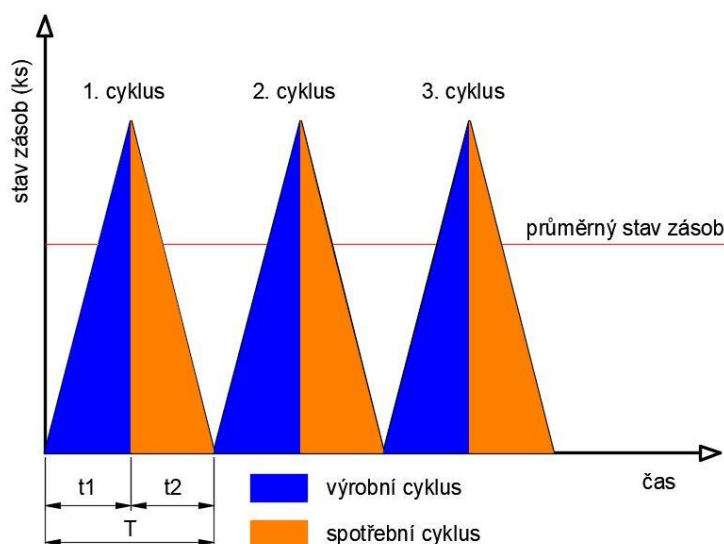
$$t_{opt} = \frac{q T}{Q} = \sqrt{\frac{2c_2 T}{c_1 Q}}. \quad (7)$$

2.4 Produkční model

Produkční model, též jej lze označit jako Model s konečnou intenzitou dodávky, vychází ze stejných předpokladů jako předcházející model, ale s tím rozdílem, že doplnění skladu není jednorázové, dodávka tedy nepřichází do skladu v jednom okamžiku.

Dodávkový cyklus se v tomto modelu člení do dvou intervalů. Prvním intervalem, který se nazývá výrobní (označen t_1), se doplňuje rovnoměrně sklad a v čase dochází k jeho čerpání. Ve druhém intervalu, který se označuje jako spotřební (označen t_2), se jenom čerpá zásoba ze skladu a po jejím vyčerpání začíná nová výrobní dávka. Takto se celý cyklus opakuje stále dokola.

Cílem modelu je stanovení objemu výrobní dávky q a intervalů mezi dvěma po sobě jdoucími dávkami tak, aby byla uspokojena roční poptávka Q s důrazem na minimalizování celkových nákladů. Celkové náklady se v tomto modelu skládají ze dvou složek, tj. z variabilních nákladů a fixních nákladů na jednu výrobní dávku.



Obrázek 3: Výrobní a spotřební cyklus

Zdroj: Překresleno od (Jablonský, 2007)

Optimální výši nákladů v tomto modelu lze zapsat jako

$$N^* = \sqrt{\frac{p-h}{p}} \sqrt{2Qc_1c_2} , \quad (8)$$

kde c_1 označuje skladovací náklady a c_2 fixní náklady za rok. Symbolem h je označena poptávka po vyprodukovaných jednotkách za 1 den a symbolem p je označena intenzita produkce. Celková poptávka je označena Q a objem jedné výrobní dávky je q .

Optimální objem výrobní dávky se pak vypočítá

$$q^* = \sqrt{\frac{2Qc_2}{c_1}} \sqrt{\frac{p}{p-h}}. \quad (9)$$

Optimální délka cyklu mezi dvěma výrobní dodávkami t^* se vypočítá podílem q^* a Q .

Posledními body, kterými se zabývá tento model je lhůta potřebná pro přípravu nové výrobní dávky (označená symbolem d) a stav skladu (označen symbolem r^*).

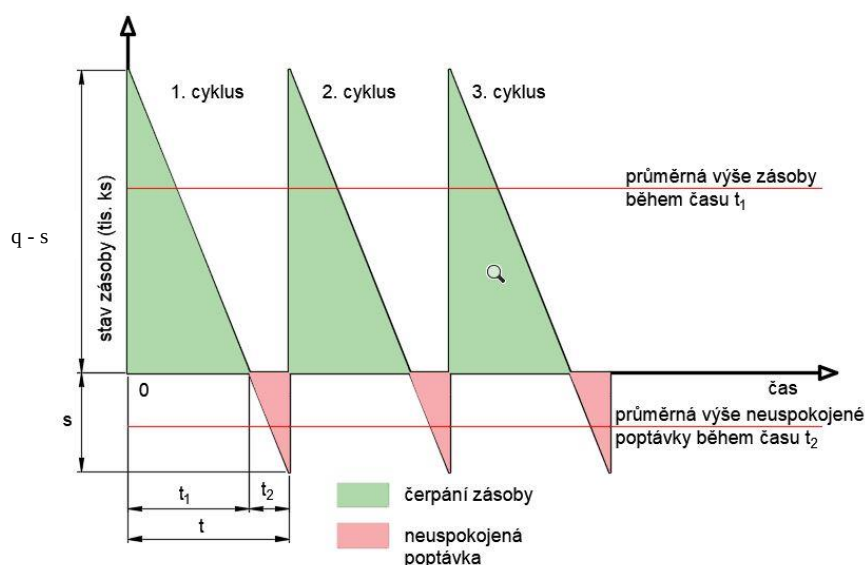
Pokud je $d \leq t_2$, poté $r^* = Qd$, tj. bod, ve kterém je potřeba začít s přípravou nové dávky spadá do spotřebního cyklu. Naopak pokud je $d > t_2$, r^* se poté vypočítá jako $(t^* - d) \cdot (p \cdot h)$ a bod, ve kterém je potřeba začít s novou dávkou tedy spadá do výrobního cyklu (Jablonský, 2007).

2.5 Model – přechodné neuspokojení poptávky

Tento model se též v literatuře označuje jako Model s deficitem a odloženou spotřebou (Linda, 2004).

Jelikož deterministické modely obecně splňují podmínku ovladatelnosti, tzv. že čas dodávky lze naplánovat tak, že deficit bude vyloučen, je tento model vlastně uměle vytvořen proto, aby sloužil jako zjednodušená náhrada stochastických modelů. Proto je deficit v tomto modelu chápán jako pojistná zásoba, kterou je potřeba držet, aby bylo zabráněno vzniku deficitu.

Tento model se oproti Modelu – optimální velikost objednávky liší tedy pouze v tom, že připouští přechodný nedostatek zásoby na skladu. Z toho důvodu se dodávkový cyklus rozpadá na dva intervaly. V prvním intervalu, jehož délka je označena t_1 , je zásoba na skladě a postupně dochází k jejímu vyčerpání. V druhém intervalu, jehož délka je označena t_2 , není zásoba na skladě a není možné uspokojit požadavky na čerpání zásoby. Celková délka dodávkového cyklu t je potom součtem $t_1 + t_2$. Neuspokojená poptávka, označená symbolem s , bude uspokojena ihned po příchodu nejbližší dodávky na sklad. Z celkového objemu dodávky q jednotek, bude použito s jednotek na uspokojení požadavků a zbytek ve výši $(q - s)$ bude umístěn na sklad. Proces dodávkových cyklů a přechodné neuspokojení poptávky je znázorněn na následujícím obrázku č. 4.



Obrázek 4: Dodávkové cykly Modelu přechodné neuspokojení poptávky

Zdroj: Překresleno od (Jablonský, 2007)

Nákladová funkce má následující podobu:

$$N(q,s) = (c_1 \frac{q-s}{2} t_1 + c_2 + c_3 \frac{s}{2} t_2) \frac{Q}{q}, \quad (10)$$

kde c_1 jsou jednotkové skladovací náklady, q je velikost jedné dodávky, s vyjadřuje dříve zmiňovanou neuspokojenou poptávku, t_1 je první dodávkový cyklus a rovná se $\frac{q-s}{Q}$, c_2 jsou pořizovací nebo-li fixní náklady na dodávku, c_3 jsou jednotkové náklady deficitu, t_2 je druhý dodávkový cyklus (doba po kterou není zásoba k dispozici) a rovná se $\frac{s}{Q}$, Q je výše celkové poptávky.

Optimální výši dodávky q^* a výši neuspokojené poptávky s^* lze vyjádřit:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Qc_2}{c_1}} \sqrt{\frac{c_1+c_3}{c_3}}, \quad s^* = q^* \frac{c_1}{c_1+c_3}, \quad (11)$$

a rozdílem těchto veličin ($q^* - s^*$) se vypočítá maximální výše zásoby na skladu.

Bod znovuobjednání se vypočte:

$$r^* = \frac{Qd}{q^*} - s^*, \quad (12)$$

kde d je pořizovací lhůta dodávky.

Vztah pro optimální výši nákladů N^* a pro délku dodávkového cyklu t^* se vyjádří:

$$N^* = \sqrt{2Qc_1c_2} \sqrt{\frac{c_3}{c_1+c_3}}, \quad t^* = \frac{q^*}{Q}, \quad (13)$$

Přičemž zlomek $\frac{c_3}{c_1+c_3}$ vyjadřuje pravděpodobnost uspokojení poptávky a je označen symbolem α . Pravděpodobnost, že požadavek bude muset na uspokojení čekat je označen symbolem β a vypočte se jako rozdíl $1 - \alpha$.

3 STOCHASTICKÉ MODELÝ ZÁSOb

Hlavním úkolem těchto modelů je oproti deterministickým modelům, kde bylo cílem určit velikost provozní zásoby, stanovení pojistné zásoby, která bude s určitou pravděpodobností zaručovat minimum očekávaných celkových nákladů. Stochastický systém se tak snaží zprostředkovat odpovědi na základní a důležité otázky týkající se skladování zásob, tj. otázky typu kolik, kdy objednat a jak velkou pojistnou zásobu mít na skladu.

Pro tyto modely je typické, že se v nich vyskytují veličiny, které jsou náhodně proměnné s jistým pravděpodobnostním rozdělením a z tohoto důvodu jsou v podnikové sféře v dlouhém období více využívané než předchozí modely (Hillier, 2001). Nejčastěji používaná teoretická rozdělení jsou exponenciální, normální, rovnoměrné a Poissonovo rozdělení.

V praxi jsou rozlišovány dva zdroje náhodných vlivů, jedná se o náhodné výkyvy v poptávce a náhodné výkyvy ve službách, které poskytují dodavatelé. První kategorie výkyvů je dána prudkou povahou tržního prostředí, druhá spočívá ve výkyvech termínů vyřízení objednávek. Důsledkem druhém kategorie je pak neplnění objednávek, následné krátkodobé ztráty tržeb zisku a v delším období ztráta zákazníků.

3.1 Proměnné veličiny

Jak už bylo v úvodu poznamenáno, v těchto modelech se objevují náhodně proměnné veličiny, které se označují jako neřiditelné proměnné. Naopak veličiny, u kterých lze dopředu určit požadavky se nazývají řiditelné proměnné.

3.1.1 Neřiditelné proměnné

Charakter neřiditelných proměnných patří mezi hlavní kritéria pro klasifikaci stochastických modelů. Mezi tyto proměnné se řadí velikost poptávky a pořizovací lhůta zásob. Velikost poptávky nelze přímo, ani nepřímo ovlivňovat a velikost poptávky v jednotlivých intervalech není tedy známá. Stochastické systémy tuto informaci nahrazují pravděpodobnostním rozdělením, popřípadě prostřednictvím empirického rozložení, které vychází z pozorování.

Poptávka je ve stochastických modelech rozdělena na dynamickou a statickou. Statická poptávka není ovlivněna sezonními ani jinými vlivy. Dá se o ní říci, že je tedy konstantní. Oproti tomu dynamická poptávka zahrnuje vlivy, které ji ovlivňují. Její velikost není konstantní a nedá se do budoucna predikovat její rozsah. Její rozsah je nahrazen

pravděpodobnostním rozdělením a ne vždy lze na tento typ úloh praktikovat analytické metody.

Druhá náhodná veličina, pořizovací lhůta, je charakterizována jako doba, která uběhne mezi vznikem objednávky a uskladněním zásob. Pořizovací lhůta je v mnoha případech zanedbatelně malá a není ji třeba brát v úvahu.

3.1.2 Řiditelné proměnné

Řiditelné proměnné jsou termín vyžádání zdrojů na sklad a objem zdrojů požadovaných na sklad. Objem zdrojů určený na sklad je možné řídit dvěma způsoby. Prvním způsobem se zásoby doplňují na sklad ve stejné velikosti. Druhá možnost je, že jsou zdroje doplňovány na sklad v různém objemu. Další veličina, kterou je třeba při stochastických systémech určit, termín vyžádání, což je intenzita s jakou se zásoby dostávají do skladovacích prostor. Existuje pevně daná frekvence a proměnná frekvence dodávek (Gros, 2009).

3.2 Klasifikace stochastických modelů

Stochastické modely se dělí podle více hledisek a v následujících podkapitolách budou rozebrány:

- model – signalizace změn a odložená spotřeba,
- model – signalizace změn a ztracené prodeje,
- model – stochastická spojitá poptávka,
- model – náhodná a proměnlivá spotřeba v čase.

V praktické části budou poté použity jen některé stochastické modely, které bude možné aplikovat na konkrétní příklady řízení zásob ve vybraném podniku.

3.3 Model – signalizace změn a odložená spotřeba

Obecně jsou všechny modely se signalizací změn založeny na principu, že každá změna stavu zásob je v podniku zaznamenávána a v případě, že stav zásob spadne na určitou hladinu, zadává se nová objednávka.

Předpoklady modelu jsou:

- velikost dodávky m je neměnná v jednotlivých cyklech,
- zásoby na cestě nemohou překračovat jednu dodávku a je připuštěn deficit s doloženou spotřebou,

- dodávka může nabývat jakýchkoliv velikostí a je realizována celá najednou,
- spotřeba $S(t)$ je náhodná a spojitá se střední hodnotou b jednotek za časovou jednotku,
- dodací lhůta L není pravidelná a model je stacionární,
- deficit lze nahradit z jedné dodávky.

Průměrné množství $\bar{m}$ zásob na skladě se určí jako aritmetický průměr střední hodnoty zásob na začátku a konci dodávkového cyklu. Přičemž střední stav zásob na začátku cyklu se rovná střednímu zbytku zásob $E(h - S(L))$, kde $S(L)$ vyjadřuje spotřebu během dodací lhůty L a dodaného množství m . Stav zásob na konci cyklu je $E(h - S(L))$, kde h znamená hladina objednání. Konečný tvar průměrného množství zásob $\bar{m}$ lze po úpravách vyjádřit:

$$\bar{m} = \frac{m+2h-2ES(L)}{2}, \quad (14)$$

kde $ES(L)$ vyjadřuje střední spotřebu během dodací lhůty L a rovná se $\int_0^\infty s f_s(s, L) ds$.

Pro celkové náklady na skladování za časovou jednotku poté platí vztah:

$$c_1 \bar{m} = c_1 \frac{m+2h-2ES(L)}{2}. \quad (15)$$

Celkové náklady deficitu jsou vyjádřeny:

$$c_3 E(U) n = c_3 E(U) \frac{b}{m}, \quad (16)$$

kde $E(U) = \int_h^\infty (s - h) f_s(s, L) ds = \int_h^\infty s f_s(s, L) ds - h F_s^*(h, L)$ a $F_s^*(h, L)$ vyjadřuje doplňkovou distribuční funkci spotřeby S během dodací lhůty L . C_3 jsou náklady deficitu, m je velikost dodávky, b vyjadřuje intenzitu spotřeby zásob a n počet dodávek za časovou jednotku.

Funkci nákladu lze pak zapsat:

$$H(m, h) = c_2 \frac{b}{m} + c_1 \frac{m+2h-2ES(L)}{2} + c_3 E(U) \frac{b}{m}. \quad (17)$$

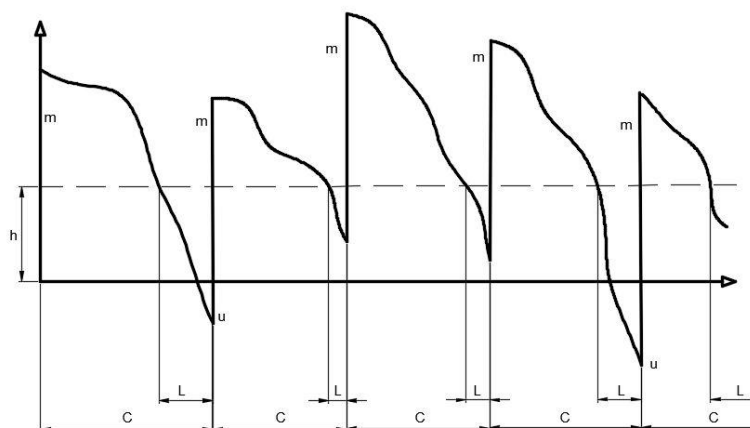
Optimální hodnoty m_0 a h_0 se naleznou pomocí prvních derivací funkce nákladů, které se položí rovny nule. Následně z této soustavy rovnic není možné určit explicitní řešení a je nutné ji upravit na tvar:

$$m = \sqrt{\frac{2b(c_2 + c_3 EU)}{c_1}}, \quad (18)$$

$$F_s^*(h, L) = \frac{c_1 m}{c_3 b}, \quad (19)$$

a řeší se iteračním algoritmem, který se používá tak dlouho, dokud se poslední dvojice hodnot m_{i-1} , m_i , h_{i-1} a h_i neliší od sebe o méně než námi zvolená hodnota. Algoritmus je popsán následujícím postupem:

- $E(U)$ se položí rovno 0 a z (15) se vypočte m_1 a pomocí m_1 se vypočte z (16) h_1 .
- Pomocí h_1 se vypočte z (15) m_2 a pomocí m_2 se vypočte z (16) h_2 .
- Pomocí h_{i-1} se vypočte z (15) m_i a pomocí m_i se z (16) vypočte h_i , kdy $i = 3, 4, 5, \dots$

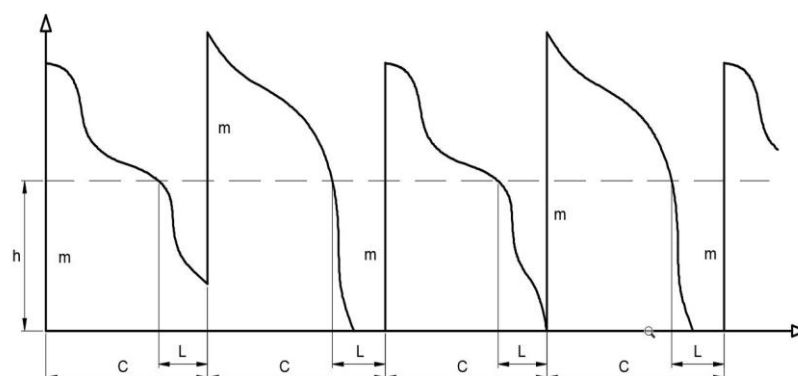


Obrázek 5: Grafické znázornění průběhu Modelu se signalizací změn a odloženou spotřebou

Zdroj: Překresleno od (Linda, 2004)

3.4 Model - signalizace změn a ztracené prodeje

Tento model je založen na stejných předpokladech jako Model se signalizací změn a odloženou spotřebou kromě jednoho rozdílu a to, že deficit není nahrazen z následujících dodávek. Firma deficit nenahrazuje vůbec nebo jej nahrazuje z jiných zdrojů.



Obrázek 6: Grafické znázornění průběhu Modelu se signalizací změn a ztracenými prodeji

Zdroj: Překresleno od (Linda, 2004)

Průměrný stav zásob lze vyjádřit:

$$\bar{m} = \frac{m+h-ES(L)+EU+h-ES(L)+EU}{2}, \quad (20)$$

kde $ES(L)$ a EU jsou již definovány v Modelu se signalizací změn a odloženou spotřebou.

Funkce nákladů má tvar:

$$H(m, h) = c_2 \frac{b}{m} + c_1 \frac{m+2h-2ES(L)+2EU}{2} + c_3 E(U) \frac{b}{m}. \quad (21)$$

Následně po derivování funkce nákladů a po úpravě soustavy rovnic lze vyjádřit:

$$m = \sqrt{\frac{2b [c_2 + c_3 EU]}{c_1}}, \quad (22)$$

$$F_s^*(h, L) = \frac{c_1 m}{c_3 b + c_1 m}, \quad (23)$$

a poté se pro určení optimální velikosti dodávky a optimální hladiny objednání stejným způsobem jako v Modelu s odloženou spotřebou, tj. použije se stejný iterační algoritmu.

Pro speciální rozdělení spotřeby $S(L)$ lze obecné vzorce upravit, dle tabulky č. 2.

Tabulka 2: Vzorce pro speciální rozdělení spotřeby $S(L)$

Rozdělení spotřeby	Distribuční funkce spotřeby	Střední hodnota deficitu
$S(L) \square N(\mu, \sigma^2)$	$\Phi(s) \dots$ v tabulkách	$EU = \sigma \cdot \gamma\left(\frac{h-\mu}{\sigma}\right) + (\mu-h) \cdot (1 - \Phi\left(\frac{h-\mu}{\sigma}\right))$
$S(L) \square R_o(a, b)$	$F_s = \begin{cases} 0 & s < a \\ \frac{s-a}{b-a} & s \in \langle a, b \rangle \\ 1 & s > b \end{cases}$	$EU = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{1}{2} (b^2 - h^2) - h(b-h) \right)$
$S(L) \square Exp(\mu)$	$F_s = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 1 - e^{-\mu h} & s \geq 0 \end{cases}$	$EU = \frac{1}{\mu} \cdot e^{\mu h}$

Zdroj: Vlastní zpracování dle přednášek z předmětu Operační management

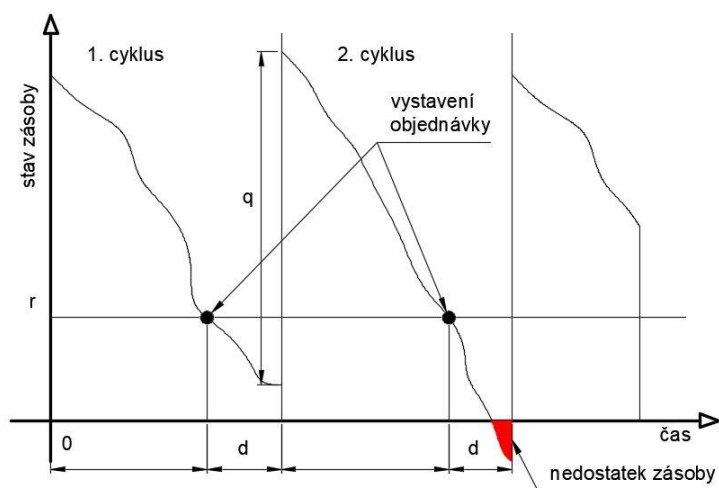
3.5 Model – stochastická spojitá poptávka

U tohoto modelu se uvažuje se stejnými předpoklady jako u dříve zmiňovaného deterministického modelu, modelu optimální velikost objednávky, pouze s rozdílem,

že poptávka je stochastická. Poptávka je v daném časovém období náhodná veličina s určitým pravděpodobnostním rozdělením.

Dalším předpokladem u tohoto modelu je, že objednávka je vystavována v okamžiku, kdy zásoba na skladě poklesne na stanovenou mez (bod znovuobjednání) r a v jistých časových intervalech je možné určit, jaké množství zásoby je na skladě. Pořizovací lhůta d je konstantní, nezávislá na čase.

V případě poptávky může v tomto modelu dojít ke dvěma situacím. V první situaci poptávka je během pořizovací lhůty dodávky nižší než bod znovuobjednání, tj. nedochází k přechodnému nedostatku zásob v dodávkovém cyklu (viz 1. cyklus na obrázku č. 4). V druhém případě je poptávka během pořizovací lhůty dodávky vyšší než bod znovuobjednání, tj. vzniká během dodací lhůty nedostatek zásob (viz 2. cyklus na obrázku č. 4).



Obrázek 7: Průběh modelu při stochastické poptávce

Zdroj: Překresleno od (Jablonský, 2007)

Při stochastické poptávce je potřeba znát charakter poptávky, který je určen příslušným pravděpodobnostním rozdělením, střední hodnotou a směrodatnou odchylkou. Poptávka během pořizovací lhůty má zpravidla normální rozdělení. Střední hodnota a směrodatná odchylka vyjadřují průměrnou hodnotu poptávky a její odchylku za celé sledované období. Pro potřeby stochastického modelu bude označena střední hodnota poptávky v daném období jako μ_Q , směrodatná odchylka bude mít označení σ_Q .

Ze vztahu $\mu_Q = \mu_d$ a $\sigma_Q = \sigma_d$, potom vyplývá, že střední hodnota poptávky se rovná střední hodnotě poptávky během pořizovací lhůty d a směrodatná odchylka poptávky se rovná směrodatné odchylce poptávky během pořizovací lhůty d .

Vypočet základních parametrů jako je optimální výše objednávky q_{opt} a délka dodávkového cyklu, se vypočítá na základě vztahu vysvětlených u deterministického modelu, tj. modelu bez povoleného předchozího nedostatku zásob, který byl vysvětlen v dřívější kapitole. S výjimkou toho, že se místo deterministické poptávky použije v příslušných vztazích střední hodnota poptávky μ_Q .

Jestliže se zásoba dostane na úroveň znovuobjednávky r a díky normálnímu rozdělení pravděpodobnosti mohou nastat již dříve zmiňované výchozí dvě situace s pravděpodobnostmi 0,5 zobrazené na obrázku č. 4. Tak v souvislosti s touto situací vstupuje do hry úroveň obsluhy γ , která vyjadřuje pravděpodobnost, že v rámci jednoho cyklu nedojde k neuspokojení zásoby.

Úroveň obsluhy se dá zvýšit tím, že se vystaví objednávka v okamžiku, kdy se zásoba snížila na úroveň vyšší než je optimální stanovená mez r_{opt} . Pak bude platit vztah

$$r_\gamma = r_{opt} + w, \quad (24)$$

kde r_γ je stanovené úroveň obsluhy a w představuje pojistnou zásobu.

„V této souvislosti je však dobré uvědomit si, že vyšší pojistná zásoba vede sice k vyšší úrovni obsluhy, ale za cenu vyšších skladovacích nákladů.“ [7, str. 229 -230]

Střední hodnota pořizovacích a skladovacích nákladů se vyjádří jako

$$\mu_N = \sqrt{2\mu_Q c_1 c_2} + c_1 w. \quad (25)$$

Poslední bod, který je třeba definovat je určení podmínky pro vytvoření pojistné zásoby. Před tímto bodem je potřeba charakterizovat některé vztahy jako $P(Q_d \leq r_{opt} + w) \geq \gamma$. Tato rovnice vyjadřuje pravděpodobnost, že skutečná poptávka bude nižší než úroveň znovuobjednávky s tím, že pojistná zásoba by měla být vyšší než úroveň obsluhy.

Dále je potřeba transformovat náhodnou veličinu Q_d , která má rozdělení $N(\mu_d, \sigma_d) = N(r_{opt}, \sigma_d)$, na náhodnou veličinu, označenou písmenem z s rozdělením $N(0,1)$. Tuto transformaci je potřeba provést, protože jsou známy pouze hodnoty distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$. Transformace bude provedena podle vztahu

$$z = \frac{Q_d - r_{opt}}{\sigma_d}. \quad (26)$$

Poté se určí jaká hodnota z_γ odpovídá úrovni obsluhy γ a tato hodnota se dosadí do předchozího vzorce a tím se vypočte objem poptávky během pořizovací lhůty dodávky, tedy

$$Q_{d_{opt}} = z_{\gamma} \sigma_d + r_{opt} . \quad (27)$$

Dále je potřeba pojistnou zásobu vytvořit tak, aby platil vztah $r_{opt} + w \geq Q_{d_{opt}}$. [7] Následným sloučením předchozích dvou rovnic se dostane podmínka pro vytvoření pojistné zásoby

$$w \geq z_{\gamma} \sigma_d . \quad (28)$$

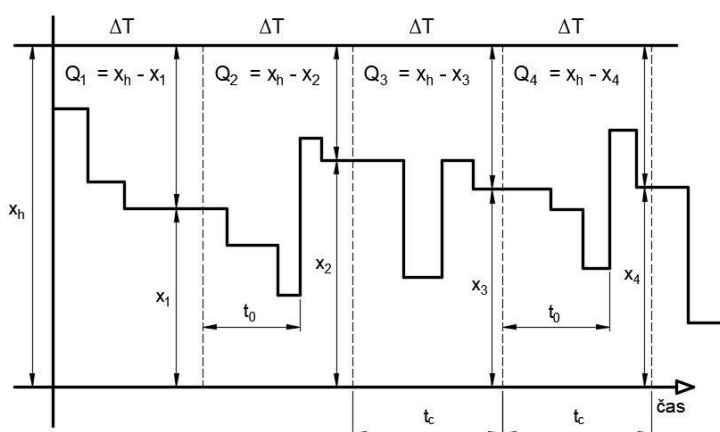
3.6 Model – náhodná a proměnlivá spotřeba v čase

Vedle náhodných změn poptávky je při řízení zásob potřeba také respektovat fakt, že spotřeba vytvořené zásoby probíhá v čase nerovnoměrně. Jednotlivé druhy zásob jsou vyskladňovány po určitých jednorázových dávkách a pouze pokud výroba probíhá nepřetržitě, lze pokles zásob vyjádřit přímkou. Pro nekontinuální spotřebu je potřeba nahrazovat jednorázová rozhodnutí posloupností rozhodovacích činností v čase, pomocí nichž bude možné korigovat předcházející chybná rozhodnutí na základně měnící se situace.

I v tomto modelu je třeba odpovědět na otázky v jakém množství a kdy zásoby doplňovat. Tyto otázky lze zodpovědět dvěma systémy, které reprezentují tento model – P-systém a Q-systém (Gros, 2009).

3.6.1 P-systém, Q- systém

P-systém je založen na tvrzení, že objednávka je uskutečňována ve stejných časových momentech s různým množstvím objednání podle $Q = x - x_h$, kde x_i znamená stav zásob v okamžiku objednání.



Obrázek 8: Zobrazení P-systému

Zdroj: Překresleno od (Gros, 2009)

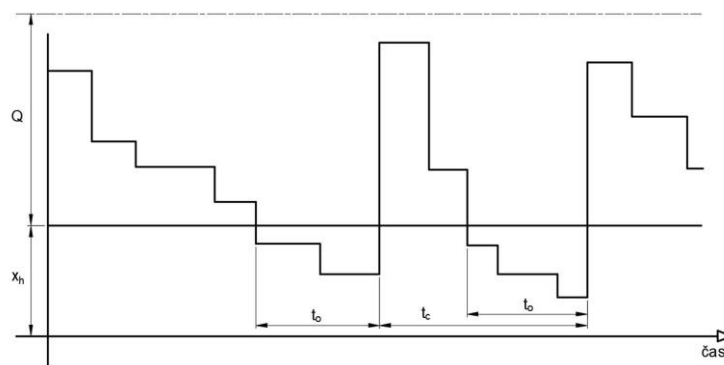
Na obrázku č. 5 lze vidět číselnou osu, která je rozdělena na intervaly o velikosti o stejné šířce ΔT , např. měsíc a každý vybraný den v týdnu, kdy např. každý čtvrtek se zjistí skutečný stav zásob x na skladě a objedná se množství $Q = x_h - x$. x_h značí horní objednáací mez, která je rovna $x_h = x_p + (t_0 + t_c)$, kde x_p je pojistná zásoba a t_0 , t_c jsou termíny vyřízení objednávky, které označujeme je jako interval nejistoty. Interval nejistoty je u tohoto systému poměrně dlouhý, a jestliže je pro něj potřeba vytvořit dostatečnou zásobu, je tento interval roven součtu průměrného termínu vyřízení objednávky a průměrného dodacího cyklu.

Průměrná velikost objednávky a počet objednávek se vypočte

$$\bar{Q}_{opt} = \sqrt{\frac{Sn_j}{Tcn_s}} \text{ a } o_{opt} = \frac{T}{t_c}, \quad (29)$$

kde S je očekávaná spotřeba položek, T je období délky spotřeby, c je očekávaná cena položky, n_s jsou náklady na udržování zásob a n_j jsou jednorázové náklady na jednu objednávku. Pokud se $\bar{Q}_{opt}$ položí rovno $(t_0 + t_c)\bar{s}$ a náklady se vymezí pouze jako funkce pojistné zásoby $N(x_p) = x_p cn_s T + o_{opt} n_z \int_{x_p + \bar{Q}}^{\infty} f^{(t_0 + t_c)}(s) ds$. Následně se položí derivace podle x_p rovnu nule a následně z této rovnice plyne, že $f^{(t_0 + t_c)}(x_p + \bar{Q}) = \frac{Tcn_s}{n_z o_{opt}}$ a tento vztah se upraví na $\varphi(k) = \frac{Tcn_s}{n_z o_{opt}} \sigma_s$, tak po následném dosazení známých veličin se najde hodnota k v tabulkách pro hustotu pravděpodobnosti normované proměnné normálního rozdělení a z této zjištěné hodnoty se vypočte pojistná zásoba a horní objednáací úroveň (Gros, 2009).

Q-systém je označen symbolem Q z důvodu, že většinou je zásoba doplňována konstantními velikostmi objednávek velikosti Q a je charakterizován tím, že zásoby jsou vždy objednány v různých časových okamžicích. Tato vlastnost je i ilustrována na obrázku č. 6, kde lze vidět, že osa y představuje nějakou spodní mez x_s , tj. signální stav zásob neboli spodní objednáací úroveň. Jestliže poklesne skutečný stav pod tuto objednáací úroveň, značí signál pro doplnění zboží.



Obrázek 9: Zobrazen Q-systému

Zdroj: Překresleno od (Gros, 2009)

Označení t_0 je stejný jako u předchozího P- systému, označuje interval nejistoty, tj. termíny vyřízení objednávek, v nichž může dojít k předčasnému vyčerpání zásob. Aby k takové situaci nedošlo, je potřeba aby signální stav zásob pokryl poptávku t_0 i případné náhodné výkyvy poptávky. K tomu je potřeba určit rozdělení pravděpodobností $f(s)$ náhodné poptávky s jednotek po dobu t_0 , její střední hodnotu a směrodatnou odchylku. Nejčastěji využívaným zdroje pro odhad pravděpodobnosti jsou údaje o průběhu poptávky s_i za období T a z ní lze poté určit požadované hodnoty, tj. střední hodnotu a směrodatnou odchylku.

$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i s'_i}{n} \quad a \quad \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (s'_i - \bar{s})^2 n_i / n}, \quad (30)$$

kde n jsou četnosti hodnot v jednotlivých intervalech a s'_i jsou středy intervalů.

K vyhnutí náhodných výkyvů je nutné ještě určit potřebnou pojistnou zásobu x_p . Nejdříve je potřeba zjistit, jestli náhodná poptávka vyhovuje normálnímu rozdělení pravděpodobnosti. Aby mohl být proveden tento krok, je zapotřebí vyrovnat empirické rozdělení pravděpodobnosti, které bylo získáno analýzou poptávky za uplynulé období. Postup jednotlivých kroků je následující:

- výpočet normované proměnné normálního rozdělení pro horní hranici intervalů podle vzorce $u_i = \frac{s_i^{(H)} - \bar{s}}{\sigma_s}$,
- nalezení hodnoty distribuční funkce normálního rozdělení $F(u_i)$, výpočet difference $\Delta_i = F_{i+1}(u_{i+1}) - F(u_i)$,
- výpočet teoretické četnosti $n_i^{(T)} = n\Delta_i$,

- výpočet hodnoty rozdělení $\chi^2 = \sum_{i=1}^c \frac{n_i^2}{n_i^{(T)}} - n$ (tento vzorec je podmíněn rovností součtu teoretických a empirických četností),
- nalezení pro zvolenou hladinu významnosti příslušný kvantil q , ve statistických tabulkách kvantilů.

Pokud tedy lze určit i typ rozdělení pravděpodobností poptávky, je možné získat sumu nákladů spojených s pořízením, skladováním a možnými ztrátami nedostatku zásob na skladě jako funkci pojistné zásoby a průměrného dodacího cyklu. Pro formulování účelové funkce je potřeba přijmout následující zjednodušení:

- pořizovací náklady se formulují vztahem $N_1 = T n_j / \bar{t}_c$,
- náklady na udržování pojistné zásoby se zapisují $N_2 = n_s c x_p T$,
- náklady na udržování běžné zásoby podle vzorce $N_3 = 0,5 n_s c \bar{t}_c S$,
- ztráty z nedostatku zásob na skladě $N_4 = \frac{T n_z}{\bar{t}_c} \int_{x_s}^{\infty} f(s) ds$, kde $x_s = x_p + t_0 \bar{s}$.

Význam integrálu určuje pravděpodobnost, že spotřeba bude větší než spodní objednáci úroveň. Odhad ztrát je označen n_z a počet dodacích cyklů, kdy se může stát, že dojde k nedostatku zásob je $T/\bar{t}_c$.

Součet jednotlivých nákladů N_1 až N_4 vyjadřuje závislost celkových nákladů a ztrát na hledané velikosti pojistné zásoby a dodacího cyklu. Derivací tohoto součtu podle $\bar{t}_c$, kterou položíme rovno nule, dostaneme výraz $t_c^2 = \frac{2T(n_j + n_z(1-F(x_s)))}{s c n_s^2}$. Poté derivací funkce podle x_p ,

kterou opět položíme rovno nule, dostaneme rovnici $t_c = \frac{n_z f(x_s)}{c n_s}$. Poté vhodnou úpravou a

dosažením za $x_s = x_p + t_0 \bar{s}$ lze dostat rovnici $f^2(x_p, t_0 \bar{s}) = \frac{2T c n_s (n_j + n_z(1-F(x_p + t_0 \bar{s})))}{s c n_s^2}$.

Následně se pomocí vhodné metody určí výše pojistné zásoby, kdy stačí dosadit do vztahu pro normovanou proměnnou $u = (s - \bar{s})/\sigma_s$, za s hodnotu, pro kterou je potřeba znát hustotu pravděpodobnosti f a distribuční funkci F , tj. $s = x_s = x_p + t_0 \bar{s} = k\sigma_s + t_0 \bar{s}$. Pak se za $\bar{s}$ dosadí průměrná spotřeba a výsledkem pro $t_0 = 1$ je vztah

$$2\varphi^2(k) = \frac{2T c n_s (n_j + n_z(1-\Phi(k)))}{s n_s^2} \sigma_s^2 = A. \quad (31)$$

Postupným dosazováním se najde hodnota k a poté se vypočítá pojistná zásoba $x_p = k\sigma_s$, délka dodacího cyklu t_c , z ní počet objednávek $o = T/t_c$ a nakonec velikost objednávek $Q = S/o$.

4 STATICKÉ MODELÝ ZÁSOb

Statické modely zásob jsou poslední částí klasifikace modelů řízení zásob, a vzhledem k tomu, že v praktické části nebudou použity, tak bude v následující podkapitole probrán pouze základní model.

Tyto modely řeší problémy týkající se zásob jen během jednoho období a nákladová funkce se zde konstruuje jen pro jeden cyklus. Používají se v situacích, kde je nutné velké množství zásob, určených pro pozdější potřebu, objednat najednou. V těchto případech se často jedná o nákupy sezónních výrobků. Na rozdíl od deterministických a stochastických modelů se u těchto modelech většinou místo minimalizace nákladové funkce maximalizuje funkce zisková. Laicky řečeno je zisková funkce rovna rozdílu zisku z prodejů a nákladů na získání a skladování substrátů.

Základní vlastností těchto modelů je nemožnost opětovného doplnění zásoby. Jestliže vytvořená zásoba nepostačuje na pokrytí poptávky, vznikají náklady z nedostatku zásob. Pokud však nastane situace, že zásoba se stane nadbytečnou, stává se nepoužitelnou. V těchto modelech se nepočítá s veličinou času a časové změny jsou zde zanedbatelné. Statické modely jsou založeny na určitých předpokladech, jako je připuštění deficitu. Dále se uvažuje pouze jeden dodávkový cyklus, doobjednávky jsou nepřipustné. Dodávka je zde realizována pouze jednou a spotřeba je náhodná veličina s příslušným rozdělením pravděpodobností.

Rozlišují se na statické modely s minimalizací nákladové funkce a statické modely s maximalizací ziskové funkce. V praxi se častěji používají statické modely s maximalizací ziskové funkce, protože tyto modely se využívají v situacích, kdy je jednorázově nakoupeno určité množství zboží, které se následně v průběhu určité doby prodává. Praktická situace, která vede k užití tohoto modelu, je například prodej denního tisku (Linda, 2004).

4.1 Model – optimalizace jednorázově vytvořené zásoby

Stanovení velikosti jednorázové objednávky se řadí k nejjednodušším příkladům modelu řízení zásob s náhodnou poptávkou. Jedná se o situaci, kdy je potřeba vytvořit na počátku nějakého období zásobu, kterou poté nelze již v průběhu období doplňovat. Poptávku lze popsat pouze nějakým pravděpodobnostním rozdělením s danou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou.

Pro nalezení optimální velikosti zásoby q_{opt} se bude předpokládat, že každé náhodné proměnné velikosti skutečné poptávky Q je možné přiřadit její pravděpodobnost výskytu $P(Q)$ a pro dané období T se vytvoří zásoba q jednotek požadovaného výrobku. Dále jsou pro výpočet optimálního nákupu zásob použity náklady na pořízení jednotky zásoby c , náklady ztráty na ušlém zisku či náklady na dokoupení jednotky chybějícího množství c_z .

Výpočet nákladů je následující:

$$N(q) = \sum_{Q=0}^q (q - Q)P(Q)c + \sum_{Q=q+1}^{\infty} (Q - q)P(Q)c_z \quad (32)$$

Poté po odvození výrazů $N(q+1)$ a $N(q-1)$ a jejich úpravě se získá nerovnost:

$$P(Q \leq (q-1)) \leq \frac{c_z}{c_z + c} \leq P(Q \leq q), \quad (33)$$

kde jsou použité výrazy rovny

$$P(Q \leq (q-1)) = \sum_{Q=0}^{q-1} P(Q) \quad a \quad P(Q \leq q) = \sum_{Q=0}^q P(Q) \quad (34)$$

Z toho vyplývá, že pro nalezení q_{opt} lze vypočítat pouze hodnotu zlomku $\frac{c_z}{c_z + c}$ a nalézt vhodnou distribuční funkci, pro kterou bude podmínka splněna. Jestliže pravděpodobnostní rozdělení poptávky je rozdělením spojitým, potom q_{opt} se najde v tabulkách hodnot distribuční funkce příslušného rozdělení. Je-li toto rozdělení, rozdělení diskretním, poté je hodnota q_{opt} nejbližší vyšší diskretní hodnota z definičního oboru daného rozdělení. Pro počáteční zásobu q_{opt} dále platí, že její výše musí splňovat $P(Q \leq q_{opt}) \geq \frac{c_z}{c_z + c}$.

Mezi skutečnou poptávkou Q a vytvořenou počáteční zásobou q mohou nastat tři případy:

- $Q \leq q$, v takovém případě na skladě zůstane nevyužito množství $q - Q$
- $Q \geq q$, poté bude na skladě chybět $Q - q$ jednotek
- $Q = q$, kdy se jedná ve většině případech o hypotetickou situaci a nevznikají žádné náklady ani ztráty.

Tento model vytvoření jednorázové zásoby je vhodné použít například u sezónního zboží, kdy je nutné odhadnout, jaká bude jeho spotřeba a pro její pokrytí vytvořit zásobu. Dále je možné tento model použít při koupi náhradních speciálních dílů současně s nákupem speciálních strojů či výrobních linek, kde je potřeba vypočítat potřebný počet speciálních náhradních dílů, jelikož následná koupě chybějících náhradních dílů je obvykle za výrazně vyšší finanční prostředky (Gros, 2009).

5 APLIKACE MODELŮ ZÁSOB NA PRAKTICKÝCH PŘÍKLADECH

V praktické části diplomové práce budou použity vybrané deterministické a stochastické modely řízení zásob na konkrétní druhy zásob vybrané společnosti Kavyl. Vybrané deterministické a stochastické modely budou simulovat běh zásob, přesněji kulatiny a řeziva střediska Dřevovýroba. Veškeré potřebné vstupní údaje pro praktické příklady jsem získala z interní komunikace na základě odborných znalostí zaměstnanců.

5.1 Představení podniku

Společnost Kavyl byla založena v roce 1994 formou společnosti s ručením omezeným jako rodinná česká společnost. Tato společnost, jejíž základní kapitál činí 560 000 Kč, sídlí v městyse Mohelno v okrese Třebíč v kraji Vysočina a zaměstnává cca 95 zaměstnanců. Její podnikatelská činnost je rozdělena do čtyř oblastí:

- vodohospodářské, ekologické a inženýrské stavby,
- oprava stavebních strojů a zařízení,
- zahradní architektura, realizace a údržba zeleně, okrasná školka,
- dřevovýroba.

V první oblasti se společnost snaží prostřednictvím realizace staveb zvyšovat biodiverzitu v obnovených tocích, vodních plochách a mokřadech a snižovat případné škody způsobené povodněmi. Mezi vodohospodářské stavby řadí revitalizaci vodních toků, sanaci sesuvů půdy, výstavbu biokoridorů a biocenter, odbahňování rybníků, nádrží a toků a další. Do ekologických staveb řadí ekologickou likvidaci odpadu a nánosů a rekultivaci a sanaci skládek komunálních odpadů. V poslední oblasti této činnosti, tj. inženýrských staveb, se zabývá výstavbou a rekonstrukcí vodovodů, výstavbou a rekonstrukcí zemědělských staveb a dalších akcí.

Od roku 2011 se firma začala specializovat na opravy a servis strojů, které jsou užívané převážně pro zemní práce, výstavbu a úpravu komunikací.

V třetí oblasti provádí realizaci a údržbu zahradních a krajinářských děl včetně souvisejících stavebních činností. Firma také provozuje vlastní okrasnou školku, provádí zpracování projektů sadových úprav a veškeré aforistické práce. Specializovaní zaměstnanci společnosti

zajišťují úpravy objektů zeleně v intravilánu i extravilánu a podílejí se na realizaci rozsáhlých projektů pro veřejné instituce, průmyslové podniky a stavební firmy.

Poslední oblast, v níž společnost působí, je dřevovýroba, díky níž nabízí kompletní zpracování dřeva, od pořezu kulatiny až po koncové výrobky. Firma také profiluje řezivo na čtyřstranné fréze WEINIG. Kvalita sušeného dřeva je zajištěna počítačem řízené sušárny, kdy sušení řeziva nabízí i jako samostatnou službu. Vyrábí výrobky z pořezu kulatiny, jako jsou stavební, konstrukční, truhlářská řeziva, střešní latě, dodávky a montáž krovů, impregnace řeziva. Dále produkuje hoblovaný a profilovaný materiál, což jsou obkladové palubky, podlahové palubky, lišty, dřevěný šindel, fasádní profily, roubenkové profily, frézovaná kulatina, terasová prkna a dřevěné lávky a mostky. Poslední činností v oblasti dřevovýroby, kterou společnost provozuje je dřevěný program. Dřevěný program zastřešuje altány, přístřešky, pergoly, terasy, stoly, lavice, herní prvky, informační cedule, rozcestníky, dřevěné lávky a mostky.

Firma disponuje několika certifikáty a to systémem řízení jakosti ČSN EN ISO 9001:2001, systémem environmentálního managementu ČSN EN ISO 14001:2005 a systémem managementu bezpečnosti a ochrany zdraví při práci ČSN EN ISO 18001:1999.

Vedení firmy se neustále účastní různých školení a snaží se tak posouvat kvalitu nabízených služeb a produktů.

5.2 Praktický příklad č. 1

Kavyl, s. r. o. se ve svém středisku Dřevovýroba zabývá zpracováním kulatiny a nakupuje od svého dodavatele ročně kulatinu v množství: borovice 532 m^3 , smrk 2478,81 m^3 , dub 24,83 m^3 , modřín 131 m^3 a akát 6,5 m^3 . Náklady na skladování m^3 jsou 62,35 Kč za rok a náklady na dodávku jsou pro jednotlivé druhy kulatiny odlišné.

Pro jednotlivé druhy kulatin činí tyto náklady: borovice 6650 Kč, smrk 30 985 Kč, dub 310 Kč, modřín 1638 Kč, akát 81 Kč.

Je potřeba určit optimální množství jednotlivých druhů kulatiny, které má společnost objednávat u svého dodavatele, dodávkový cyklus a optimální roční náklady. Středisko Dřevovýroba vylučuje deficit a dodací lhůta je konstantní.

Na praktický příklad č. 1 bude aplikován deterministický model. Optimální velikost objednávky a budou v něm použity vzorce (2), (3), (4).

5.2.1 Borovice

Tabulka 3: Vstupní data kulatiny borovice

Údaj	Označení	Hodnota
Náklady na dodávku	c_2	6 650 Kč
Náklady na skladování za jednotku množství	c_1	62,35 Kč/ m^3
Poptávka za rok	Q	532 m^3

Zdroj: Vlastní zpracování

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 532 \cdot 6650}{62,35}} = 336,88 \text{ } m^3$$

$$N^* = \sqrt{2 \cdot 532 \cdot 62,35 \cdot 6650} = 21003,59 \doteq 21\,004 \text{ Kč}$$

$$t^* = \frac{336,88}{532} = 0,63 \text{ roku} = 32,76 \text{ týdnů} = 230 \text{ dnů}$$

Z výše vypočítaných hodnot plyne, že optimální velikost dodávky je 336,88 m^3 , optimální celkové roční náklady činí 21 004 Kč a optimální délka dodávkového cyklu je 230 dnů.

5.2.2 Shrnutí výpočtů jednotlivých druhů kulatiny

V následující tabulce č. 4 jsou vypočítány optimální hodnoty pro jednotlivé druhy kulatiny. Jelikož skladovací náklady jsou pro všechny druhy kulatiny stejné, vychází nám i dodávkový cyklus pro všechny kulatiny stejný. Doba mezi jednotlivými dodávkami je 230 dnů, a pokud by k první dodávce došlo např. v lednu, následující dodávka by byla cca v srpnu a další dodávka by se již uskutečňovala v následujícím roce. V tabulce č. 4 lze také vidět, že největší velikost optimální dodávky je zastoupena smrkem a nejmenší velikost optimální dodávky vychází u akátu a to 4,12 m^3 , což představuje 380krát menší objednávku než u smrku. Pochopitelně proto jsou nejnížší náklady u akátu a nejvyšší u smrku. Pokud bychom pro zajímavost srovnali např. borovici s dubem, tak nám vychází, že objednávka u borovice je 21krát větší než objednávka u dubu a náklady by u těchto dvou kulatin byly rozdílné o 20 023 Kč.

Tabulka 4: Výsledky výpočtů jednotlivých druhů kulatin

	BO	SM	DB	MO	AK
q*	336,88	1569,62	15,72	82,95	4,12
N*	21 004	97 866	981	5 173	257
t* (rok)	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63
t* (týden)	32,76	32,76	32,76	32,76	32,76
t* (dny)	230	230	230	230	230

Zdroj: Vlastní zpracování

5.3 Praktický příklad č. 2

Společnost Kavyl, s. r. o. vyrábí pro svého odběratele XY palety a dělníci jsou schopni za den vyrobit 240 palet při jednosměnném provozu, který trvá 8 hodin. Denní potřeba je pouze 110 ks palet a roční spotřeba odběratele XY je ovšem 40 000 palet. Skladovací náklady na 1 rok a paletu jsou 8 Kč a fixní náklady související s přípravou jedné výrobní dávky jsou 2880 Kč.

Praktický příklad č. 2 bude vypočítán podle vzorců (5), (6) deterministického modelu Produkční model.

Tabulka 5: Vstupní údaje praktického příkladu č. 2

Údaj	Označení	Hodnota
Náklady na dodávku	c_2	2880 Kč
Náklady na skladování za jednotku množství	c_1	8 Kč
Poptávka za rok	Q	40 000 palet
Intenzita spotřeby	h	110 palet/den
Intenzita produkce	p	240 palet/den

Zdroj: Vlastní zpracování

$$N^* = \sqrt{\frac{240-110}{240}} \sqrt{2 \cdot 40000 \cdot 8 \cdot 2880} \doteq 31\,598 \text{ Kč}$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 40000 \cdot 2880}{8}} \sqrt{\frac{240}{240 - 110}} = 7\,292 \text{ palet}$$

$$t^* = \frac{7291}{40000} = 0,18 \text{ roku} = 9,36 \text{ týdnů} = 66 \text{ dní}$$

$$t_1 = \frac{7292}{240} = 30 \text{ dní}$$

$$t_2 = 66 - 30 = 36 \text{ dní}$$

Minimální náklady po výpočtu činí 31 598 Kč, optimální objem výrobní dávky je 7 292 palet, Optimální délka mezi dvěma dodávkami je 66 dní a z toho výrobní cyklus trvá 30 dní a spotřební cyklus 36 dní. Z těchto vypočítaných hodnot je poté možné určit maximální výši zásoby na skladu, která dělá 3900 palet. A jestliže příprava dalšího výrobního cyklu trvá 14 dní (1/26 roku), tak stačí začít s přípravou nové dávky v okamžiku, klesne-li zásoba v rámci spotřebního cyklu na 1538 palet.

5.4 Praktický příklad č. 3

Předpokládejme nyní, že společnosti Kavyl, spol. s r. o. jsou poskytovány množstevní rabaty a tedy, že nákupní cena závisí na objemu objednávky a dodavatel nabízí v několika stupních množstevní slevy. Na praktickém příkladu č.1 kulatiny smrk bude tato situace simulována a budou zde použity stejné hodnoty jako v příkladu 5.2.2.

Na praktický příklad č. 3 bude aplikován Model s množstevními rabaty.

V následující tabulce č. 6 jsou zaznamenány slevy pro jednotlivé kategorie objednávek.

Tabulka 6: Kategorizace slev

Množství objednávky	Sleva	Jednotková cena	Skladovací náklady
0 – 999	0	900	62,35
1000 – 1999	5 %	855	62,35
2000 – více	10 %	810	57,63

Zdroj: Vlastní zpracování na základě interní komunikace s podnikem

$$q_1^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 2478,81 \cdot 30985}{62,35}} = 1569,62 \text{ m}^3$$

$$q_2^* = \sqrt{\frac{2.2478,81.30985}{62,35}} = 1569,62 \text{ m}^3$$

$$q_3^* = \sqrt{\frac{2.2478,81.30985}{57,63}} = 1632,63 \text{ m}^3 \text{ (uvažujeme } 2000 \text{ m}^3)$$

$$N_{q_2}^* = 62,35 \cdot \frac{1569,62}{2} + 30985 \cdot \frac{2478,81}{1569,62} + 900 \cdot 2478,81 = 2328795 \text{ Kč}$$

$$N_{q_3}^* = 62,35 \cdot \frac{2000}{2} + 30985 \cdot \frac{2478,81}{2000} + 900 \cdot 2478,81 = 2331682 \text{ Kč}$$

Hodnota q_1^* přesahuje horní hranici 999 m^3 , a proto nebyla v dalším výpočtu vůbec brána v potaz. Hodnota q_3^* byla pro hranici 2000 a více příliš nízká, a proto tato hodnota byla zvýšena na dolní mez daného rozmezí, tedy 2000 m^3 . Následně z celkových nákladů množství q_2^* , q_3^* vychází, že optimální objednávka je $1569,62 \text{ m}^3$ při celkových nákladech 2 328 795 Kč. V porovnání s objednáváním 2000 m^3 , kdy celkové náklady vychází 2 331 682 Kč, se tyto celkové náklady optimálního množství oproti tomuto množství liší o 2 887 Kč.

5.5 Praktický příklad č. 4.

Středisko Dřevovýroba skladuje řezivo druhu smrk, které používá dále ke zpracování. Průměrná měsíční spotřeba činí $328,08 \text{ m}^3$. Náklady na dodávku jsou 49206 Kč a náklady na skladování jednoho kubického metru jsou 48 Kč za měsíc. Předpokládejme, že může vzniknout deficit a v případě jeho vzniku, je vyrovnán z následující dodávky. Náklady deficitu jsou 2 200 za chybějící m^3 . Je potřeba určit optimální velikost dodávky a optimální hladinu objednávek, když spotřeba během dodací lhůty je náhodná veličina a může mít normální, rovnoměrné a exponenciální rozdělení.

Při výpočtu příkladu č. 4 akceptujeme Δm_i a Δh_i maximálně 5 %.

Tento příklad bude řešen pomocí Modelu se signalizací změn a odloženou spotřebou.

V následujících podkapitolách bude praktický příklad vypočítán se 3 možnými rozděleními.

5.5.1 Normální rozdělení

Předpokládejme, že spotřeba během dodací lhůty má normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 102,42$ a směrodatnou odchylkou $\sigma = 33,21$.

1) $EU = 0$

$$m_1 = \sqrt{\frac{2.328,08.(49200+2200.0)}{48}} = 820,15$$

$$F_s^*(h, L) = \frac{48.820,15}{2200.328,08} = 0,0545 \rightarrow F_s = 1-0,0545 = 0,9455$$

$$\frac{h-102,42}{33,21} = -1,61$$

$$h_1 = 49,28$$

$$2) \text{ EU} = 33,21 \cdot \gamma(-1,61) + (102,42 - 48,95) \cdot 0,0545 = 33,21 \cdot 0,1092 + 2,91 = 6,58$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{2.328,08 \cdot (49200 + 2200 \cdot 6,58)}{48}} = 933,02$$

$$F_s^*(h, L) = \frac{48.933,02}{2200.328,08} = 0,0620 \rightarrow F_s = 1-0,0620 = 0,938$$

$$\frac{h-102,42}{33,21} = -1,54$$

$$h_2 = 51,28$$

$$\Delta m_i = \left(\frac{933,02}{820,15} * 100 \right) - 100 = 14 \%$$

$$\Delta h_i = \left(\frac{51,28}{49,28} * 100 \right) - 100 = 4 \%$$

$$3) \text{ EU} = 33,21 \cdot \gamma(-1,54) + (102,42 - 51,28) \cdot 0,0620 = 33,21 \cdot 0,1219 + 3,14 = 7,19$$

$$m_3 = \sqrt{\frac{2.328,08 \cdot (49200 + 2200 \cdot 7,19)}{48}} = 942,17$$

$$F_s^*(h, L) = \frac{48.942,17}{2200.328,08} = 0,0627 \rightarrow F_s = 1-0,0627 = 0,9373$$

$$\frac{h-102,42}{33,21} = -1,53$$

$$h_3 = 51,61$$

$$\Delta m_i = \left(\frac{942,17}{933,02} * 100 \right) - 100 = 0,1\%$$

$$\Delta h_i = \left(\frac{51,61}{51,28} * 100 \right) - 100 = 0,6 \%$$

Jelikož proces splňuje ukončovací kritérium, Δm_i a Δh_i je menší než 1 %, algoritmus končíme a můžeme říct, že optimální dodávka je $942,17 \text{ m}^3$ a podnik by měl objednávat při hladině $51,61 \text{ m}^3$.

5.5.2 Rovnoměrné rozdělení

Předpokládejme, že rovnoměrné rozdělení je v intervalu $\langle 36; 168,84 \rangle$.

1) $EU = 0$

$$m_1 = \sqrt{\frac{2.328,08 \cdot (49200 + 2200 \cdot 0)}{48}} = 820,15$$

$$1 - \frac{h_1 - 36}{102,42} = \frac{48.820,15}{2200.328,08}$$

$$h_1 = 132,84$$

2) $EU = \frac{1}{168,84 - 36} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (168,84^2 - 132,84^2) - 132,84 \cdot (168,84 - 132,84) \right) = 4,87$

$$m_2 = \sqrt{\frac{2.328,08 \cdot (49200 + 2200 \cdot 4,87)}{48}} = 905,04$$

$$1 - \frac{h_1 - 36}{102,42} = \frac{48.905,04}{2200.328,08}$$

$$h_2 = 132,25$$

$$\Delta m_i = \left(\frac{905,04}{820,15} * 100 \right) - 100 = 10,4 \%$$

$$\Delta h_i = \left(\frac{132,25}{132,84} * 100 \right) - 100 = 0,4\%$$

3) $EU = \frac{1}{168,84 - 36} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (168,84^2 - 132,25^2) - 132,25 \cdot (168,84 - 132,25) \right) = 5,04$

$$m_3 = \sqrt{\frac{2.328,08 \cdot (49200 + 2200 \cdot 5,04)}{48}} = 907,87$$

$$1 - \frac{h_1 - 36}{102,42} = \frac{48.907,87}{2200.328,08}$$

$$h_3 = 132,23$$

$$\Delta m_i = \left(\frac{907,87}{905,04} * 100 \right) - 100 = 0,3 \%$$

$$\Delta h_i = \left(\frac{132,23}{132,25} * 100 \right) - 100 = 0,02\%$$

Proces splňuje ukončovací kritérium, algoritmus končíme. Optimální dodávka je $907,87 \text{ m}^3$ a podnik by měl objednávat při hladině $132,23 \text{ m}^3$.

5.5.3 Exponenciální rozdělení

Předpokládejme, že spotřeba během dodací lhůty má exponenciální rozdělení pravděpodobnosti s parametrem $\mu = \frac{1}{102,42}$.

$$1) \text{ EU} = 0$$

$$m_1 = \sqrt{\frac{2.328,08 \cdot (49200 + 2200 \cdot 0)}{48}} = 820,15$$

$$F_s^*(h, L) = \frac{48 \cdot 820,15}{2200 \cdot 328,08} = 0,0545 \rightarrow F_s = 1 - 0,0545 = 0,9455$$

$$0,9455 = 1 - e^{-\frac{1}{102,42}h}$$

$$0,0545 = e^{-\frac{1}{102,42}h}$$

$$-2,91 = -\frac{1}{102,42}h$$

$$h_1 = 298,04$$

$$2) \text{ EU} = 102,42 \cdot e^{-\frac{1}{102,42} \cdot 298,04} = 5,58$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{2.328,08 \cdot (49200 + 2200 \cdot 5,58)}{48}} = 916,77$$

$$F_s^*(h, L) = \frac{48 \cdot 916,77}{2200 \cdot 328,08} = 0,061 \rightarrow F_s = 1 - 0,061 = 0,939$$

$$0,939 = 1 - e^{-\frac{1}{102,42}h}$$

$$0,061 = e^{-\frac{1}{102,42}h}$$

$$-2,79 = -\frac{1}{102,42}h$$

$$h_2 = 286,46$$

$$\Delta m_i = \left(\frac{916,77}{820,15} * 100 \right) - 100 = 12 \%$$

$$\Delta h_i = \left(\frac{286,46}{298,04} * 100 \right) - 100 = 4 \%$$

$$3) \text{ EU} = 102,42 \cdot e^{-\frac{1}{102,42} \cdot 286,46} = 6,24$$

$$m_3 = \sqrt{\frac{2.328,08 \cdot (49200 + 2200 \cdot 6,24)}{48}} = 927,53$$

$$F_s^*(h, L) = \frac{48 \cdot 927,53}{2200 \cdot 328,08} = 0,062 \rightarrow F_s = 1 - 0,061 = 0,938$$

$$0,938 = 1 - e^{-\frac{1}{102,42}h}$$

$$0,062 = e^{-\frac{1}{102,42}h}$$

$$-2,78 = -\frac{1}{102,42}h$$

$$h_3 = 284,79$$

$$\Delta m_i = \left(\frac{927,53}{916,77} * 100\right) - 100 = 1\%$$

$$\Delta h_i = \left(\frac{284,79}{286,46} * 100\right) - 100 = 0,6\%$$

Proces je iterační s ukončovacím kritériem Δm_i a Δh_i je menší než 5 %, algoritmus končíme a můžeme říct, že optimální dodávka je $927,53 \text{ m}^3$ a podnik by měl objednávat při hladině $284,79 \text{ m}^3$.

5.5.4 Deterministický přístup

$$\alpha = 2200/(2200+48) = 0,98$$

$$\beta = 0,02$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot (328,08) \cdot (49200)}{48}} = 820,1$$

$$s^* = 820,1 \cdot 0,02 = 16,4$$

$$N^* = \sqrt{2 \cdot 328,08 \cdot 48 \cdot 49200} = 39365$$

$$r^* = 151,42 - 16,4 = 135$$

Při deterministickém přístupu vychází optimální výše dodávky $820,1 \text{ m}^3$ řeziva smrk. Pro závod Dřevovýroba by bylo rozumné, kdyby k doplnění nové dodávky došlo v okamžiku, kdy počet neuspokojených požadavků bude roven $16,4 \text{ m}^3$ řeziva smrk a objednávku je potřeba vystavit v okamžiku, kdy počet úrovně zásoby řeziva smrk klesne na 135 m^3 .

5.6 Praktický příklad č. 5

Nyní předpokládejme, že společnost Kavyl skladuje ve skladu řezivo druhu borovice, které používá k další výrobě, ovšem s tím rozdílem, že v případě vyčerpání zásob se výrobky obstarají z jiných zdrojů a za vyšší cenu, tedy od jiného dodavatele, než na kterého jsou obvykle zvyklí. V tomto případě je také potřeba určit optimální hladinu objednání a velikost objednávky, když víme, že měsíční spotřeba je $30,04 \text{ m}^3$, náklady spojené s koupí

chybějícího množství dřeva jsou 300 Kč za m^3 , náklady na skladování m^3 jsou 48 Kč/ m^3 za měsíc a náklady na dodávku činí 4506 Kč. Spotřeba během dodací lhůty je náhodná veličina a může mít normální, rovnoměrné a exponenciální rozdělení.

V následujících podkapitolách budou vypočítány optimální hodnoty pro všechny tři možnosti rozdělení dodací lhůty.

V tomto příkladu akceptujeme Δm_i a Δh_i maximálně 5 %.

Na tento příklad budou použity vzorce Modelu se signalizací změn a ztracenými prodeji.

5.6.1 Normální rozdělení

Předpokládejme, že spotřeba během dodací lhůty má normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 33,13$ a směrodatnou odchylkou $\sigma = 13,57$.

1) EU = 0

$$m_1 = \sqrt{\frac{2.30,04 \cdot (4506 + 300 \cdot 0)}{48}} = 75,1$$

$$F_s^*(h, L) = \frac{48.75,1}{300.30,04 + 48.75,1} = 0,2857 \rightarrow F_s = 1 - 0,2857 = 0,7143$$

$$\frac{h - 33,13}{13,57} = -0,565$$

$$h_1 = 25,46$$

2) EU = 13,57. $\gamma(-0,565) + (33,13 - 25,46) \cdot 0,857 = 6,82$

$$m_2 = \sqrt{\frac{2.30,04 \cdot (4506 + 300 \cdot 6,82)}{48}} = 90,56$$

$$F_s^*(h, L) = \frac{48.90,56}{300.30,04 + 48.90,56} = 0,3254 \rightarrow F_s = 1 - 0,3254 = 0,6746$$

$$\frac{h - 33,13}{13,57} = -0,45$$

$$h_2 = 27,02$$

$$\Delta m_i = \left(\frac{90,56}{75,1} * 100 \right) - 100 = 21\%$$

$$\Delta h_i = \left(\frac{27,02}{25,46} * 100 \right) - 100 = 6\%$$

3) EU = 13,57. $\gamma(-0,45) + (33,13 - 27,02) \cdot 0,3254 = 6,88$

$$m_3 = \sqrt{\frac{2.30,04 \cdot (4506 + 300.6,88)}{48}} = 90,68$$

$$F_s^*(h, L) = \frac{48.90,68}{300.30,04 + 90,68} = 0,3257 \rightarrow F_s = 1 - 0,3254 = 0,6743$$

$$\frac{h - 33,13}{13,57} = -0,45$$

$$h_3 = 27,02$$

$$\Delta m_i = \left(\frac{90,68}{90,56} * 100 \right) - 100 = 0,13\%$$

$$\Delta h_i = \left(\frac{27,02}{27,02} * 100 \right) - 100 = 0 \%$$

Jelikož Δm_i a Δh_i je menší než 5 %, algoritmus končíme a můžeme říct, že optimální dodávka je $90,68 \text{ m}^3$ a podnik by měl objednávat při hladině $27,02 \text{ m}^3$.

5.6.2 Rovnoměrné rozdělení

Předpokládejme, že spotřeba během dodací lhůty má rovnoměrné rozdělení v intervalu $\langle 5,99; 60,27 \rangle$.

1) EU = 0

$$m_1 = \sqrt{\frac{2.30,04 \cdot (4506 + 300.0)}{48}} = 75,1$$

$$1 - \frac{h_1 - 36}{33,13} = \frac{48.75,1}{300.30,04 + 48.75,1}$$

$$h_1 = 59,67$$

$$2) \text{ EU} = \frac{1}{60,27 - 5,99} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (60,27^2 - 59,67^2) - 59,67 \cdot (60,27 - 59,67) \right) = 0,0033$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{2.30,04 \cdot (4506 + 300.0,0033)}{48}} = 75,1$$

$$h_2 = h_1 = 59,67$$

Jelikož Δm_i a Δh_i je 0 %, optimální dodávka je $75,1 \text{ m}^3$ a podnik by měl objednávat při hladině $59,67 \text{ m}^3$.

5.6.3 Exponenciální rozdělení

Předpokládejme, že spotřeba během dodací lhůty má exponenciální rozdělení pravděpodobnosti s parametrem $\mu = \frac{1}{33,13}$.

1) EU = 0

$$m_1 = \sqrt{\frac{2.30,04 \cdot (4506 + 300.0)}{48}} = 75,1$$

$$F_s^*(h, L) = \frac{48.75,1}{300.30,04 + 48.75,1} = 0,2857 \rightarrow F_s = 1 - 0,2857 = 0,7143$$

$$0,7143 = 1 - e^{-\frac{1}{33,13}h}$$

$$0,2857 = e^{-\frac{1}{33,13}h}$$

$$-1,253 = -\frac{1}{33,13}h$$

$$h_1 = 41,51$$

2) EU = 33,13. $e^{-\frac{1}{33,13} \cdot 41,51} = 9,46$

$$m_2 = \sqrt{\frac{2.30,04 \cdot (4506 + 300.9,46)}{48}} = 95,88$$

$$F_s^*(h, L) = \frac{48.95,88}{300.30,04 + 48.95,88} = 0,338 \rightarrow F_s = 1 - 0,338 = 0,662$$

$$0,662 = 1 - e^{-\frac{1}{33,13}h}$$

$$0,338 = e^{-\frac{1}{33,13}h}$$

$$-1,085 = -\frac{1}{33,13}h$$

$$h_2 = 35,95$$

$$\Delta m_i = \left(\frac{95,88}{75,1} * 100\right) - 100 = 28 \%$$

$$\Delta h_i = \left(\frac{35,95}{41,51} * 100\right) - 100 = 13 \%$$

3) EU = 33,13. $e^{-\frac{1}{33,13} \cdot 35,95} = 11,19$

$$m_3 = \sqrt{\frac{2.30,04 \cdot (4506 + 300.11,19)}{48}} = 99,21$$

$$F_s^*(h, L) = \frac{48.99,21}{300.30,04 + 48.99,21} = 0,3457 \rightarrow F_s = 1 - 0,3457 = 0,6543$$

$$0,6543 = 1 - e^{-\frac{1}{33,13}h}$$

$$0,3457 = e^{-\frac{1}{33,13}h}$$

$$-1,062 = -\frac{1}{33,13}h$$

$$h_3 = 35,16$$

$$\Delta m_i = \left(\frac{99,21}{95,88} * 100\right) - 100 = 3,5 \%$$

$$\Delta h_i = \left(\frac{35,158}{35,95} * 100\right) - 100 = 2,2 \%$$

Jelikož proces splňuje ukončovací kritérium, Δm_i a Δh_i je menší než 5 %, algoritmus končíme a můžeme říct, že optimální dodávka je $99,21 \text{ m}^3$ a podnik by měl objednávat při hladině $35,16 \text{ m}^3$.

Za předpokladu, že dodací lhůta je 14 dní (6/13 měsíce) se dají výsledky shrnout do následující tabulky č. 7.

Tabulka 7: Výsledky jednotlivých rozdělení pravděpodobnosti

Příklad č. 4	Rovnoměrné rozdělení	Exponenciální rozdělení	Normální rozdělení
m_{opt}	907,87	927,53	942,17
h_{opt}	132,3	284,79	51,61
EU	5,04	6,24	7,19
H(m)	49261	57523	47064
Příklad č. 5			
m_{opt}	75,1	99,21	90,68
h_{opt}	59,67	35,16	27,02
EU	0	11,19	6,88
H(m)	5804	6961	5958

Zdroj: Vlastní zpracování

Z výše uvedené tabulky č. 7 lze vidět, že pro jednotlivá rozdělení vychází v rámci jednoho příkladu jiné optimální hodnoty. Proto je důležité zjistit, jaké rozdělení má náhodná veličina

spotřeby. V praktickém příkladu č. 4 nám nejlépe vychází optimální hodnoty při minimálních nákladech spotřeby s normálním rozdělením pravděpodobnosti s optimální dodávkou $942,17 \text{ m}^3$, hladinou objednání $51,61 \text{ m}^3$ a celkovým součtem nákladů 47 064 Kč. V praktickém příkladu č. 5 nám však optimální hodnoty s minimálními náklady nevychází u normálního rozdělení pravděpodobnosti, ale u spotřeby s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti, při kterém vychází celkové náklady 5 804 Kč při optimální dodávce $75,1 \text{ m}^3$ a hladině objednání $59,67 \text{ m}^3$, přičemž náklady spojené s optimální dodávkou $75,1 \text{ m}^3$ řeziva borovice představují 12 % celkových nákladů řeziva smrk.

Dále lze vidět, že největší hladina objednání vychází v příkladu č. 4 u exponenciálního rozdělení $84,79 \text{ m}^3$, zatímco u normálního rozdělení se tato hladina pohybuje na $51,61 \text{ m}^3$, což je o 39 % méně oproti spotřebě s exponenciálním rozdělením. V příkladu č. 5 vychází největší hladina objednání nikoliv u exponenciálního rozdělení, ale u rovnoměrného rozdělení s $59,67 \text{ m}^3$ a nejmenší hladina objednání vychází u normálního rozdělení s $27,02 \text{ m}^3$.

U praktického příkladu č. 4 docházelo k situaci, že s rostoucím optimálním množstvím při výpočtu celkových nákladů jednotlivých rozdělení se náklady na dodávku za časovou jednotku snižovaly, náklady deficitu se zvyšovaly a náklady na skladování kolísaly.

V obou dvou případech nám největší náklady vznikly při spotřebě s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti. V posledním příkladu č. 5 tyto náklady činily 6 961 Kč což je oproti nejmenším nákladům navýšení o 20 % a u příkladu č. 4 činily 57 523 Kč, což je navýšení oproti nejmenším celkovým nákladům o 22 %.

Při porovnání deterministického a stochastického výpočtu u příkladu č. 4 vychází náklady u deterministického výpočtu o 16 procent nižší než u výpočtu stochastického při spotřebě s normálním rozdělením pravděpodobnosti.

6 OPTIMALIZACE ZÁSBOVACÍHO SYSTÉMU U VYBRANÉHO PODNIKU

Společnost Kavyl, s. r. o. je uznávanou společností na území Vysočiny se specializací na oblasti vodohospodářské stavby, sadové úpravy a komplexní údržbu zeleně, opravu a údržbu stavebních a specializovaných strojů a dřevovýrobu, přičemž tyto oblasti byly představeny v předchozí kapitole.

Pro optimalizaci zásobovacího systému jsem si na základě interní komunikace se zaměstnanci společnosti vybrala oblast dřevovýroby a na vybrané druhy zásob jsem aplikovala vybrané deterministické a stochastické modely zásob.

Zásoby dřevovýroby jsou pro přípravu finálních produktů rozděleny do čtyř skupin, skupiny hlavního materiálu, pomocného materiálu, náhradních dílů a režijního materiálu. Největší část závodu zabírají výrobní prostory, kde se realizují jednotlivé úkony. V podniku není určena objednávací hladina ani velikost objednávky jednotlivých druhů zásob a veškeré objednávky jsou realizovány na základě objednávek od odběratelů, předpokládané poptávky pro následující měsíc a také to závisí na zkušenostech vedoucího závodu dřevovýroba, který má na starosti zásobovací činnost. Objednávky závodu jsou také odhadovány na již známých velkých zakázkách podniku a na spotřebě zásob z minulých let. Doprava materiálu do firmy je zabezpečena kamionovou dopravou prostřednictvím dodavatele a expedice výrobků je obstarávána závodem dřevovýroba prostřednictvím smluvních dopravců. Skutečně vynaložené finanční prostředky pro řízení zásob, které budou níže porovnány s vypočtenými hodnotami, jsou odhadnuty na základě odborné znalosti managementu firmy.

Při výpočtu praktických příkladů byly výpočty aplikovány na hlavní materiál, který je potřeba při výrobě, a to řezivo a kulatina. Praktický příklad č. 1 se zabýval situací, kdy podnik nakupoval od svého dodavatele různé druhy kulatiny, které dále závod dřevovýroba spotřebovával a na základě odborných znalostí zaměstnanců jsem prostřednictvím modelu Optimální velikost objednávky vypočítala pro jednotlivé druhy kulatiny optimální velikost dodávky, optimální celkové roční náklady při této velikosti dodávky a dobu mezi jednotlivými dodávkami. V praktickém příkladu č. 2 již závod dřevovýroba vyráběl pro svého odběratele palety a dodávkový cyklus byl v tomto případě rozdělen na výrobní a spotřební, a proto jsem zde za pomoci Produkčního modelu vypočítala optimální hodnoty. V praktickém příkladu č. 3 byla řešena situace, že při určitém objednaném množství kulatiny jsou závodu dřevovýroba poskytovány množstevní rabaty. Pro každé objednávkové množství je poskytnuta jiná sleva a Modelem s množstevními rabaty jsem vypočítala, jaké množství se

vyplatí objednat při minimálních celkových nákladech. Následující dva příklady byly postaveny na stochastické spotřebě, kdy výpočet je ovlivněn určitou pravděpodobností, že tento stav nastane a v příkladu č. 4 se uvažovalo při vzniku deficitu vyrovnáním následující dodávky a v příkladu č. 5 byl deficit vyrovnán z jiných zdrojů a za vyšší cenu. Oba tyto příklady bylo možné řešit třemi postupy, podle toho, jaké rozdělení měla spotřeba během dodací lhůty, a proto výpočty jednotlivých rozdělení vykazovaly odlišné optimální hodnoty.

Pro jednotlivé druhy kulatiny, tj. borovici, smrk, dub, modřín a akát jsem v praktickém příkladu č. 1 vypočítala optimální roční náklady a při porovnání se skutečnými celkovými náklady, které jsem získala z odborných znalostí zaměstnanců podniku, jsem zjistila, že celková úspora celkových ročních nákladů za všechny druhy kulatiny dle optimální dodávky vypočtené na základě deterministického modelu Optimální velikost objednávky je 23 914 Kč. Optimální dodávka pro borovici je proto stanovena na 336,88 m^3 a úspora nákladů této kulatiny činí 21 %. Pro smrk je stanovena optimální dodávka na 1569,62 m^3 a úspora nákladů této kulatiny se pohybuje okolo 17 %. Nejmenší úspora nákladů je u akátu a dubu, kde tato úspora, vypočítána dle deterministického modelu, činí pouze 2,3 % a optimální velikost dodávky je stanovena na 4,12 m^3 akátu a 981 m^3 dubu. U modřínu vychází úspora celkových ročních nákladů na 15 % a optimální dodávka je stanovena na 82,95 m^3 .

Závod dřevovýroba vynakládá na výrobu palet ročně o 18 % více finančních prostředků, než by mohl vynakládat, kdyby při řízení této zásoby využíval deterministický Produkční model, díky němuž náklady vychází na 31 598 Kč.

Podnik ročně spotřeboval 2 478,81 m^3 kulatiny a objednávku u stálého dodavatele uskutečnil třikrát v roce. Měl však možnost objednat kulatinu jiného dodavatele, který poskytoval množstevní rabaty pro jednotlivé rozmezí m^3 . Vedoucího závodu Dřevovýroba zajímalo, kolik množství kulatiny by měl objednávat, aby minimalizoval náklady na řízení zásob a dle Modelu s množstevními rabaty, který jsem použila pro vyřešení by bylo pro společnost výhodné, kdyby u tohoto dodavatele, který poskytuje slevy, objednávala 1569,62 m^3 a celkové náklady by tak vycházely 2 328 795 Kč.

Optimální náklady materiálu řeziva smrku, kde je výpočet postaven na stochastické spotřebě, jsou při porovnání se skutečně vynaloženými měsíčními náklady na řezivo smrk, které činí 63458 Kč, nižší než skutečně vynaložené náklady. Při normálním rozdělení spotřeby dosahuje úspora největší rozsah a to 26 %, při rovnoměrném je úspora nákladů 22 procent a při exponenciálním rozdělení spotřeby se jedná o 9 %. Průměrná úspora vypočtena na základě stochastického modelu je 19 %. Dále jsem při výpočtu řeziva smrku využila i deterministický

přístup, který vychází oproti stochastickému přístupu s porovnáním se skutečnými náklady lépe, protože úspora zde činí 38 %. I když deterministický model vykazuje lepší hodnoty, které nejsou založené na pravděpodobnosti a je z matematického pohledu přesnější, může se dle mého názoru od reality více lišit než stochastický model. Proto považuji za více realitě odpovídající stochastický výpočet, a to i z toho důvodu, že nelze dopředu předem nikdy přesně určit vývoj situace v budoucnosti. Současné skutečné náklady řeziva borovice jsou 6543 Kč za měsíc a při porovnání s optimálními náklady vypočítané na základě stochastického modelu vychází při normální a rovnoměrné spotřebě optimální náklady lépe než skutečné. U spotřeby, která má rovnoměrné rozdělení je úspora 11 % a u normálního rozdělení se jedná o 9, průměrně je úspora 10 %. Naopak při spotřebě, která má exponenciální rozdělení vychází optimální náklady hůře než skutečně vynaložené a tento rozdíl činí 6 %.

Z výše uvedených porovnání lze říci, že kromě výpočtu stochastického modelu s odloženou spotřebou a deficitem, kde spotřeba má exponenciální rozdělení, vychází všechny ostatní optimální celkové náklady lépe než skutečné náklady na řízení jednotlivých zásob.

V následující tabulce č. 8 jsou shrnuty výše popsané úspory plynoucí z výpočtů modelů řízení zásob.

Tabulka 8: Vyhodnocení úspor optimálních dodávek

Zásoba	BO	SM	DB	MO	AK	palety	řezivo SM	řezivo BO
MCN (Kč)	21004	97866	981	5173	257	31598	ø 51283	ø 6241
Úspora	21 %	17 %	2,3 %	15 %	2,3 %	18 %	ø 19 %	ø 10 %

Zdroj: Vlastní zpracování

Vzhledem k úsporám, které plynou z použití deterministických a stochastických modelů řízení zásob, navrhuji, aby se u těchto druhů zásob pro další plány nákupu změnila objednávková množství a zavedly se signální hladiny pro jednotlivé objednávky. Díky těmto změnám by podnik dosahoval příznivějšího vývoje snižování celkových nákladů souvisejících se zásobováním. Na základě těchto výpočtů může vedoucí závodu zvážit stávající proces objednávek jednotlivých druhů zásob, a pokud by dospěl k závěru, že tento způsob výpočtu optimálních hodnot je pro dřevovýrobu výhodnější, mohl by vytvořit podmínky pro realizaci těchto modelů na řízení zásob a mohlo by dojít ke snížení nákladů pomocí stanovení optimální dodávky, hladiny objednání a dodacího cyklu. Díky snížení nákladů by se závodu zvýšil cash flow, tedy uvolněním peněžních prostředků na základě snížení nákladů by cash flow dosahoval lepších výsledků, a tyto peněžní prostředky by se mohly investovat jinde.

ZÁVĚR

Zásoby jsou důležitou součástí především výrobních a obchodních podniků a jejich řízení není snadná záležitost, a jelikož jsou v zásobách vázány nemalé peněžní prostředky, je potřeba řízení zásob věnovat odpovídající pozornost. Najít optimální cestu pro řízení zásob v podniku není lehký úkol a liší se podnik od podniku.

Pro zpracování této práce, jejímž cílem bylo provést optimalizaci zásobovacího systému u vybraného podniku, jsem si vybrala podnik Kavyl, spol. s r. o., jenž má působnost v Kraji Vysočina a specializuje se na 4 oblasti. Pro optimalizaci jsem si vybrala oblast dřevovýroby, a to z toho důvodu, že právě závod dřevovýroba disponuje vysokým podílem zásob.

Cílem mé práce bylo provést optimalizaci zásobovacího systému u vybraného podniku. Zaměřit se na teoretický popis základních a pokročilých stochastických modelů zásob. Jejich fungování pak prezentovat na praktických příkladech.

Teoretickou část jsem rozdělila do čtyř témat. Nejprve jsem se zaměřila na základní prvky teorie zásob a na zásoby všeobecně. Následně jsem se zabývala modely zásob a podrobněji jsem popsala deterministické, stochastické a statické modely, přičemž stochastické modely byly probrány detailněji a u těchto modelů zásob jsem nejprve definovala proměnné veličiny na neřiditelné a říditelné a následně jsem se zaměřila na jejich klasifikaci. Věnovala jsem se předpokladům a průběhu jednotlivých modelů - se signalizací změn a odloženou spotřebou, se signalizací změn a ztracenými prodeji, stochastická spojitá poptávka a náhodná a proměnlivá spotřeba v čase.

Následně jsem aplikovala vybrané modely zásob na praktických příkladech. Na praktické příklady jsem použila stochastické, ale i deterministické modely řízení zásob. Vstupní údaje potřebné pro výpočet praktických příkladů jsem získala na základě odborných znalostí zaměstnanců firmy Kavyl, spol. s r. o. z interní komunikace. Na praktický příklad č. 1 byl aplikován model Optimální velikost objednávky. V praktickém příkladu č. 2 byl použit Produkční model a v praktickém příkladu č. 3 jsem využila Model s množstevními rabaty. V následujících dvou příkladech jsem již použila pro výpočet stochastické modely, Model se signalizací změn a odloženou spotřebou a Model se signalizací změn a ztracenými prodeji. Prostřednictvím výpočtů jsem zjistila optimální výši dodávky, minimální náklady a hladinu objednání.

V poslední části diplomové práce jsem optimalizovala zásobovací systém oblasti dřevovýroby. Porovnávala jsem mnou vypočítané optimální hodnoty a hodnoty získané

z interní komunikace zaměstnanců společnosti, a kromě výpočtu stochastického modelu s odloženou spotřebou a deficitem, kde spotřeba měla exponenciální rozdělení, vyšly všechny ostatní optimální celkové náklady lépe než skutečné náklady na řízení zásob. Díky použití dříve zmíněných modelů by došlo k úsporám a podnik by snižoval celkové náklady na zásobování.

Na závěr chci dodat, že všechny uvedené postupy v praktických příkladech by mohly být aplikovány na další položky zásob, a to nejen v oblasti dřevovýroby, ale i v dalších závodech společnosti Kavyl, spol. s r. o. Právě tyto postupy by mohly vést k dalšímu snižování nákladů a následnému zlepšení systému řízení zásob.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] BUCHTA, Miroslav. *Nauka o podniku: distanční opora*. Vyd. 2. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2011. ISBN 978-80-7395-384-3
- [2] EMMETT, Stuart. Řízení zásob: jak minimalizovat náklady a maximalizovat hodnotu. Přeložil Markéta HENYCHOVÁ. Brno: Computer Press, 2008. Praxe manažera. ISBN 978-80-251-1828-3
- [3] GROS, Ivan. Matematické modely pro manažerské rozhodování. Praha: Vydavatelství VŠCHT, 2009. ISBN 978-80-7080-709-5
- [4] HILLIER, Frederick S. a Gerald J. LIEBERMAN. Introduction to operations research. 7th ed. New York: McGraw-Hill, c2001. McGraw-Hill series in industrial engineering and management science. ISBN 0-07-118163-6
- [5] HORÁKOVÁ, Helena a Jiří KUBÁT. Řízení zásob: logistické pojetí, metody, aplikace, praktické úlohy. 3., přeprac. vyd. Praha: Profess Consulting, [1999]. Poradce controllingu. ISBN 80-85235-55-2
- [6] JABLONSKÝ, Josef. Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování. 3. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3
- [7] JIRSÁK, Petr, Michal MERVART a Marek VINŠ. Logistika pro ekonomy - vstupní logistika. Praha: Wolters Kluwer Česká republika, 2012. ISBN 978-80-7357-958-6
- [8] LAMBERT, Douglas M., Douglas M. LAMBERT, James R. STOCK, Lisa M. ELLRAM a Eva NEVRLÁ. Logistika: příkladové studie, řízení zásob, přeprava a skladování, balení zboží. Vyd. 2. Brno: CP Books, 2005. Business books. ISBN 80-251-0504-0
- [9] LINDA, Bohdan. Stochastické metody operačního výzkumu. Bratislava: Statis, 2004. ISBN 80-85659-33-6
- [10] LINDA, Bohdan a Jana KUBANOVÁ. Statistické tabulky a vzorce. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2000. ISBN 80-7194-277-4
- [11] PELIKÁN, Jan a Vladislav CHÝNA. Kvantitativní management. Praha: Oeconomica, 2011. ISBN 978-80-245-1830-5