

# ODHAD PARAMETRŮ STŘEDNÍ HODNOTY A PARAMETRŮ VARIANČNÍ MATICE VE SMÍŠENÉM LINEÁRNÍM MODELU S PODMÍNKAMI TYPU I A II

Hana Boháčová

Univerzita Pardubice, Fakulta ekonomicko-správní, Ústav matematiky

**Abstract:** The article deals with the variance components estimation in two important linear regression models with constraints. The maximum likelihood estimators for fixed effect parameters and variance components are derived.

**Keywords:** Linear regression model with constraints, Variance components, Maximum likelihood method

## 1. Úvod

V praxi se často setkáváme se situacemi, kdy je buď třeba odhadnout hodnotu veličiny, která musí vyhovovat nějakým podmínkám (tyto situace lze popsat pomocí smíšeného lineárního modelu s podmínkami typu I) nebo je třeba určit hodnotu veličiny, kterou není možné přímo měřit, lze ji však dopočítat pomocí jiných veličin, které měřit lze (těmto situacím odpovídá smíšený lineární model s podmínkami typu II). Pro ilustraci uveďme například určování zrychlení při rovnoměrně zrychleném přímočarém pohybu, kdy zrychlení určíme pomocí naměřených hodnot dráhy a času.

## 2. Odvození odhadů ve smíšeném lineárním modelu s podmínkami typu I

Uvažujme smíšený lineární regresní model s podmínkami typu I:

$$Y \sim N_n(Xb, \Sigma_q), \quad (1)$$

Kde parametr střední hodnoty  $b$  musí vyhovovat lineární podmínce

$$b + Bb = 0 \quad (2)$$

Předpokládejme, že matice  $X$  je známá rozměru  $n \times k$ , plné sloupcové hodnosti  $k$ ,  $b$  je  $q$ -rozměrný vektor,  $B$  je matice typu  $q \times k$ , plné řádkové hodnosti  $q$ . Předpokládejme dále model s  $r$  neznámými variančními komponentami  $q_1, \dots, q_r$ . Necht'  $V_1, \dots, V_r$  jsou známé symetrické matice a

$$\text{var } Y = \Sigma_q = \sum_{i=1}^r q_i V_i, \quad (3)$$

Přičemž musí platit, že matice  $\Sigma_q$  je pozitivně definitní. Naším cílem je odhadnout parametry  $b$  a  $q_1, \dots, q_r$ . Odhadovat budeme pomocí metody maximální věrohodnosti. Zvolme nějaký počáteční vektor  $b_0$  vyhovující podmínce (2), pak pro všechny ostatní vektory  $b$  splňující tuto podmínku platí

$$b = b_0 + K_B g, g \in R^{k-q}, \quad (4)$$

kde  $K_B$  je matice typu  $k \times k - q$  taková, že  $BK_B = 0$ . Z modelu (1) vyplývá, že

$$(Y - Xb_0) \sim N_n(XK_B g, \Sigma_q). \quad (5)$$

Tím jsme převedli model (1) s podmínkou (2) na model (5) bez podmínky. Věrohodnostní rovnice pro  $\mathbf{g}$  a  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_r)'$  mají podle [RAO-KLEFFE, 1988] tvar

$$[(XK_B)' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} XK_B] \hat{\mathbf{g}} = (XK_B)' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} (Y - Xb_0) \quad (6)$$

$$Tr(\Sigma_{\hat{q}}^{-1} V_i) = (Y - Xb_0)' (M_{XK_B} \Sigma_{\hat{q}} M_{XK_B})^+ V_i (M_{XK_B} \Sigma_{\hat{q}} M_{XK_B})^+ (Y - Xb_0), \quad i = 1, \dots, r \quad (7)$$

Kde  $A^+$  značí Moore-Penroseovu pseudoinverzi matice  $A$  a  $M_A$  je matice ortogonální projekce na vektorový prostor kolmý k vektorovému prostoru generovanému sloupci matice  $A$ , platí  $M_A = I - AA^+$ .

Z (5) okamžitě plyne

$$\hat{\mathbf{g}} = (K_B' X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} XK_B)^{-1} K_B' X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} (Y - Xb_0). \quad (8)$$

Označíme-li  $\hat{\mathbf{b}}$  odhad parametru  $\mathbf{b}$  z modelu (1), (2), můžeme podle (3) psát

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}_0 + K_B \hat{\mathbf{g}} = \mathbf{b}_0 + K_B (K_B' X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} XK_B)^{-1} K_B' X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} (Y - Xb_0) \quad (9)$$

Protože  $\mathcal{M}(K_B) = \mathcal{M}(M_{B'})$ , je  $\mathcal{M}(XK_B) = \mathcal{M}(XM_{B'})$ . (Kde  $\mathcal{M}(A)$  značí prostor generovaný sloupci matice  $A$ .)  $X\hat{\mathbf{b}}$  tedy můžeme zapsat a upravit následovně

$$\begin{aligned} X\hat{\mathbf{b}} &= Xb_0 + XK_B (K_B' X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} XK_B)^{-1} K_B' X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} (Y - Xb_0) = \\ &= Xb_0 + P_{XK_B}^{\Sigma_{\hat{q}}^{-1}} (Y - Xb_0) = Xb_0 + P_{XM_{B'}}^{\Sigma_{\hat{q}}^{-1}} (Y - Xb_0) = \\ &= Xb_0 + XM_{B'} (M_{B'} X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} XM_{B'})^+ M_{B'} X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} (Y - Xb_0) = \\ &= X(X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} X)^{-1} X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} Y - X(X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} X)^{-1} B' [B(X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} X)^{-1} B']^{-1} [B(X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} X)^{-1} \Sigma_{\hat{q}}^{-1} Y + b]. \end{aligned}$$

Protože ve smíšeném lineárním modelu (1) bez podmínky je nejlepší nestranný lineární odhad parametru  $\mathbf{b}$  tvaru

$$\hat{\mathbf{b}} = (X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} X)^{-1} X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} Y, \quad (10)$$

můžeme  $X\hat{\mathbf{b}}$  dále upravit takto

$$X\hat{\mathbf{b}} = X\hat{\mathbf{b}} - X(X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} X)^{-1} B' [B(X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} X)^{-1} B']^{-1} (Bb + b).$$

Tedy maximálně věrohodný odhad parametru  $\mathbf{b}$  v modelu (1) s podmínkou (2) je tvaru

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}} - (X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} X)^{-1} B' [B(X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} X)^{-1} B']^{-1} (Bb + b). \quad (11)$$

Zbývá odvodit odhad parametru  $\mathbf{q}$ . Jak již bylo uvedeno dříve  $\mathcal{M}(XK_B) = \mathcal{M}(XM_{B'})$ ,

proto  $M_{XK_B} = M_{M_{B'}}$ . Tedy můžeme psát

$$\begin{aligned} (M_{XK_B} \Sigma_{\hat{q}} M_{XK_B})^+ &= (M_{XM_{B'}} \Sigma_{\hat{q}} M_{XM_{B'}})^+ = \\ &= \Sigma_{\hat{q}}^{-1} - \Sigma_{\hat{q}}^{-1} XM_{B'} (M_{B'} X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} XM_{B'})^+ M_{B'} X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} = \Sigma_{\hat{q}}^{-1} - \Sigma_{\hat{q}}^{-1} X \{ (X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} X)^{-1} - \\ &- (X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} X)^{-1} B' [B(X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} X)^{-1} B']^{-1} B(X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} X)^{-1} \} X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} = \end{aligned}$$

$$= (M_X \Sigma_{\hat{q}} M_X)^+ + P_{\Sigma_{\hat{q}}^{-1} X (X \Sigma_{\hat{q}} X)^{-1} B'} \Sigma_{\hat{q}}^{-1}.$$

Výraz  $(M_X \Sigma_{\hat{q}} M_X)^+ Y$  použitý ve věrohodnostních rovnicích (7) lze přepsat takto

$$(M_X \Sigma_{\hat{q}} M_X)^+ Y = [\Sigma_{\hat{q}}^{-1} - \Sigma_{\hat{q}}^{-1} X (X \Sigma_{\hat{q}} X)^{-1} X' \Sigma_{\hat{q}}^{-1}] Y = \Sigma_{\hat{q}}^{-1} (Y - X \hat{b}).$$

Tedy věrohodnostní rovnice (7) můžeme upravit

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\Sigma_{\hat{q}}^{-1} V_i) &= (Y - X b_0)' [(M_X \Sigma_{\hat{q}} M_X)^+ + P_{\Sigma_{\hat{q}}^{-1} X (X \Sigma_{\hat{q}} X)^{-1} B'} \Sigma_{\hat{q}}^{-1}] V_i \times \\ &\times [(M_X \Sigma_{\hat{q}} M_X)^+ + P_{\Sigma_{\hat{q}}^{-1} X (X \Sigma_{\hat{q}} X)^{-1} B'} \Sigma_{\hat{q}}^{-1}] (Y - X b_0) = Y' (M_X \Sigma_{\hat{q}} M_X)^+ V_i (M_X \Sigma_{\hat{q}} M_X)^+ + \\ &+ (Y - X b_0)' P_{\Sigma_{\hat{q}}^{-1} X (X \Sigma_{\hat{q}} X)^{-1} B'} \Sigma_{\hat{q}}^{-1} V_i (M_X \Sigma_{\hat{q}} M_X)^+ (Y - X b_0) + \\ &+ (Y - X b_0)' (M_X \Sigma_{\hat{q}} M_X)^+ V_i P_{\Sigma_{\hat{q}}^{-1} X (X \Sigma_{\hat{q}} X)^{-1} B'} \Sigma_{\hat{q}}^{-1} (Y - X b_0) + \\ &+ (Y - X b_0)' P_{\Sigma_{\hat{q}}^{-1} X (X \Sigma_{\hat{q}} X)^{-1} B'} \Sigma_{\hat{q}}^{-1} V_i P_{\Sigma_{\hat{q}}^{-1} X (X \Sigma_{\hat{q}} X)^{-1} B'} \Sigma_{\hat{q}}^{-1} (Y - X b_0) = \\ &= (Y - X \hat{b})' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} V_i \Sigma_{\hat{q}}^{-1} (Y - X \hat{b}). \end{aligned}$$

Odhady variančních komponent  $q_1, \dots, q_r$ , tedy počítáme z rovnic

$$\text{Tr}(\Sigma_{\hat{q}}^{-1} V_i) = (Y - X \hat{b})' \Sigma_{\hat{q}}^{-1} V_i \Sigma_{\hat{q}}^{-1} (Y - X \hat{b}), i = 1, \dots, r.$$

Protože vztahy pro odhady parametrů  $b$  a  $q_1, \dots, q_r$  byly odvozeny ze smíšeného lineárního modelu (5) bez podmínky, mají takto získané odhady asymptotické vlastnosti maximálně věrohodných odhadů, tedy jsou konzistentní, asymptoticky normální a asymptoticky sdruženě efektivní.

### 3. Odvození odhadů ve smíšeném lineárním modelu s podmínkami typu II

Nechť je dán následující regresní model

$$Y \sim N_n(X b_1, \Sigma_q). \quad (12)$$

Parametr  $b_1$  vystupující v modelu (12) je nepřímě měřitelný, potřebujeme odhadnout hodnotu parametru  $b_2$ , který ovšem vystupuje pouze v podmínce

$$B_1 b_1 + B_2 b_2 + b = 0. \quad (13)$$

V praxi často k tomuto modelu dospějeme pomocí linearizace původně nelineárního modelu. Předpokládáme, že matice  $X$  je plně hodnosti ve sloupcích, matice  $B_1$  je typu  $q \times k_1$ , matice  $B_2$  je typu  $q \times k_2$  a předpokládáme  $r(B_1, B_2) = q$ ,  $r(B_2) = k_2$ ,  $k_2 < q < k_1 + k_2$ .

Předpokládáme model s  $r$  variančními komponentami  $q_1, \dots, q_r$ , tedy

$$\text{var } Y = \Sigma_q = \sum_{i=1}^r q_i V_i, \quad (14)$$

kde  $V_1, \dots, V_r$  jsou známé symetrické matice, přičemž musí platit, že  $\Sigma_q$  je alespoň pozitivně semidefinitní. Naším cílem je najít odhady  $b_1, b_2, q_1, \dots, q_r$  metodou maximální věrohodnosti.

V modelu (12) bez podmínek jsou věrohodnostní rovnice pro  $b_1$  a  $q = (q_1, \dots, q_r)'$  obdobného tvaru jako (6), (7), ovšem s  $b_1$  místo  $b$ . Provedeme transformaci modelu s podmínkou (12), (13) na model bez podmínky (použitá transformace viz. [KUBÁČEK - KUBÁČKOVÁ, 2000]). Najdeme matice  $K_1$  typu  $k_1 \times k_1 + k_2 - q$  a  $K_2$  typu  $k_2 \times k_1 + k_2 - q$ , pro které platí:

$$(B_1, B_2) \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (15)$$

Platí  $M \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} M_{B_1} \\ M_{B_2} \end{pmatrix}$ . Protože matice  $B_2$  má podle předpokladů plnou sloupcovou hodnotu, platí vzhledem k (15)

$$K_2 = -(B_2' B_2)^{-1} B_2' B_1 K_1. \quad (16)$$

Podmínka (13) může být tedy upravena

$$0 = B_1 K_1 - B_2 (B_2' B_2)^{-1} B_2' B_1 K_1 = [I - B_2 (B_2' B_2)^{-1} B_2'] B_1 K_1 = M_{B_2} B_1 K_1.$$

Tedy vlastně

$$M(K_1) = M \begin{pmatrix} M_{B_1} M_{B_2} \end{pmatrix}.$$

Z předpokladů učiněných dříve o modelu (12), (13) vyplývá, že  $r(K_1) = k_1 + k_2 - q$ . Zvolme nyní libovolné počáteční vektory  $b_1^{(0)}$  a  $b_2^{(0)}$  vyhovující podmínce (13). Pak všechny ostatní vektory  $b_1, b_2$  splňující tuto podmínku můžeme vyjádřit následovně

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} g, \quad g \in R^{k_1+k_2-q}. \quad (17)$$

Model (12) s podmínkou (13) můžeme tedy převést na model bez podmínky

$$Y - X b_1^{(0)} \sim N_n(X K_1 g, \Sigma_q). \quad (18)$$

Podle [RAO-KLEFFE, 1988] mají věrohodnostní rovnice pro  $g$  a  $q$  tvar

$$[(X K_1)' \Sigma_q^{-1} X K_1] g = (X K_1)' \Sigma_q^{-1} (Y - X b_1^{(0)}) \quad (19)$$

$$Tr(\Sigma_q^{-1} V_i) = (Y - X b_1^{(0)})' (M_{X K_1} \Sigma_q M_{X K_1})^+ V_i (M_{X K_1} \Sigma_q M_{X K_1})^+ (Y - X b_1^{(0)}), \quad i = 1, \dots, r \quad (20)$$

Z rovnice (19) lze přímo vyjádřit

$$g = (K_1' X' \Sigma_q^{-1} X K_1)^{-1} K_1' X' \Sigma_q^{-1} (Y - X b_1^{(0)}). \quad (21)$$

Označme odhady parametrů  $b_1$ ,  $b_2$  a  $q$  z modelu (12),(13) po řadě  $\hat{b}_1$ ,  $\hat{b}_2$  a  $\hat{q}$ , odhad parametru  $b_1$  z modelu (12) bez podmínky  $\hat{b}_1$  a odhad parametru  $g$  z modelu (18)  $\hat{g}$ . Pak ze (17) vyplývá:

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \hat{g} \quad (22)$$

Tedy platí

$$\begin{aligned} X\hat{b}_1 &= Xb_1^{(0)} + XK_1\hat{g} = Xb_1^{(0)} + XK_1(K_1'X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}XK_1)^{-1}K_1'X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}(Y - Xb_1^{(0)}) = \\ &= Xb_1^{(0)} + XM_{B_1'M_{B_2}}(M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}XM_{B_1'M_{B_2}})^+M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}(Y - Xb_1^{(0)}) = \\ &= Xb_1^{(0)} + XM_{B_1'M_{B_2}}(M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}XM_{B_1'M_{B_2}})^+M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}(Y - X(M_{B_1'M_{B_2}} + P_{B_1'M_{B_2}})b_1^{(0)}) = \\ &= Xb_1^{(0)} + XM_{B_1'M_{B_2}}(M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}XM_{B_1'M_{B_2}})^+M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}Y - \\ &\quad - XM_{B_1'M_{B_2}}(M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}XM_{B_1'M_{B_2}})^+M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}X(M_{B_1'M_{B_2}} + P_{B_1'M_{B_2}})b_1^{(0)} = \\ &= Xb_1^{(0)} + XM_{B_1'M_{B_2}}(M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}XM_{B_1'M_{B_2}})^+M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}Y - \\ &\quad - XM_{B_1'M_{B_2}}b_1^{(0)} - XM_{B_1'M_{B_2}}(M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}XM_{B_1'M_{B_2}})^+M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}XB_1'M_{B_2}(M_{B_2}B_1B_1'M_{B_2})^+ \times \\ &\quad \times M_{B_2}B_1b_1^{(0)} = \\ &= XM_{B_1'M_{B_2}}(M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}XM_{B_1'M_{B_2}})^+M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}Y + XP_{B_1'M_{B_2}}b_1^{(0)} - \\ &\quad - XM_{B_1'M_{B_2}}(M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}XM_{B_1'M_{B_2}})^+M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}XP_{B_1'M_{B_2}}b_1^{(0)} = \\ &= P_{XM_{B_1'M_{B_2}}}^{\Sigma_{\hat{q}}^{-1}}Y + M_{XM_{B_1'M_{B_2}}}^{\Sigma_{\hat{q}}^{-1}}XB_1'M_{B_2}(M_{B_2}B_1B_1'M_{B_2})^+M_{B_2}B_1b_1^{(0)} = \\ &= P_{XM_{B_1'M_{B_2}}}^{\Sigma_{\hat{q}}^{-1}}Y - M_{XM_{B_1'M_{B_2}}}^{\Sigma_{\hat{q}}^{-1}}XB_1'M_{B_2}(M_{B_2}B_1B_1'M_{B_2})^+M_{B_2}B_1(b + B_2b_2^{(0)}) = \\ &= P_{XM_{B_1'M_{B_2}}}^{\Sigma_{\hat{q}}^{-1}}Y - M_{XM_{B_1'M_{B_2}}}^{\Sigma_{\hat{q}}^{-1}}XB_1'M_{B_2}(M_{B_2}B_1B_1'M_{B_2})^+M_{B_2}B_1b. \end{aligned}$$

Tedy pro odhad parametru  $b_1$  z modelu (12), (13) platí

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 &= M_{B_1'M_{B_2}}(M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}XM_{B_1'M_{B_2}})^+M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}Y - \\ &\quad - [I - M_{B_1'M_{B_2}}(M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}XM_{B_1'M_{B_2}})^+M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}X]B_1'(M_{B_2}B_1B_1'M_{B_2})^+b = \\ &= \hat{b}_1 = M_{B_1'M_{B_2}}(M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}XM_{B_1'M_{B_2}})^+X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}Y - \\ &\quad - [I - M_{B_1'M_{B_2}}(M_{B_1'M_{B_2}}X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}XM_{B_1'M_{B_2}})^+X'\Sigma_{\hat{q}}^{-1}X]B_1'(M_{B_2}B_1B_1'M_{B_2})^+b. \end{aligned}$$

Odhad parametru  $b_2$  odvodíme pomocí (22).

$$\begin{aligned} \hat{b}_2 &= b_2^{(0)} + K_2\hat{g} = b_2^{(0)} - (B_2'B_2)^{-1}B_2'B_1K_1\hat{g} = b_2^{(0)} - (B_2'B_2)^{-1}B_2'B_1(\hat{b}_1 - b_1^{(0)}) = \\ &= b_2^{(0)} - (B_2'B_2)^{-1}B_2'B_1\hat{b}_1 + (B_2'B_2)^{-1}B_2'B_1b_1^{(0)} = -(B_2'B_2)^{-1}B_2'(B_1\hat{b}_1 + b) \end{aligned}$$

Při odvozování odhadu variančních komponent se postupuje podobně jako u modelu s podmínkami typu I, výsledný odhad má tvar

$$\hat{q} = S_{(M_{XK_1} \Sigma_q M_{XK_1})^+}^{-1} \begin{pmatrix} (Y - Xb_1^{(0)}) (M_{XK_1} \Sigma_q M_{XK_1})^+ V_1 (M_{XK_1} \Sigma_q M_{XK_1})^+ (Y - Xb_1^{(0)}) \\ \dots \\ (Y - Xb_1^{(0)}) (M_{XK_1} \Sigma_q M_{XK_1})^+ V_r (M_{XK_1} \Sigma_q M_{XK_1})^+ (Y - Xb_1^{(0)}) \end{pmatrix},$$

kde

$$\left\{ S_{(M_{XK_1} \Sigma_q M_{XK_1})^+} \right\}_{i,j} = \text{tr} \left[ V_i (M_{XK_1} \Sigma_q M_{XK_1})^+ V_j (M_{XK_1} \Sigma_q M_{XK_1})^+ \right], \quad i, j = 1, \dots, r.$$

Při výpočtech se postupuje iteračně s vhodně zvolenými počátečními hodnotami.

### **Použitá literatura:**

- [1] KUBÁČEK, L., KUBÁČKOVÁ, L. Statistika a metrologie. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci – vydavatelství, 2000.
- [2] RAO, C.R., KLEFFE, J. Estimation of Variance Components and Applications. Amsterdam – New York – Oxford – Tokyo: North-Holland, 1988.

### **Kontaktní adresa:**

Mgr. Hana Boháčová  
 Ústav matematiky  
 Fakulta ekonomicko-správní  
 Univerzita Pardubice  
 Studentská 84  
 532 10 Pardubice  
 Email: [Hana.Bohacova@upce.cz](mailto:Hana.Bohacova@upce.cz)  
 Tel. č.: +420 466 036 170