

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Ústav systémového inženýrství a informatiky

**Analýza časových řad s využitím Fourierovy transformace
a keprální analýzy**

Radoslav Gregor

Diplomová práce
2012

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: Bc. Radoslav Gregor
Osobní číslo: E10251
Studijní program: N6209 Systémové inženýrství a informatika
Studijní obor: Regionální a informační management
Název tématu: Analýza časových řad s využitím Fourierovy transformace
a keprální analýzy
Zadávající katedra: Ústav systémového inženýrství a informatiky

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Vymezení základních pojmů (Fourierova transformace, časová řada, keprální analýza)
2. Výběr, analýza a úprava časových řad pro následné zpracování
3. Analýza možností jednotlivých metod na příkladu ekonomické časové řady, ověření a interpretace výsledků v prostředí MatCad nebo MatLab

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

- OPPENHEIM, A. - SCHAFER, R. - BUCK, J.: Discrete-Time Signal Processing. Second edition. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1999. 897 s.
- ČÍŽEK, V.: Diskrétní Fourierova Transformace : a její užití. Praha: SNTL, 1981. 160 s.
- POSPÍŠIL, J.: Analýzy a přenosové aspekty signálů. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého v Olomouci, 1994. 168 s.
- CHILDERS D. G. - SKINNER D. P. - KEMERAIT R. C.: The Cepstrum: A Guide to Processing. Proceedings of the IEEE, Vol. 65, No. 10, October 1977, pp. 1428-1443.



Vedoucí diplomové práce:

doc. Ing. Pavel Petr, Ph.D.

Ústav systémového inženýrství a informatiky

Datum zadání diplomové práce: **3. října 2011**

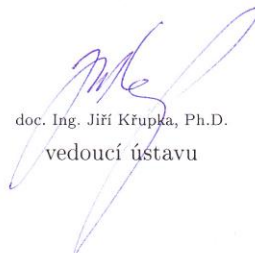
Termín odevzdání diplomové práce: **30. dubna 2012**



doc. Ing. Renáta Myšková, Ph.D.

děkanka

L.S.



doc. Ing. Jiří Křupka, Ph.D.

vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 3. října 2011

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako Školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 30. 4. 2012

Bc. Radoslav Gregor

PODĚKOVÁNÍ:

Tímto bych rád poděkoval svému vedoucímu práce doc. Ing. Pavlu Petrovi Ph.D. za jeho odbornou pomoc, cenné rady a poskytnuté materiály, které mi pomohly při zpracování diplomové práce.

ANOTACE

Cílem diplomové práce je analyzovat zvolené časové řady za pomoci Fourierovy transformace a kepstrální analýzy. V práci je zmíněna i Boxova-Jenkinsova metodologie. V první části práce jsou vymezena teoretická východiska pro jednotlivé pojmy jako je časová řada, Fourierova řada, Fourierova transformace, kepstrální analýza a Boxova-Jenkinsova metodologie. V druhé části jsou poté analyzovány vybrané časové řady pomocí Fourierovy transformace a kepstrální analýzy.

KLÍČOVÁ SLOVA

Časová řada, Fourierovy řady, Fourierova transformace, kepstrální analýza, Boxova-Jenkinsonova metodologie

TITLE

Time series analysis using Fourier transform and cepstral analysis

ANNOTATION

The aim of this thesis is to analyze the selected time series using Fourier transform and cepstral analysis. The work is mentioned in Box-Jenkins methodology. In the first part are defined for the various theoretical concepts such as time series, Fourier series, Fourier transform, cepstral analysis and Box-Jenkins methodology. In the second part is then analyzed selected time series using Fourier transform and cepstral analysis.

KEYWORDS

Time series, Fourier series, Fourier transformation, cepstral analysis, Box-Jenkins methodology

OBSAH

ÚVOD.....	10
1. ČASOVÉ ŘADY.....	11
1.1. DRUHY ČASOVÝCH ŘAD.....	11
1.1.1. ČŘ dle periodicity sledování	11
1.1.2. ČŘ dle rozhodného časového hlediska zjišťování.....	11
1.1.3. ČŘ dle sledovaných ukazatelů.....	12
1.1.4. ČŘ dle homogenity.....	12
1.1.5. ČŘ dle absence náhodné složky	12
1.2. GRAFY ČASOVÝCH ŘAD	13
1.2.1. Spojnicový graf	13
1.2.2. Box-whisker graf	13
1.2.3. Seasonal subseries graf.....	13
1.3. ZÁKLADNÍ POPISNÉ CHARAKTERISTIKY ČŘ	14
1.4. DEKOMPOZICE ČŘ.....	15
1.5. VYROVNÁNÍ (OČIŠTĚNÍ) ČŘ.....	17
2. FOURIEROVA ANALÝZA	20
2.1. TRIGONOMETRICKÁ ŘADA	20
2.2. FOURIEROVY ŘADY.....	21
2.3. DIRICHLETOVY PODMÍNKY	24
2.4. KONVERGENCE FOURIEROVY ŘADY	24
2.5. FOURIERŮV INTEGRÁL	27
2.5.1. Fourierův integrál v komplexním tvaru.....	28
2.5.2. Fourierův integrál v reálném tvaru	29
2.6. FOURIEROVA TRANSFORMACE.....	29
2.7. DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE (DFT)	33
2.7.1. Sampling.....	34
2.7.2. Aliasing	35
2.8. KRÁTKODOBÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE (STFT).....	36
2.9. RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE (FFT).....	38
3. KEPSTRÁLNÍ ANALÝZA	40
4. BOXOVA-JENKINSOVA METODOLOGIE.....	43
4.1. STACIONÁRNÍ PROCESY.....	43
4.1.1. Proces AR(1)	43
4.1.2. Proces AR(2)	44
4.1.3. Proces MA(1)	45
4.1.4. Proces MA(2)	45
4.1.5. Proces ARMA	46
4.1.6. Procesy ARIMA	46
4.1.7. Procesy SARIMA.....	47
4.2. IDENTIFIKACE MODELU.....	48
5. APLIKACE METOD NA ČASOVÉ ŘADY	49
5.1. ČŘ č. 1	49
5.2. ČŘ č. 2	55
5.3. ČŘ č. 3	62
5.4. ČŘ č. 4	70
ZÁVĚR.....	78
POUŽITÁ LITERATURA	80
SEZNAM PŘÍLOH.....	83

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1 - Vlastnosti FT.....	33
--------------------------------	----

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1 - Grafické zobrazení Gibbsova jevu	27
Obrázek 2 - Amplitudo - frekvenční diagram	29
Obrázek 3 - Vzorkování analogového signálu $s(t)$	34
Obrázek 4 - Vznik aliasu	35
Obrázek 5 - Princip výpočtu STFT	36
Obrázek 6 - Jednotlivá okna používána u STFT	37
Obrázek 7 - Čtvercová matice pro $N = 8$	38
Obrázek 8 - Fourierova transformace pro $N = 8$	39
Obrázek 9 - Příklad spektra a kepra hluku převodového agregátu	42
Obrázek 10 - Průběh ČŘ č. 1.....	50
Obrázek 11 - FT ČŘ č. 1	51
Obrázek 12 - Spektrogram ČŘ č. 1	52
Obrázek 13 - 3D Spektrogram ČŘ č. 1	53
Obrázek 14 - ACF pro Y_1 a Y_2	54
Obrázek 15 - ACF a PACF ČŘ č. 1	54
Obrázek 16 - Kepstrální analýza pro ČŘ č. 1.....	55
Obrázek 17 - Průběh ČŘ č. 2.....	56
Obrázek 18 - FT ČŘ č. 2	57
Obrázek 19 - Spektrogram pro ČŘ č. 2.....	58
Obrázek 20 - 3D Spektrogram pro ČŘ č. 2	59
Obrázek 21 - ACF pro Y_1 , Y_2 a Y_4	60
Obrázek 22 - ACF a PACF ČŘ č. 2	60
Obrázek 23 - Kepstrální analýza ČŘ č. 2	61
Obrázek 24 - Průběh ČŘ č. 3.....	62
Obrázek 25 - ACF a PACF ČŘ č. 3	63
Obrázek 26 - První diference ČŘ č. 3	64
Obrázek 27 - ACF a PACF ČŘ č. 3 (diferencované).....	65
Obrázek 28 - Posouzení reziduí modelu ARIMA	66
Obrázek 29 - FT diferencované ČŘ č. 3.....	67
Obrázek 30 - Spektrogram ČŘ č. 3	68
Obrázek 31 - 3D Spektrogram ČŘ č. 3	69
Obrázek 32 - KA ČŘ č. 3	69
Obrázek 33 - Průběh ČŘ č. 4.....	70
Obrázek 34 - ACF a PACF ČŘ č. 4	71
Obrázek 35 - ACF a PACF po stacionarizaci ČŘ č. 4	72
Obrázek 36 - Posouzení reziduí modelu SARIMA	73
Obrázek 37 - Dekompozice ČŘ č. 4.....	74
Obrázek 38 - FT ČŘ č. 4	75
Obrázek 39 - Spektrogram ČŘ č. 4	76
Obrázek 40 - 3D Spektrogram ČŘ č. 4	77
Obrázek 41 - KA ČŘ č. 4	77

SEZNAM ZKRATEK

FT	Fourierova transformace
FR	Fourierova řada
DFT	Diskrétní Fourierova transformace
FFT	Rychlá Fourierova transformace
STFT	Krátkodobá Fourierova transformace
ČŘ	Časová řada
KA	Kepstrální analýza
ACF	Autocorrelation function
PACF	Parcial autocorrelation function
AR	Autoregressive (process)
MA	Moving average (process)
ARMA	Autoregressive moving average (process)
ARIMA	Autoregressive integrated moving average (process)
SARIMA	Seasonal autoregressive moving average (process)

ÚVOD

Empirická pozorování v jednotlivých oblastech, ať už se jedná o ekonomické, technické nebo jiné oblasti, jsou následně často převáděna do časových řad. Na základě tohoto uspořádání je možné nad těmito řadami provádět analýzy, díky kterým jsme schopni lépe pochopit dynamiku vývoje těchto činitelů.

Diplomová práce se skládá z pěti hlavních kapitol. V první kapitole jsou vysvětleny pojmy ohledně časových řad, jejich určení, rozdělení a následná dekompozice těchto řad. Druhá kapitola je zaměřena na Fourierovy řady a Fourierovu transformaci. U třetí kapitoly jsou objasněny pojmy keprální analýza a keprum. Čtvrtá kapitola okrajově rozebírá Boxovu-Jenkinsonovu metodologii. Poslední kapitola je zaměřená na výběr dvou reálných časových řad, dvou generovaných časových řad a jejich následnou analýzu pomocí Fourierovou transformace a keprální analýzy. V případě reálných časových řad je uplatněna i Boxova-Jenkinsonova metodologie.

Cílem práce je analýza časových řad s využitím Fourierovy transformace a keprální analýzy.

1. ČASOVÉ ŘADY

Podle publikace [1] je časová řada (ČŘ) chápána jako posloupnost hodnot určitého statistického znaku (ukazatele) uspořádaných z hlediska času ve směru od minulosti k přítomnosti, kde tento ukazatel je věcně a prostorově vymezen po celé sledované období. Rubliková [2] uvádí, že časová řada proměnné Y je chronologická posloupnost věcně, prostorově a časově porovnatelných hodnot y_t pro $y = 1, 2, \dots, T$.

1.1. Druhy časových řad

Základní členění podle Rublikové [2] je:

- podle periodicity sledování,
- podle rozhodného časového hlediska zjišťování,
- podle druhu sledovaných ukazatelů,
- podle homogenity časových řad.

1.1.1. ČŘ dle periodicity sledování

Dlouhodobé časové řady nazýváme tehdy, jestliže sledované období hodnot ukazatelů je za rok, nebo delší časové období. Příkladem může být výše hrubého domácího produktu (HDP) v České republice v běžných cenách za období 2000-2010.

Krátkodobé časové řady jsou naopak sestavené z hodnot, naměřených v období kratší jak jeden rok (čtvrtletí, měsíce, týdny). Příkladem jsou např. měsíční hodnoty míry inflace v Pardubickém kraji za období 2008-2010.

Vysokofrekvenční časové řady, tedy řady sestavené z hodnot naměřených v časovém intervalu (dny, hodiny, minuty či sekundy). Typickým příkladem jsou hodnoty měnového kurzu CZK/EUR v období od 25. 2. 2012 do 29. 2. 2012.

1.1.2. ČŘ dle rozhodného časového hlediska zjišťování

Okamžikové časové řady (časové řady okamžikových ukazatelů), jsou sestaveny z hodnot, které se vztahují k určitému okamžiku. Hodnota takového ukazatele tedy nezávisí na délce časového intervalu sledování. Příkladem je zde stav obyvatelstva k 31.12.

Intervalové časové řady (časové řady intervalových ukazatelů), kde velikost ukazatele závisí na délce časového intervalu sledování. Příkladem jsou extenzivní ukazatele jako objem výroby.

Dle Arlta [3] je možné do této kategorie zařadit časovou řadu odvozené charakteristiky. Příkladem je produktivita práce v průmyslu České republiky v letech 1989 až 1996.

1.1.3. ČŘ dle sledovaných ukazatelů

Primární (prvotní) ukazatele zjišťují ukazatele přímo, např. počet dokončených bytů za rok.

Sekundární (odvozené) ukazatele:

- rozdíl nebo podíl různých primárních absolutních (intervalové, okamžikové) ukazatelů (např. roční zisk),
- funkce různých hodnot toho samého ukazatele (např. ukazatel sktruktury),
- funkce dvou nebo vícero ukazatelů (např. produktivita práce na zaměstnance),
- bazické indexy určitého ukazatele, koeficienty růstu, absolutní přírůstky, klouzavé průměry (např. řada indexů reálných mezd v ČR).

1.1.4. ČŘ dle homogenity

Prostorové vymezení se uskutečňuje stanovením územních hranic (např. okresu, kraje, regionu) v rámci, u kterých se zjišťují hodnoty. Nekomparovatelnost hodnot časové řady zde může vzniknout tehdy, jestliže se změní počet subjektů v daném prostorově vymezeném celku.

Časové vymezení znamená, že hodnoty proměnné nebo ekonomického ukazovatele se zjišťují za stejně dlouhé období. Problém nekomparovatelnosti zde spočívá v případě měsíčních údajů, kde každý měsíc má jiný počet dní.

Věcné vymezení hovoří o jasně definovaném ukazateli spolu s jeho měrnou jednotkou. Problém nekomparovatelnosti zde vzniká např. vlivem technického rozvoje (např. výroba televizorů za dlouhé časové období).

1.1.5. ČŘ dle absence náhodné složky

Dle Kvasničky [5] je možné časové řady rozdělit dle jejich náhodné složky (deterministické a stochastické).

Deterministické časové řady neobsahují náhodnou složku. Je-li znám mechanismus, pomocí kterého je daná časová řada utvářena, lze ji respektive její hodnoty s naprostou přesností předpovídat (např. funkce sinus a kosinus).

Stochastické časové řady jsou realizovány mechanismem, jehož procesy jsou plně náhodné, tudíž nelze tyto řady s naprostou přesností předpovídat (např. ekonomické časové řady).

1.2. Grafy časových řad

Jedním ze základních prostředků prezentace nasbíraných dat, která jsou uspořádaná z hlediska času, je graf. Z grafu je patrné několik základních pozorování typu, zda veličina dlouhodobě roste či klesá, jaký mají data trend atd. Obrázky jednotlivých typů grafů jsou umístěny v příloze A.

1.2.1. Spojnicový graf

Rublíková [2] uvádí, že se jedná o polygon, který zobrazuje vývoj řady y_t versus časová proměnná $t = 1, 2, \dots, T$. Jednotlivé hodnoty časové řady jsou zakresleny do souřadných os, na kterých jsou vyznačeny příslušné stupnice.

1.2.2. Box-whisker graf

Detailnější pohled na časovou řadu udává tzv. Box – whisker plot, který obsahuje sumární charakteristiky zkoumané časové řady. Publikace [2,3] uvádí, že základním prvkem je krabička, kde dolní hrana představuje 25 % kvantil (dolní kvartil) a horní hrana 75 % kvantil (horní kvartil), uvnitř je medián (50% kvantil) a symbolem „+“ je označen aritmetický průměr. Na konci svislých čar je poté uvedeno minimum a maximum.

1.2.3. Seasonal subseries graf

Zobrazuje hodnoty časové řady uspořádané podle jednotlivých sezón. Svislé čáry zobrazují skutečné hodnoty proměnné Y v konkrétní sezóně za všechny sledované roky. Vodorovné čáry v grafu potom značí průměrné hodnoty v jednotlivých sezónách za všechny roky, tedy:

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{ij}, \quad (1)$$

kde: y_{ij} jsou hodnoty Y ;

$i = 1, 2, \dots, n$ roků;

$j = 1, 2, \dots, s$ sezón.

1.3. Základní popisné charakteristiky ČŘ

U této kapitoly se vychází z publikací [1,2,3], kde se převážně jedná o určení základních matematických východisek při práci s časovou řadou (intervalovou, okamžikovou).

Základním zjištěním u časových řad jsou průměrné hodnoty. U intervalových ČŘ se vypočítává prostý aritmetický průměr, dle vztahu (2):

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^T y_t}{T}, \quad (2)$$

kde: y_t je sledovaná hodnota pro $t = 1, \dots, T$.

U okamžikových časových řad se počítá s chronologickým průměrem, kde se při shodné vzdálenosti mezi jednotlivými měřeními používá prostý chronologický průměr, dle vztahu (3):

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \dots + \frac{y_{T-1} + y_T}{2}}{T-1} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + \sum_{t=2}^{T-1} y_t + \frac{1}{2}y_T}{T-1}, \quad (3)$$

kde: y_t je sledovaná hodnota pro $t = 2, \dots, T$.

Při různé délce mezi měřeními se používá vážený chronologický průměr, dle vztahu (4):

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2} d_2 + \frac{y_2 + y_3}{2} d_3 + \dots + \frac{y_{T-1} + y_T}{2} d_T}{d_2 + d_3 + \dots + d_T}, \quad (4)$$

kde: dt je délka jednotlivých časových intervalů sledování daného okamžikového ukazatele pro $t = 1, \dots, T$.

Další část této kapitoly se zaměřuje na jednoduché míry dynamiky časových řad, které umožňují charakterizovat dle Arlta [2] chování a pomohou nám formulovat jistá kritéria pro jejich chování.

Nejjednodušší mírou dynamiky je absolutní přírůstek (první diference), který lze zapsat dle vztahu (5) jako:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}, \quad (5)$$

kde: y_t je sledovaná hodnota pro $t = 2, \dots, T$.

Často používaným bývá také průměrný absolutní přírůstek, dle vztahu (6):

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum_{t=2}^T \Delta y_t}{T-1} = \frac{(y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + (y_T - y_{T-1})}{T-1} = \frac{(y_T - y_1)}{T-1}, \quad (6)$$

kde: Δy_t je absolutní přírůstek pro $t = 2, \dots, T$.

Dle publikace [1] je potom možné tvrdit, že pokud jsou jednotlivé absolutní přírůstky řady v podstatě konstantní, to jest, kolísají nahodile kolem tohoto průměru, je zřejmé, že se řada mění (roste či klesá) v podstatě lineárně - má lineární trend. Pokud přírůstky kolísají kolem nuly, řada je bez trendu.

Další důležitou mírou dynamiky časových řad je relativní přírůstek, dle vztahu (7):

$$\delta_t = \frac{\Delta y_t}{y_t - 1} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_t - 1} = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1, \quad (7)$$

kde: Δy_t je absolutní přírůstek pro $t = 2, \dots, T$.

Předposledním vzorcem této podkapitoly je koeficient růstu časové řady, který nám po vynásobení stem udává, na kolik procent hodnoty v čase $t - 1$ vzrostla hodnota v čase t , vypočtený dle vztahu (8):

$$k_t = \frac{y_t}{y_{t-1}}, \quad (8)$$

kde: y_t je sledovaná hodnota pro $t = 2, \dots, T$.

Poslední rovnicí k míře dynamiky časových řad je průměrný koeficient růstu (průměrné tempo růstu) počítaný jako geometrický průměr koeficientů růstu, dle vztahu (9):

$$\bar{k} = \sqrt[T]{k_2 \cdot k_3 \cdot \dots \cdot k_T} = \sqrt[T]{\frac{y_2}{y_1} \times \frac{y_3}{y_2} \times \dots \times \frac{y_T}{y_{T-1}}} = \sqrt[T]{\frac{y_T}{y_1}}, \quad (9)$$

kde: k_T je koeficient růstu pro $t = 2, \dots, T$.

1.4. Dekompozice ČŘ

Hodnota ukazatele se v čase mění, tj. časová řada má určitý vývoj v čase. Tento vývoj můžeme na základě publikací [1,5,6] rozdělit na složky:

- trendovou,
- cyklickou,
- sezónní,
- reziduální.

Trendová složka (Tr_t) udává hlavní a dlouhodobý směr vývoje. Odráží tedy dlouhodobé změny v průměrném chování časové řady. Pokud je řada s nulovým trendem, tedy bez trendu (stacionární řada), kdy hodnoty ukazatele kolísají kolem určité konstantní úrovně. Trend může být dále rostoucí či klesající a odklony od trendu mohou mít formu skoků či zlomů. Trend může dále pak vykazovat periodické či nahodilé kolísání.

Podle publikace [1] periodické kolísání (oscilace, periodické řady) jsou pravidelné (tj. nenáhodné) výkyvy kolem hlavního trendu. Vyznačují se frekvencí či délkou periody a amplitudou. Podle délky periody jsou časové řady rozlišovány dle kolísání na:

- sezónní - s periodou jeden rok, tj. výkyvy uvnitř roku v určitých měsících a čtvrtletích (např. prodej sezónních typů výrobků),
- cyklické - s periodou více let, např. (výkyvy populace chroustů (perioda 4 roky)),
- krátkodobé - s periodou kratší než jeden rok (výkyvy ve dnech (např. špičky v dopravě)).

Sezónní složka (S_t) vyjadřuje pravidelné kolísání okolo trendu v rámci kalendářního roku.

Cyklická složka (C_t) vyjadřuje kolísání okolo trendu, ve kterém fáze růstu, poklesu a periody se vytvářejí za období delší jak jeden rok s nepravidelným charakterem.

Náhodná složka (reziduální ε_t) má nesystematický charakter. Jedná se o nepravidelné výkyvy okolo trendu, které vznikají v důsledku náhodných či nepředvídatelných vlivů.

Klasická dekompoziční analýza časové řady předpokládá, že hodnota y_t se dá rozložit na součet složek časové řady nebo na jejich násobek (aditivní, multiplikatívni).

Aditivní model složek, jehož předpokladem je, že jednotlivé složky jsou uvažovány ve svých absolutních hodnotách a jsou v měrných jednotkách své původní řady zapsány dle vztahu (10):

$$y_t = Tr_t + C_t + S_t + \varepsilon_t \quad (10)$$

kde: Tr_t je trendová složka;

C_t je cyklická složka;

S_t je sezónní složka;

ε_t je náhodná složka.

Multiplikatívni model předpokládá, že v absolutní hodnotě je pouze trendová složka, jež je zapsán dle vztahu (11):

$$y_t = Tr_t \times C_t \times S_t \times \varepsilon_t, \quad (11)$$

kde: Tr_t je trendová složka;

C_t je cyklická složka;

S_t je sezónní složka;

ε_t je náhodná složka.

1.5. Vyrovnání (očistění) ČŘ

Petr [7] uvádí dva druhy očistění časové řady, a to očistění dle kalendářních dnů, kde výpočet je dán vztahem (12):

$$y_t = y_t \frac{\overline{k_t}}{k_t}, \quad (12)$$

kde: y_t je hodnota očišťovaného ukazatele v příslušném dílčím období roku t ;

k_t je počet kalendářních dní v příslušném dílčí období;

$\overline{k_t}$ je průměrný počet kalendářních dní v dílčím období roku.

Očistění časové řady dle pracovních dnů, je dáno vztahem (13):

$$y_t = y_t \frac{\overline{p_t}}{p_t}, \quad (13)$$

kde: y_t je hodnota očišťovaného ukazatele v příslušném dílčím období roku t ;

p_t je počet pracovních dní v příslušném dílčí období;

$\overline{p_t}$ je průměrný počet dní ve stejném období.

Vyrovnání ČŘ je podle publikace [1,3] mechanické (klouzavými průměry) nebo vyrovnání analytické (trendovou funkcí).

Vztah (14) pracuje s prostým klouzavým průměrem, což je klouzavý úhrn pro p období dělený počtem období (tedy p). Klouzavý průměr je vynášen do středu klouzavé části sledovaných p období, tedy dle vztahu (14):

$$\bar{y}_t = \frac{y_{t-m} + y_{t-m+1} + \dots + y_t + \dots + y_{t+m-1} + y_{t+m}}{2m+1}, \quad (14)$$

kde: $2m+1=p$ je počet období (délka klouzavého průměru);

t je interval.

Je-li p sudé číslo, tj. $p = 2m$ používají se centrované klouzavé průměry. Centrovaný klouzavý průměr se pak počítá jako průměr ze dvou sousedních klouzavých průměrů, dle vztahu (15):

$$\bar{y}_t = \frac{y_{t-m} + 2y_{t-m+1} + \dots + 2y_t + \dots + 2y_{t+m-1} + y_{t+m}}{4m}, \quad (15)$$

kde: $2m+1=p$ je počet období (délka klouzavého průměru);

t je interval.

Hodnota je vynášena na konec období t . První klouzavý průměr je počítán ke konci období $m+1$, poslední k období $n-m$.

Volba hodnoty p , tedy délky klouzavého průměru, nám udává velikost vyhlazení, tedy čím vyšší hodnota p , tím je větší vyhlazení, ale také roste počet nevyrovnaných hodnot na začátku a konci řady. U periodických řad je voleno p tak, aby se rovnalo periodě.

Trendové funkce

Zásadní výhodou analytického vyrovnání oproti klouzavým průměrům je vyrovnání celé řady a použití výsledného matematického vztahu k prognóze budoucích hodnot [1].

Nejprve si vyjádříme konstantní trend, jehož hodnoty jsou k časové proměnné t ($t = 1, \dots, T$) konstantní, dle vztahu (16):

$$Y_t = \beta_0, \quad (16)$$

kde: β_0 je parametr.

Odhad parametru β_0 se provede pomocí metody nejmenších čtverců tak, aby trendová funkce co nejlépe zachytila co nejvíce ze systematické části a rezidua měla charakter bílého šumu.

Lineární regresí (lineární funkci) zapíšeme, dle vztahu (17):

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t \quad (17)$$

kde: β_0, β_1 jsou parametry;

t je sledovaná proměnná.

Kvadratická funkce se používá, pokud první diference rostou či klesají a druhé kolísají kolem průměrné druhé diference, kde funkce je zapsána dle vztahu (18):

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_1 t^2, \quad (18)$$

kde: β_0, β_1 jsou parametry;

t je sledovaná proměnná.

Exponenciální funkce se používá tehdy, pokud řetězové indexy kolísají kolem geometrického průměru, kde funkce je zapsána dle vztahu (19):

$$Y_t = \alpha \beta^t, \quad (19)$$

kde: α, β jsou parametry;

t je sledovaná proměnná pro $t = 1, \dots, T, (\beta > 0)$.

Přestože je exponenciální funkce nelineární v parametrech, odhadují se její parametry metodou nejmenších čtverců, ale až po linearizaci zlogaritmováním.

Poslední trendovou funkcí, která zde bude zmíněna, je funkce logistická, zapsaná dle vztahu (20):

$$Y_t = \frac{\gamma}{1 + \alpha \beta^t}, \quad (20)$$

kde: α, β, γ jsou parametry;

t je sledovaná proměnná pro $t = 1, \dots, T, (\beta > 0, \gamma > 0)$.

2. FOURIEROVA ANALÝZA

Abychom mohli přistoupit k Fourierově transformaci, je nejprve třeba vysvětlit pojmy, které jsou pevně s transformací spjaté a ze kterých transformace vychází. Proto bude nejprve nutné definovat pojmy jako trigonometrická řada a z ní vycházející Fourierova řada. Dále konvergence těchto řad a Fourierův integrál. Jako poslední část bude definována diskrétní Fourierova transformace (DFT) a algoritmus výpočtu, tzv. rychlá Fourierova transformace (FFT).

2.1. Trigonometrická řada

Podle publikace [8] definujeme trigonometrickou řadu ve tvaru vztahu (21):

$$\frac{1}{2}A_0(\theta) + \sum_1^{\infty} A_n(\theta), \quad (21)$$

kde: $A_0(\theta) = a_0$;

$$A_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \text{ pro } (n > 0).$$

Taková řada bude nazývána T . Částečným součtem řady T (součtem n -tého stupně) je výraz dle vztahu (22):

$$s_n(\theta) = \frac{1}{2}A_0(\theta) + \sum_1^n A_m(\theta), \quad (22)$$

kde: $A_0(\theta) = a_0$;

$$A_m(\theta) = a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta \text{ pro } (m > 0).$$

Koeficienty a_n (a_m) a b_n (b_m) jsou pro n (m) > 1 . Nyní budou definovány koeficienty a_n a b_n pro ostatní celé hodnoty n takto, dle vztahu (23):

$$a_{-n} = a_n (n > 0), b_0 = 0, b_n = -b_{-n} (n > 0), \quad (23)$$

kde: a_n, b_n jsou koeficienty.

Vztah (24) definuje čísla c_n jako:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (24)$$

kde: a_n, b_n jsou koeficienty.

Pak koeficienty a_n a b_n jsou tedy zapsány dle vztahu (25):

$$a_n = (c_n + c_{-n}), b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad (25)$$

kde: a_n, b_n , jsou koeficienty;

c_n je hodnota.

Jsou-li naopak dány hodnoty c_n , můžou být koeficienty a_n a b_n definovány vztahem (26):

$$s_n(\theta) = c_0 + \sum_1^n \{(c_m + c_{-m})\cos m\theta + i(c_m - c_{-m})\sin m\theta\} = \sum_{-n}^n c_m e^{mi\theta}, \quad (26)$$

kde: $s_n(\theta)$ je částečný součet;

c_m je hodnota.

Nyní může být $T(\theta)$ definována jako řada dle vztahu (27):

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{ni\theta}, \quad (27)$$

kde: c_n je hodnota;

$e^{ni\theta}$ je exponenciální funkce.

Vztah (21) bude nazýván jako reálná trigonometrická řada a vztah (27) jako komplexní trigonometrická řada, kde toto rozdělení je dáno obsahováním exponenciální funkce v příslušné řadě. Trigonometrické řady chápeme zcela formálně, tudíž nic se nepředpokládá o jejich konvergenci pro všechna θ nebo pro některá θ . Řadu dle vztahu (27) však chápeme jako jistou limitní formu částečného součtu dle vztahu (26). [8]

2.2. Fourierovy řady

Následující část kapitoly bude vycházet zejména z publikace [9] a doplňkově také z publikací [10,11].

Fourierovou řadou k dané funkci x (komplexní) periodické s periodou P , $P > 0$, lze rozumět jako nekonečnou řadu dle vztahu (28):

$$\zeta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{jk2\pi}{P}t}, \quad (28)$$

kde: c_k je koeficient;

$e^{jk2\pi/P}$ je ortogonální funkce pro t ($-\infty < t < \infty$).

Pro koeficient c_k předchozího vztahu platí vztah (29):

$$C_k = \frac{1}{P} \int_0^P x(t) e^{-\frac{jk2\pi}{P}t} dt, \quad (29)$$

kde: $x(t)$ je funkce;

$e^{-jk2\pi t/P}$ je ortogonální funkce pro $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Fourierova řada je rozvojem na soustavě ortogonálních funkcí $e^{\frac{jk2\pi}{P}t}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, pro které platí vztah (30):

$$\int_0^P e^{\frac{jk2\pi}{P}t} e^{\frac{ji2\pi}{P}t} dt = \begin{cases} 0, & i \neq -k, \\ P, & i = -k, \end{cases} \quad (30)$$

kde: $e^{-jk2\pi t/P}$ je ortogonální funkce pro $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Vzhledem k tomu, že koeficienty C_k jsou určeny hodnotami funkce x v intervalu periodicity $\langle 0, P \rangle$, může být Fourierova řada sestrojena i k funkci, která periodická není. Tato funkce však musí být definována na intervalu $\langle 0, P \rangle$, nebo taková funkce, pro kterou platí $x_0(t) = 0$, $t > P$, $t < 0$. Nyní už jen stačí periodizovat x_0 tím, že z ní bude vytvořena periodická funkce jednoduchým předpisem dle vztahu (31):

$$x(t) = x_0(t - vP), \quad (31)$$

kde: $t \in \langle vP, (v+1)P \rangle$;

$$v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Koeficienty C_k lze potom vyjádřit pro $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ vztahem (32):

$$C_k = \frac{1}{P} \int_0^P x_0(t) e^{-\frac{jk2\pi}{P}t} dt = \frac{1}{P} \int_{t_0}^{t_0+P} x(t) e^{-\frac{jk2\pi}{P}t} dt, \quad (32)$$

kde: $x(t)$ je funkce;

$e^{-jk2\pi t/P}$ je ortogonální funkce pro $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

t_0 je libovolné.

Ekvivalentní zápisy Fourierovy řady jsou uvedeny v následujících rovnicích pro případy reálné funkce x vztahy (33-36):

$$\zeta(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k2\pi}{P}t\right) + b_k \sin\left(\frac{k2\pi}{P}t\right) \right], \quad (33)$$

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_0^P x(t) dt, \quad (34)$$

$$a_k = \frac{2}{P} \int_0^P x(t) \cos\left(\frac{k2\pi t}{P}\right) dt, \quad (35)$$

$$b_k = \frac{2}{P} \int_0^P x(t) \sin\left(\frac{k2\pi t}{P}\right) dt, \quad (36)$$

kde: a_0, a_k, b_k , jsou koeficienty pro $k = 0, 1, 2, \dots$.;

$x(t)$ je funkce;

P je perioda.

Další ekvivalentní zápisy Fourierovy řady jsou uvedeny v následujících rovnicích pro případy reálné funkce x vztahy (37-39):

$$\zeta(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k2\pi t}{P} + \varphi_k\right), \quad (37)$$

$$A_0 = a_0, A_k = \sqrt{(a_k^2 + b_k^2)}, \quad (38)$$

$$\cos \varphi_k = \frac{a_k}{A_k}, \sin \varphi_k = \frac{-b_k}{A_k}, \quad (39)$$

kde: a_0, a_k, b_k , jsou koeficienty pro $k = 0, 1, 2, \dots$.;

A_0, A_k , jsou koeficienty pro $k = 0, 1, 2, \dots$.;

φ_k je fáze harmonických složek;

P je perioda.

Skutečnost, že periodickou funkci lze vyjádřit Fourierovou řadou, nám dovoluje např. rovnice (37), kde každý reálný periodický průběh nějaké veličiny, lze vyjádřit jako superpozici nekonečně mnoha elementárních průběhů kosinového tvaru, jejichž frekvence je dána násobky základní frekvence $1/P$. Amplitudy těchto rozložených složek jsou potom koeficienty A_k a fáze těchto složek je φ_k .

V praxi je potom úloha určení koeficientů A_k a fází φ_k nazývána harmonickou analýzou a jednotlivé elementární průběhy $A_k \cos(2\pi t/P + \varphi_k)$ jsou harmonickými složkami (harmonickými). Veličina A_k je amplitudou a φ_k fází harmonické složky. Veličina C_k je pak nazývána jako komplexní amplitudou k -té harmonické složky.

Harmonickou syntézou je potom nazýván obrácený proces, při kterém se ze zadaných fází a amplitud vytváří výsledná funkce.

Koeficienty A_k a φ_k nebo jejich grafické znázornění je potom nazýváno, v závislosti na pořadí k -té harmonické složky, spektrem signálu funkce x .

Kompletní výpočet příkladu FŘ je uveden v příloze C.

2.3. Dirichletovy podmínky

Nyní bude položena otázka za jakých podmínek, kladených na funkci $f(t)$, lze Fourierův rozvoj sestrojít. Podle literatury [12,13] v analýze funkcí reálné proměnné se dokazuje, že ve Fourierovu řadu lze rozvinout každou funkci reálné proměnné, která vyhovuje tzv. Dirichletovým podmínkám.

Komplexní funkci $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$ je možné psát ve tvaru $f(t) = u(t) + i \cdot v(t)$, kde i je imaginární jednotka a $u(t)$, $v(t)$ jsou reálné funkce reálné proměnné t . Potom, pokud vyhovují reálné funkce u , v Dirichletovým podmínkám v reálném oboru, může být vytvořen Fourierův rozvoj i komplexní funkce $f(t)$. [12]

Funkce $f(t)$ splňuje **Dirichletovy podmínky** na zadaném intervalu, pokud platí dle [13]:

1. $f(t)$ je periodická nebo periodicky rozšířitelná funkce (funkce, kterou lze ze zadaného intervalu rozšířit prostým opakováním jejího průběhu na celou číselnou osu),
2. na zadaném intervalu (jedné periodě) je funkce $f(t)$ alespoň po částech spojitá, tj. má pouze konečný počet bodů nespojitosti I. Druhu,
3. na zadaném intervalu má funkce konečný počet extrémů (konstantní části funkce $f(t)$ se neuvažují),
4. funkce $f(t)$ je definovaná v krajních bodech intervalu (tj. nabývá v nich konečných hodnot) nebo existují příslušné jednostranné limity funkce v těchto bodech.

*„Nechť funkce $f(t)$ splňuje uvedené Dirichletovy podmínky a necht' existuje **stejněměrně konvergentní** rozvoj této funkce na periodě P ve tvaru (28), pak koeficienty tohoto rozvoje budou Fourierovy koeficienty dle vztahu (29).“*

2.4. Konvergence Fourierovy řady

Práce [14] pojednává o tom, že pokud mluvíme o konvergenci funkční řady v bodě, pak se vlastně jedná o konvergenci číselné řady. FŘ je řada funkční, pak tedy dosazením konkrétní hodnoty t_k za proměnnou t se dostane řada číselná. Teorie řad říká, že číselná řada $\sum_{n=1, \dots, \infty} a_n$ je konvergentní, existuje-li vlastní limita posloupnosti částečných součtů této řady.

Tuto limitu považujeme za součet původní řady a říkáme, že řada je konvergentní a existuje její Cauchyův součet.

Obdobný problém vzniká při nalezení součtu FŘ v bodech nespojitosti. Z teorie funkčních řad plyne, že může existovat například konvergence v průměru, kdy sice neexistuje limita posloupnosti částečných součtu v bodě, ale existují například dvě limity, jejichž aritmetický průměr považujeme za výsledek. Přirozeně vzniká otázka zobecnění pojmu součet řady. Níže budou nastíněny metody sumace řad, dle publikace [14], které budou mít vlastnosti: **regulárnost, lineárnost**.

- Metoda sumace je **regulární**, splňuje-li podmínku, kde má-li řada $\sum a_n, n=1, \dots, \infty$ Cauchyův součet S , pak i zobecněný součet této řady musí být rovný S .
- Nechť řada $\sum a_n, n=1, \dots, \infty$ má Cauchyův součet S_a a řada $\sum b_n, n=1, \dots, \infty$ má Cauchyův součet S_b . Metoda sumace je **lineární**, platí-li pro zobecněný součet řady vztah (40):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S_a + S_b, \quad (40)$$

kde: a_n, b_n jsou koeficienty;

S_a, S_b jsou Cauchyovy součty.

Klasický (Cauchyův) součet řad je definován jako limita posloupnosti částečných součtů řady. Nechť $S_n = \sum a_k, k=1, \dots, n$ je *částečný* součet řady, pak součet řady je dán vztahem (41):

$$S \stackrel{def}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad (41)$$

kde: S_n je částečný součet řady.

Součet řady ve smyslu Cesàra a Fejera je definován jako limita posloupnosti aritmetických průměrů z částečných součtů řady dle vztahu (42):

$$S \stackrel{def}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k, \quad (42)$$

kde: S_n je částečný součet řady;

n je počet částečných součtů.

Abelovy-Poissonovy součty

Nechť je řada $\sum a_n x^n, n=1, \dots, \infty$ konvergentní na $x \in (0, 1)$ a nechť

$$\exists \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = S < \infty, \quad (43)$$

kde: S je součet řady.

Pak říkáme, že řada $\sum a_n x^n$, $n=1, \dots, \infty$ je konvergentní v bodě $x=1$ a její součet se rovná právě této limitě. Jinými slovy pro $x=1$ dostaneme číselnou řadu $\sum a_n$, $n=1, \dots, \infty$, která je konvergentní a její součet bude S . [14]

Dle publikace [16] rozlišujeme dvě kritéria bodové konvergence a jedno kritérium konvergence stejnoměrné.

1. Kritérium bodové konvergence FŘ

Je-li periodická funkce f se základní periodou T po částech hladká (funkce f je po částech hladká, jestliže je po částech spojitá spolu se svou derivací f') na intervalu periodicity $\langle \alpha, \alpha + T \rangle$, $\alpha \in R$ potom FŘ funkce f je konvergentní na R a pro její součtovou funkci s platí:

- $s_n(x) \rightarrow s(x) = f(x)$ v každém bodě x , ve kterém je funkce f spojitá,
- $s_n(x) \rightarrow s(x) = (1/2) * [f(x+) + f(x-)]$ v každém bodě x nespojitosti nejvýše prvního druhu funkce f .

2. Kritérium bodové konvergence FŘ

Nechť periodická funkce f se základní periodou T splňuje na intervalu periodicity $\langle \alpha, \alpha + T \rangle$, $\alpha \in R$ Dirichtelovy podmínky, potom FŘ funkce f je konvergentní na R a pro její součtovou funkci s platí:

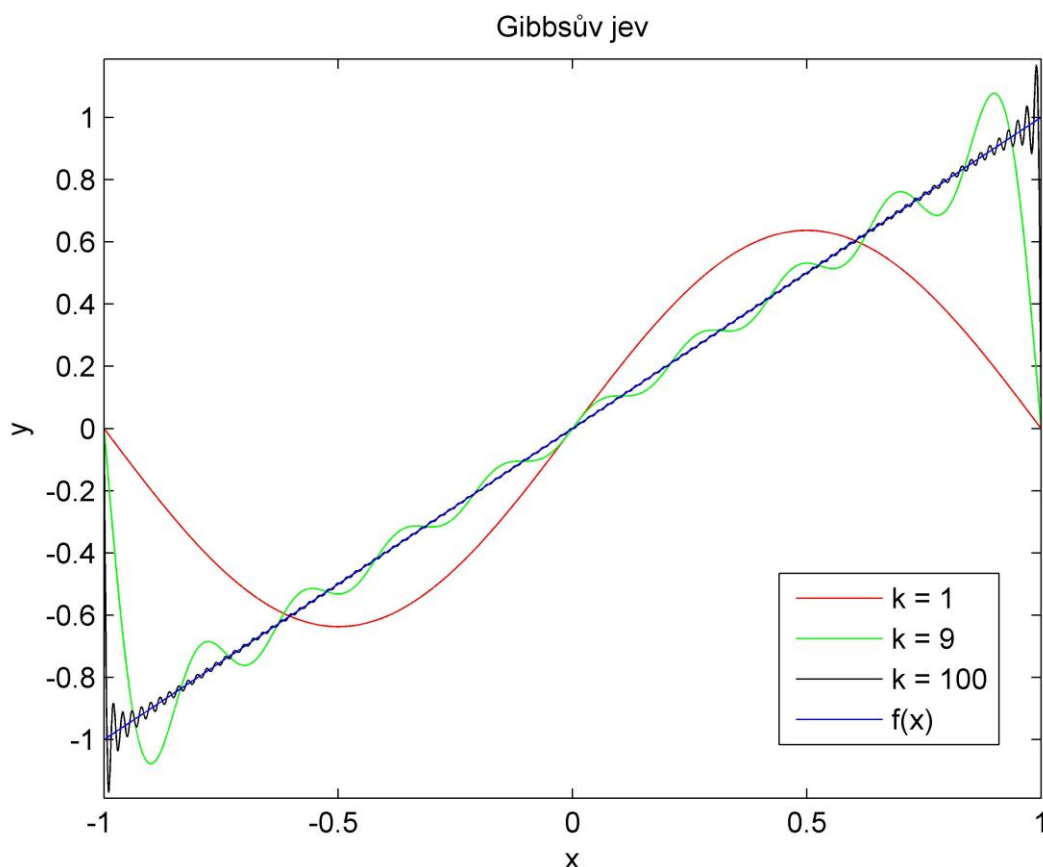
- $s_n(x) \rightarrow s(x) = f(x)$ v každém bodě x , ve kterém je funkce f spojitá,
- $s_n(x) \rightarrow s(x) = (1/2) * [f(x+) + f(x-)]$ v každém bodě x nespojitosti nejvýše prvního druhu funkce f .

Kritérium stejnoměrné konvergence FŘ

Je-li periodická funkce f se základní periodou T spojitá na intervalu periodicity $\langle \alpha, \alpha + T \rangle$, $\alpha \in R$, a má-li f na tomto intervalu derivaci f' , potom FŘ funkce f je stejnoměrně konvergentní na R k funkci f , tedy pro její součtovou funkci s platí, že $s_n \xrightarrow{R} s$ a $\forall x \in R: s(x) = f(x)$.

Jelikož FŘ konverguje k původní funkci skoro ve všech bodech ve smyslu Cesàra, bude docházet v bodech nespojitosti při aproximaci FŘ k „překmitu“ přibližně 9% od velikosti „skoku“ na každou stranu. Tento jev se označuje jako **Gibbsův jev**. [13]

Na obrázku 1 je možné vidět Gibbsův jev, jenž je pomyslnou „Achillovou patou“ aproximace Fourierovou řadou. Necht' je dána funkce s nespojitostí $f(x) = x$ pro $x \in (-1,1)$ a FŘ vypočítanou pro $k = 1$ (červeně), $k = 9$ (zeleně) a $k = 100$ (černě). Důležité je tedy to, co se děje v bodech nespojitosti, kde jak lze vidět níže, dochází k překmitu. I kdyby počet harmonických (k) byl zvyšován až do nekonečna, bude se pouze zmenšovat šířka překmitu v čase, ale amplituda se bude čím dál více blížit 9 procentnímu překmitu od zadané funkce $f(x)$.



Obrázek 1 - Grafické zobrazení Gibbsova jevu

Zdroj: vlastní zpracování

V příloze je umístěn zdrojový kód pro MATLAB R2010b s názvem Gibbs.m.

2.5. Fourierův integrál

V předešlých podkapitolách byly rozebrány podmínky, které umožňovaly rozvinout funkci f do Fourierovy (trigonometrické) řady, kde nutnou podmínkou byla periodičita funkce f . Pokud funkce periodická není, lze ji za určitých podmínek vyjádřit pomocí Fourierova integrálu, který je možné si představit jako limitní případ Fourierovy řady funkce, jejíž perioda roste nade všechny meze. [10]

Podle publikace [18] lze neperiodickou funkci definovanou pro $t \in \mathbf{R}$, která je absolutně integrovatelná, chápat jako mezní případ funkce periodické pro $T \rightarrow \infty$. Lze očekávat, že v tomto případě Fourierova řada přejde ve Fourierův integrál. Následující odvození není zcela matematicky přesné, jde především o pochopení vztahu mezi Fourierovou řadou a dvojným Fourierovým integrálem a to jak pro Fourierův integrál v reálném tvaru tak i pro Fourierův integrál v komplexním tvaru.

Odvození výsledných vztahů je možné nalézt v literatuře [10,18], ze které jsou převzaty i následující konečné vztahy fourierových integrálů.

2.5.1. Fourierův integrál v komplexním tvaru

Nechť pro periodickou funkci $f(t)$ existuje konvergentní Fourierova řada, kterou v komplexním oboru zapíšeme ve tvaru vztahu (28), resp. vztahu (29).

Aby nedošlo ke kolizi ve značení, bude zaměněna v posledním integrálu, tedy vztahu (29), proměnná t za x , tj. $t \equiv x$ na intervalu $[\alpha-P, \alpha+P]$. Pokud bude postupováno dle jednotlivých kroků odvození, dojde se k výslednému vztahu (44), který vyjadřuje tzv. **dvojný Fourierův integrál** v komplexním tvaru:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega(t-x)} dx, \quad (44)$$

kde: $\omega_n = 2\pi n/T$ (ω je úhlová frekvence);

$f(x)$ je funkce;

$e^{in2\pi(t-x)/T}$ je ortogonální funkce.

Podmínky konvergence Fourierova integrálu jsou takové, že funkce $f(t)$ je absolutně integrovatelná pro $t \in \mathbf{R}$, tj. existuje konvergentní integrál $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$, funkce je po částech spojitá a má po částech spojitou derivaci $f'(t)$. Potom lze vztah (47) přepsat přesněji:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] d\omega = \begin{cases} f(t), & \text{v bodech spojitosti} \\ \frac{1}{2} [f(t_+) + f(t_-)], & \text{v bodech nespojitosti.} \end{cases} \quad (45)$$

kde: $\omega_n = 2\pi n/T$ (ω je úhlová frekvence);

$f(x)$ je funkce;

„Nechť funkce $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ splňuje výše uvedené podmínky, pak dvojný Fourierův integrál v komplexním tvaru je definován vztahem (51).“ [18]

2.5.2. Fourierův integrál v reálném tvaru

Nechť funkce $f(t)$ je funkce reálná. Ve vztahu (44), který je platný pro všechna t , v němž $f(t)$ a $f'(t)$ jsou spojité. Po oddělení imaginární, reálné části a aplikaci příslušných kroků vedoucích k odvození, je získán dvojný Fourierův integrál v reálném tvaru (**Fourierův integrál**), který vypadá následovně:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \int_0^{+\infty} \cos(\omega(t-x)) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega(t-x)) dx, \quad (46)$$

kde: ω je úhlová frekvence;

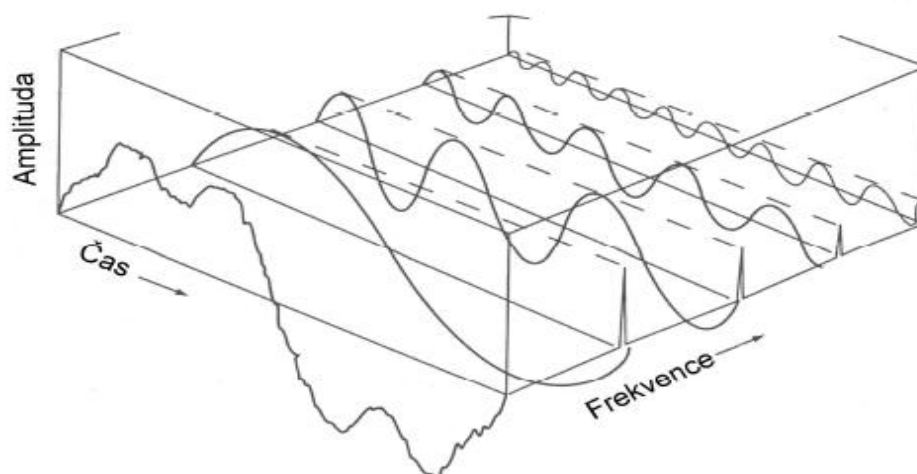
$f(x)$ je funkce;

$\cos(\omega(t-x))$ je sudá funkce proměnné ω .

2.6. Fourierova transformace

Fourierova transformace je základním nástrojem pro zpracování signálu. Dovoluje vzájemně jednoznačný převod signálů z/do časové reprezentace $f(t)$ do/z frekvenční reprezentace $F(f)$. FT umožňuje tedy analyzovat frekvenční obsah (spektrum) signálu. [19]

Obrázek 2 zachycuje vztahy mezi časovou a frekvenční reprezentací.



Obrázek 2 - Amplitudo - frekvenční diagram

Zdroj: [23]

Podle Bryjové [20] fyzikální procesy a signály můžeme studovat v časové doméně, kde jsou reprezentovány obecně komplexní funkcí (signálem) $s(t)$ vyjadřující závislost nějaké veličiny na čase, přičemž t může reprezentovat i jinou než časovou souřadnici (může se jednat o délku např.). Signály a fyzikální procesy můžeme též studovat ve frekvenční doméně, kde jsou reprezentovány obecně komplexní funkcí $s(f)$ vyjadřující, jak je signál poskládán ze sinů a kosinů. Analogicky f může reprezentovat i jinou než časovou frekvenci (typicky délkovou frekvenci).

Holčík [21] definuje frekvenční spektrum signálu jako rozložení amplitud a počátečních fází harmonických složek, ze kterých se signál skládá v závislosti na frekvenci.

Následující vztahy, či jejich odvození vychází z literatury [18]. Bude-li označen vnitřní integrál jako funkce $S(\omega)$ proměnná $\omega \in \mathbf{R}$ a bude-li navrácen původní zápis proměnné t , pak může být integrál zapsán dle vztahu (47):

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (47)$$

kde: $\omega_n = 2\pi k/P$ (ω je úhlová frekvence);

$f(t)$ je funkce;

$e^{-j\omega t}$ je ortogonální funkce.

Zápis Fourierova integrálu zjednoduší, dle vztahu (48):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (48)$$

kde: $\omega_n = 2\pi k/T$ (ω je úhlová frekvence);

$S(\omega)$ je funkce;

$e^{j\omega t}$ je ortogonální funkce.

Zpravidla se však používá místo $S(\omega)$ funkce $F(i\omega)$, která je definovaná na imaginární ose.

Nechť funkce $f(t)$ je absolutně integrovatelná a $f(t)$, $f'(t)$ jsou po částech spojitě v \mathbf{R} , pak funkce bude zapsána ve vztahu (49):

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (49)$$

kde: $\omega_n = 2\pi k/T$ (ω je úhlová frekvence);

$f(t)$ je funkce;

$e^{-j\omega t}$ je ortogonální funkce.

Vztah (49) bude nazýván jako **komplexní Fourierův obraz** funkce f . Funkce $f(t)$ je tedy originálem (předmětem).

Zobrazení, které předmětu $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$, přiřazuje Fourierův obraz $F(i\omega)$ dle vztahu (49) nazýváme **Fourierovou transformací** a značíme ji F . Tedy obraz $F = F\{f\} = Ff$. Fourierův obraz $F(i\omega)$ se nazývá též spektrální funkce nebo spektrální hustota originálu f a charakterizuje spojité spektrum funkce $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$:

- hodnota $|F(i\omega)|$ tvoří amplitudovou spektrální hustotu,
- $\varphi = \arg F(i\omega)$ (resp. $-\arg F(i\omega)$) je fázová spektrální hustota, $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

Za podmínky, že existuje konvergentní dvojný Fourierův integrál, je zpětná Fourierova transformace realizována vztahem (50):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (50)$$

kde: $\omega_n = 2\pi k/T$ (ω je úhlová frekvence);

$F(i\omega)$ je funkce;

$e^{j\omega t}$ je ortogonální funkce.

Zpětnou Fourierova transformace je značena F^{-1} , potom originál $f = F^{-1}\{F\}$. Při porovnání vztahů pro přímou a pro zpětnou Fourierovu transformaci je vidět, že se liší násobnou konstantou, která nemá vliv na konvergenci integrálu. Dále se liší znaménkem v exponentu jádra transformace. Bude-li definován vztah pro Fourierův obraz vztahem (51):

$$S(\omega) = F(i\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (51)$$

kde: $\omega_n = 2\pi k/T$ (ω je úhlová frekvence);

$f(t)$ je funkce;

$e^{j\omega t}$ je ortogonální funkce.

Pro zpětnou transformaci platí vztah (52):

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (52)$$

kde: $\omega_n = 2\pi k/T$ (ω je úhlová frekvence);

$F(i\omega)$ je funkce;

$e^{j\omega n}$ je ortogonální funkce.

Je zřejmé, že u těchto výše uvedených vzorců existuje symetrie mezi originálem a jeho obrazem: je-li $S(\omega) = F(i\omega)$ obraz funkce $f(t)$, pak funkce $f(-\omega)$ je Fourierova transformace $S(t)$.

Poslední vztah lze vyjádřit vzorcem, který budeme nazývat FT v reálném tvaru (53):

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega, \quad (53)$$

kde: $A(\omega)$ je amplituda ($A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}$);

$\varphi(\omega)$ je fáze ($\varphi(\omega) = \arctan \frac{b(\omega)}{a(\omega)} = -\arg F(i\omega)$, $\varphi(\omega) \in (-\pi, +\pi]$).

S čím je však potřeba u FT počítat, je **relace neurčitosti**, která vyjadřuje vztah mezi trváním signálu a frekvencí zkoumaného signálu. Relace říká, že přesná znalost frekvence a její časová lokalizace jsou vzájemně neslučitelné požadavky. [20]

Je-li určeno spektrum pro celý, dostatečně dlouho trvající signál, bude obdrženo maximum informace o obsažených frekvencích, ale nebude získána žádná informace o tom, kdy se tyto frekvence vyskytly. Aplikací krátkodobé FT (STFT), bude získána informace o lokalizaci, ale ztratíme informace o frekvenci. [20]

Z takovýchto závěrů plyne to, že FT (Fourierova spektrální analýza) je vhodná pro stacionární signály, jejichž charakter je časově invariantní. Pro nestacionární signály je vhodné použít metody waveletové (vlnkové) analýzy.

Základní vlastnosti, které FT nabývá, při změně reprezentací jsou uvedeny v tabulce (1), kde malým písmenem f je chápána časová reprezentace a velkým písmenem F značena zpravidla reprezentaci frekvenční.

Tabulka 1 - Vlastnosti FT

Vlastnosti	$f(t)$	$F(\xi)$
Linearita	$a f_1(t) + b f_2(t)$	$a F_1(\xi) + b F_2(\xi)$
Dualita	$F(t)$	$f(-\xi)$
Konvoluce	$(f * g)(t)$	$F(\xi) G(\xi)$
Součin	$f(t) g(t)$	$(F * G)(\xi)$
Časový posun	$f(t - t_0)$	$e^{-2\pi i \xi t_0} F(\xi)$
Frekvenční posun	$e^{2\pi i \xi_0 t} f(t)$	$F(\xi - \xi_0)$
Derivace	$\frac{df(t)}{dt}$	$2\pi i \xi F(\xi)$
Násobení t	$t f(t)$	$\frac{i}{2\pi} \frac{dF(\xi)}{d\xi}$
Změna měřítka času	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F(\xi/a)$

Zdroj: [21]

2.7. Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

DFT je transformace konečných posloupností komplexních nebo reálných čísel. Jejím výsledkem je opět konečná posloupnost obecně komplexních čísel. DFT zobrazuje konečnou posloupnost čísel opět na konečnou posloupnost čísel. [9]

V případě počítačového zpracování není k dispozici spojitá funkce, ale jen její hodnoty v diskrétních vzorkovacích okamžicích. Z těchto důvodů se definuje diskrétní Fourierova transformace, jejíž vstupy a výstupy jsou posloupnostmi hodnot, tedy diskretizovaný signál.

V této kapitole jsou vypsány pouze finální vztahy, bez zevrubnějšího matematického popisu (vlastnosti apod.). Bližší matematický popis a širší obeznámení se s DFT může případný čtenář načerpat z publikace [9,24].

Následné definice přímé i zpětné DFT jsou převzaty z publikace [9].

Přímá diskrétní Fourierova transformace

Je-li x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, posloupnost N konečných komplexních čísel, pak její přímá diskrétní Fourierova transformace je dána posloupností hodnot X_k , která je vyjádřena vztahem (54):

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{\frac{-jik2\pi}{N}}, \quad (54)$$

kde: X_k je obraz posloupnosti x_i ;

$$k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Zpětná diskrétní Fourierova transformace

Je-li X_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, posloupnost N konečných komplexních čísel, pak její zpětná diskrétní Fourierova transformace je dána posloupnost N čísel vyjádřená vztahem (55):

$$x_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{jik2\pi}{N}}, \quad (55)$$

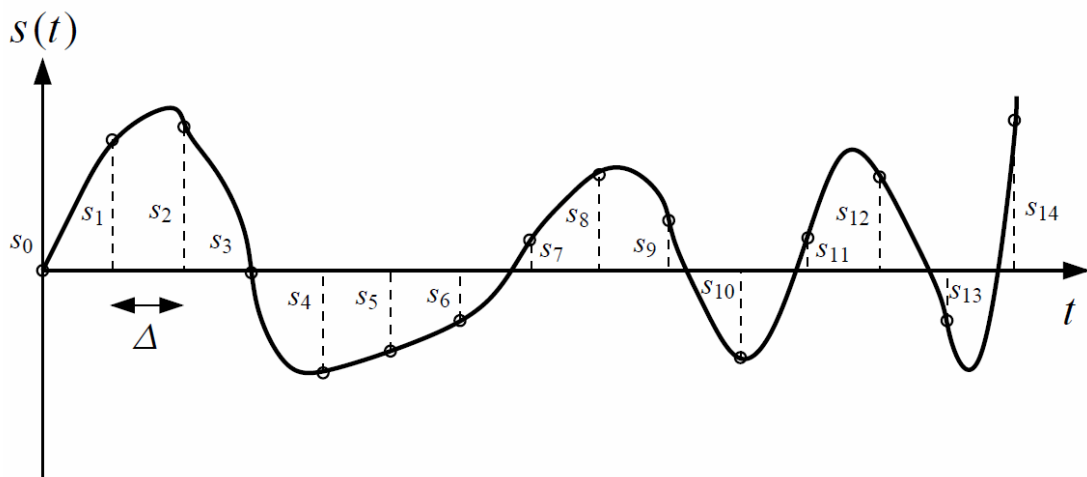
kde: $i = 0, 1, \dots, N-1$;

X_k je obraz posloupnosti x_i .

Podkapitoly níže rozebírají problematiku vzorkování a vzniku aliasu, při diskretizování řady.

2.7.1. Sampling

Sampling tedy vzorkování, je proces časové diskretizace, tj. určení hodnoty signálu $s(t)$ v diskrétních (ekvidistantních) časových intervalech, viz obrázek (3). Je možné provést i diskretizace hodnot, tj. reprezentovat je vhodným datovým typem (desetinná čísla). [20]



Obrázek 3 - Vzorkování analogového signálu $s(t)$

Zdroj:[20]

Časová odlehlost sousedních vzorků Δ se nazývá vzorkovací interval. Její převrácená hodnota $f = 1/\Delta$ se nazývá vzorkovací frekvence.

Diskretizuje-li se signál vzorkovacím intervalem Δ , hraje klíčovou roli Nyquistova kritická frekvence dle vztahu (56):

$$f_c = \frac{1}{2\Delta} = \frac{1}{2}f, \quad (56)$$

kde: f je vzorkovací frekvence.

Má-li signál $s(t)$ vzorkovaný frekvencí f s omezenou šířku pásma s max. frekvencí f_{max} a platí-li Shannonova podmínka, může být podle Bryjové [20] psán vztah (57):

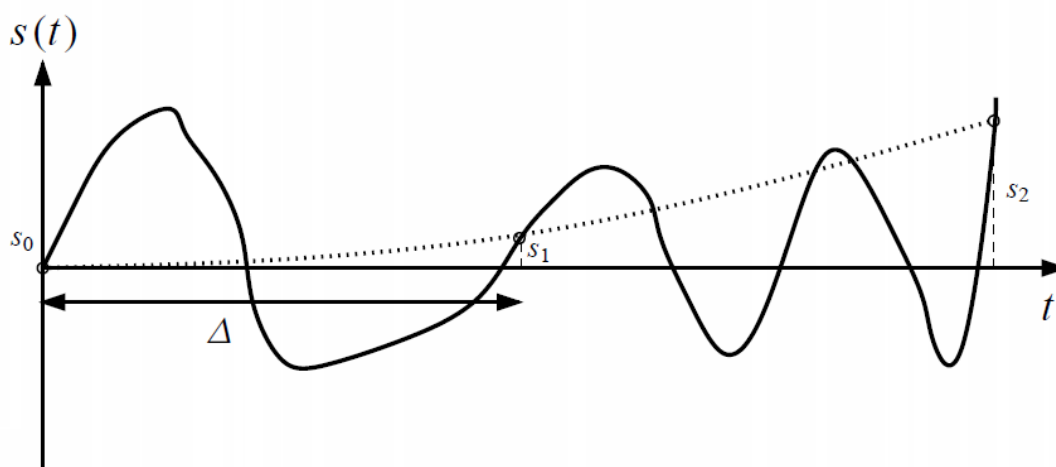
$$f_{max} < f_c \text{ nebo } f > 2f_{max}, \quad (57)$$

kde: f_c je polovina vzorkovací frekvence.

Je-li vzorkovací frekvence větší než dvojnásobek maximální frekvence obsažené v signálu, pak je signál plně určen svými vzorky. V případě, že signál nemá omezenou šířku pásma nebo $f_{max} \geq 2f_c$ nastává tzv. alias.

2.7.2. Aliasing

Aliasing je jev, ke kterému může docházet v situacích, kdy se spojitá informace převádí na diskrétní. Slovo aliasing znamenající v češtině falšování (resp. chyba vzorkováním) přesně vystihuje jev, ke kterému dojde při nedodržení Shannonova teoremu. Důvod, proč k tomuto jevu dochází je to, že samplovací frekvence původního signálu je příliš nízká a tyto frekvence se překrývají. Aby při samplování nedocházelo k aliasingu, musí být vzorkovací frekvence rovna minimálně dvojnásobku nejvyšší frekvence obsažené ve vzorkovaném signálu - tzv. Shannonův teorem.



Obrázek 4 - Vznik aliasu

Zdroj: [20]

2.8. Krátkodobá Fourierova transformace (STFT)

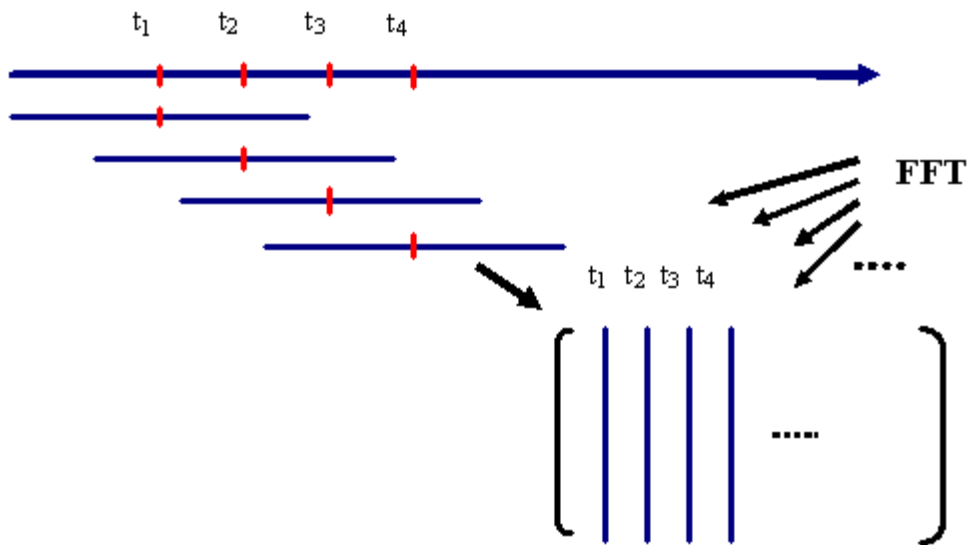
STFT funguje na principu, že ze signálu se vždy vybere určitý úsek kolem časového okamžiku t_n . Ten se rovná vynásobení signálu s obdélníkovým oknem o velikosti 1. Toto vynásobení odpovídá konvoluci jejich spekter ve frekvenční oblasti. Takto vznikají úseky signálu o stejné délce, které jsou posunuty vždy o t . Úseky se, jako sloupcové vektory, zasadí do matice. Na každý sloupec se aplikuje FFT. Tím jsou získána frekvenční spektra kolem postupně se měnících t_n . [22]

STFT je možné zapsat vztahem (58):

$$STFT(n, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_M(m) \times \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n+k+m)h_N(k)e^{-j\omega k} \right|, \quad (58)$$

kde: ω je kmitočet;

g_M a h_N jsou symetrická okna s N a M nenulovými vzorky.



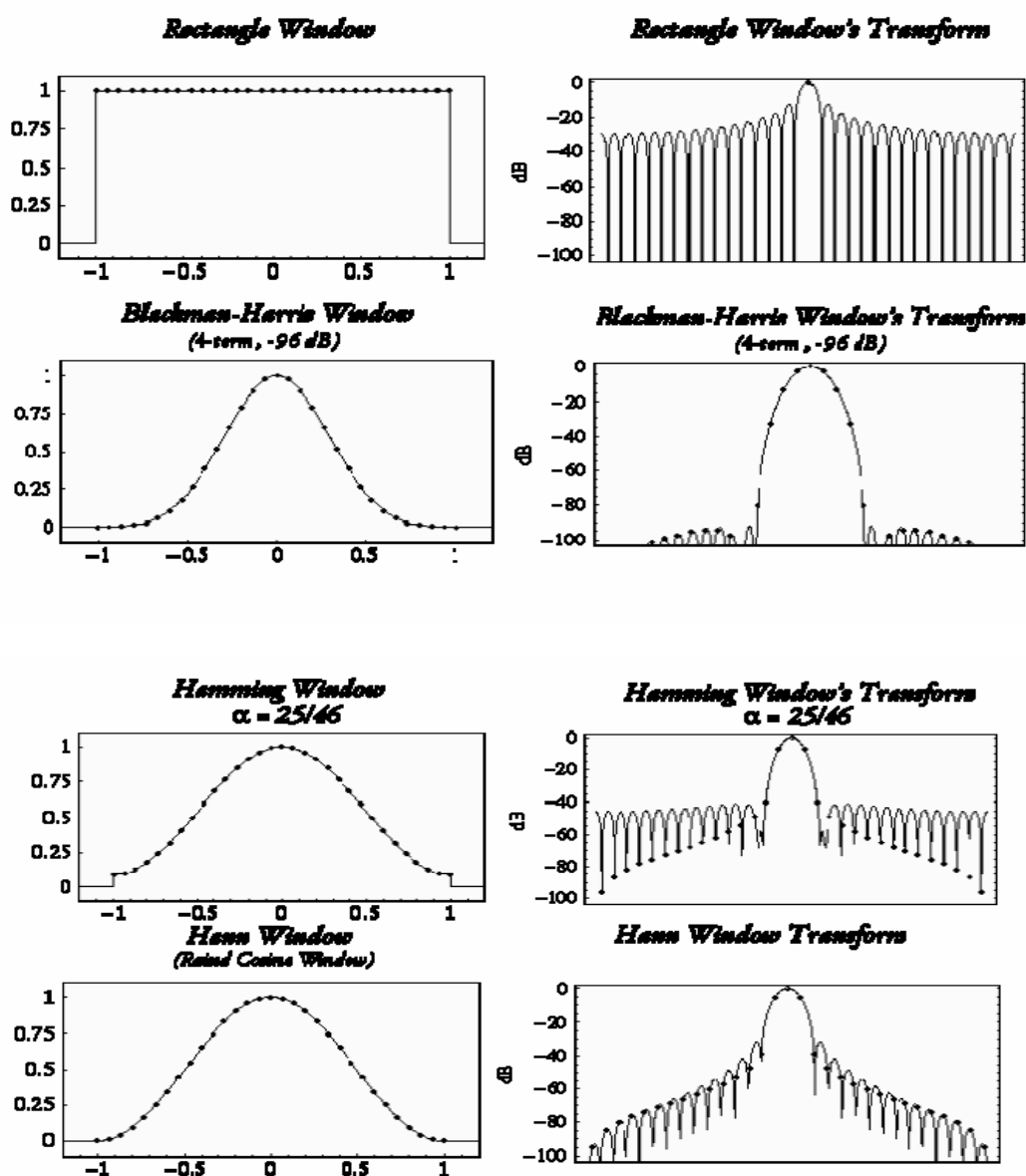
Obrázek 5 - Princip výpočtu STFT

Zdroj: [22]

Násobení signálu obdélníkovým oknem zajišťuje nejlepší rozlišení frekvencí spektra signálu, pokud se v něm vyskytuje pouze jedna nebo dvě blízké frekvenční komponenty. Pokud je v signálu více komponent, může se stát, že zaniknou ve spektru vzniklém konvolucí obdélníkového okna a signálu. Pro DFT totiž ostrý přechod na okrajích okna představuje náhlou změnu a dochází proto k zanesení chyby do oblastí vysokých kmitočtů. Pro tyto účely se místo obdélníkového okna používají různé druhy jiných oken (Blackmanovo,

Hanningovo,...), jež zdůrazňují střed úseku a potlačují jeho okraje. Jedním z nich je Hammingovo okno. Jeho spektrum totiž neobsahuje vyšší kmitočty, jako je tomu u spektra obdélníkového okna, a ponechává přitom odpovídající frekvenční rozlišení. Aby nebyla ztracena informace z potlačených okrajů úseku, musí se jednotlivé úseky překrývat. Příklad Hammingova okna: $W(x) = 0.5 (1 - \cos (2\pi x/N))$, kde N je počet vzorků v okně. [25]

Na obrázku 6 jsou zobrazena jednotlivá okna používaná u STFT. V levé části je časová doména (reprezentace) a v části pravé potom frekvenční doména (reprezentace). Okna jsou zobrazena v pořadí: obdélníkové, Blackman-Harrisovo, Hammingovo, Hannovo.



Obrázek 6 - Jednotlivá okna používaná u STFT

Zdroj: [22]

STFT se běžně užívá jako nejjednodušší způsob časově-frekvenční transformace. Univerzálnost této transformace je její největší výhodou. Bez bližší znalosti samotného signálu pomůže udělat si představu o tom, jaké frekvenční složky signál obsahuje. Na druhou stranu má i jednu nevýhodu. Je nutné řešit kompromis mezi časovým a frekvenčním rozlišením. Kritická je délka úseku, na kterém se provádí FFT. Pokud bude délka příliš malá, bude špatné frekvenční rozlišení a nebudou zaznamenány nízkofrekvenční složky s periodou delší, než je délka úseku. Naopak pokud se bude počítat s většími úseky, nebudou zaznamenány rychlé změny v čase.

2.9. Rychlá Fourierova transformace (FFT)

Rychlá Fourierova transformace (FFT) je algoritmus výpočtu DFT, který umožňuje snížit počet prováděných dílčích výpočtů a tím celý výpočet značně zrychlit. Úspora času je zvláště zřetelná u velkého počtu vzorků. Pro dosažení optimálního času výpočtu se měřený úsek dělí na počet stejných úseků, jejichž počet je roven právě mocnině 2. Výsledkem transformace bude počet harmonických, který je polovinou počtu vzorků. Získané spektrum bude obsahovat nultou harmonickou (stejnoseměrnou složku), frekvence první harmonické bude převrácenou hodnotou transformovaného intervalu a frekvence dalších harmonických budou celistvými násobky základní harmonické až do frekvence $N/2T$. [26]

Při numerickém výpočtu koeficientů Fourierovy řady se počítaly složky jako součet jednotlivých vzorků, vynásobených sinem nebo kosinem příslušného úhlu. V grafické metodě se toto násobení nahradilo natočením úsečky o délce vzorku do směru příslušného úhlu. [27]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_0 \\ \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 \\ \mathbf{G}_4 \\ \mathbf{G}_5 \\ \mathbf{G}_6 \\ \mathbf{G}_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & \nearrow & \rightarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \leftarrow & \nwarrow \\ \uparrow & \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow & \rightarrow & \downarrow & \leftarrow \\ \uparrow & \searrow & \leftarrow & \nearrow & \downarrow & \nwarrow & \rightarrow & \swarrow \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ \uparrow & \swarrow & \rightarrow & \nwarrow & \downarrow & \nearrow & \leftarrow & \searrow \\ \uparrow & \leftarrow & \downarrow & \rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow & \rightarrow \\ \uparrow & \nwarrow & \leftarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow & \rightarrow & \nearrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_4 \\ \mathbf{g}_5 \\ \mathbf{g}_6 \\ \mathbf{g}_7 \end{bmatrix}$$

Obrázek 7 - Čtvercová matice pro $N = 8$

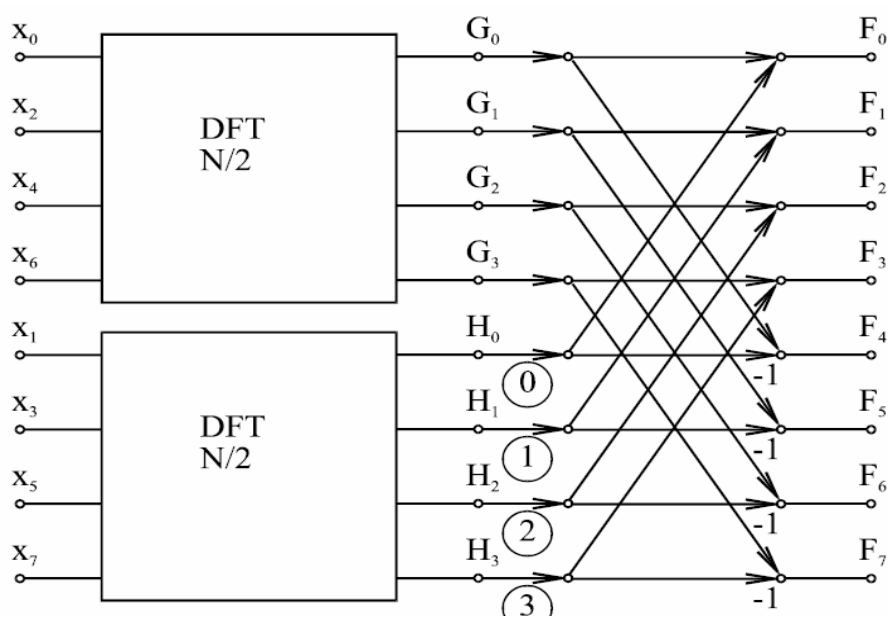
Zdroj: [27]

Pro názornost je použita čtvercová matice pro 8 vzorků. V matici je názorně vidět, že šipka se v nultém řádku neotáčí, v prvním řádku se otočí jednou, v druhém dvakrát a ve třetím

tříkrát, a to směrem doprava. V řádku sedmém se otočí jednou, v šestém dvakrát a v pátém třikrát, ale směrem doleva. Výsledky této transformace se proto znázorňují jako symetrické spektrum, ve kterém jsou frekvence složek G_5 až G_7 vyneseny na záporné ose. Proto se označují jako "záporné frekvence". Jestliže dojde k označení svíslé osy jako reálné, je vidět, že šipky odpovídajících kladných a záporných frekvencí představují vždy komplexně sdružená čísla, která po sečtení dají reálný výsledek, totiž harmonický průběh s příslušnou frekvencí, ale s dvojnásobnou amplitudou. Tak vznikne obvykle zobrazované jednostranné spektrum, které má při daném počtu vzorků poloviční počet frekvenčních složek. [26]

Kdyby se prováděl výpočet matice standardním způsobem, musely by být vzorky g_0 až g_7 v každém řádku vynásobeny vzorky příslušnými komplexními čísly. Celkem by se jednalo o provedení 64 komplexních násobení. Algoritmus FFT redukuje potřebný počet komplexních násobení postupným násobením dílčími úhly a slučováním výsledků. Jednotlivé bloky představují operaci, při které se operand, vstupující do levé části k výsledku pouze přičítá, operand, vstupující do pravé části se nejprve vynásobí komplexním číslem s vyznačeným úhlem a pak se přičte k výsledku. Operace jsou seskupeny do skupin po dvou, které používají vždy dvě vstupní hodnoty a vytvoří dvě výsledné hodnoty. [26]

V naznačené struktuře výpočtu tzv. "motýlek" (obrázek 8). Tímto způsobem se sníží počet komplexních násobení z N^2 na $N \cdot \log_2 N$. V uvedeném případě se místo 64 operací komplexního násobení provádí pouze 24 operací. Při větším počtu vzorků je úspora výpočetního výkonu výraznější.



Obrázek 8 - Fourierova transformace pro $N = 8$

Zdroj: [27]

3. KEPSTRÁLNÍ ANALÝZA

Kepstrální analýza (KA) je technika nelineárního zpracování signálu, která se používá nejčastěji ve zpracování řeči a homomorfním filtrování. [29]. Pojednává o analýze **kepstra**, které chápeme jako zpětnou Fourierovu transformaci logaritmu Fourierova obrazu vstupního signálu $x(t)$. Častým využitím kepstrální analýzy je stanovení základního hlasivkového tónu a klasifikace řeči na znělé a neznělé segmenty. [28]

Aby nedošlo ke zmatení při používaných pojmech, Bogert [30] představil ve své publikaci následující parafráze:

- Frequency (frekvence) quefreny (quefrence),
- Spectrum (spektrum) cepstrum(kepstrum),
- Phase (fáze) saphe,
- Amplitude (amplituda) gamnitude,
- Filtering (filtrování) liftering,
- Harmonic (harmonická) rahmonic,
- Period (perioda) repiod.

V následující části jsou definovány pojmy reálného a komplexního kepstra, kde reálné kepstrum definujeme podle Anguera [31] vztahem (59):

$$c_x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|X(e^{j\omega})| e^{j\omega n} d\omega, \quad (59)$$

kde: $X(e^{j\omega})$ označuje FT x .

U reálného kepstra je amplituda reálná a nezáporná. Komplexní kepstrum je vyjádřeno vztahem (60):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|X(e^{j\omega})| e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\log|X(e^{j\omega})| + j \arg(X(e^{j\omega}))] e^{j\omega n} d\omega, \quad (60)$$

kde: $X(e^{j\omega})$ označuje FT x ;

$\arg()$ reprezentuje fázi.

Nazýváme ho komplexní, protože používá komplexní logaritmus. Ve skutečnosti, komplexní kepstrum reálného pořadí je tak reálné.

Srozumitelnější popis výpočtu reálného kepstra dává vztah (61):

$$c_x[n] = \text{Re}\{IFFT(\log|FFT(x(t))|)\}, \quad (61)$$

kde: $c_x[n]$ je reálnou složkou IFFT (inverzní FT), logaritmu z hodnoty FT vzorků signálu $x(t)$.

V případech kdy frekvenční spektrum je velmi složité a nepřehledně uspořádané, což přitěžuje při jejich vyhodnocení. Proto je nutné aplikovat na spektrum další analytický proces, jakoby by frekvenční spektrum bylo původním signálem. Proces je KA a získané **výkonové kepstrum** je definováno jako výkonové spektrum logaritmu výkonového spektra. Vedle výkonového kepstra se definuje také komplexní kepstrum. Kepstrální analýza dává obraz o periodicitě frekvenčního spektra analyzovaného signálu to znamená např., bude-li toto frekvenční spektrum periodické se vzdáleností harmonických 100 Hz, objeví se v kepstrum výrazné maximum na frekvenci 10 ms a případná další periodická maxima v závislosti na tvaru průběhu frekvenčního spektra. Tento návrat do časové domény, obdobný autokorelaci umožňuje mimo jiné odlišení periodických a neperiodických složek v signálu, detekci superponovaných odrazů a určení jejich zpoždění. [32, 33]

Liftraci (liftering) označujeme váhováním kepstra Hannigovým okénkem, tak aby byly vyšší složky potlačeny. Takto váhované kepstrum se podrobí Fourierově transformaci a získá se liftrované spektrum, které oproti původnímu frekvenčnímu spektru má vyhlazený průběh s výraznými frekvenčními maximy. Časový vývoj liftrovaného spektra je potom přehlednější a zřetelnější, čehož se s výhodou používá jak při analýze řeči, tak při zkoumání signálů v reálném kontextu. [32, 33]

Ještě je potřeba dodat, že ve spektrech je vodorovná osa tvořena frekvencí [Hz], u kepstra quefrecí, což již bylo řečeno výše. Důležité však je to, že nezmění pouze pořadí prvních čtyř písmen, ale také to, že dojde ke změně jednotky a to na čas [s]. Svislou osu tvoří opět logaritmus výkonové spektrální hustoty.

Kepstra tedy představují nástroj ke zjištění přítomnosti skupin harmonických složek ve výkonové spektrální hustotě *periodického*¹ a *kvaziperiodického*² signálu. [35]

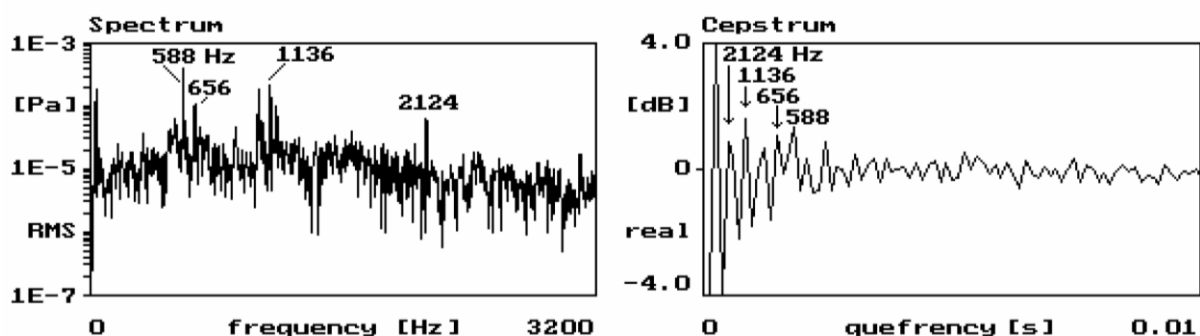
Protože je reálná funkce logaritmu FFT sudá, proto také funkce kepstra je sudá, což znamená že budeme opět znázorňovat jenom polovinu průběhu.

Pro lepší pochopení výstupu kesptrální analýzy, bude uveden příklad z publikace [35], kde je příklad kepstra hluku převodového agregátu při otáčkách vstupní hřídele 2199 za minutu.

¹ periodické signály jsou složeny z harmonických signálů o frekvencích, které jsou celistvým násobkem jedné základní frekvence. [36]

² kvaziperiodické signály – jsou složeny z harmonických signálů o frekvencích, které jsou násobky nejméně dvou základních frekvencí a současně jsou v poměru určeném iracionálním číslem. [36]

Ve spektru jsou vyznačené izolované složky, které jsou kepsru umístěny hned ze začátku průběhu. Jsou samozřejmě uvedeny časovém měřítku, převrácenou hodnotou z nich tedy můžeme dostat inkriminované frekvence, zvýrazněné ve spektru. Dále je možné pozorovat to, že není potřeba aby bylo kepsrum příliš dlouhé, protože žádné další významné píky dále neobsahuje. Případné píky pro nás znamenají převrácené hodnoty frekvence. Kepsrum vykazuje také vysokou citlivost na změnu signálu. Obecně tedy je možné říci, že první (a následné) významné, polaritou kladné, složky v kepsrech odpovídají základní frekvenci periodických signálů.



Obrázek 9 - Příklad spektra a kepsra hluku převodového agregátu

Zdroj: [35]

4. BOXOVA-JENKINSOVA METODOLOGIE

V Boxově-Jenkinsově metodologii lze modelovat pouze stacionární časové řady, resp. takové řady, které mohou být převedeny na stacionární. [37]

Rozeznáváme stacionaritu silnou (striktní) a slabou (kovarianční stacionaritu). [38]

Autokorelační funkce (ACF) podává informaci o síle lineární závislosti mezi veličinami y_t , y_{t-k} . Korelace mezi náhodnými veličinami y_t a y_{t-k} však může být způsobena jejich korelací s veličinami $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1}$. [37]

Výběrová autokorelační funkce ρ_h konkrétní časové řady x_1, x_2, \dots, x_n se pro čas t spočítá dle [40] ze vztahu (62):

$$\rho_h = \frac{\sum_{t=h+1}^T (y_t - \bar{y})(x_{t-h} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}, \quad (62)$$

kde: $y_{1, \dots, T}$ je hodnota sledované ČŘ;

T je počet pozorování sledované ČŘ;

h je zpoždění, $h = 1, 2, \dots, T - 1$.

Parciální autokorelační funkce (PACF) podává informaci o korelaci veličin y_t a y_{t-k} očištěnou o vliv veličin ležících mezi nimi. Parciální autokorelaci se zpožděním k , vyjadřuje parciální regresní koeficient φ_{kk} v autoregresi k -tého řádu. [37]. Veškerá bližší odvození je možné čerpat z publikace [41].

4.1. Stacionární procesy

Nyní bude následovat stručný výpis stacionárních procesů jako AR, MA, ARMA, ARIMA a SARIMA, včetně identifikace těchto procesů pro další zpracování. Zápis těchto procesů bude velice stručný a bude vycházet převážně z publikace [6,37], okrajově z publikace [5]. Případný čtenář necht' je odkázán na právě uvedené literatury, kde je možné získat komplexní popisy těchto procesů.

4.1.1. Proces AR(1)

Autoregresní proces prvního řádu lze zapsat vztahem (63) jako:

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + a_t, \quad (63)$$

kde: a_t je proces bílého šumu (proces s nulovou střední hodnotou, konstantním rozptylem a nulovou ACF a PACF);

φ je parametr;

y_t je sledovaná veličina.

Nebo vztahem (64) jako:

$$(1 - \varphi_1 B)y_t = a_t, \quad (64)$$

kde: a_t je proces bílého šumu;

φ je parametr;

y_t je sledovaná veličina;

B je operátor zpětného posunutí, pro který platí $By_t = y_{t-j}$. Jestliže $|\varphi_1|$ (parametr) < 1 , je tento proces stacionární.

4.1.2. Proces AR(2)

Autoregresní proces druhého řádu lze zapsat ve formě vztahu (65):

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + a_t, \quad (65)$$

kde: a_t je proces bílého šumu;

φ je parametr;

y_t je sledovaná veličina.

Nebo také vztahem (66) jako:

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2)y_t = a_t, \quad (66)$$

kde: a_t je proces bílého šumu;

φ je parametr;

y_t je sledovaná veličina;

B je operátor zpětného posunutí.

Aby byl proces AR(2) stacionární, musí kořeny polynomiální rovnice $(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2) = 0$ ležet vně jednotkového kruhu.

4.1.3. Proces MA(1)

Proces klouzavých průměrů prvního řádu má formu zapsanou vztahem (67):

$$y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad (67)$$

kde: a_t je proces bílého šumu;

θ je parametr.

Nebo také vztahem (68):

$$y_t = (1 - \theta_1 B)a_t, \quad (68)$$

kde: a_t je proces bílého šumu;

θ je parametr;

B je operátor zpětného posunutí.

Tento proces je stacionární, aby byl invertibilní, tzn., aby jej bylo možné přepsat do konvergujícího procesu AR(∞), musí platit $|\theta_1| < 1$.

4.1.4. Proces MA(2)

Proces klouzavých průměrů druhého řádu má podobu vztahu (69):

$$y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}, \quad (69)$$

kde: a_t je proces bílého šumu;

θ je parametr.

Lze jej zapsat také ve formě vztahu (70):

$$y_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)a_t, \quad (70)$$

kde: a_t je proces bílého šumu;

θ je parametr;

B je operátor zpětného posunutí.

Tento proces je stacionární, aby byl invertibilní, musí kořeny polynomiální rovnice $(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) = 0$ ležet vně jednotkového kruhu.

4.1.5. Proces ARMA

Proces ARMA(p,q) lze zapsat vztahem (71) jako:

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}, \quad (71)$$

kde: a_t je proces bílého šumu;

φ, θ jsou parametry;

y_t je sledovaná veličina;

B je operátor zpětného posunutí.

Nebo také vztahem (72) jako:

$$\varphi_p(B)y_t = \theta_q(B)a_t, \quad (72)$$

kde: a_t je proces bílého šumu;

θ je parametr;

B je operátor zpětného posunutí;

$$\varphi_p(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p;$$

$$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q.$$

Proces ARMA(p,q) je stacionární, leží-li kořeny polynomiální rovnice $\varphi_p(B) = 0$ vně jednotkového kruhu a invertibilní, leží-li kořeny polynomiální rovnice $\theta_q(B) = 0$ vně jednotkového kruhu.

4.1.6. Procesy ARIMA

Vyazuje-li po transformaci integrovaného procesu pomocí diference d -tého řádu výsledný proces takové autokorelace a parciální autokorelace, že jej lze vyjádřit ve formě stacionárního a invertibilního modelu ARMA(p,q). Tento původní integrovaný proces je vyjádřen ve formě vztahu (73):

$$\varphi_p(B)(1 - B)^d y_t = \theta_q(B)a_t, \quad (73)$$

kde: a_t je proces bílého šumu;

θ je parametr;

B je operátor zpětného posunutí.

Vztah (73) se nazývá autoregresní integrovaný proces klouzavých průměrů řádu p, d, q a označuje se jako ARIMA(p,d,q).

4.1.7. Procesy SARIMA

Předpokládejme, že proces obsahuje oba typy závislosti. Závislost uvnitř period je zachycena modelem ARIMA pomocí vztahu (74):

$$\varphi_p(B)(1-B)^d y_t = \theta_q(B)b_t, \quad (74)$$

kde: b_t je proces obsahující pouze sezónní závislosti;

θ je parametr;

B je operátor zpětného posunutí.

Proces $\{b_t\}$ může být popsán modelem, resp. vztahem (75):

$$\Phi_p^s(B)(1-B)^{sD} b_t = \Theta_Q^s(B)a_t, \quad (75)$$

kde: a_t je proces bílého šumu;

Θ je parametr;

B je operátor zpětného posunutí.;

$$\Phi_p^s(B) = 1 - \Phi_1^s B - \dots - \Phi_p^s B^p;$$

$$\Theta_Q^s(B) = 1 - \Theta_1^s B - \dots - \Theta_Q^s B^Q.$$

Prostřednictvím členu $(1-B)^s$ se konstruují sezónní difference. Jestliže se procesy (74) a (75) spojí, získá se proces dle vztahu (76):

$$\Phi_p^s(B)\varphi_p(B)(1-B)^d (1-B)^{sD} y_t = \theta_q(B)\Theta_Q^s(B)a_t, \quad (76)$$

kde: a_t je proces bílého šumu;

Θ, θ jsou parametry;

B je operátor zpětného posunutí.

Vztah (76) je označován jako $SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$, kde p je řád procesu AR, q řád procesu MA, d řád prosté diference, P řád sezónního procesu AR, Q řád sezónního procesu MA, D řád sezónní diference a s je délka sezónní periody. Podmínky stacionarity a invertibility u sezónní části jsou obdobné jako u části nesezónní.

4.2. Identifikace modelu

Opět jako v předchozí části, bude tato podkapitola vycházet z literatury [6, 37]. Jednou z nejtěžších úloh při výstavbě Boxových-Jenkinsových modelů je jejich identifikace. Tato úloha spočívá v rozhodnutí, jaký typ modelu vybrat. Jde o nelehkou činnost, jež je podle autorů příslušných publikací, v mnoha případech závislá na citu a zkušenosti analytika. Identifikace je přitom pouze první fází konstrukce modelů, neboť identifikovaný model je třeba ještě ověřit. Následující tři body se týkají identifikace modelu.

1. Nejprve je potřeba prozkoumat graf časové řady. V mnoha případech je možné na první pohled rozpoznat přítomnost trendu. V této fázi jde především o subjektivní zhodnocení situace. Nicméně, již na základě tohoto zhodnocení je možné stacionarizovat časovou řadu. Případně lze provést jiné úpravy jako je linearizace časové řady. Jedná se o stabilizaci z hlediska rozptylu pomocí logaritmické transformace. Tento typ transformace je však vhodné provádět před vlastním diferencováním časové řady. Důvodem je skutečnost, že diferencováním je možné získat i záporné hodnoty.
2. Dalším krokem je výpočet odhadů ACF a PACF původní časové řady. Na jejich základě je možné potvrdit, že časovou řadu je třeba stacionarizovat (v případě, že hodnoty výběrové ACF a PACF v prvním zpoždění jsou velmi blízké jedné a ostatní hodnoty výběrové ACF klesají pomalu).
3. Po stacionarizaci časové řady se použijí výběrové ACF a PACF pro identifikaci modelů AR a MA (nalezení hodnot p a q). Tato identifikace je založena na principu podobnosti výběrových ACF a PACF s teoretickými ACF a PACF.

Ověření modelu je možné provést několika způsoby, např. aplikací Akaikova informačního kritéria nebo ověřením reziduí vybraného modelu.

5. APLIKACE METOD NA ČASOVÉ ŘADY

Tato kapitola obsahuje aplikace výše zmíněných metod na celkem čtyři ČŘ. Nejprve jsou zpracovány dvě generované ČŘ. Tyto ČŘ budou nazývány jako signály. Oba tyto signály jsou periodické, avšak s různými parametry. Díky změnám těchto parametrů bude možné sledovat chování metod na modelových příkladech, což by mělo později pomoci při interpretaci výsledků metod (FT a KA) aplikovaných na skutečné časové řady.

Další dvě ČŘ jsou tvořeny již pomocí reálných dat. První z těchto ČŘ je index CPI (Customer Price Index - index spotřebitelských cen), který patří mezi nejdůležitější indikátory cenového vývoje. Reprezentativním způsobem měří v časovém vývoji relativní změny konečných spotřebitelských cen zboží a služeb placených obyvatelstvem. [39] Druhá ČŘ je tvořena daty, která interpretují naměřené hodnoty přízemního ozonu v centru Los Angeles v letech 1955-1971.

Všechny následující výstupy jsou vytvořeny v prostředí **MATLAB R2010, R2012a**. Část kódů potřebných k vytvoření těchto výstupů, je uvedena v příloze B této práce.

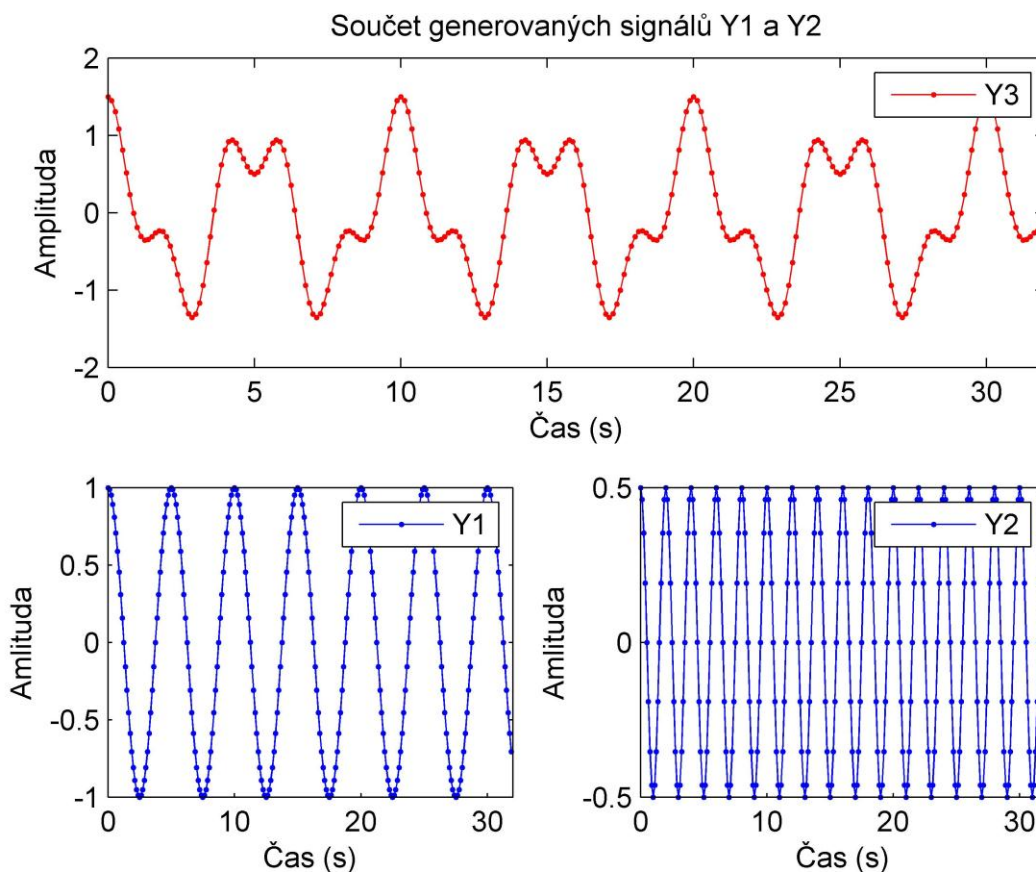
5.1. ČŘ č. 1

První signál, na který budeme aplikovat metody FT a KA je periodický signál, který je tvořen součtem dvou kosinových signálů s různou délkou periody a velikostí amplitudy, konkrétně tedy:

- $Y1 = \cos(2\pi t f_1)$,
- $Y2 = 0,5 \cos(2\pi t f_2)$,
- $Y3 = Y1 + Y2$.

Hodnoty jednotlivých frekvencí jsou $f_1 = 0,2$ Hz a $f_2 = 0,5$ Hz. Časový vektor t je určen vzorkovací frekvencí 8 Hz při délce 256 vzorků.

Na obrázku 10 je v horní části umístěn výsledný signál $Y3$, který je tvořen součtem signálů $Y1$ a $Y2$. V dolní části obrázku jsou potom umístěny průběhy zmiňovaných signálů $Y1$ a $Y2$. Počet vzorků, který byl snímán frekvencí 8 Hz je 256, což tvoří základ časové osy, která je tedy dlouhá 32 s.

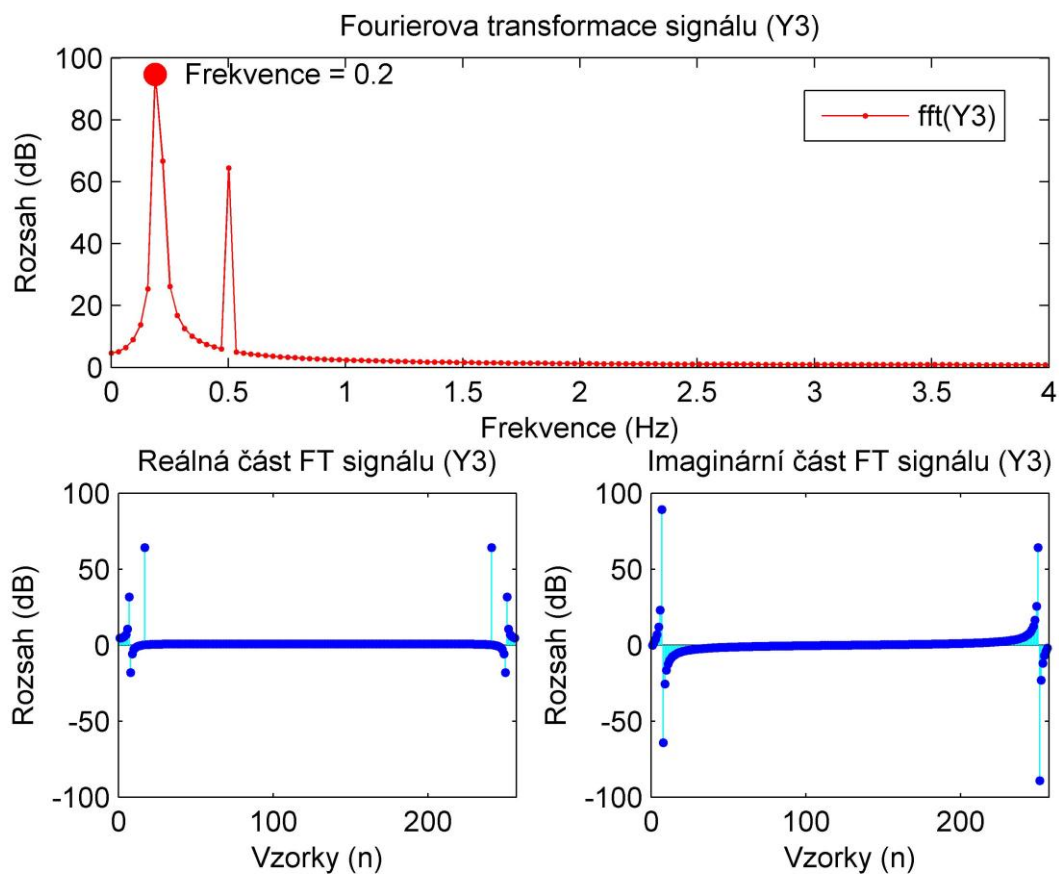


Obrázek 10 - Průběh ČŘ č. 1

Zdroj: vlastní zpracování

Obrázek 11 znázorňuje výstup signálu Y3 po aplikaci aparátu FT, konkrétně FFT. Výstup Y3 je znázorněn v horní části obrázku. Je třeba zmínit, že zde dochází ke změně časové domény na frekvenční, proto osa x se změní na frekvenci v Hz. Osa y je potom přeměněna z amplitudy na magnitude (rozsah), uváděný v dB. Jak je z průběhu FT patrné, jsou zde obsaženy dva vrcholy (píky), které reprezentují frekvence obsažené v jednotlivých signálech. Vrcholy jsou tedy v bodech odpovídající frekvenci 0,2 a 0,5 Hz.

Dva obrázky v dolní části obrázku 11 potom znázorňují reálnou a imaginární část FT. Z průběhů je patrné, že výstupy jsou symetrické dle středu, proto zobrazujeme v horním průběhu jenom polovinu reálné části FT. Imaginární část nepřináší požadovanou informaci.

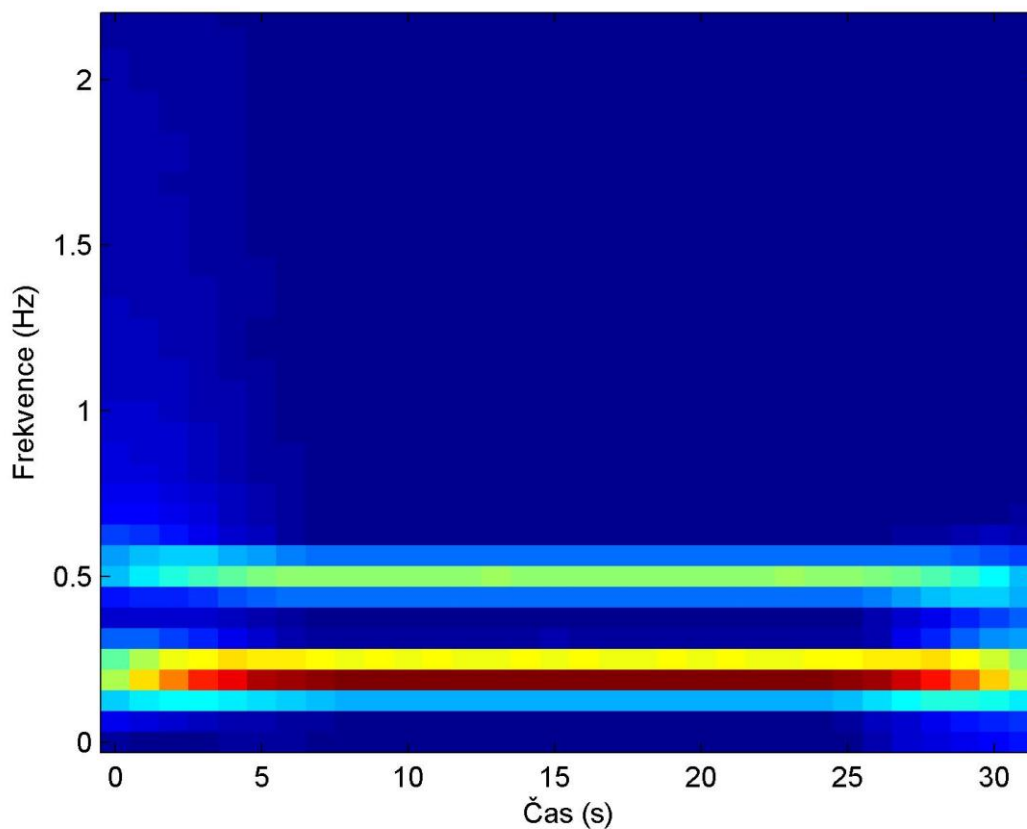


Obrázek 11 - FT ČŘ č. 1

Zdroj: vlastní zpracování

Obrázek 12 zobrazuje spektrogram, tedy časově-frekvenční dimenzi dohromady. Výstup je dán na základě metody STFT, tedy krátkodobé Fourierovy transformaci, která nejprve, jak již bylo zmíněno v kapitole 2.8, „vyhladí“ signál aplikací okna (Hammingova) o délce 128 s posunem 8. Následně je provedena opět FFT a výsledek je zobrazen tak, že na ose x je čas (s) a osa y představuje frekvenci (Hz). Části obsahující jasnější barvu potom značí výskyt frekvencí. Z obrázků je tedy patrné, že intenzivně zbarvené části jsou opět kolem 0,2 a 0,5 Hz.

Spektrogram

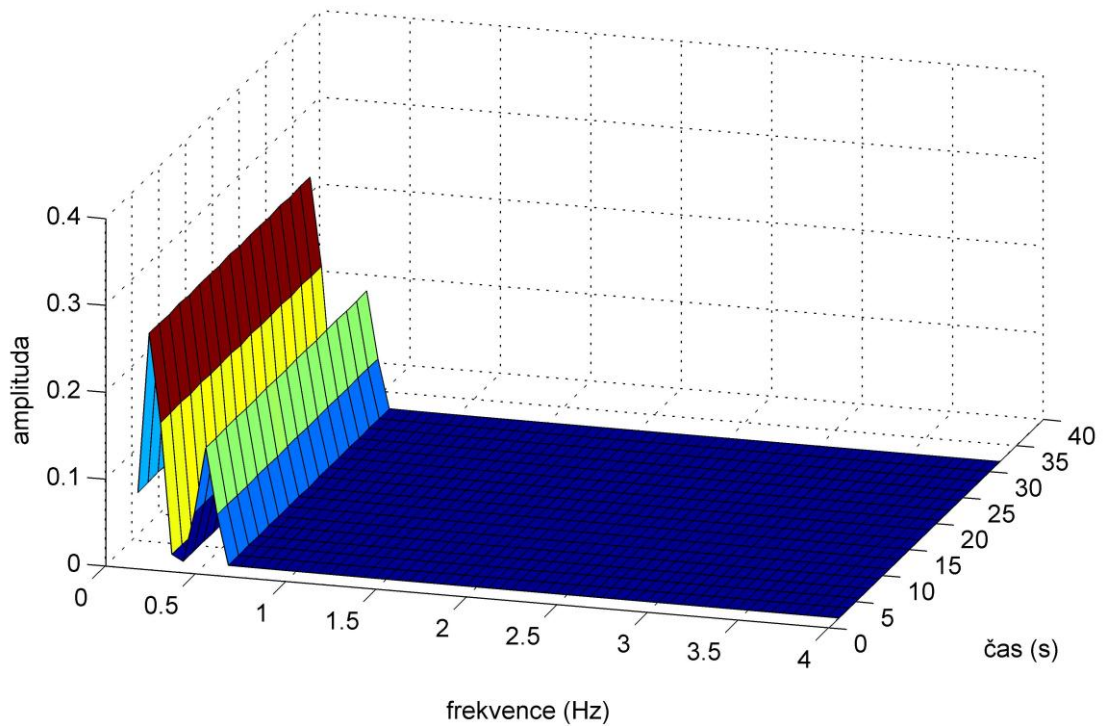


Obrázek 12 - Spektrogram ČŘ č. 1

Zdroj: vlastní zpracování

Obrázek 13 potom zobrazuje opět STFT, ale ve 3D, kdy kromě frekvenčně - časové závislosti je vidět i závislost na amplitudě výstupu. Označení amplituda má zde spíše charakter velikosti, protože se většinou nepopisuje osa z. Každopádně je opět velmi dobře zřetelný vrchol v 0,2 a 0,5 Hz.

3D Spektrogram

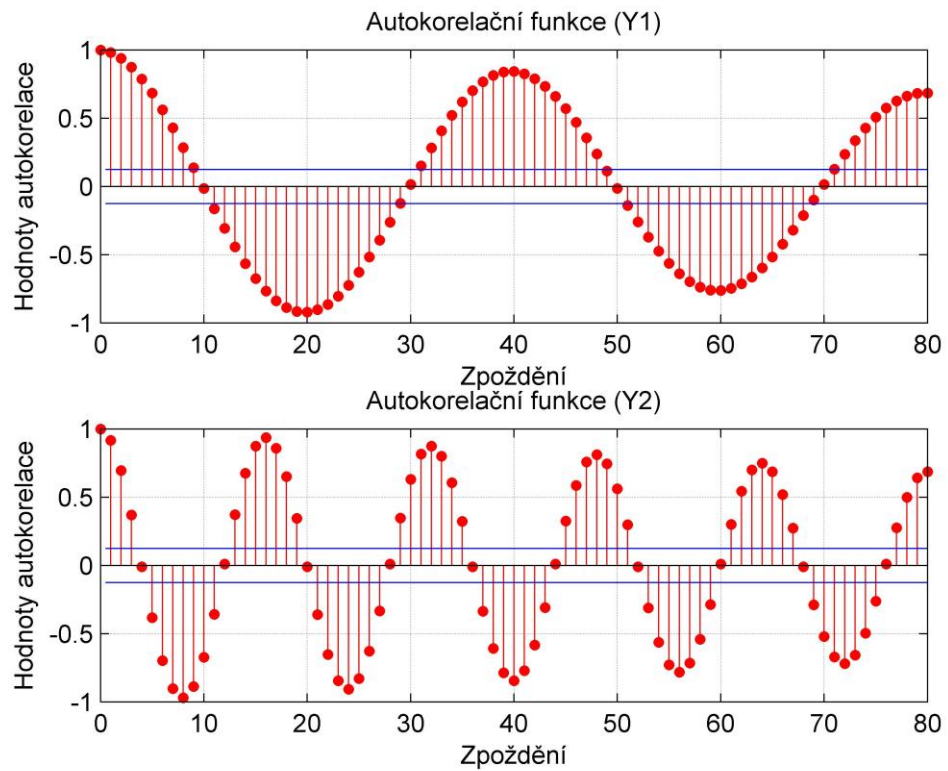


Obrázek 13 - 3D Spektrogram ČŘ č. 1

Zdroj: vlastní zpracování

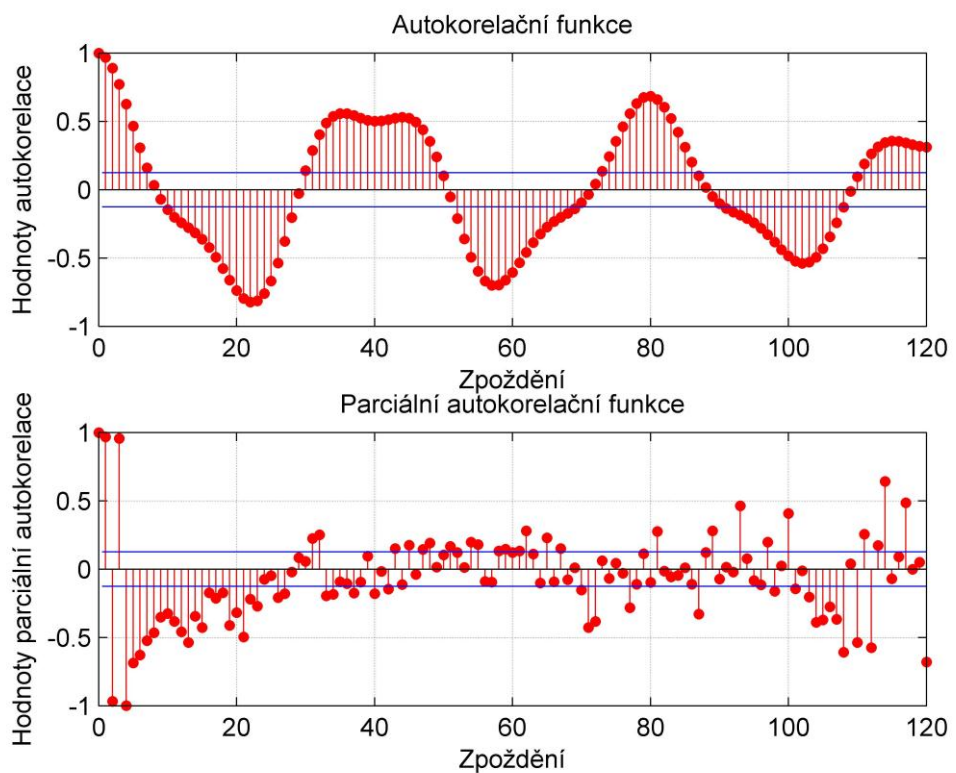
Obrázek 14 zobrazuje autokorelační funkci (ACF) pro signály Y1 a Y2. Z průběhu je možné snadno odečíst délku periody pro jednotlivé signály. Délku zpoždění (Lag), je možné si představit jako jednotlivé vzorky. Jestliže tedy známe vzorkovací frekvenci a počet vzorků daného signálu, je možné určit i dobu periody z délky zpoždění. Ta pro Y1 činí 40 a pro Y2 16. Přepočítané hodnoty potom pro Y1 značí délku periody 5 s a pro Y2 délku periody 2s.

Obrázek 15 znázorňuje průběhy ACF a PACF signálu Y3. Z průběhu ACF je patrné, že se jedná o periodický signál vykazující dvě periody s různou délkou (konkrétně 41 a 37 Lagů).



Obrázek 14 - ACF pro Y1 a Y2

Zdroj: vlastní zpracování

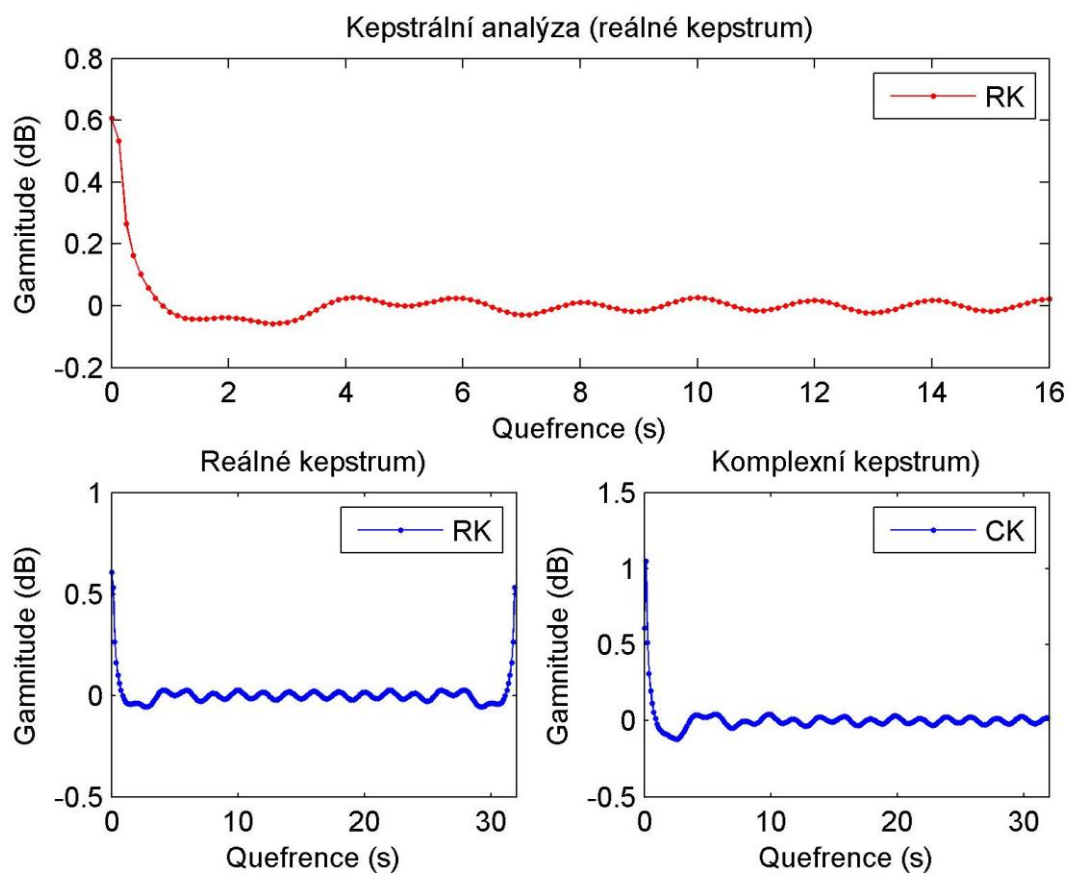


Obrázek 15 - ACF a PACF ČŘ č. 1

Zdroj: vlastní zpracování

Poslední obrázek pro ČŘ č. 1 zobrazuje výstup z aplikace kepstrální analýzy na řešenou časovou řadu. Tento obrázek je rozdělen do 3 částí, kde dole je umístěna reálná a komplexní část kepstra. V horní části obrázku je potom reálná část kepstra, a to pouze první polovina. Důvod proč, je vysvětlen v kapitole 3 o kepstrální analýze. Aplikace této metody na sledovanou ČŘ č. 1 nedává žádnou konkrétní informaci. Příčinou je jednak relativně špatná interpretovatelnost této metody a za druhé je to dáno charakterem zkoumané ČŘ.

Dochází zde však opět ke změně značení, osu x popisuje quefrence (s) a osu y gamnitude (dB).



Obrázek 16 - Kepstrální analýza pro ČŘ č. 1

Zdroj: vlastní zpracování

5.2. ČŘ č. 2

Druhý signál, na který budeme aplikovat metody FT a KA je také periodický signál. Tento signál je však tvořen součtem třech kosinových signálů s různou délkou periody a velikostí amplitudy. Kde je k součtu dvou signálů, přičítán signál třetí vždy se zpožděním, konkrétně tedy:

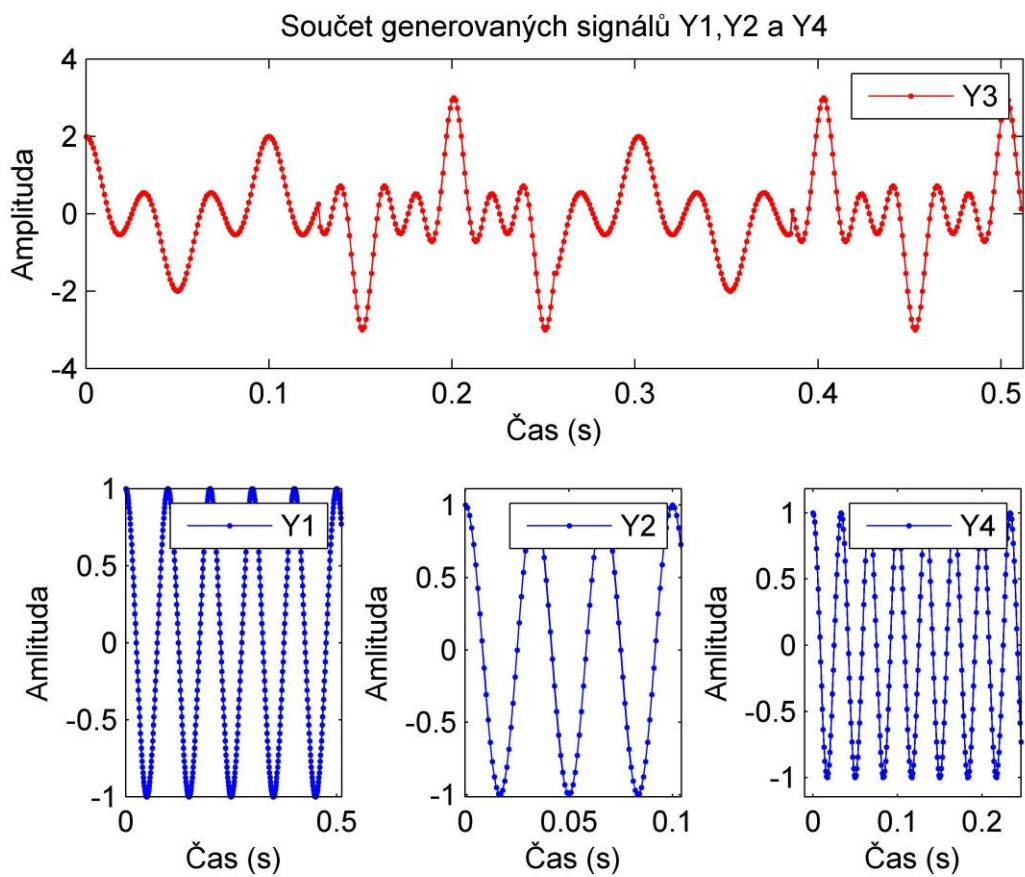
- $Y1 = \cos(2 \cdot \pi \cdot t \cdot f_1)$,

- $Y_2 = \cos(2\pi t f_2)$,
- $Y_4 = \cos(2\pi t f_4)$,
- $Y_5 = Y_1 + Y_2$,
- $Y_6 = Y_1 + Y_2 + Y_4$.

Výsledný signál Y_3 vznikne tak, že signál Y_5 je nahrazen každých 128 ms signálem Y_6 (délky 128 ms).

Hodnoty jednotlivých frekvencí jsou $f_1 = 10$ Hz, $f_2 = 30$ Hz a $f_4 = 50$ Hz. Časový vektor t je určen vzorkovací frekvencí 1000 Hz při délce 512 vzorků. Daný počet vzorků při vzorkovací frekvenci odpovídá potom délce časové osy 512 ms.

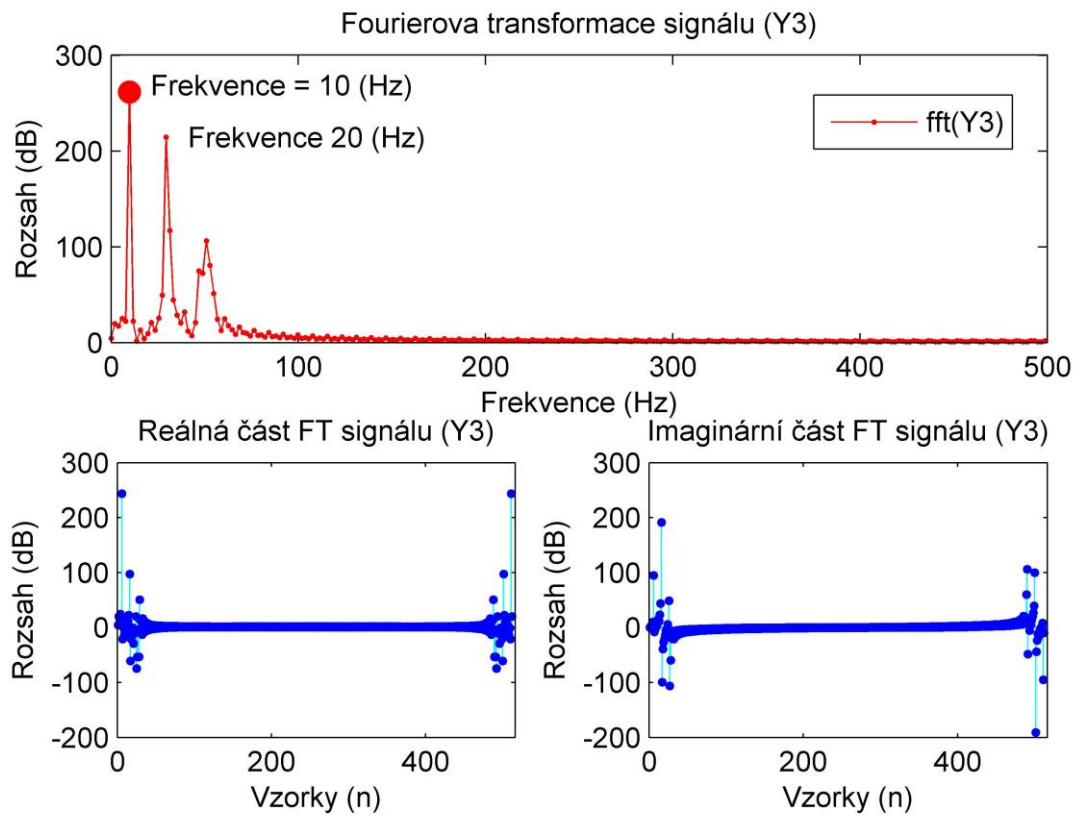
Na obrázku 17 je potom v horní části umístěn výsledný signál Y_3 a v dolní části jsou tři dílčí signály Y_1 , Y_2 a Y_4 .



Obrázek 17 - Průběh ČŘ č. 2

Zdroj: vlastní zpracování

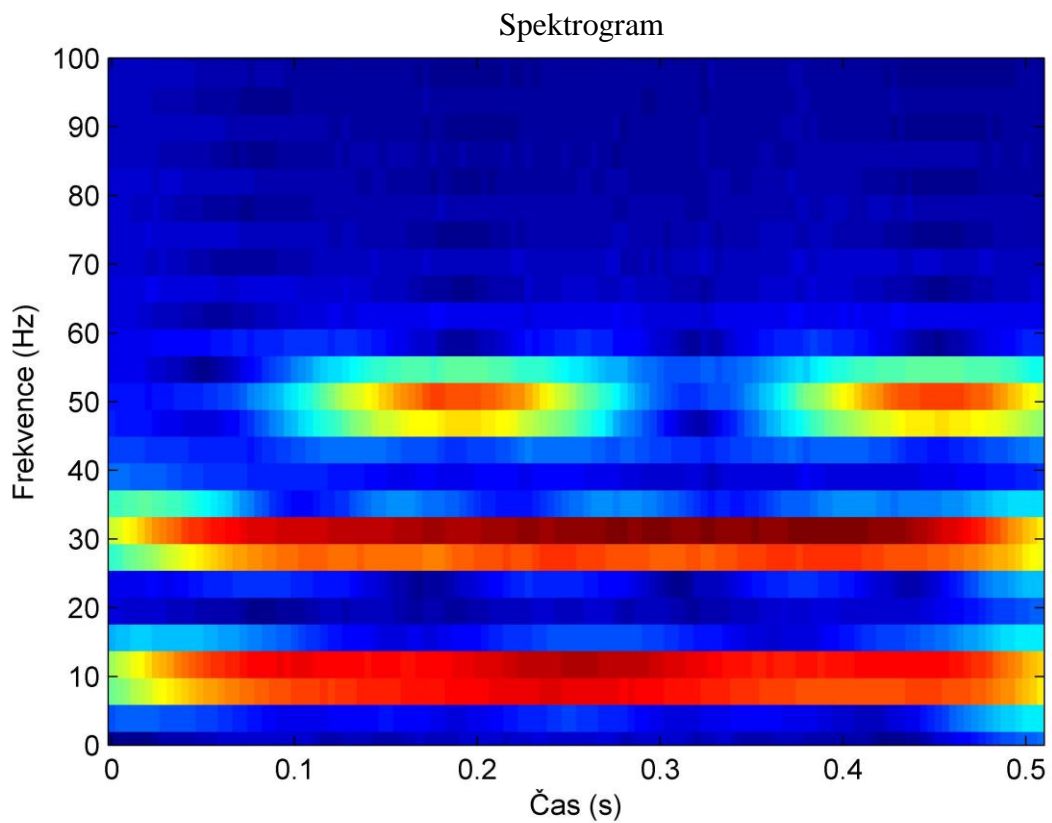
Obrázek 19 znázorňuje výstup z FT zkoumaného signálu Y_3 . Horní část představuje reálnou část FT, kde jsou jasně patrné tři frekvence. Tyto frekvence mají hodnoty 10, 20 a 50 Hz. V dolní části jsou opět uvedeny obě části spektra (reálné a imaginární).



Obrázek 18 - FT ČŘ č. 2

Zdroj: vlastní zpracování

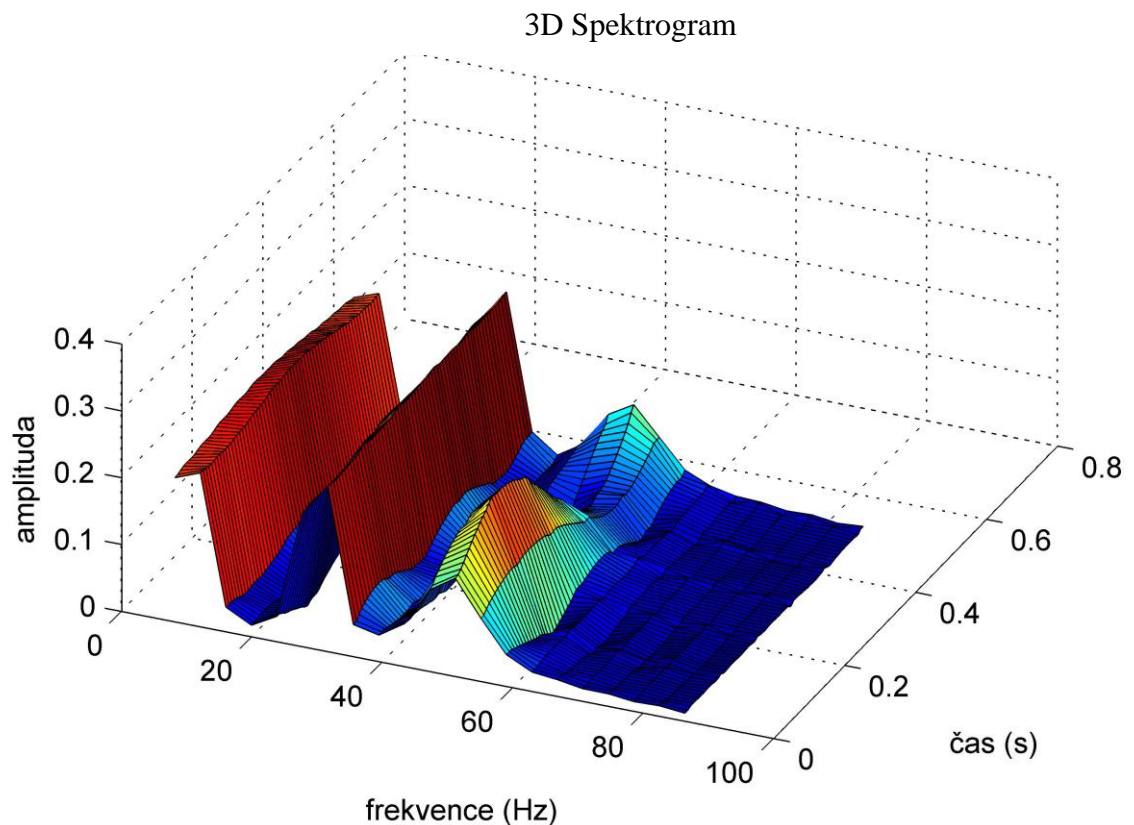
Spektrogram pro sledovaný signál Y3 je zobrazen na obrázku 19 níže. Výraznější barevné části znamenají výskyt hledaných frekvencí. Ze spektrogramu je patrné i to, že nejvyšší frekvence 50 Hz je přidávána postupně se zpožděním. Bohužel není možné přesně identifikovat hodnotu tohoto zpoždění, což je dáno podstatou této metody.



Obrázek 19 - Spektrogram pro ČŘ č. 2

Zdroj: vlastní zpracování

Obrázek 20 znázorňuje 3D výstup z STFT. Je zde zřetelněji vidět, že dvě nižší frekvence (10 a 30 Hz) jsou viditelné po celou dobu sledovaného průběhu a vyšší frekvence 50 Hz je „dávkována“ s určitým zpožděním. Opět však není možné přesně říci, kdy dochází k přírůstku vyšší frekvence do průběhu.

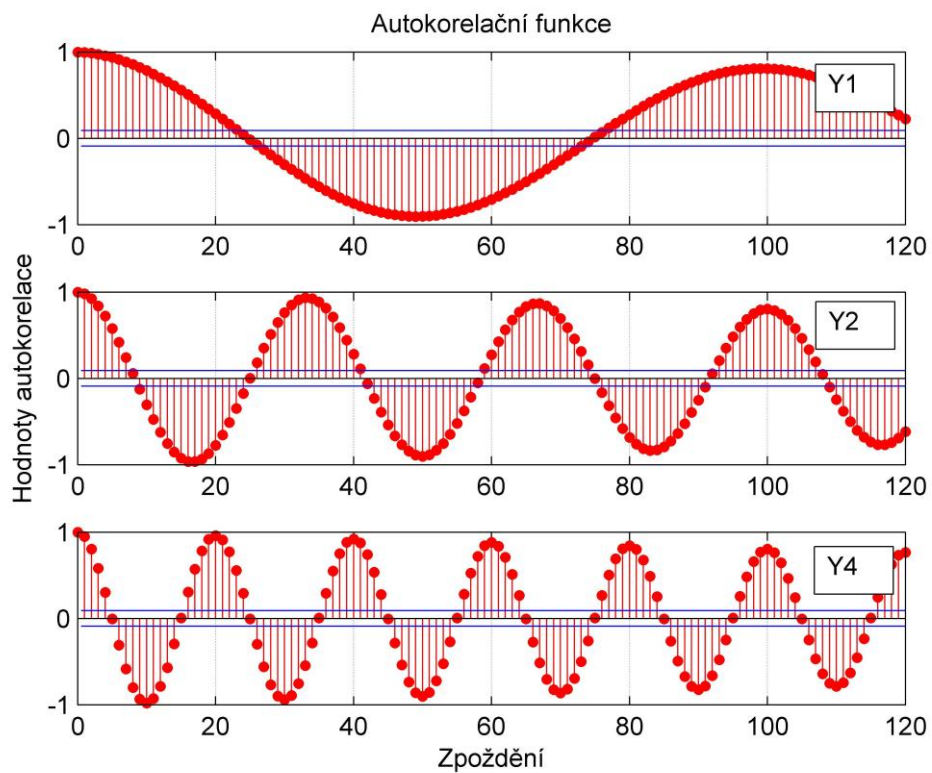


Obrázek 20 - 3D Spektrogram pro ČŘ č. 2

Zdroj: vlastní zpracování

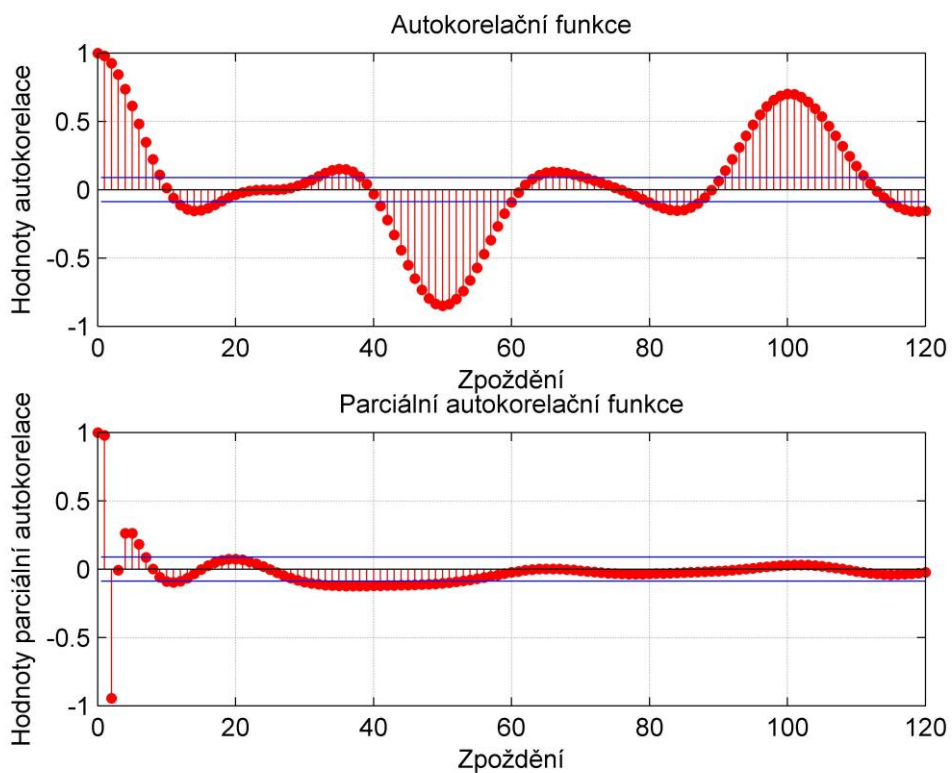
Obrázky 21 znázorňuje průběhy ACF pro Y1, Y2 a Y4 pro hodnotu zpoždění 120. Z průběhu se dá opět velice snadno odečíst délka periody, jak již bylo učiněno u ČŘ č. 1.

Obrázek 22 pak zobrazuje průběh ACF a PACF sledovaného signálu Y3. Z průběhu ACF je patrné, že nalezení jednotlivých period už není tak snadné a jednoznačné jako tomu bylo u ČŘ č. 1.



Obrázek 21 - ACF pro Y1, Y2 a Y4

Zdroj: vlastní zpracování

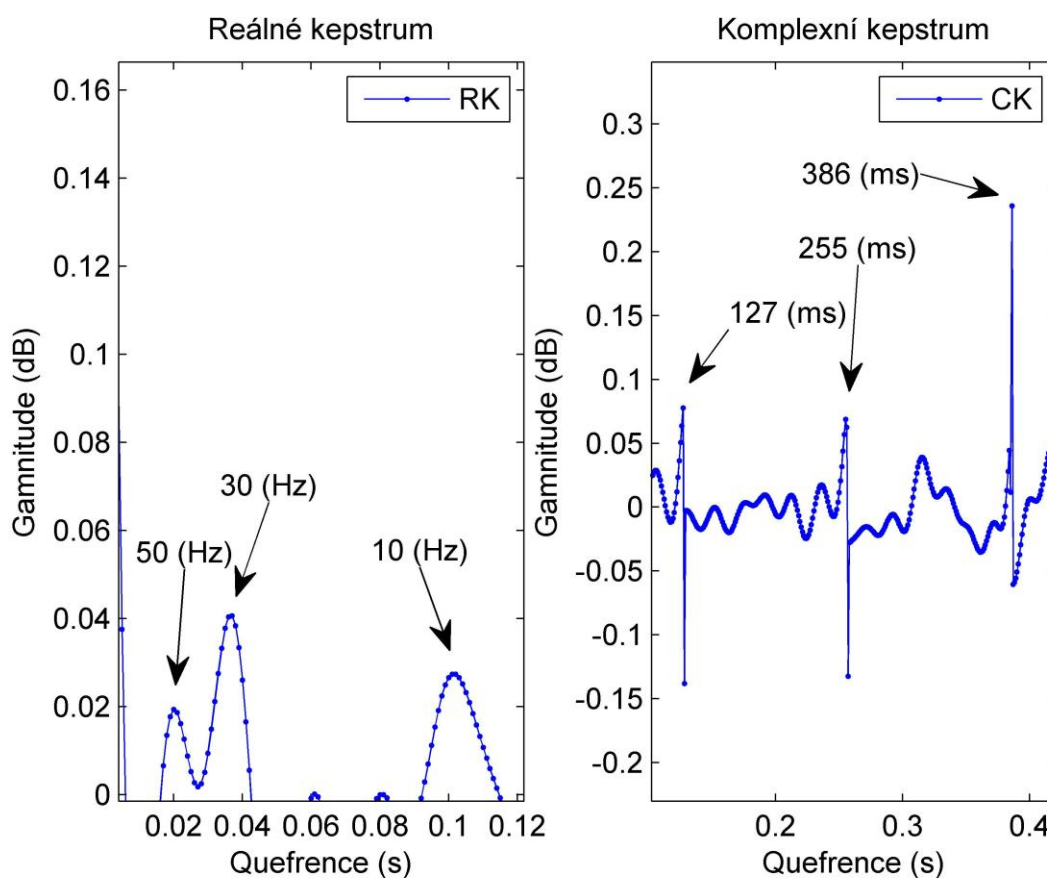


Obrázek 22 - ACF a PACF ČŘ č. 2

Zdroj: vlastní zpracování

Posledním výstupem ČŘ č. 2 je obrázek 23 ukazující výstup KA. Je rozdělen na dvě části popisující reálné kepstrum a komplexní kepstrum. V reálném kepstru se hledají první významné kladné píky, které odpovídají převráceným hodnotám frekvencí obsažených ve sledovaném průběhu. Tyto frekvence byly v průběhu nalezeny a jsou vyznačeny šipkami, které rovnou ukazují hodnotu jejich frekvence.

Co dále KA ukázala je to, že v komplexním kepstru je možné sledovat tři píky, které odpovídají přesně hodnotám změny sledovaného průběhu. Protože u KA osa x odpovídá časové doméně, je možné přesně říci, kdy došlo ke změnám v průběhu signálu. V grafu jsou potom pomocí šipek ukázány vrcholové body k nim přiřazené hodnoty na časové ose.



Obrázek 23 - Kepstrální analýza ČŘ č. 2

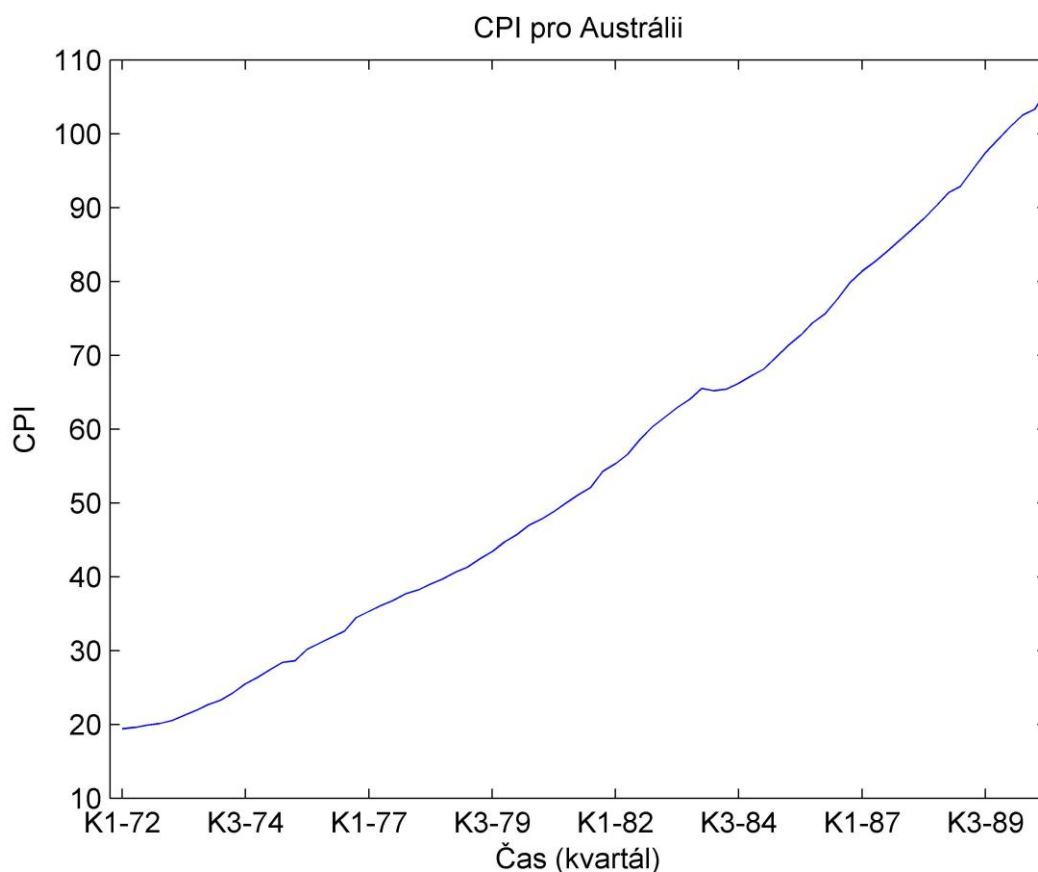
Zdroj: vlastní zpracování

Dvě předchozí časové řady (ČŘ 1 a 2) sloužily pro ukázkou funkčnosti metod na ČŘ periodického charakteru, na kterých bylo možné vidět charakter jejich výstupu. Na tyto časové řady nebyla aplikována dekompozice, jelikož se jednalo o generované signály sloužící pro demonstraci FT a KA. Jinak řečeno, byla prováděna spektrální analýza časových řad.

5.3. ČŘ č. 3

ČŘ³ č. 3 představuje CPI pro Austrálii. Data jsou měřena čtvrtletně a jsou zaznamenávána od roku 1948. Pro účely analyzování a určení vhodného modelu dané časové řady, byla zvolena data v rozmezí let 1972-1991. Jedná se tedy o 76 pozorování po jednotlivých kvartálech.

Na obrázku 24 je vidět průběh čtvrtletní průběh CPI pro Austrálii.

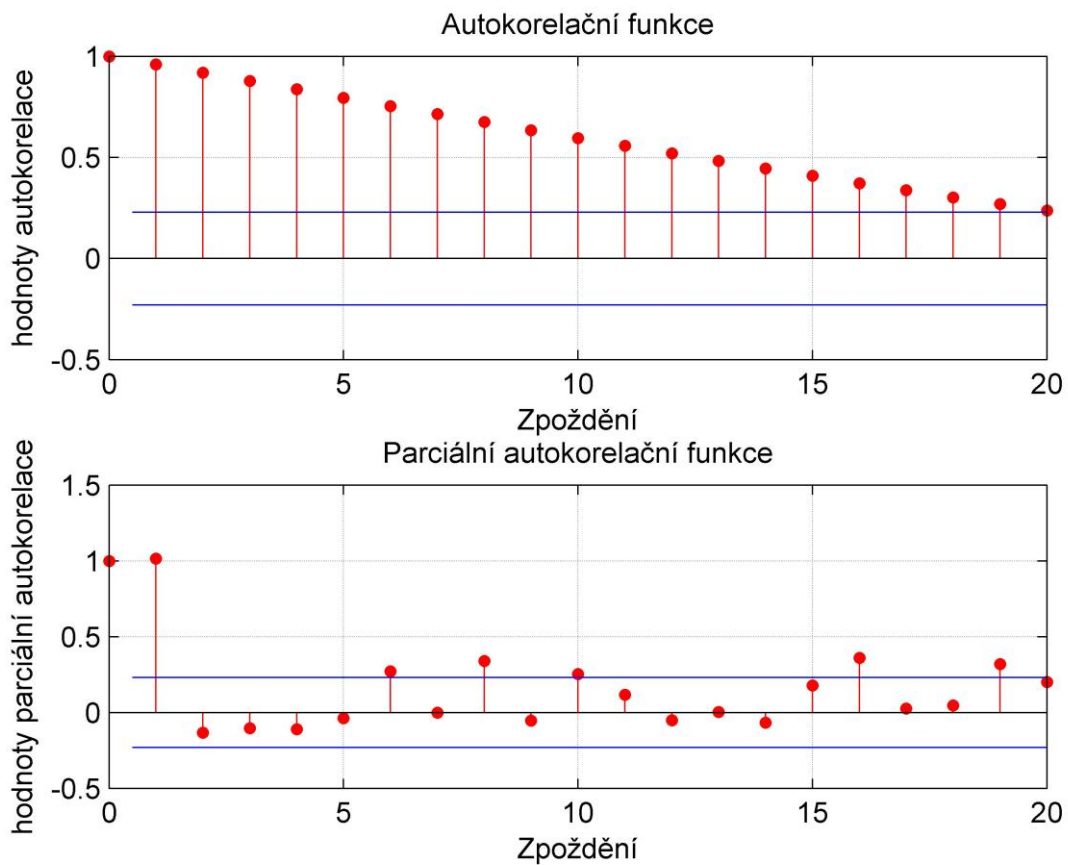


Obrázek 24 - Průběh ČŘ č. 3

Zdroj: vlastní zpracování

Obrázek 25 zachycuje průběh ACF a PACF pro dobu zpoždění 20. Z průběhu ACF je patrné, že lineárně klesá, čímž můžeme o řadě prohlásit, že je nestacionární.

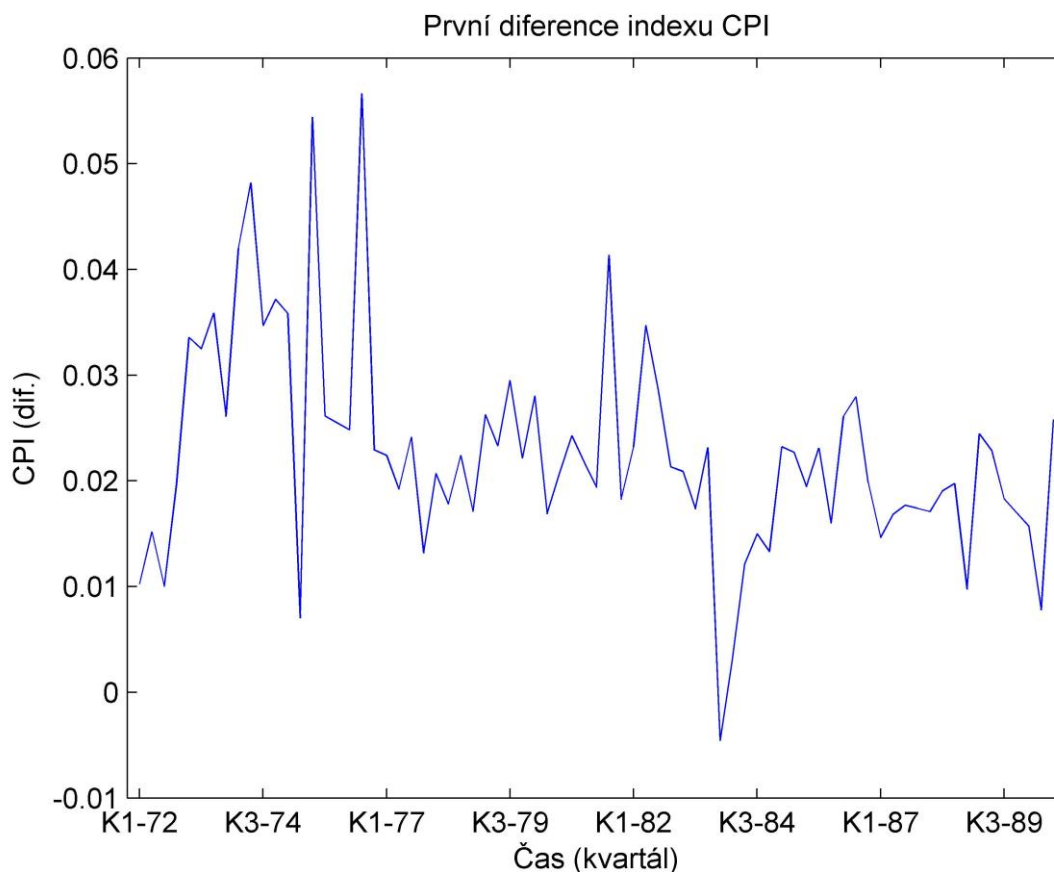
³ Zdroj: <http://www.rateinflation.com/consumer-price-index/australia-historical-cpi.php>



Obrázek 25 - ACF a PACF ČR č. 3

Zdroj: vlastní zpracování

Na obrázku 26 je vidět výpočet první diference indexu CPI. Ta slouží k odstranění nestacionarity řady, což je jedna z podmínek Boxovy-Jenkinsovy metodiky.

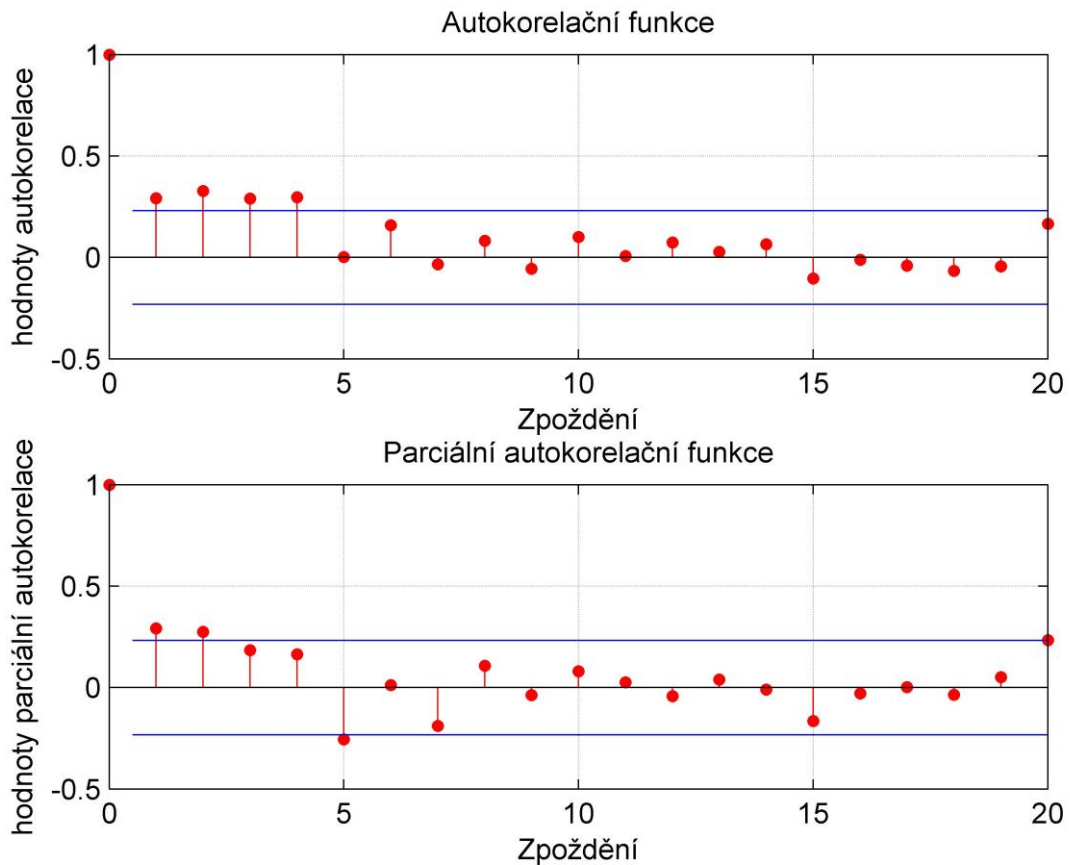


Obrázek 26 - První diference ČR č. 3

Zdroj: vlastní zpracování

Po stacionarizaci řady opět zavedeme ACF a PACF a z jejího průběhu budeme moci odečíst hodnoty pro vhodný model. Je vidět, že aplikováním první diference jsme skutečně řadu stacionarizovali, čímž nyní můžeme přejít k identifikaci modelu. Tím je model ARIMA, jelikož tato řada vykazuje trend a sezónní složku nikoliv (odhadnuto na základě obrázku 23).

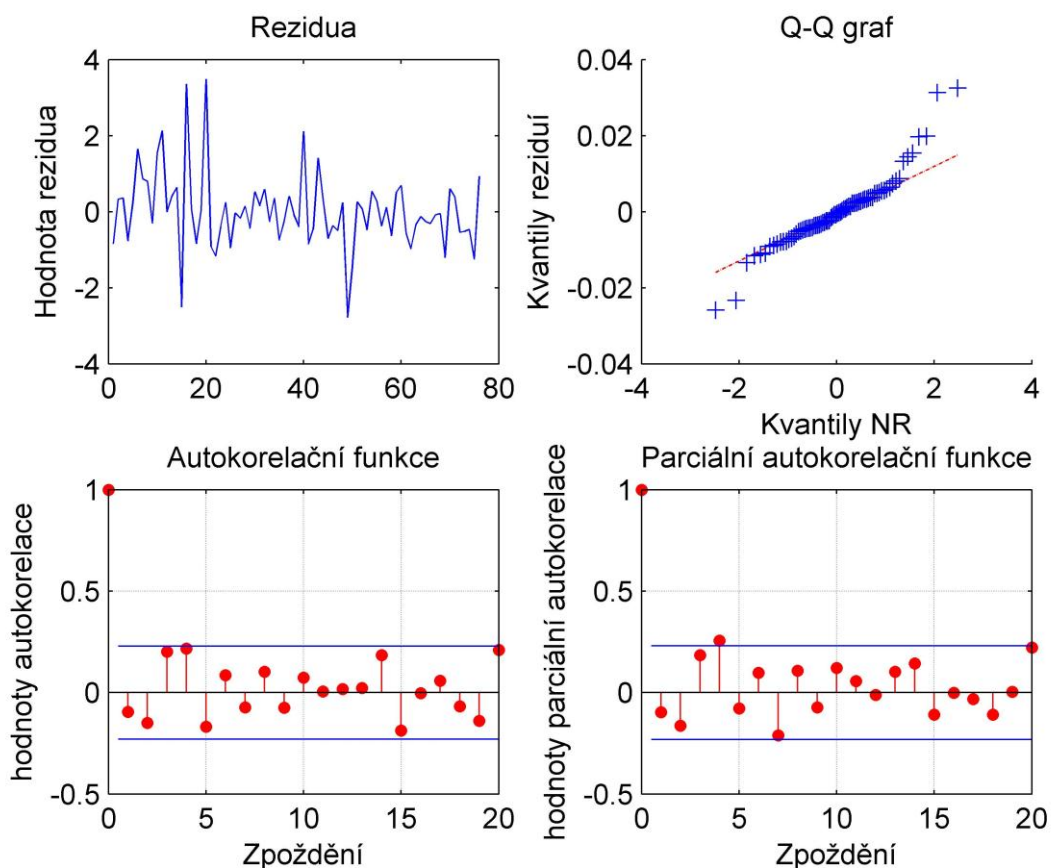
Z průběhu ACF a PACF na obrázku 27 je patrné, že průběh je shodný u obou do zpoždění 2. Takovéto chování odpovídá (na základě subjektivního posouzení průběhu) autoregresnímu procesu druhého stupně, tedy AR (2).



Obrázek 27 - ACF a PACF ČŘ č. 3 (diferencované)

Zdroj: vlastní zpracování

Nyní už stačí jen ověřit, zda u vypočteného modelu jsou rezidua nekorelována a mají normální rozdělení. K tomu nám pomůže obrázek 28, na kterém jsou vidět vlevo nahoře ona rezidua, vpravo potom Q-Q graf, který vyznačuje rozložení kvantilů reziduí okolo kvantilů normálního rozdělení, což až na pár hodnot na koncích řady odpovídá. Průběhy ACF a PACF vypovídají o tom, že rezidua jsou skutečně nekorelována, čímž jsme ověřili správnost aplikovaného modelu na ČŘ.



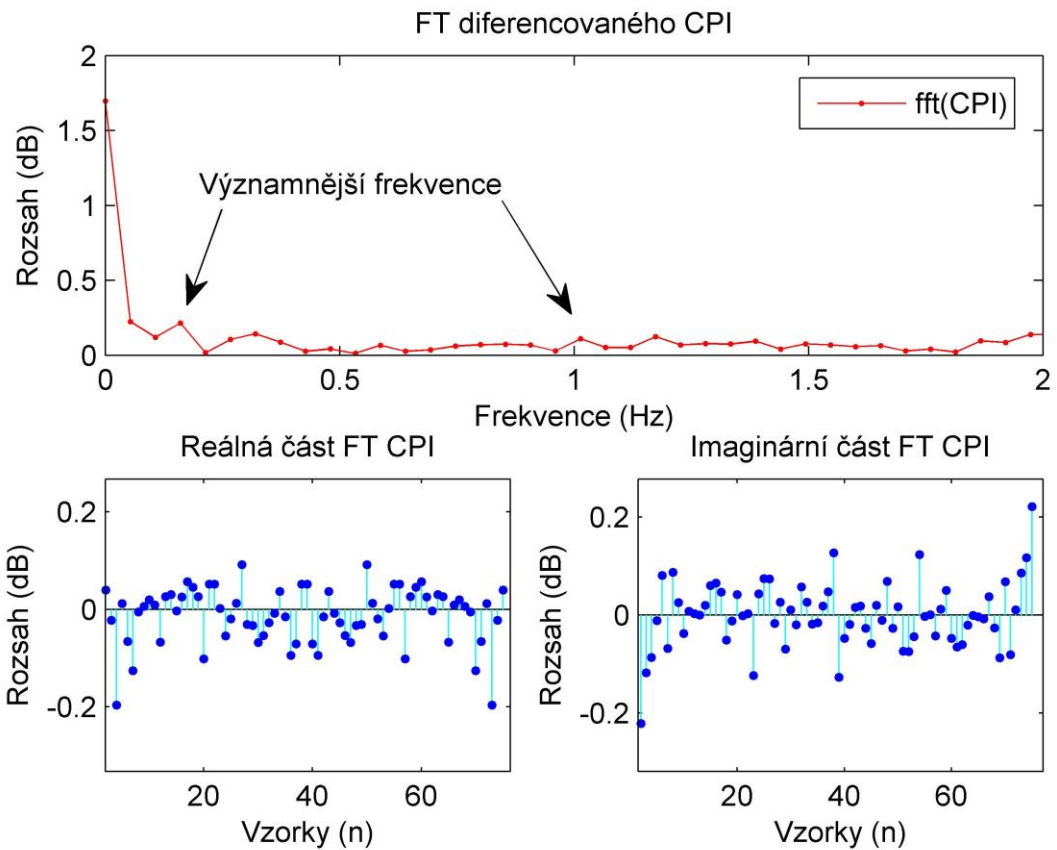
Obrázek 28 - Posouzení reziduí modelu ARIMA

Zdroj: vlastní zpracování

Masset [42] ve své práci aplikuje na reálnou ekonomickou řadu první diferenci, čímž se v podstatě z lineárního průběhu stane průběh vykazující jistou periodičnost a následně aplikuje statistické metody k výpočtu periodogramu (Yule-Walker a Burgova metoda).

Periodogram, stejně jako FT, zobrazuje výskyt jednotlivých frekvenčních složek zastoupených v průběhu. Proto, na základě této teze, se aplikovaly metody FT a KA na diferencovanou časovou řadu CPI Austrálie.

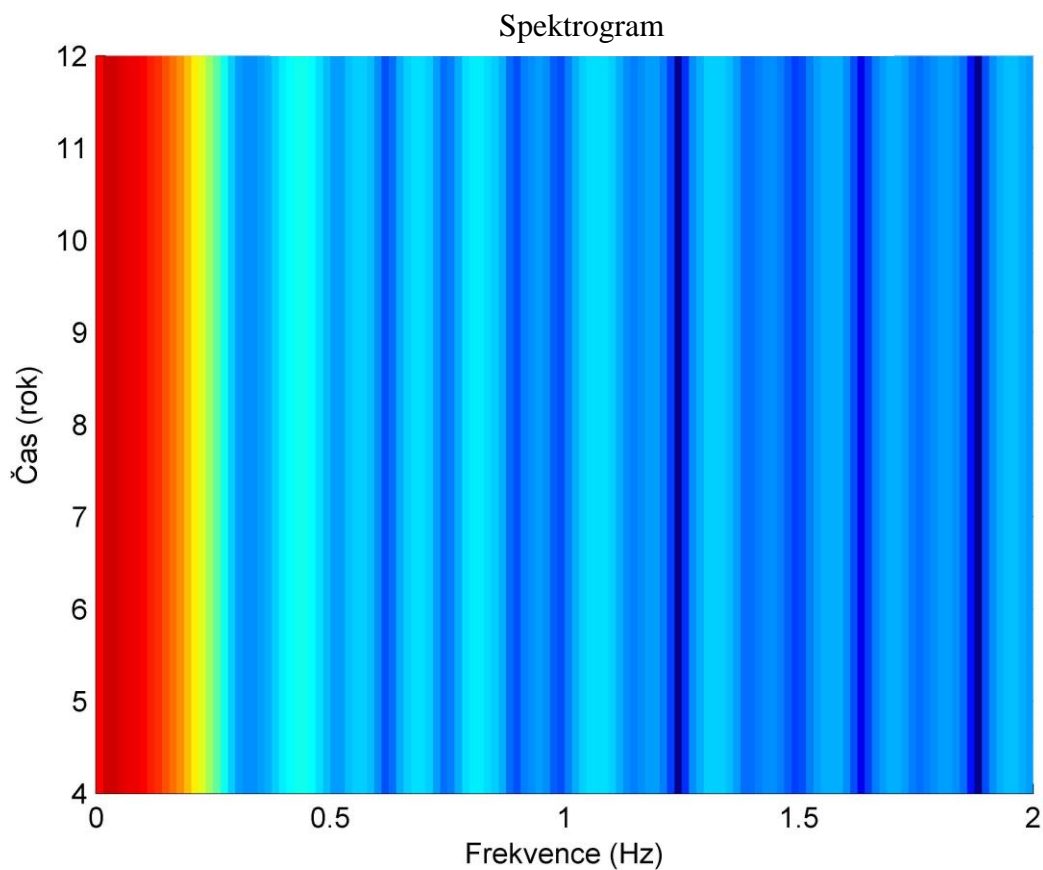
Obrázek 29 zobrazuje FT diferencované časové řady č. 3. Z obrázku je patrné, že spektrum signálu je velmi nahodilé a že se v něm nevyskytuje žádná dominantní frekvence, kterou by bylo možné považovat za významnou.



Obrázek 29 - FT diferencované ČŘ č. 3

Zdroj: vlastní zpracování

Obrázek 30 zobrazující spektrogram časové řady, dokazuje, že se skutečně v dlouhodobějším průběhu žádná výraznější frekvence neobjevuje, je však nutné podotknout, že „významnější“ frekvence se vyskytují maximálně do hodnoty 0,4 Hz.



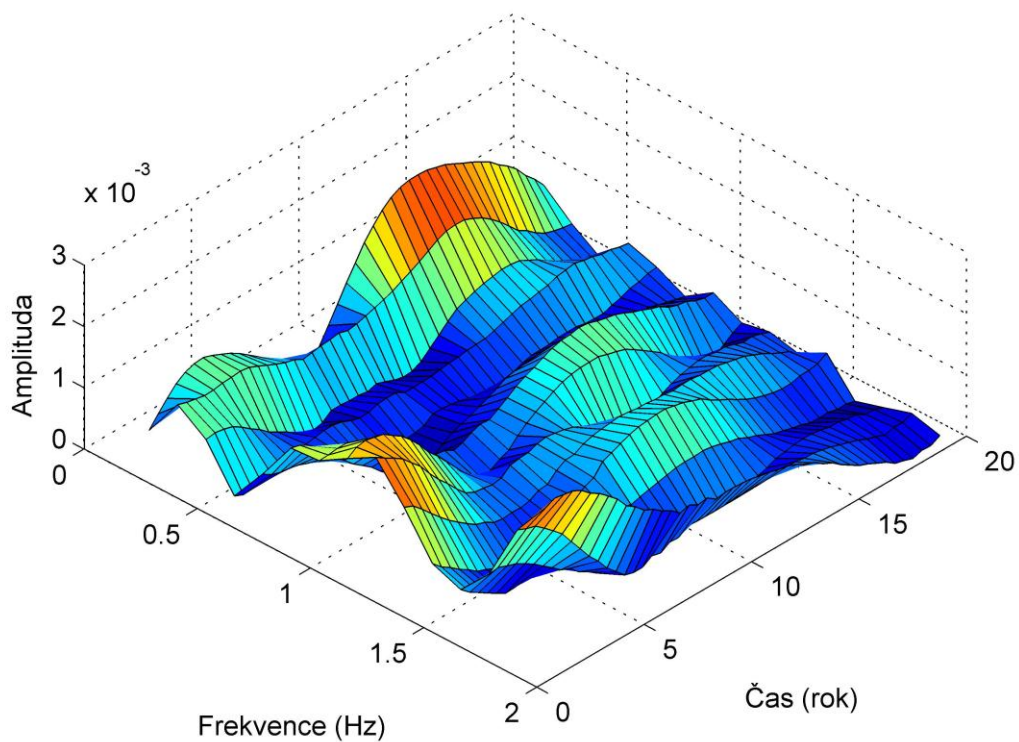
Obrázek 30 - Spektrogram ČŘ č. 3

Zdroj: vlastní zpracování

Obrázek 31, tedy spektrogram ve 3D zobrazení, dává ještě lepší pohled na celou situaci. Ukazuje se, že skutečně „významnější“ frekvence je objevují pouze z počátku (vzhledem časové rovině). Dále je potřeba si uvědomit, že sledujeme pouze polovinu frekvenční části (první 2 Hz), druhá je symetrickou kopií.

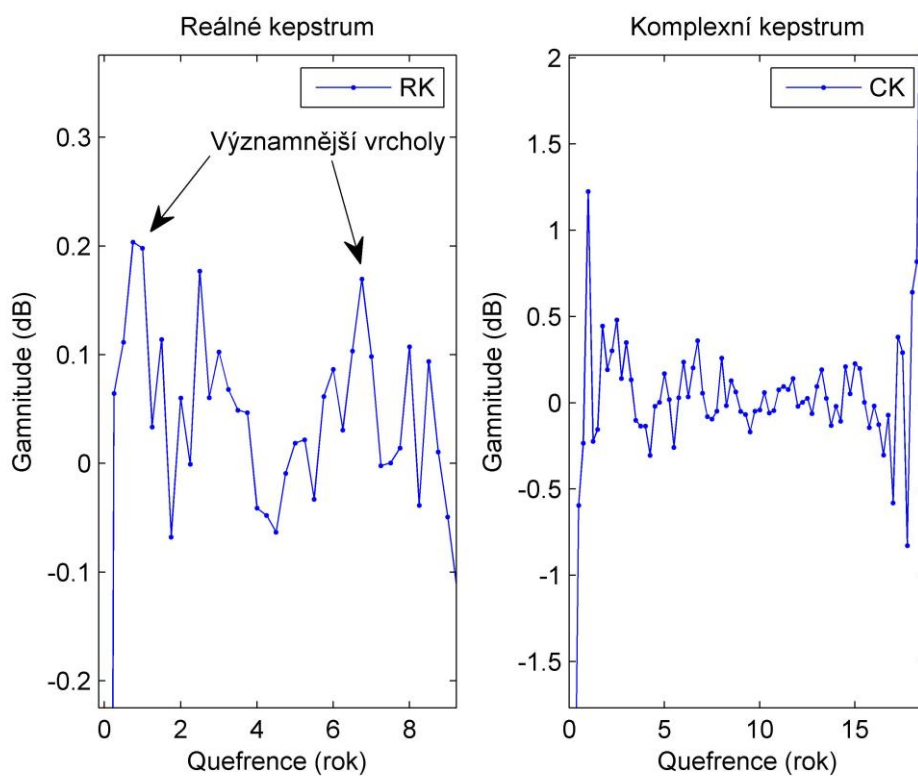
Poslední obrázek 32 pro ČŘ č. 4 je výstup z KA. V levé části je zobrazena reálná část kepra a v pravé části komplexní část kepra.

3D Spektrogram



Obrázek 31 - 3D Spektrogram ČŘ č. 3

Zdroj: vlastní zpracování



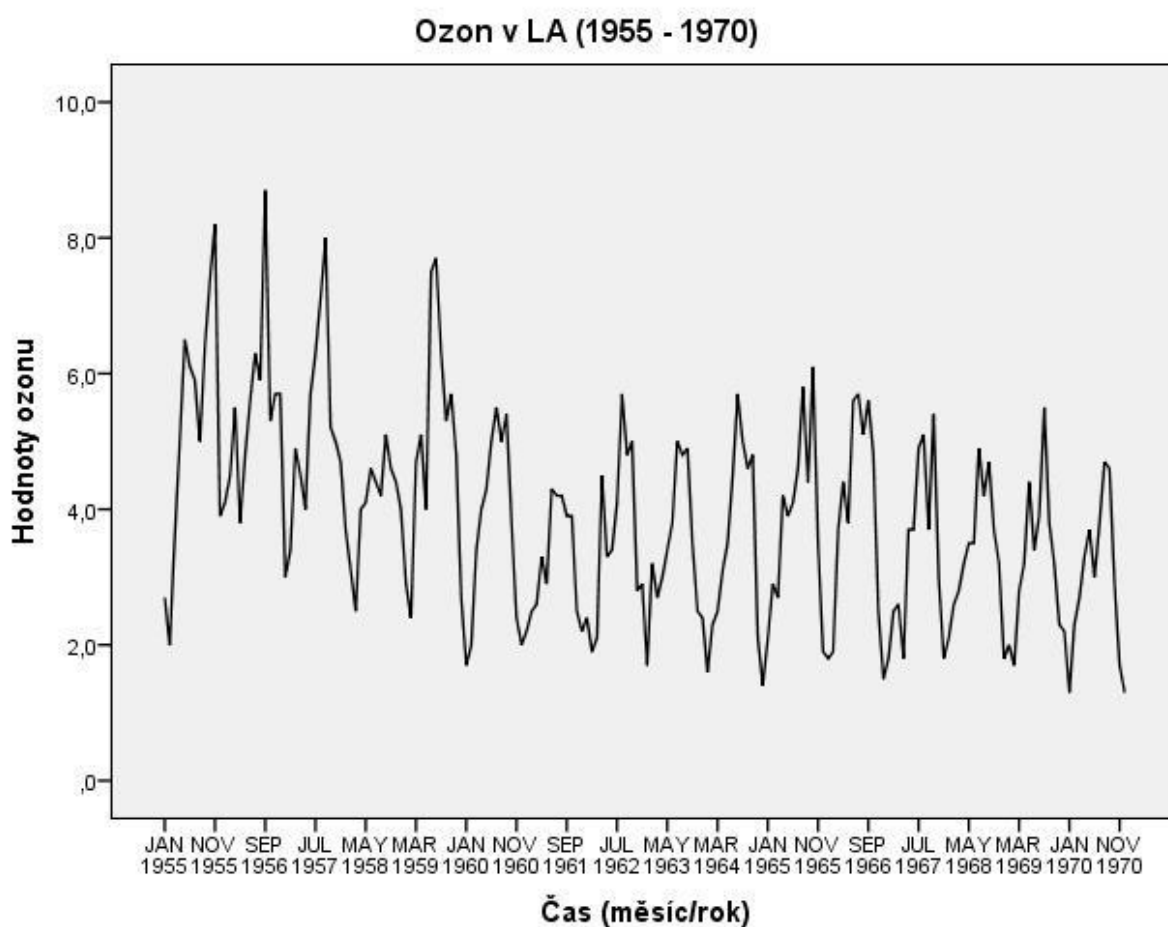
Obrázek 32 - KA ČŘ č. 3

Zdroj: vlastní zpracování

5.4. ČŘ č. 4

Časová řada č. 4 se skládá z dat⁴ týkajících se měsíční koncentrace přízemního ozonu v centru Los Angeles od ledna roku 1955 do prosince roku 1970. Celkový počet pozorování je 192.

Nejprve jsou zobrazena data klasickým bodovým grafem s rovnými spojnicemi. Je vidět, že se ve vizualizovaných datech objevuje nějaká periodická složka a je zde vidět i pokles hodnot, tedy dlouhodobý trend.

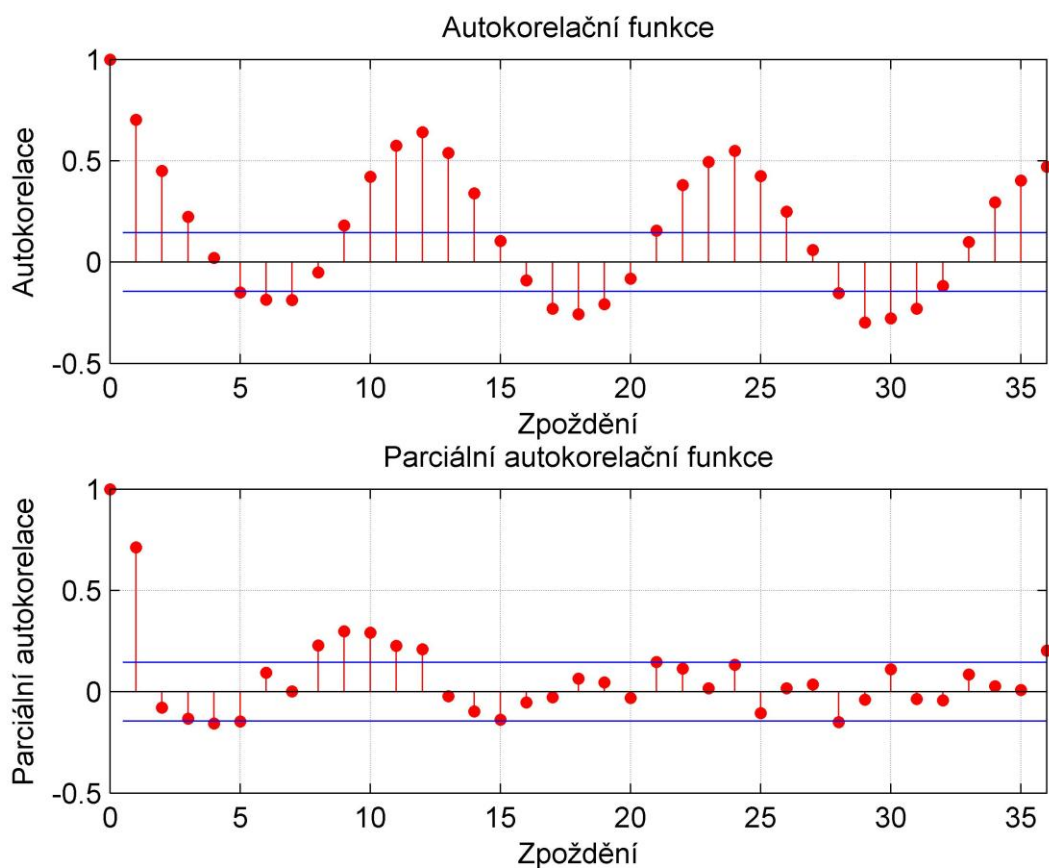


Obrázek 33 - Průběh ČŘ č. 4

Zdroj: vlastní zpracování

Obrázek 34 ukazuje průběh ACF a PACF ze kterého je vidět, že ACF osciluje s periodou 12 a pozvolna klesá, což jednak poukazuje na výskyt sezónní složky a za druhé nám to říká, že je řadu dále potřeba stacionarizovat.

⁴ Zdroj: <http://robjhyndman.com/tsdldata/monthly/ozone.dat>

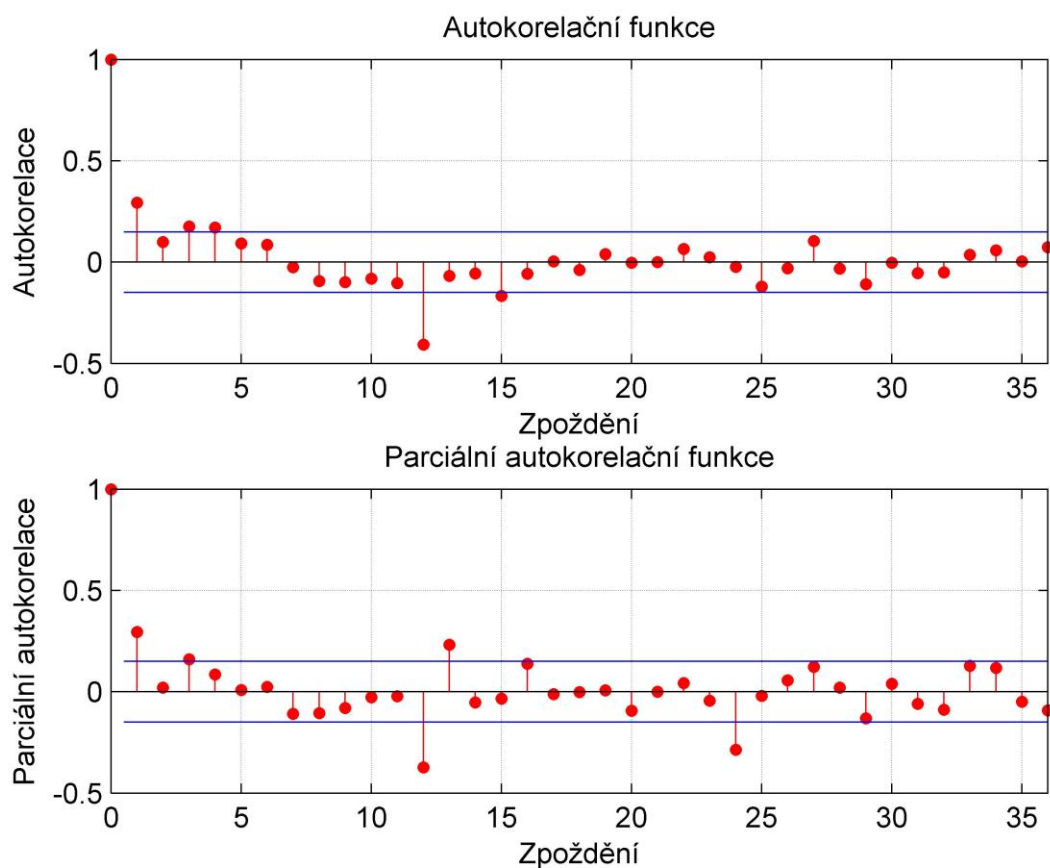


Obrázek 34 - ACF a PACF ČŘ č. 4

Zdroj: vlastní zpracování

Nyní tedy provedeme sezónní diferenci, která nás sice připraví o 12 pozorování, ale řadu by měla stacionarizovat. Obrázek 30 zobrazuje průběhy ACF a PACF po sezónní diferenci, kdy je stále ještě vidět významná hodnota v bodě 12, ale oscilace je již odstraněna. Na základě těchto průběhů se identifikovat vhodný model, stejně jako u předchozí ČŘ. Je však potřeba si uvědomit, že nyní nehledáme pouze nesezónní procesy AR a MA, ale také sezónní procesy, jelikož odhadovaným modelem je SARIMA.

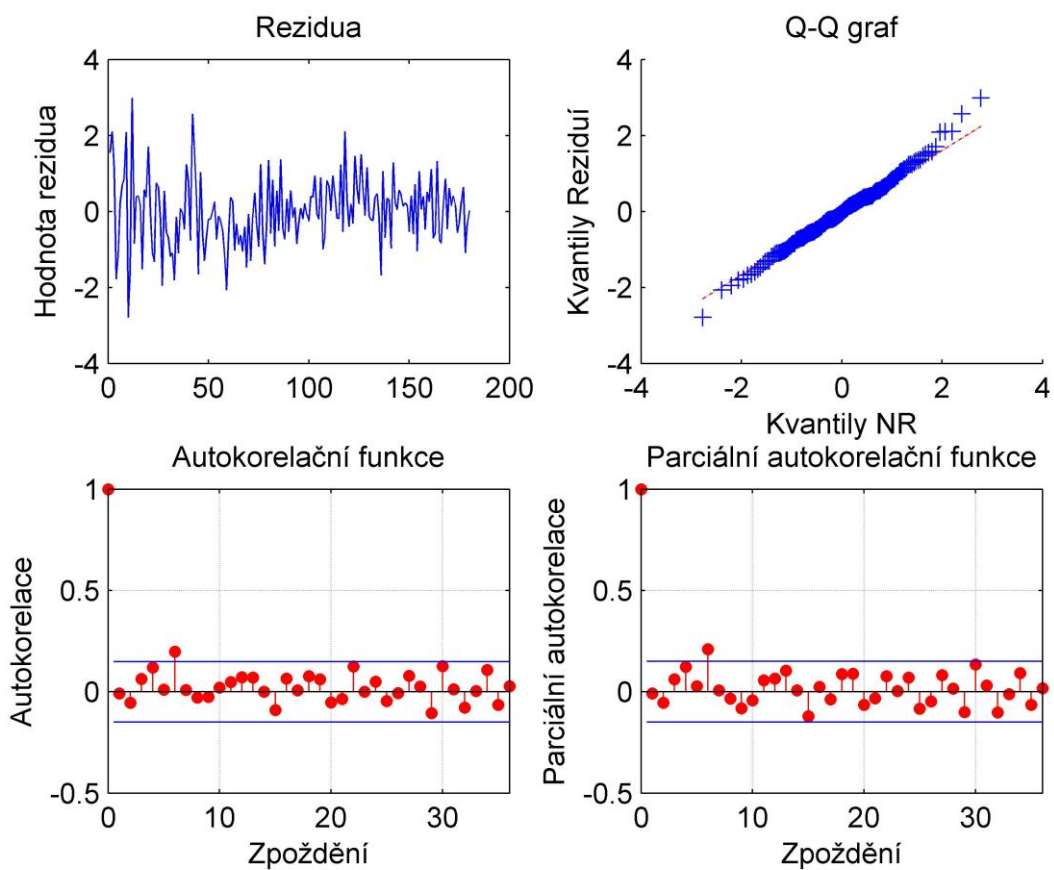
PACF vykazuje významnou hodnotu v bodě 12 a 24, kde je vidět pokles mezi těmito hodnotami. Hodnota 36 je takřka nevýznamná. U ACF je významná pouze hodnota 12, to směřuje k procesu SMA ((sezónní MA) 1). Naopak rychlý pokles ACF u nižších zpoždění a významná hodnota u PACF ve zpoždění 1 indukuje proces AR (1).



Obrázek 35 - ACF a PACF po stacionarizaci ČŘ č. 4

Zdroj: vlastní zpracování

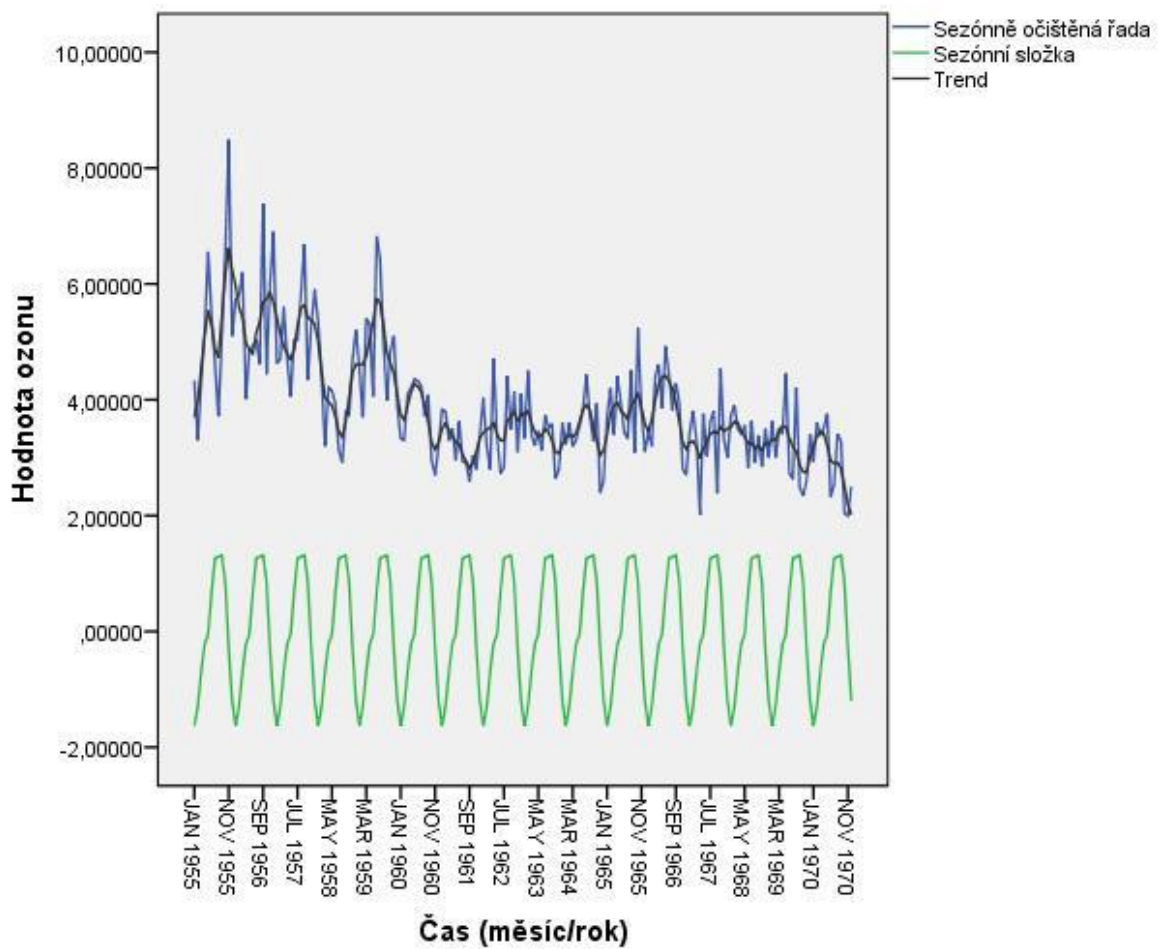
Správnost modelu si opět ověříme na výsledných reziduích. Výstup pozorovaný na Q-Q grafu a ACF a PACF znázorňuje obrázek 36. Hodnota zpoždění v bodě 6 ještě stále trochu převyšuje mez, ale vzhledem k tomu, že naprosto minimálně a ostatní hodnoty jsou v pořádku, můžeme tuto odchylku ignorovat.



Obrázek 36 - Posouzení reziduí modelu SARIMA

Zdroj: vlastní zpracování

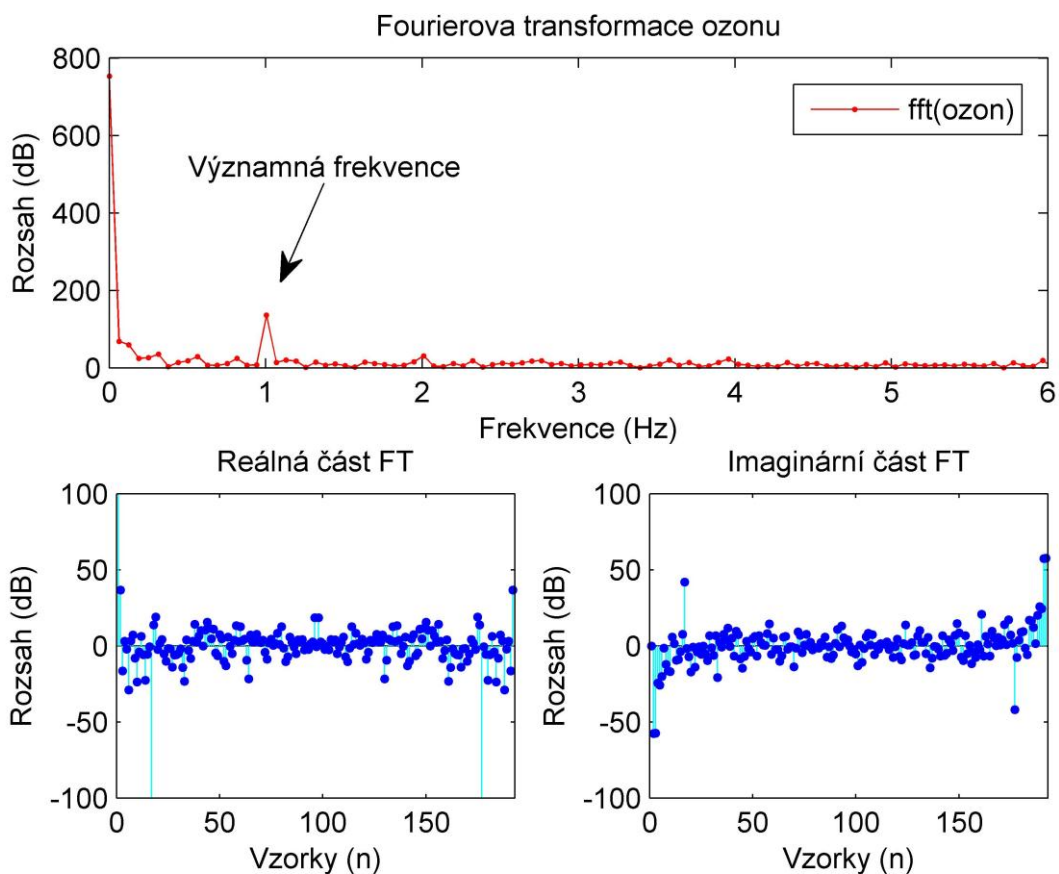
Dalším obrázek ukazuje výslednou dekompozici ČŘ na sezónní složku, trend a sezónně očištěnou složku. Jedná se o aditivní dekompozici, resp. byl dán předpoklad, že řada je aditivní a na základě toho, byla aplikována vhodná metoda.



Obrázek 37 - Dekompozice ČŘ č. 4

Zdroj: vlastní zpracování

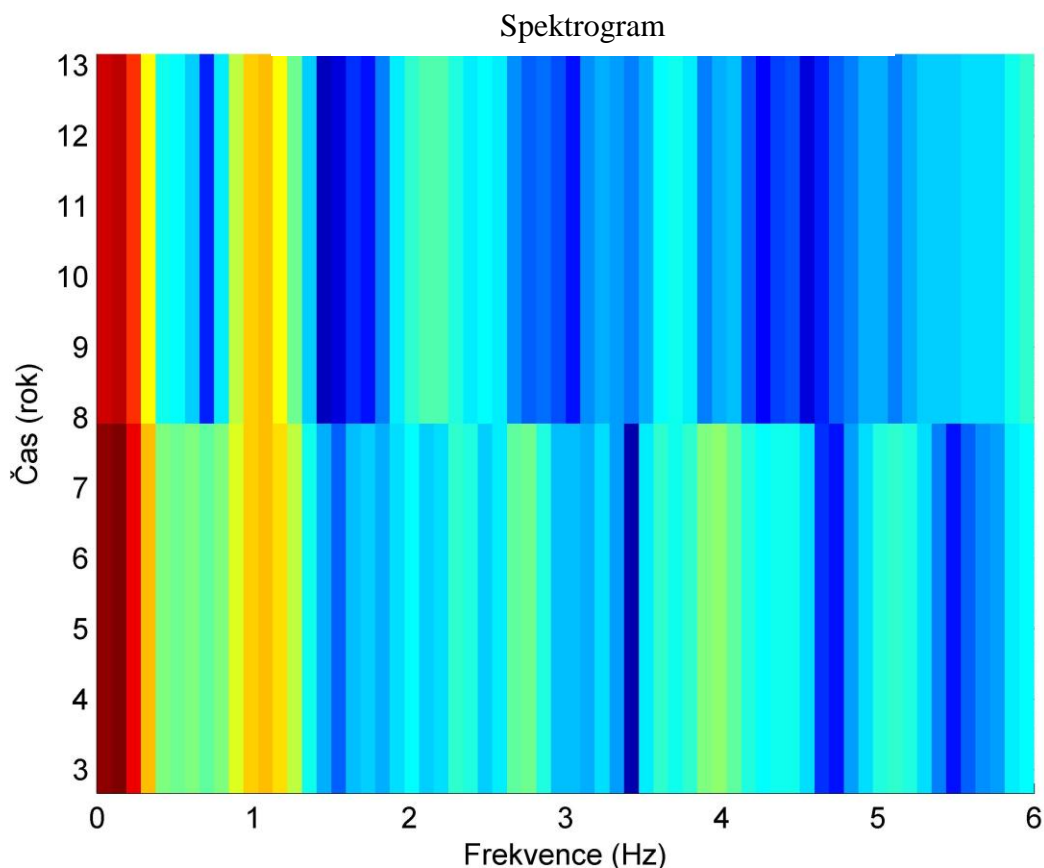
Obrázek 38 zobrazuje FT ČŘ č. 4. V horní části je šipkou označena významná frekvence 1 Hz. Ta odpovídá při vzorkovací frekvenci 12 Hz právě jednomu cyklu jednoho roku. Konkrétně se tedy jedná o sezónní složku, která je zobrazena ve spektru.



Obrázek 38 - FT ČŘ č. 4

Zdroj: vlastní zpracování

Na obrázku 39 je vidět spektrogram zkoumané ČŘ. Žlutá oblast, vyskytující se v okolí 1 Hz, která je po celou sledovanou dobu vidět, je právě ona sezónní složka. Ze začátku červená oblast značí výskyt nižších frekvencí, které jsou vidět i na obrázku 38. Vzhledem k jejich velikosti ve výstupu FT (obrázek 38), byly vyhodnoceny jako nevýznamné.

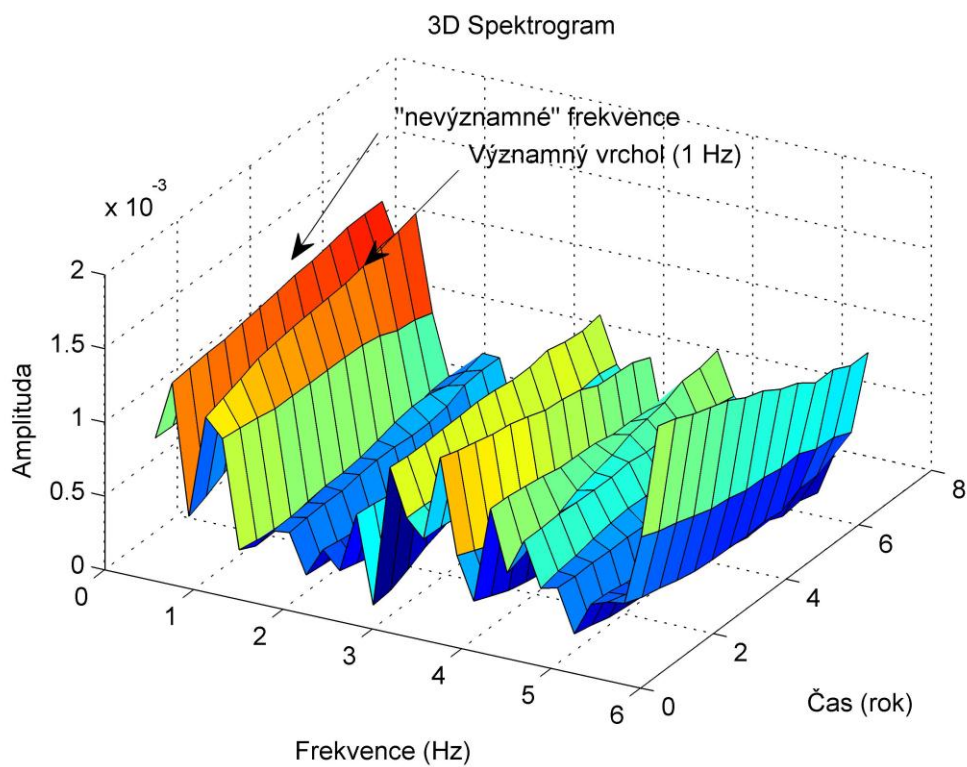


Obrázek 39 - Spektrogram ČŘ č. 4

Zdroj: vlastní zpracování

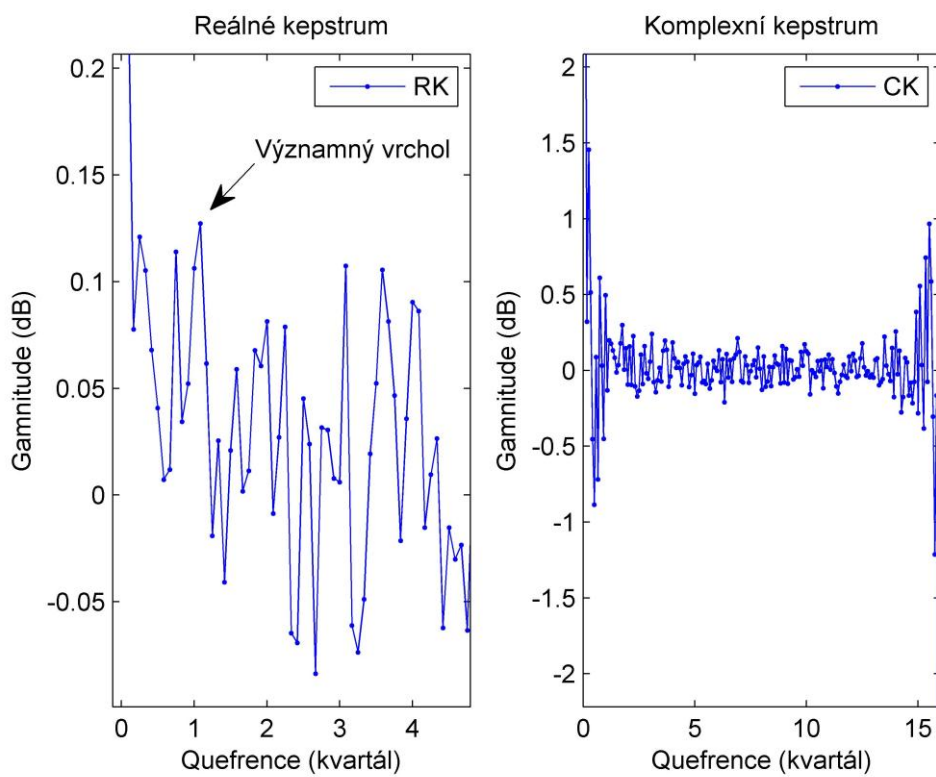
Obrázek 40 zobrazuje 3D zobrazení spektrogramu. Jsou zde ze začátku patrné dva vrcholy, první v rozmezí 0 - 1 Hz značí již několikrát zmiňované „nevýznamné frekvence“, které díky aplikaci okna, byly vyhlazeny do podoby jedné zřetelnější frekvence. Druhý vrchol právě v 1 Hz značí sezónní složku ČŘ č. 4.

Obrázek 41 ukazuje výstup KA ČŘ č. 4. Výstup je rozdělen na dvě části, reálnou část kepra a komplexní část kepra. V reálné části je šipkou zobrazen vrchol odpovídající po přepočtu frekvenci 1 Hz, který odpovídá právě sezónní složce ČŘ. Přestože se zde vyskytuje více vrcholů v reálné části, není příliš dobře možné přiřadit jim nějaký význam. Komplexní část kepra nemá též nějaký významný vrchol, který byl patrný v modelovém příkladu (ČŘ č. 2), aby bylo možné hovořit o nějaké další skryté periodicitě sledované ČŘ.



Obrázek 40 - 3D Spektrogram ČŘ č. 4

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 41 - KA ČŘ č. 4

Zdroj: vlastní zpracování

ZÁVĚR

Cílem této práce bylo analyzovat časové řady s pomocí Fourierovy transformace a kepstrální analýzy. To bylo učiněno na čtyřech časových řadách. První dvě časové řadové řady byly generované a sloužily k demonstraci metod Fourierovy transformace a kepstrální analýza, při známých koeficientech těchto sledovaných řad. To z toho důvodu, aby bylo možné zpětně určit, zda metody poskytují požadovaný výsledek.

Fourierova transformace byla aplikována ve formě diskrétní Fourierovy transformace počítané metodou rychlé Fourierovy transformace. Dále pak ve formě spektrogramu ve 2D a 3D zobrazení. Obě tyto zobrazení využívala Hammingova okna a ostatní parametry byly nastavovány shodně, aby bylo možné lépe posoudit výstupy sledovaných časových řad.

Kepstrální analýza byla vždy rozdělena na dvě části (reálnou a komplexní), jelikož při testování různých parametrů nastavení na generovaných časových řadách, byly výsledky hledaných frekvencí nejlépe zřetelné v reálné části. Naopak při hledání výskytu další periodicity ve zkoumané časové řadě, byly nejlépe výsledky patrné v komplexní části kepstrální analýzy.

Druhé dvě časové řady, na které se aplikovaly výše zmíněné metodiky, pocházely z oboru ekonomického a environmentálního. Protože tyto řady pocházely z výše zmíněných oborů, byla na ně aplikována Boxova-Jenkinsova metodologie za účelem nalezení vhodného modelu, díky kterému by tyto časové řady mohly být dále modelovány pro predikci. Pro ČŘ č. 3 to byl model ARIMA a pro ČŘ č. 4 to byl model SARIMA.

Aplikace metod Fourierovy transformace a kepstrální analýzy na ČŘ ať už ekonomického, či jiného charakteru (např. finančního) je však diskutabilní. Metody Fourierovy transformace alespoň naleznou případnou frekvenci odpovídající např. sezónní složce (viz. ČŘ č. 4), avšak výstup kepstrální analýzy je relativně nepřehledný, a tudíž těžko interpretovatelný. Důvodem může být jednak to, že časové řady tohoto charakteru jsou velmi krátké (resp. obsahují nízký počet pozorování). Dalším důvodem může být samotný charakter takovýchto časových řad, zvláště vezme-li se v potaz, že metoda kepstrální analýza je dnes převážně využívána u analýzy řečového signálu (kvaziperiodický signál).

Ani však aplikace metod Fourierovy transformace není tak dobrým řešením, při zkoumání takovýchto časových řad, jelikož aby rozklad na jednotlivé frekvence byl „smysluplný“, je potřeba, aby význam jednotlivých frekvencí napříč sledovaným vzorkem, zůstal po celou dobu stabilní. Jako částečné řešení se právě jeví krátkodobá Fourierova transformace, která

rozdělí sledovanou časovou řadu do několika menších částí, které jsou následně zkoumány, avšak výsledkem je kompromis mezi časovou a frekvenční doménou. Dle nastudovaných publikací se jeví asi jako nejlepší řešení, aplikace Waveletové analýzy, která poskytuje kompletní rozklad bez kompromisů (na rozdíl od krátkodobé Fourierovy transformace).

Cíle vytýčené v úvodu byly splněny, tj. aplikování metod Fourierovy transformace a keprální analýzy na časové řady.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] POPELKA J., SYNEK V. *Úvod do statistické analýzy dat*. Ústí nad Labem, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, Fakulta životního prostředí. 2009. 200 s. ISBN 978-80-7414-117.
- [2] RUBLÍKOVÁ, E. *Analýza časových řadov*. Bratislava: Ekonomická univerzita v Bratislavě, 2007. ISBN 978-80-8078-139-2.
- [3] ARTL, J., ARTLOVÁ, M. *Příklady z analýz ekonomických časových řad*. Praha: VŠE, 1997. ISBN 80-7079-056-3.
- [4] KVASNIČKA M., MORAVANSKÝ D. *Ekonomicko-Matematické metody*. 1.vyd. Brno: MU Brno, 2004. ISBN 80-210-3477-7
- [5] CIPRA T. *Finanční ekonometrie*. 1. vyd. Praha: Ekopress, 2008. ISBN 978-80-86929-43-9.
- [6] ARTL, J, ARTLOVÁ, M., RUBLÍKOVÁ, E. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: VŠE, 2002. Dostupné z: <http://nb.vse.cz/~arltova/vyuka/crsbir02.pdf>.
- [7] PETR, P. *Dekompozice ČR*: Přednáška z předmětu Business Intelligence: Univerzita Pardubice. [2011] [cit. 2012-24-02].
- [8] HARDY, G. H., W. W. ROGOSINKI. *Fourier Series*. Cambridge: University Press, 1962.
- [9] ČÍŽEK, V. *Diskrétní Fourierova transformace a její použití*. Praha: SNTL, 1981.
- [10] HERRMAN, L.: *Fourierovy řady*, Vydavatelství CVUT, Praha 2002
- [11] MALÝ, J. *Fourierova analýza a parciální diferenciální rovnice: Zápisky z přednášek*. Přírodovědecká fakulta - katedra fyziky. Dostupné z: <http://physics.ujep.cz/~jmaly/four.pdf>
- [12] ZAPLATÍLEK, K. *Základy Elektrotechniky: elektronická podpora přednášek*. [online]. [cit. 2012-03-18]. Dostupné z: <http://user.unob.cz/zaplatilek/ZEL/>
- [13] ČASTOVÁ, N. *Integrální transformace*. [online]. Vysoká škola Báňská - Fakulta elektrotechniky a informatiky, 2002 [cit. 2012-03-18]. Dostupné z: http://hpc.vsb.cz/studium/integralni_transformace/

- [14] KOZUBEK, T. *Bodová konvergence funkčních řad*, Gibbsův jev. [online]. Vysoká škola Báňská - Fakulta elektrotechniky a informatiky, 2002 [cit. 2012-03-18]. Dostupné z: http://hpc.vsb.cz/studium/integralni_transformace/fourierovy_rady
- [15] *Fourierovy řady: Matematická analýza 2* [online]. Plzeň: ZČU - Katedra matematiky [cit.2012-03-18]. Dostupné z :http://analyza.kma.zcu.cz/PREDMETY/M2_MA2/zaznamy/MA2_03_Fourierovy_rady.pdf
- [16] HABALA, P. *Math Tutor: Řady* [online]. ČVUT - Katedra matematiky [cit. 2012-03-19]. Dostupné z: <http://math.feld.cvut.cz/mt/indexce.htm>
- [17] SADOWSKÁ, M. *Integrální transformace: Fourierovy řady*. Technická universita Ostrava, 2003. VŠB
- [18] ČASTOVÁ, N. KOZUBEK, T. *Fourierův integrál*. Vysoká škola Báňská - Fakulta elektrotechniky a informatiky, 2002
- [19] HLAVÁČ, V. *Fourierova transformace v 1D a 2D*. Praha, 2012. České vysoké učení technické
- [20] BRYJOVÁ, I. *Principy a metody moderní medicínské diagnostiky*. Opava: [vl. nákl.], 2007. 236 s.
- [21] HOLČÍK, J. *Signály a lineární systémy*. Brno, 2011. Masarykova univerzita
- [22] SVAČINOVÁ, J. *Časově-frekvenční transformace odezvy kardiovaskulárního systému na podráždění*. Brno: [vl. nákl.], 2009. 39 s
- [23] LAJZA, P. *Využití laserinterferometru ML10 Gold pro snímání vibrací bezdotykovým způsobem*. Brno, 2008. Diplomová práce. VUT - Fakulta strojního inženýrství.
- [24] HORÁK, D. *Diskrétní transformace*. Plzeň. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/diskretni_transformace.pdf
- [25] HOLČÍK, L. *Spektrální analýza hudební skladby*. Brno, 2009. Diplomová práce.
- [26] KAZDA, V. *Metody analýzy časově proměnných signálů: FFT*. Brno, 2008.
- [27] RANDALL, R.B. *Frequency Analysis*. 2. vyd. 1977. ISBN 878-35-5140.
- [28] SMITAL, V. *Detekce začátku a konce promluvy v nahrávkách*. Brno, 2005. Diplomová práce. Masarykova univerzita.
- [29] OPPENHEIM A.V., SCHAFER R.W. : *Digital Signal Processing*. Prentice Hall, New Jersey 1975. ISBN 0-13-216771-9

- [30] BOGERT B. P., MEALY M. J., TUKEY J. W. *The quefreny analysis of time series for echoes*, New York, 1963.
- [31] ANGUERA, X. *Cepstral Analysis*. Barcelona, 2006. Universitat Politècnica de Catalunya.
- [32] WANG, F., YIP, P. *Cepstrum Analysis Using Discrete Trigonometric Transform*. IEEE, roč. 1991.
- [33] SYROVÝ, V. *Analýza a syntéza hudebního signálu*. Hudební nástroje, roč. 1986.
- [34] JAN, J. *Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů*. Kiramo, Brno 1997. ISBN 80-214-0816-2
- [35] TŮMA, J. *Zpracování signálů z mechanických systémů užitím FFT*. Štramberk, 1997. ISBN 80-901936-1-7
- [36] KREIDL, M., MARZ V., ŠMÍD R. *Ultrazvuková defektoskopie*. Starmans, 2011. ISBN 978-80-254-6606-3
- [37] KŘIVÝ, I. *Analýza časových řad*. Ostrava: Ostravská univerzita, 2006.
- [38] GREENE W. H., *Econometric analysis*. 6.vyd. New Jersey:Pearson Education, 2008. ISBN 978-0-13-513740-6 S.630
- [39] ŠEDIVÁ, P, TREXLER J. *Indexy spotřebitelských cen: (metodická příručka pro uživatele)*. Dostupné z: [http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/_isc_metodicka_prirucka/\\$File/manual_isc_2012.pdf](http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/_isc_metodicka_prirucka/$File/manual_isc_2012.pdf)
- [40] ZICHOVÁ, J. *Analýza časových řad, Autoregresní model*. [online] Univerzita Karlova, [cit. 2012-04-18]. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zichova/PRFUK>.
- [41] CIPRA, T. *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*. SNTL, Praha, 1986.
- [42] MASSET, P. *Analysis of Financial Time-Series using Fourier and Wavelet Methods*, University of Fribourg, 2006.

SEZNAM PŘÍLOH

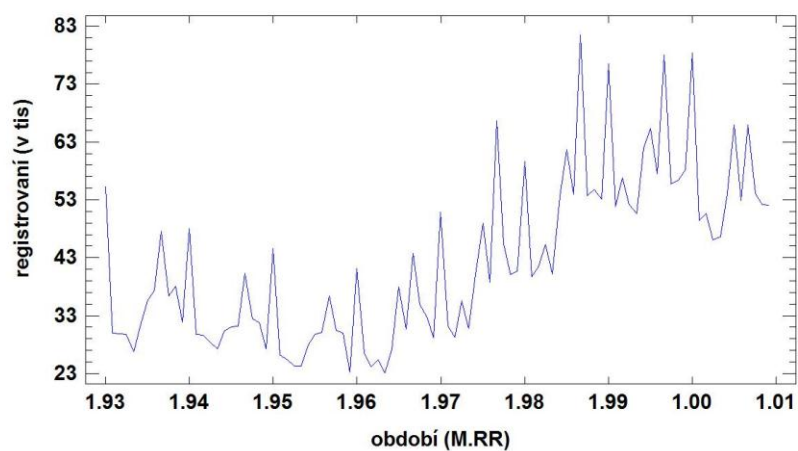
Příloha A Grafy časových řad

Příloha B Přiložené soubory

Příloha C Výpočet FŘ

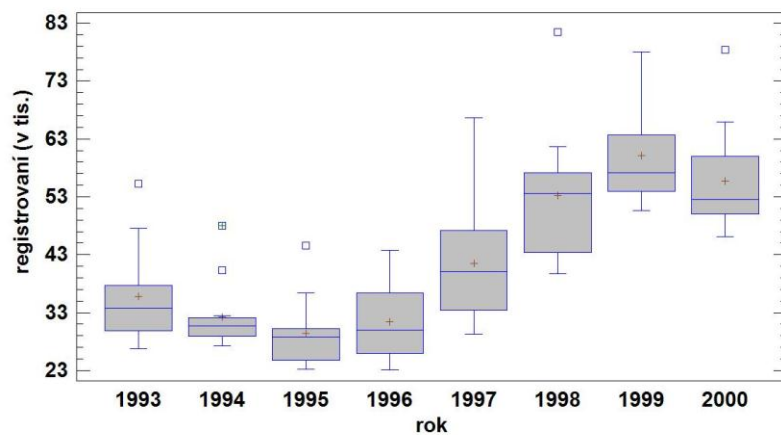
Příloha D DVD

Příloha A – Grafy časových řad



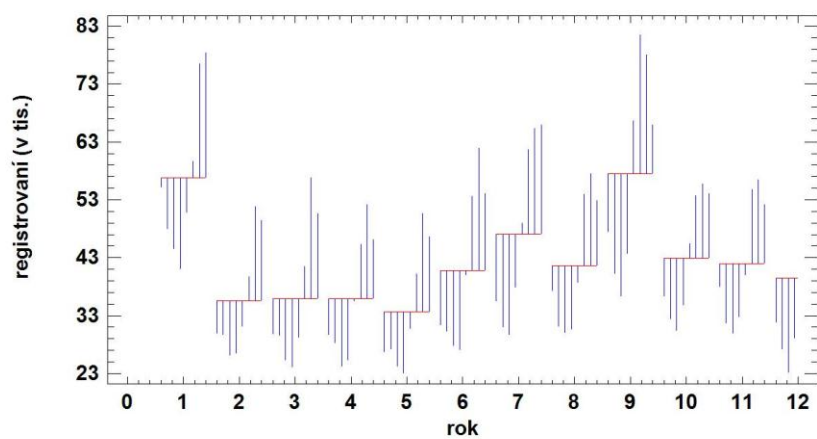
Obrázek A. 1 - Spojnicový graf počtu registrovaných uchazečů o zaměstnání v ČR

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek A. 2 - Box-plot graf počtu registrovaných uchazečů o zaměstnání v ČR

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek A. 3 - Seasonal Subseries graf počtu registrovaných uchazečů o zaměstnání v ČR

Zdroj: vlastní zpracování

PŘÍLOHA B – Příložené soubory

V této části přílohy jsou umístěny zdrojové kódy jednotlivých m-filů, resp. m-fily pro první generovaný signál. Pro ostatní časové řady jak generované tak i reálné, bude uveden pouze výpis použitých m-filů. Kompletní obsah kódů je samozřejmě dostupný na příloženém DVD.

Tabulka B.1 - Struktura příložených m-filů

	Generované ČŘ		Reálné ČŘ	
Název hl. souboru	signal1.m	signal2.m	CPI.m	Ozon.m
Zdrojová data	generovaná	generovaná	CPI.mat	Ozon.mat
Použitý program	MATLAB R2010b		MATLAB R2012a	
Související soubory (použité funkce)	signal_f	signal2_f	fft1_f_cpi	fft1_f_ozon
	fft1_f	fft2_f	keps_f_cpi	keps_f_ozon
	stft_f3D	stft_f3D_2	stft_f3D_cpi	stft_f3D_ozon
	stft_f2D	stft_f2D	stft_f2D_cpi	stft_f2D_ozon
	auto_f	auto_f		
	keps_f	keps_f_2		

Zdroj: vlastní zpracování

Gibbs.m

```
% symbolický zápis
syms x k L n

%přiřadí pro k hodnotu (integer)
evalin(symengine, 'prirad(k, Type::Integer)') ;

%výraz ak
a = @(f, x, k, L) int (f*cos(k*pi*x/L) /L, x, -L, L) ;

%výraz bk
b = @(f, x, k, L) int (f*sin(k*pi*x/L) /L, x, -L, L) ;

% FR
FR = @(f, x, n, L) a(f, x, 0, L)/2 + ...
    symsum(a(f, x, k, L)*cos(k*pi*x/L) ...
    + b(f, x, k, L)*sin(k*pi*x/L), k, 1, n) ;

% Vstupní fce
f = x;

% Vytiskne výraz fs(Fourierovu řadu) pro dané n
pretty(fs(f, x, 9, 1)) ;

%vrátí nejjednodušší formu symbolického vyjádření
[A, how]=simple(a(f, x, k, pi)) ; A
[B, how]=simple(b(f, x, k, pi)) ; B

%částečné součty FŘ jsou změněny na vektorizovanou fci(kvůli vykreslení)
g = inline(vectorize(FR(f, x, 1, 1))) ;
h = inline(vectorize(FR(f, x, 9, 1))) ;
w = inline(vectorize(FR(f, x, 100, 1))) ;
```

```

%nastavení mezí, kde bude vektorizovaná fce zobrazena
X = -1:.001:1;

%Vykreslení první části grafu
plot(X,g(X),'red')
hold on
%Vykreslení druhé části grafu
plot(X,h(X),'green')
hold on
%Vykreslení třetí části grafu
plot(X,w(X),'black')
hold on
%Vykreslení třetí části grafu
ezplot(f,-1,1);
hold on
title('f(x)=x pro FŘ n=1,9,100')
hold off

```

signal1.m

```

% Generovaná data (plně periodická)

% Počet vzorků
m = 256;

% Vzorkovací frekvence
Fs = 8;

% Vektor času
X1 = (0:(m-1))/Fs;

% Vektor Frekvence
f = linspace(0,Fs,m);

% Frekvence, v Hz
f0 = .2; f1 = .5;

%Generované signály cosinu
Y1 = cos(2*pi*f0*X1);
Y2 = .5*cos(2*pi*f1*X1);

% Time-domain signal
Y3 = Y1+Y2;

% Výpočet Fourierovy transformace (DFT pomocí FFT)
Yf = fft(Y3);
n = length(Y3);
idx = 1:n;
y = fft(Y3);

%Hodnoty pro STFT

%x...vstupní vektor
x=Y3(1,1:m);
%d...délka okna
d=128;
%posun...délka posunu okna po vektoru
posun=8;
%a...kolikrát se zmenší frekvenční osa
a=0;
%tvz...vzorkovací perioda, vzdálenost mezi sousedními vzorky

```

```

tvz=1/Fs;

%Výpočet koeficientů pro Keps. analýzu
RK=rceps(Y3);
CK=cceps(Y3);

figure(10);
subplot(2,2,[1 2]);
autocorr(Y1,80);

% Popis osy x
xlabel('Zpoždění');

% Popis osy y
ylabel('Hodnoty autokorelace');

% Titulek
title({'Autokorelační funkce (Y1)'});

subplot(2,2,[3 4]);
autocorr(Y2,80);

% Popis osy x
xlabel('Zpoždění');

% Popis osy y
ylabel('Hodnoty autokorelace');

% Titulek
title({'Autokorelační funkce (Y2)'});

%Vytvoření soubory s uloženými proměnnými
savefile = 'signall.mat';
X1 = X1(1,1:m);
Y1 = Y1(1,1:m);
Y2 = Y2(1,1:m);
Y3 = Y3(1,1:m);
Fs = Fs;
save(savefile, 'X1', 'Y1', 'Y2', 'Y3', 'Fs');

savefile = 'fft.mat';
X1 = f(1,1:m);
Y1 = abs(y(1,1:m));
idx = idx(1,1:m);
n = n;
y = y(1,1:m);
Fs = Fs;
save(savefile, 'X1', 'Y1', 'idx', 'n', 'y', 'Fs')

savefile = 'stft3D.mat';
x = x(1,1:m);
d = d;
posun = posun;
a = a;
tvz = tvz;
Fs = Fs;
save(savefile, 'x', 'd', 'posun', 'a', 'tvz', 'Fs')

savefile = 'stft2D.mat';
x = x(1,1:m);
window_length = d;

```

```

    step_dist = posun;
    padding = a;
    sampling_rate = tvz;
    Fs = Fs;
    save(savefile, 'x',
'window_length', 'step_dist', 'padding', 'sampling_rate', 'Fs')

```

```

savefile = 'autocorel.mat';
x = x(1,1:m);
save(savefile, 'x')

```

```

savefile = 'keps.mat';
X1 = X1(1,1:m);
Y1 = RK(1,1:m);
Y2 = CK(1,1:m);
m = m;
Fs = Fs;
save(savefile, 'X1', 'Y1', 'Y2', 'm', 'Fs')

```

```

savefile = 'auto.mat';
Y3 = Y3(1,1:m);
Fs = Fs;
m = m;
save(savefile, 'Y3', 'Fs', 'm')

```

%Vyvolání funkce na vygerování výstupu

```

signal_f
fft1_f
stft_f3D
stft_f2D
auto_f
keps_f

```

signal1_f.m

```

function signal1_f(X1, Y1, Y2, Y3)
%signal1_f(X1,Y1,Y2,Y3)
% X1: vector of x data
% Y1: vector of y data
% Y2: vector of y data
% Y3: vector of y data

load signal1.mat

%Zjištění počtu hodnot vektoru
t=length(X1);

%Přepočet délky vektoru na jednu hodnotu
Delka= t/Fs;

% Create figure
figure1 = figure;

% Create subplot
subplot1 = subplot(2,2,3, 'Parent', figure1);
xlim(subplot1, [0 Delka]);
box(subplot1, 'on');
hold(subplot1, 'all');

% Create plot

```

```

plot(X1,Y1,'Parent',subplot1,'Marker','.','Color',[0 0
1],'DisplayName','x1');

% Create xlabel
xlabel('Čas (s)');

% Create ylabel
ylabel('Amlituda');

% Create legend
legend(subplot1,'show');

% Create subplot
subplot2 = subplot(2,2,4,'Parent',figure1);
% Uncomment the following line to preserve the X-limits of the axes
xlim(subplot2,[0 Delka]);
box(subplot2,'on');
hold(subplot2,'all');

% Create plot
plot(X1,Y2,'Parent',subplot2,'Marker','.','Color',[0 0 1],...
'DisplayName','x2');

% Create xlabel
xlabel('Čas (s)');

% Create ylabel
ylabel('Amlituda');

% Create legend
legend(subplot2,'show');

% Vytvoření osy
axes1 = axes('Parent',figure1,'Position',[0.13 0.583837209302326 0.775
0.341162790697674]);
% Omezení pro osu x
xlim(axes1,[0 Delka]);
box(axes1,'on');
hold(axes1,'all');

% Vytvoření grafu
plot(X1,Y3,'Parent',axes1,'Marker','.','Color',[1 0 0],...
'DisplayName','x0');

% Popis osy x
xlabel('Čas (s)');

% Popis osy y
ylabel('Amplituda');

% Titulek
title({'Součet generovaných signálů x1 a x2'});

% Legenda
legend(axes1,'show');

% Rámeček s textem
annotation(figure1,'textbox',...
[0.471833333333333 0.601139601139602 0.0463958333333333
0.0427350427350427],...
'String',{'x0 = x1 + x2'},...

```

```

    'FitBoxToText','off');

% Šipka vlevo
annotation(figure1,'arrow',[0.2875 0.4682291666666667],...
    [0.468660968660969 0.602564102564103]);

% Šipka vpravo
annotation(figure1,'arrow',[0.7276041666666667 0.5229166666666667],...
    [0.465811965811966 0.602564102564103]);

```

fft1.m

```

function fft1_f(X1, Y1, idx, n, y, Fs)
% fft1_f(X1,Y1, idx, n, y, Fs)
% X1: vektor frekvence
% Y1: vektor fft (Y3)
% idx: vektor řady [1:256]
% n: hodnota 256
% y: vektor fft (Y3)
% Fs: vzorkovací frekvence

load fft.mat
% Vytvoření nového "figure"(okna grafu)
figure1 = figure;

    subplot(223)
    %Vezme pouze reálnou část
    u1 = real(y);
    plot([0 n+1],[0 0],'k-', [idx;idx],[0*u1;u1],'c-',
idx,u1,'b.','markersize',10)
    %Omezení pro osy xmin xmax ymin ymax
    axis([0 n+1 -100 100])

    %Popisky os
    xlabel('Vzorky (n)');
    ylabel('Rozsah (dB)');

    %Název grafu
    title('Reálná část FT signálu
(Y3)','fontname','Helvetica','fontweight','normal')

    subplot(224)
    %Vezme pouze imaginární část
    u = imag(y);
    plot([0 n+1],[0 0],'k-', [idx;idx],[0*u;u],'c-',
idx,u,'b.','markersize',10)

    %Omezení pro osy xmin xmax ymin ymax
    axis([0 n+1 -100 100])

    %Popisky os
    xlabel('Vzorky (n)');
    ylabel('Rozsah (dB)');

    %Název grafu
    title('Imaginární část FT signálu
(Y3)','fontname','Helvetica','fontweight','normal')

    % Vytvoření os

```

```

    axes1 = axes('Parent',figure1,'Position',[0.13 0.583837209302326 0.775
0.341162790697674]);
    xlim(axes1,[0 Fs/2]);
    box(axes1,'on');
    hold(axes1,'all');

    % Vytvoření grafu
    plot(X1,Y1,'Parent',axes1,'Marker','.','Color',[1 0
0],'DisplayName','fft(x0)');

    % Popisek y
    xlabel('Frekvence (Hz)');

    % Popisek y
    ylabel('Rozsah (db)');

    % Titulek
    title({'Fourierova transformace signálu (Y3)'});

    % Legenda
    legend1 = legend(axes1,'show');
    set(legend1,'Position',[0.8460069444444444 0.871148459383754 0.046875
0.0326797385620915]);

    %Vykreslení nejvyššího bodu
    hold on;
    %Nalezne největší hodnotu v Y1
    index=find(Y1==max(Y1));
    %Převéde číslo na hodnotu
    NejvyssiPerioda=num2str(X1(index),1);
    %Vykreslí bod
    plot(X1(index),Y1(index),'r.','MarkerSize',25);
    text(X1(index)+0.125,Y1(index),['Frekvence = ',NejvyssiPerioda]);
    hold off;

```

stft_f3D.m

```

%Upraveno na základě práce [22]
function stft_f3D (x, d, posun, a, tvz, Fs)

load stft3D.mat

figure1 = figure;

%vytvoření matice, jejíž sloupce jsou tvořeny úseky signálu vynásobené
x=x(:);
%Hammingovým oknem
y=x([1:d],:).* (hamming(d));
for t=2:posun:length(x)-d+1
y=[y,x([t:d+t-1],:).* (hamming(d))];
end

%provede rychlou Fourierovu transformaci
f=(abs((fft(y))./d));
[k,l]=size(f);

%Přepočítá koeficientů reálné / komplexní
f([1,2,linspace(floor(k/a),k,floor(k-floor(k/a))+1)],:)=[];

%výpočet frekvenční osy

```

```

[u,v]=size(f);
krok=1/(tvz*d);
fr=2*krok:krok:(u+1)*krok;

%výpočet časové osy
celcas=tvz*(length(x)-1)/v;
cas=celcas:celcas:(v)*celcas;

%Vytboření matice (časovo frekvenční)
[p,q]=meshgrid(cas,fr);

%Výpočet omezení osy y
caslim=length(x);
Delka=x/Fs;

%Vytvoří surf (3D) graf na základě matice
surf(q,p,f);
xlim([0 tvz*Fs]);
ylim([0 Delka]);
colormap jet;

%Název grafu a popis os
title('Spectrogram 3D')
xlabel('frekvence (Hz)');
ylabel('čas (s)');
zlabel('amplituda');

```

stft2D_f.m

```

%Upraveno na základě STFT.m
(http://www.clear.rice.edu/elec631/Projects99/mit/index2.htm)
function stft_f2D(x, sampling_rate, window_length, step_dist, padding)

% y = STFT(x, sampling_rate, window_length, step_dist, padding)

load stft2D.mat

figure1 = figure;

%Upravení hodnoty padding na délku okna (Zero_padding)
if (padding < window_length)
    padding = window_length;
end

%Kontrola a přehození řádek/sloupec
[m,n] = size(x);
if (m ~= 1)
    X = x';
else
    X = x;
end
[m,n] = size(X);
LENX = length(X);
IMGX = ceil(LENX/step_dist);
if (padding/2 == round(padding/2))
    IMGY = (padding/2) + 1;
else
    IMGY = ceil(padding/2);
end

y = zeros(IMGX,IMGY);

```

```

if (window_length/2 == round(window_length/2))
    CENTER = window_length/2;
    x_pad_st = window_length - CENTER - 1;
    x_pad_fi = window_length - CENTER;
else
    CENTER = (window_length+1)/2;
    x_pad_st = window_length - CENTER;
    x_pad_fi = window_length - CENTER;
end

X = [zeros(1,x_pad_st) X zeros(1,x_pad_fi)];

iter = 0;
for kk = 1:step_dist:LENX
    iter = iter + 1;
    XX = X(kk:(kk + window_length - 1));
    YY = XX .* hamming(window_length)';
    ZZ = abs(fft(YY, padding));
    y(iter,:) = ZZ(1:IMGY);
end

freq = (1/sampling_rate)/2;
imagesc([0:(step_dist*sampling_rate):(sampling_rate*(LENX-1))], ...
    [0:(freq/(IMGY-1)):freq],y');
title('Spectrogram (časově/frekvenční zobrazení)');
ylim([0 1])
xlabel('Čas (s)');
ylabel('Frekvence (Hz)');
axis('xy')

```

auto_f.m

```

function auto_f(Y3)

load auto.mat

figure4=figure;
autocorr(Y3,80);

% Popis osy x
xlabel('Zpoždění');

% Popis osy y
ylabel('Autokorelace');

% Titulek
title({'Autokorelační funkce'});

fufre5=figure;
parcorr(Y3,80);

% Popis osy x
xlabel('Zpoždění');

% Popis osy y
ylabel('Parciální autokorelace');

% Titulek
title({'Parciální autokorelační funkce'});

```

keps_f.m

```
function keps_f(X1, Y1, Y2)
%keps_f(X1,Y1,Y2)

load keps.mat

% Vektor času
X1 = (0:(m-1))/Fs;

%Zjištění počtu hodnot vektoru
t=length(X1);

%Přepočet délky vektoru na jednu hodnotu
Delka= t/Fs;

%grafu
figure1 = figure;

% Vytvoření okna s grafem (vlevo dole)
subplot1 = subplot(2,2,3,'Parent',figure1);
xlim(subplot1,[0 Delka]);
box(subplot1,'on');
hold(subplot1,'all');

% Vytvoření hl. grafu
plot(X1,Y1,'Parent',subplot1,'Marker','.', 'Color',[0 0
1], 'DisplayName','RK');

% Titulek
title({'Reálné kepstrum'});

% Popis osy x
xlabel('Quefrence (s)');

% Popis osy y
ylabel('Gamnitude (dB)');

% Vytvoření legendy
legend(subplot1,'show');

% Vytvoření okna s grafem (vpravo dole)
subplot2 = subplot(2,2,4,'Parent',figure1);
xlim(subplot2,[0 Delka]);
box(subplot2,'on');
hold(subplot2,'all');

% Vytvoření grafu
plot(X1,Y2,'Parent',subplot2,'Marker','.', 'Color',[0 0
1], 'DisplayName','CK');

% Popis osy x
xlabel('Quefrence (s)');

% Titulek
title({'Komplexní kepstrum'});

% Popis osy y
ylabel('Gamnitude (dB)');
```

```
% Vytvoření legendy
legend(subplot2, 'show');

% Vytvoření a umístění osy
axes1 = axes('Parent', figure1, 'Position', [0.13 0.583837209302326 0.775
0.341162790697674]);
xlim(axes1, [0 Delka/2]);
box(axes1, 'on');
hold(axes1, 'all');

% Vytvoření grafu
plot(X1, Y1, 'Parent', axes1, 'Marker', '.', 'Color', [1 0 0], ...
'DisplayName', 'RK');

% Popis osy x
xlabel('Quefrence (s)');

% Popis osy y
ylabel('Gamnitude (dB)');

% Titulek
title({'Kepstrální analýza (reálné kepstrum)'});

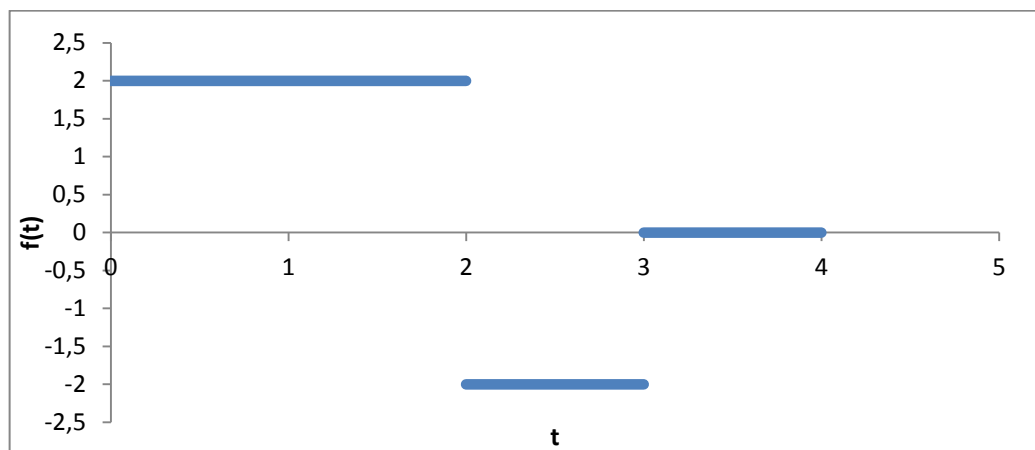
% Vytvoření legendy
legend(axes1, 'show');
```

PŘÍLOHA C – Výpočet Fourierovy řady pro zadanou funkci

Příklad zpracován na základě práce [17].

Zadání:

$$f(t) = \begin{cases} 2, & t \in \langle 0, 2 \rangle \\ -2, & t \in \langle 2, 3 \rangle \\ 0, & t \in \langle 3, 4 \rangle \end{cases}$$



Obrázek D.1 - Průběh funkce $f(t)$

Zdroj: vlastní zpracování

Nejprve je třeba otestovat, zda funkce $f(t)$ splňuje **Dirichletovy podmínky**:

- $f(t)$ je periodicky rozšiřitelná,
- $f(t)$ je uvnitř $\langle 0, 4 \rangle$ po částech spojitá; má zde 2 body nespojitosti I. Druhu, $t_1 = 2$ a $t_2 = 3$, kdy $\lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = 2$, $\lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = -2$, $\lim_{t \rightarrow 3^-} f(t) = -2$, $\lim_{t \rightarrow 3^+} f(t) = 0$;
- na podintervalech $\langle 0, 2 \rangle$, $\langle 2, 3 \rangle$ a $\langle 3, 4 \rangle$ je $f(t)$ konstantní funkcí;
- $\lim_{t \rightarrow 4^-} f(t) = 0$, $f(0) = 2$;

O funkci je tedy možné tvrdit, že funkce $f(t)$ splňuje na zadaném intervalu všechny 4 Dirichletovy podmínky, tudíž lze vytvořit Fourierovu řadu.

$\tilde{f}(t)$ bude nazýváno jako periodické rozšíření zadané funkce, kde v bodech nespojitosti t_i je definována $\tilde{f}(t)$ takto:

$$t_1 = kT, k \in \mathbb{Z} \cup \{0\}, \text{ pak } \tilde{f}(t_1) = \frac{\lim_{t \rightarrow t_1^-} \tilde{f}(t) + \lim_{t \rightarrow t_1^+} \tilde{f}(t)}{2}$$

$$t_2 = 2 + kT, k \in Z \cup \{0\}, \text{ pak } \tilde{f}(t_2) = \frac{\lim_{t \rightarrow t_2^-} \tilde{f}(t) + \lim_{t \rightarrow t_2^+} \tilde{f}(t)}{2}$$

$$t_3 = 3 + kT, k \in Z \cup \{0\}, \text{ pak } \tilde{f}(t_3) = \frac{\lim_{t \rightarrow t_3^-} \tilde{f}(t) + \lim_{t \rightarrow t_3^+} \tilde{f}(t)}{2}$$

Fourierova řada v reálném oboru bude následně zpracována pomocí vztahů (33-36), kde jako první bude vypočítán koeficient a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) \cos\left(\frac{\pi}{2} nt\right) dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^2 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} nt\right) dt + \int_2^3 (-2) \cos\left(\frac{\pi}{2} nt\right) dt \right] = \\ &= \frac{2}{\pi n} \left(\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} nt\right) \right]_0^2 - \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} nt\right) \right]_2^3 \right) = \frac{2}{\pi n} \left(\sin(\pi n) - \sin\left(\frac{3}{2} \pi n\right) + \sin(\pi n) \right) = \\ &= \underline{\underline{-\frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{3}{2} \pi n\right)}} \end{aligned}$$

Dále koeficienty b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) \sin\left(\frac{\pi}{2} nt\right) dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^2 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} nt\right) dt + \int_2^3 (-2) \sin\left(\frac{\pi}{2} nt\right) dt \right] = \\ &= -\frac{2}{\pi n} \left(\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} nt\right) \right]_0^2 - \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} nt\right) \right]_2^3 \right) = -\frac{2}{\pi n} \left(\cos(\pi n) - 1 - \cos\left(\frac{3}{2} \pi n\right) + \cos(\pi n) \right) = \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{\pi n} \left((-2)(-1)^n + 1 + \cos\left(\frac{3}{2} \pi n\right) \right)}} = \underline{\underline{\frac{2}{\pi n} \left(2(-1)^{n+1} + 1 + \cos\left(\frac{3}{2} \pi n\right) \right)}} \quad n \neq 0 \end{aligned}$$

Pro $n = 0$ dostáváme koeficient a_0 :

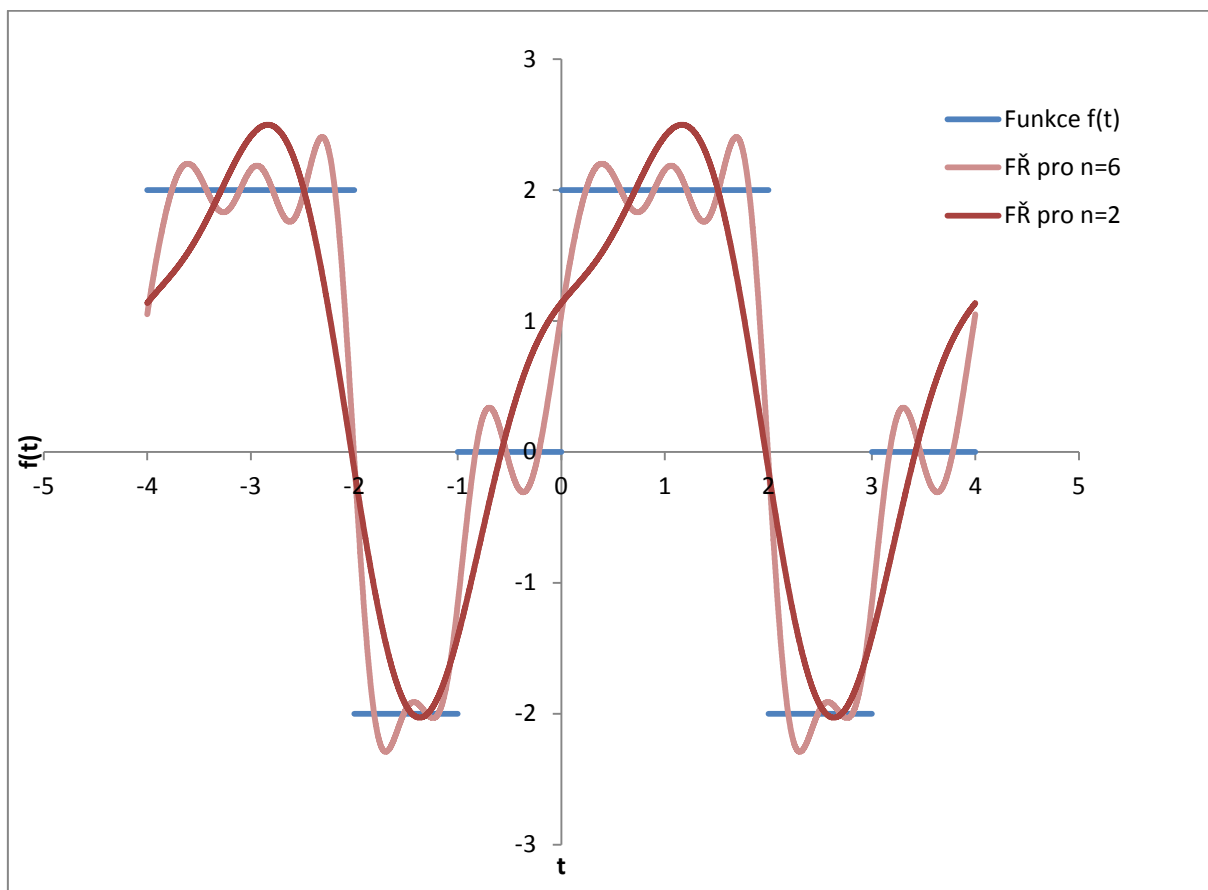
$$a_0 = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 2 dt + \int_2^3 (-2) dt \right) = \frac{1}{2} (4 - 2) = \underline{\underline{1}}$$

Hledaná Fourierova řada v reálném oboru nabývá tvaru

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\left(-\frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{3}{2} \pi n\right) \right) \cos\left(\frac{\pi}{2} nt\right) \right) + \frac{2}{\pi n} \left(2(-1)^{n+1} + 1 + \cos\left(\frac{3}{2} \pi n\right) \right) \sin\left(\frac{\pi}{2} nt\right) \right\},$$

$t \in \mathbf{R}$

Průběh $\tilde{f}(t)$ s použitím 2 a 6 harmonických:



Obrázek D.2 - Původní funkce $f(t)$, průběh FŘ s použitím 2 a 6 harmonických

Zdroj: vlastní zpracování

PŘÍLOHA D – DVD

Součástí diplomové práce je DVD obsahující zdrojové kódy pro:

- MATLAB R2010b,
- MATLAB R2012a,
- IBM SPSS Statistics v20,
- všechny patřičné grafické výstupy.