

UNIVERZITA PARDUBICE

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A
INFORMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2024

Bc. Michal Sokol

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Statistická metoda Monte Carlo
Bakalářská práce

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Akademický rok: 2023/2024

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Michal Sokol**
Osobní číslo: **I21230**
Studijní program: **B0688A140009 Informační technologie**
Téma práce: **Statistická metoda Monte Carlo**
Zadávací katedra: **Katedra informačních technologií**

Zásady pro vypracování

Cílem bakalářské práce je popsat možnosti využití statistické metody Monte Carlo při simulacích reálných procesů, navrhnout a implementovat některé experimenty využívající metody Monte Carlo. Například výpočet integrálů, určení Ludolfova čísla nebo řešení systémů lineárních rovnic metodou Monte Carlo. Dalším cílem je zpracování a implementace postupů vedoucích ke zpřesnění výpočtů při řešení daných problémů. Práce by měla obsahovat srovnání přesnosti dosažených výsledků, včetně grafických výstupů.

Rozsah pracovní zprávy: **40**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

FABIAN, František a Zdeněk KLUIBER. Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění. 1. vyd. Praha: Prospektrum, 1998, 148 s. ISBN 80-7175-058-1. VIRIUS, Miroslav. Aplikace matematické statistiky: metoda Monte Carlo. Vyd. 3. Praha: České vysoké učení technické, 1998, 168 s. ISBN 80-01-01779-6.

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Alena Pozdílková, Ph.D.**
Katedra matematiky a fyziky

Datum zadání bakalářské práce: **15. prosince 2023**

Termín odevzdání bakalářské práce: **10. května 2024**

Ing. Zdeněk Němec, Ph.D. v.r.
děkan

L.S.

Ing. Jan Panuš, Ph.D. v.r.
vedoucí katedry

V Pardubicích dne 28. února 2024

Prohlašuji:

Práci s názvem Statistická metoda Monte Carlo jsem vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 7/2019 Pravidla pro odevzdávání, zveřejňování a formální úpravu závěrečných prací, ve znění pozdějších dodatků, bude práce zveřejněna prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 10.5. 2024

Bc. Michal Sokol, v.r.

PODĚKOVÁNÍ

Touto cestou bych rád poděkoval své vedoucí práce, Mgr. Aleně Pozdílkové, Ph.D., za její odbornou pomoc, cenné rady a poskytnuté materiály, které posloužily k vypracování této bakalářské práce.

ANOTACE

Tato bakalářská práce je zaměřena na téma statistické metody Monte Carlo. Cílem bakalářské práce je popsat možnosti využití statistické metody Monte Carlo při simulacích reálných procesů, navrhnout a implementovat některé experimenty využívající metody Monte Carlo. Dalším cílem je zpracování a implementace postupů vedoucích ke zpřesnění výpočtů při řešení daných problémů.

Práce je rozdělena do dvou hlavních částí. V teoretické části je provedeno seznámení s principem a původem metody Monte Carlo. V praktické části je použita statistická metoda Monte Carlo k odhadu hodnoty Ludolfova čísla a k výpočtu jednorozměrných integrálů včetně srovnání přesnosti dosažených výsledků a grafických výstupů.

KLÍČOVÁ SLOVA

Monte Carlo, pseudonáhodné číslo, Ludolfovo číslo, jednorozměrný integrál

TITLE

Monte Carlo statistical method

ANNOTATION

This bachelor's thesis is focused on the topic of the Monte Carlo statistical method. Main goal of this thesis is to describe the possibilities of using the Monte Carlo statistical method in simulations of real processes, to design and implement some experiments using Monte Carlo methods. Secondary goal is the processing and implementation of procedures leading to more accurate calculations when solving given problems.

Thesis is divided into two main parts. In the theoretical part, the principle and origin of the Monte Carlo method is introduced. In the practical part, the Monte Carlo statistical method is used to estimate the value of the Ludolphine number and to calculate one-dimensional integrals, including a comparison of the accuracy of the achieved results and graphic outputs.

KEYWORDS

Monte Carlo, pseudorandom number, Ludolphine number, one-dimensional integral

OBSAH

ÚVOD	11
1 Úvod do problematiky	12
2 Princip metody Monte Carlo.....	15
3 Původ názvu metody Monte Carlo	17
4 Určení hodnoty Ludolfova čísla	19
4.1 Ludolfovo číslo	19
4.2 Buffonova úloha	20
4.3 Metoda obsahu čtverce a kruhu	25
5 Výpočet jednorozměrného integrálu.....	31
5.1 Geometrická metoda	31
5.2 Metoda odhadu střední hodnoty náhodné veličiny	36
5.3 Způsoby zpřesnění odhadu	41
5.3.1 Výběr na podintervalech	41
5.3.2 Symetrizace integrované funkce	47
ZÁVĚR	52
POUŽITÁ LITERATURA	53

SEZNAM ILUSTRACÍ

Obrázek 1: Buffonova úloha (Fabian, 1998)	21
Obrázek 2: Metoda kruhu a čtverce (vlastní zpracování)	26
Obrázek 3: Graf funkce $f(x) = x^2$ a plocha integrálu $\int_0^1 x^2 dx$ (vlastní zpracování)	33
Obrázek 4: Graf funkce $f(x) = 3 \sin(x) \cos^2(x)$ a plocha integrálu $\int_0^\pi 3 \sin(x) \cos^2(x) dx$ (vlastní zpracování).....	38
Obrázek 5: Graf funkce $f(x) = e^x$ a plocha integrálu $\int_0^1 e^x dx$ (vlastní zpracování).....	43
Obrázek 6: Graf funkce $f(x) = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}$ a plocha integrálu $\int_1^3 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx$ (vlastní zpracování)	48

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Historické údaje o realizaci Buffonovy úlohy	23
Tabulka 2: Hodnoty Ludolfova čísla získané pomocí Buffonovy úlohy	24
Tabulka 3: Přesnost hodnot Ludolfova čísla získaných pomocí Buffonovy úlohy.....	25
Tabulka 4: Hodnoty Ludolfova čísla získané pomocí metody čtverce a kruhu	28
Tabulka 5: Přesnost hodnot Ludolfova čísla získaných pomocí metody čtverce a kruhu	29
Tabulka 6: Výsledky dosažené studentem J. Vrabcem	30
Tabulka 7: Hodnoty integrálu získané pomocí geometrické metody.....	34
Tabulka 8: Přesnost hodnot integrálu získaných pomocí geometrické metody	35
Tabulka 9: Hodnoty integrálu získané pomocí metody střední hodnoty náhodné veličiny	39
Tabulka 10: Přesnost hodnot integrálu získaných pomocí metody střední hodnoty náhodné veličiny.....	40
Tabulka 11: Hodnoty integrálu získané pomocí zpřesňující metody výběru na podintervalech	45
Tabulka 12: Přesnost hodnot integrálu získaných pomocí zpřesňující metody výběru na podintervalech.....	45
Tabulka 13: Porovnání přesnosti jednotlivých metod pro určení přibližné hodnoty integrálu	46
Tabulka 14: Hodnoty integrálu získané pomocí zpřesňující metody symetrizace integrované funkce.....	49
Tabulka 15: Přesnost hodnot získaných pomocí zpřesňující metody symetrizace integrované funkce.....	50
Tabulka 16: Porovnání přesnosti jednotlivých metod pro určení přibližné hodnoty integrálu	51

ÚVOD

Tato bakalářská práce je rozdělena na teoretickou část, která se skládá z následujících tří kapitol – Úvod do problematiky, Princip metody Monte Carlo a Původ metody Monte Carlo, a na praktickou část, která je rozdělena do dvou kapitol – Odhad Ludolfova čísla a Výpočet jednorozměrného integrálu.

Cílem této práce je popsat možnosti využití statistické metody Monte Carlo při simulacích reálných procesů, navrhnout a implementovat některé experimenty využívající metody Monte Carlo, jako například výpočet jednorozměrných integrálů nebo určení Ludolfova čísla, včetně srovnání přesnosti dosažených výsledků a grafických výstupů. Dalším cílem je zpracování a implementace postupů vedoucích ke zpřesnění výpočtů při řešení daných problémů.

V první kapitole bude čtenář seznámen se základními pojmy, které se budou v této bakalářské práci vyskytovat, z oblasti matematické pravděpodobnosti a statistiky. Druhá kapitola bude věnována vysvětlení principu, na kterém je tato metoda založena. Poslední kapitola teoretické části bude zaměřena na zajímavý historický vývoj a původ statistické metody Monte Carlo.

Čtvrtou kapitolou bude začínat praktická část, která je stěžejní pro tuto práci. Tato kapitola bude věnována odhadu přibližné hodnoty Ludolfova čísla. V první podkapitole bude provedeno seznámení se samotným Ludolfovým číslem a jeho historií. V další podkapitole bude Ludolfovo číslo odhadováno pomocí tzv. Buffonovy úlohy, kterou vymyslel v druhé polovině osmnáctého století francouzský matematik Georges Louis Leclerc de Buffon. V poslední podkapitole pak bude představen druhý způsob, pomocí kterého se dá odhadnout přibližná hodnota Ludolfova čísla, tímto způsobem bude metoda čtverce a kruhu, která využívá geometrickou definici pravděpodobnosti.

Následující kapitola, která se bude zabývat problematikou výpočtu jednorozměrných integrálů, bude poslední kapitolou této bakalářské práce. Nejprve bude statistická metoda Monte Carlo použita v první podkapitole k výpočtu přibližné hodnoty integrálu pomocí geometrické metody, která již byla využita k určení hodnoty Ludolfova čísla. Poté bude provedeno seznámení s druhou metodou, která slouží k určení přibližné hodnoty integrálu, touto metodou bude metoda střední hodnoty náhodné veličiny. Poslední podkapitola pak bude věnována dvěma zpřesňujícím metodám, které vedou ke zpřesnění výsledků pomocí snižování rozptylu integrálu. Těmito dvěma metodami budou metoda výběru na podintervalech a metoda symetrizace integrované funkce.

1 Úvod do problematiky

Klasická definice pravděpodobnosti

Konečná množina všech elementárních prvků:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \quad (1.1)$$

Pravděpodobnost každého elementárního jevu:

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \text{ kde } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.2)$$

Pravděpodobnost jistého jevu:

$$P(A) = 1, P(A) = \Omega \quad (1.3)$$

Pravděpodobnost nemožného jevu:

$$P(\emptyset) = 0 \quad (1.4)$$

Pravděpodobnost libovolného náhodného jevu:

$$0 \leq P(A) \leq 1, A \subset \Omega \quad (1.5)$$

Klasická pravděpodobnost se používá v případech, kde se předpokládá, že je pravděpodobnost nastání každého jednoho elementárního jevu ω z množiny všech elementárních jevů Ω stejná. Množina všech elementárních jevů Ω obsahuje konečný počet prvků. Pravděpodobnost jistého jevu je rovna 1, náhodný jev A je pak roven množině Ω . Pravděpodobnost nemožného jevu je rovna 0, jev \emptyset není součástí množiny Ω . Pravděpodobnost náhodného jevu A je z intervalu $\langle 0,1 \rangle$, náhodný jev A je podmnožinou Ω . Počet elementárních jevů příznivých jevu A (počet prvků množiny A) lze označit písmenem m , zatímco n udává počet všech možných výsledků (počet prvků množiny Ω).

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1.6)$$

(Neubauer, 2021)

Geometrická definice pravděpodobnosti

Geometrická pravděpodobnost se používá v případech, kde se předpokládá, že je množina všech elementárních jevů Ω nespočetná, geometrická pravděpodobnost je tedy zobecněním klasické pravděpodobnosti. Tato definice je založená na porovnávání objemu, obsahu nebo

délek geometrických útvarů. Množina všech elementárních jevů Ω může být určena pomocí kladné délky na přímce, kladným obsahem v rovině nebo třeba kladným objemem v prostoru. Náhodný jev A je potom podmnožinou Ω , tedy částí délky na přímce, obsahu v rovině nebo objemu v prostoru.

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} \quad (1.7)$$

(Neubauer, 2021)

Aritmetický průměr

Aritmetický průměr je statistická veličina, která se označuje písmenem x s vodorovným pruhem nad sebou \bar{x} , případně řeckým písmenem μ . Aritmetický průměr je definován jako součet hodnot znaku všech jednotek souboru dělený jejich počtem.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1.8)$$

(Blatná, 2003)

Rozptyl

Rozptyl řady n hodnot x_1, x_2, \dots, x_n je definován jako podíl součtu všech druhých mocnin rozdílů mezi hodnotami řady a jejich aritmetickým průměrem a celkovým počtem čísel v dané řadě. Rozptyl je jednou z charakteristik variability a lze ho označit jako s^2 . Tato charakteristika udává, jak moc jsou hodnoty v statistickém souboru rozptýleny vzhledem k aritmetickému průměru. Pokud rozptyl dosáhne vysoké hodnoty, aritmetický průměr pak není příliš věrohodnou veličinou.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad (1.9)$$

(Klímek, 2003)

Směrodatná odchylka

Směrodatná odchylka je další z charakteristik variability a je definována jako druhá odmocnina z rozptylu. Tato charakteristika slouží ke stejnému účelu jako rozptyl, určuje, jak moc jsou jednotlivé hodnoty statistického souboru rozptýleny či odchýleny od aritmetického průměru. Smyslem zavedení této charakteristiky je to, že pokud je vypočítán rozptyl nějakého statistického souboru, tak výsledek nevychází ve stejných jednotkách, z jakých byl rozptyl

počítán, protože se ve vzorci rozdíl umocňuje na druhou, místo výsledku v metrech by tak byl získán rozptyl v metrech čtverečních. Díky zavedení směrodatné odchylky je pak získán výsledek ve stejných jednotkách, protože se výsledek rozptylu odmocní.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad (1.10)$$

(Klímeček, 2003)

Náhodná veličina

Je dán pravděpodobnostní prostor (Ω, β, P) . Zobrazení $X: \Omega \rightarrow R$ lze nazvat náhodnou veličinou, pokud je pro všechny její hodnoty $X(\omega)$ pro všechny reálná čísla x splněna následující podmínka:

$$\{\omega \in \Omega; X(\omega) < x\} \in \beta \quad (1.11)$$

Náhodná veličina bývá často označována pomocí řeckých písmen z konce abecedy, tedy například X, Y , respektive jako X_1, X_2 .

(Pelikán, 2003)

Střední hodnota náhodné veličiny

Jednou z nejdůležitějších charakteristik polohy je střední hodnota náhodné veličiny X , kterou lze označit jako $E(X)$. Pokud náhodná veličina X s diskrétním rozdělením nabývá hodnot x_1, x_2, x_3, \dots a tato řada konverguje absolutně, lze střední hodnotu určit pomocí vztahu:

$$E(X) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i p(x_i) \quad (1.12)$$

V případě, že řada nekonverguje absolutně, náhodná veličina X potom nemá žádnou střední hodnotu. Střední hodnota pro spojitou náhodnou veličinu s hustotou $f(x)$ je definována pomocí následujícího vztahu v případě, že uvedená řada, respektive integrál konverguje absolutně, v opačném případě střední hodnota neexistuje.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (1.13)$$

(Neubauer, 2021)

2 Princip metody Monte Carlo

V přírodovědných oborech, medicíně, technice a ekonomice je v dnešní době čím dál větší potřeba aplikace matematických metod za účelem urychlení a uskutečnění samotného rozvoje v daném oboru. Dříve se matematika soustřeďovala spíše na řešení vlastních teoretických problémů, s příchodem rychlých a kvalitních počítačů se ale přeorientovala na praktické využití získaných poznatků.

Mezi hlavní rysy současného vývoje numerické matematiky lze zařadit:

- používání počítačů s vysokou produktivitou,
- provádění vyčíslovacích algoritmů s velkým počtem aritmetických operací
- a vytváření nových tříd algoritmů s ohledem k jejich možnosti provádění na počítačích.

K řešení úloh je nutné definovat algoritmus, který je dán posloupností určitých operací. Pomocí tohoto algoritmu lze určit hledanou veličinu θ buď přesně, nebo s požadovanou přesností. Výsledky, které jsou postupně nashromážděny pomocí početních procedur lze označit jako:

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots \quad (2.1)$$

Od těchto výsledků se požaduje, aby splňovaly:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta \quad (2.2)$$

Po dokončení požadovaného počtu operací se tento proces zastaví. Dva různí výpočtáři, kteří správně realizovali stejný algoritmus, by měli dojít ke stejnému výsledku, pokud budou zanedbány chyby při výpočtu.

Postupem času se ale algoritmy stávají z konstrukčního a časového hlediska stále složitějšími. Je tedy nutné najít efektivnější způsob, jak tyto úlohy vyřešit. V takových případech se k tomuto řešení přímo nabízejí pravděpodobnostní a matematicko-statistické postupy.

Základní myšlenkou metody Monte Carlo je spojitost a vztah mezi pravděpodobnostními charakteristikami různých náhodných procesů, pod kterými si lze představit například pravděpodobnosti náhodných jevů, střední hodnoty náhodných veličin, a veličinami, které jsou řešeními úloh z různých matematických oblastí.

Pod pojmem metody Monte Carlo se neskrývají pouze postupy numerického řešení matematických problémů, ale skrývají se zde všechny postupy numerického řešení, například fyzikálních a jiných problémů. Tyto problémy jsou řešeny pomocí mnohokrát opakovaných

náhodných pokusů. Protože se odhady získávají statistickou cestou, mají tedy pravděpodobnostní charakter.

Opět lze označit odhady hledané veličiny, které byly získány statistickým zpracováním experimentálního materiálu, který byl obdržen jako výsledek nějakých mnohokrát opakovaných náhodných pokusů, následujícím způsobem:

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots \quad (2.3)$$

Je žádoucí, aby náhodná veličina θ_n , kde n představuje počet pokusů, při n jdoucí k ∞ konvergovala k hledané hodnotě θ , čímž bude splněno:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta_n - \theta| < \epsilon) = 1 \quad (2.4)$$

V rámci uvedeného modelu může být hledanou hodnotou θ pravděpodobnost nějakého náhodného jevu, jako například střední hodnota nějaké náhodné veličiny, jako nějaký statistický parametr. S hledanou hodnotou θ náhodné veličiny θ_n souvisejí pomocí pravděpodobnostních zákonitostí. Výpočetní proces je při této interpretaci nedeterministický, protože jsou určovány výsledky náhodných pokusů.

Metoda Monte Carlo se dá využít pro následující matematické problémy:

- určení hodnoty Ludolfova čísla,
- výpočet určitých integrálů včetně násobných,
- řešení systémů lineárních rovnic
- a hledání kořenů rovnic.

Úspěšnost výpočtu pomocí metody Monte Carlo ovlivňují následující tři faktory:

- kvalita generátoru pseudonáhodných čísel,
- výběr racionálního algoritmu výpočtu
- a kontrola přesnosti získaného výsledku.

(Neubauer, 2021)

3 Původ názvu metody Monte Carlo

V této kapitole bude přiblížen původ názvu metody Monte Carlo, protože si drtivá většina pod slovním spojením Monte Carlo nepředstaví statistickou metodu, ale vyhlášené městečko v Monackém knížectví, které je neodmyslitelně spojené s hraním hazardních her. Statistická metoda Monte Carlo má dnes již více než padesátiletou historii, ve 40. letech 20. století tuto metodu formulovali a současně i prakticky využili během druhé světové války vědečtí pracovníci John von Neumann a Stanislaw Ulam ve Spojených státech amerických. V té době se věnovali výzkumu chování neutronů a potřebovali určit podíl neutronů v určité spršce, který pronikne nějakým materiálem. Přestože tito dva vědci disponovali velkými znalostmi, jako například znalostí vzdálenosti mezi dvěma srážkami neutronu s atomy, pravděpodobností srážky neutronu s atomem nebo například množstvím energie, kterou ztrácí neutron během srážky, nebyli schopni tento problém vyřešit pomocí teoretických ani praktických nástrojů. Nakonec však přišli s geniálním nápadem, kdy historii života neutronu předpověděli pomocí techniky kola rulety. A protože je ruleta typická pro město Monte Carlo, pojmenovali tuto metodu vcelku výstižně jako metoda Monte Carlo. Pomocí této metody už byli schopni předpovědět trajektorii každého neutronu daného svazku. V té době již bylo známé, že pohlcení neutronu při srážce s atomem vodíku nastane průměrně v jednom ze sta možných případů. Ruletu tedy rozdělili na sto stejných dílků a jeden z těchto dílků značil právě zmiňované pohlcení neutronu atomem vodíku. Pokud se kolo rulety tedy zastaví na tomto dílku, znamená to pro neutron konec života, protože je pohlcen atomem vodíku. V opačném případě, kdy se kolo rulety zastaví na kterémkoliv jiném dílku, znamená to pro neutron změnu směru a rychlosti po srážce. Pomocí dalšího kola rulety lze také zjistit trajektorii, kterou proběhne neutron, než dojde k další srážce s atomem vodíku nebo kyslíku. Tato simulace se provádí, dokud nedojde k jednomu z následujících tří scénářů. Simulace bude ukončena, pokud bude neutron pohlcen nějakým atomem. Druhým scénářem může být ztráta příliš mnoha energie vlivem jednotlivých srážek. Úspěšným ukončením simulace je pak průchod celé cesty bez újmy a opuštění nádrže s vodou. Zde se však jedná o zjednodušenou formu tohoto problému, ve skutečnosti je tento problém velice komplikovaný. Nicméně, pokud bude proveden dostatečně velký počet takových simulací, bude možné si vytvořit představu o podílu neutronů, kterým se podařilo úspěšně opustit nádrž s vodou. Pokud by však měla být provedena simulace svazku složeného například ze sta tisíc neutronů, nebyla by simulace pomocí kola rulety příliš reálná, to však bylo později vyřešeno příchodem samočinných počítačů, které měly k dispozici vhodný soupis

náhodných čísel. Postupem času se však ukázalo, že podobným způsobem lze řešit složité problémy z mnoha oblastí.

(Fabian, 1998)

4 Určení hodnoty Ludolfova čísla

Touto kapitolou začíná praktická část této bakalářské práce. V první podkapitole bude provedeno seznámení se samotným Ludolfovým číslem a jeho historií. V následujících dvou podkapitolách bude určena přibližná hodnota Ludolfova čísla pomocí metody Monte Carlo.

Metodami pro určení hodnoty Ludolfova čísla jsou:

- Buffonova úloha,
- metoda čtverce a kruhu.

4.1 Ludolfovo číslo

Každý, kdo již prošel nějakým vzdělávacím institutem, má jistě nějakou představu o existenci Ludolfova čísla. Historie tohoto matematického pojmu sahá až do období několika let před Kristem, kdy první písemná zmínka označovaná pomocí řeckého písmena π pochází z První knihy královské. Následující biblický citát uvádí, že obvod moře je třikrát delší než jeho průměr.

Odlil také moře o průměru deseti loket, okrouhlé, pět loket vysoké, dalo se obepnout měřicí šňůrou dlouhou třicet loket.

Z tohoto tvrzení lze odvodit, že obvod kružnice je asi třikrát delší než její průměr, odtud je pak možné určit přibližnou hodnotu Ludolfova čísla, která by tedy byla rovna 3. Další výzvou ale pak bylo určit obsah kruhu, pokud je známý jeho poloměr. Objevovaly se zde snahy o stanovení geometrické konstrukce, pomocí které by bylo možné sestrojít čtverec, jehož obsah by byl stejný jako obsah kruhu s daným poloměrem. V britském muzeu je uložený Papyrus Rhind z období asi 2 000 let před Kristem, na kterém je uvedeno pravidlo pro výpočet obsahu. Toto pravidlo tvrdí, že obsah kruhu je stejně velký jako obsah čtverce se stranou $\frac{8}{9}$ průměru kruhu. Ve skutečnosti je však obsah kruhu o něco málo větší než obsah kruhu vypočítaný tímto způsobem. Ve třetím století před Kristem přišel Archimédes s novým postupem výpočtu obsahu kruhu. Při této metodě využíval vytváření vepsaných a opsaných pravidelných mnohoúhelníků dané kružnici, pomocí tohoto způsobu se mu podařilo určit hodnotu Ludolfova čísla s přesností na 2 desetinná místa. Ve 12. století našeho letopočtu použil stejnou metodu Ind Bhaskara a díky tomu, že použil 384-úhelník, stanovil přesnější hodnotu na 3,1416. Stejný postup aplikoval o 5 století později Ludolf von Ceulen s tím rozdílem, že použil 1 073 741 248-úhelníky, díky čemuž stanovil hodnotu Ludolfova čísla na 35 desetinných míst. Za tuto obdivuhodnou práci je číslo π nazýváno Ludolfovým číslem.

(Fabian, 1998) uvádí ve své práci mnemotechnickou pomůcku, pomocí které se dá Ludolfovo číslo snadno zapamatovat s přesností na 35 desetinných míst.

3,141592653589793238462643383279

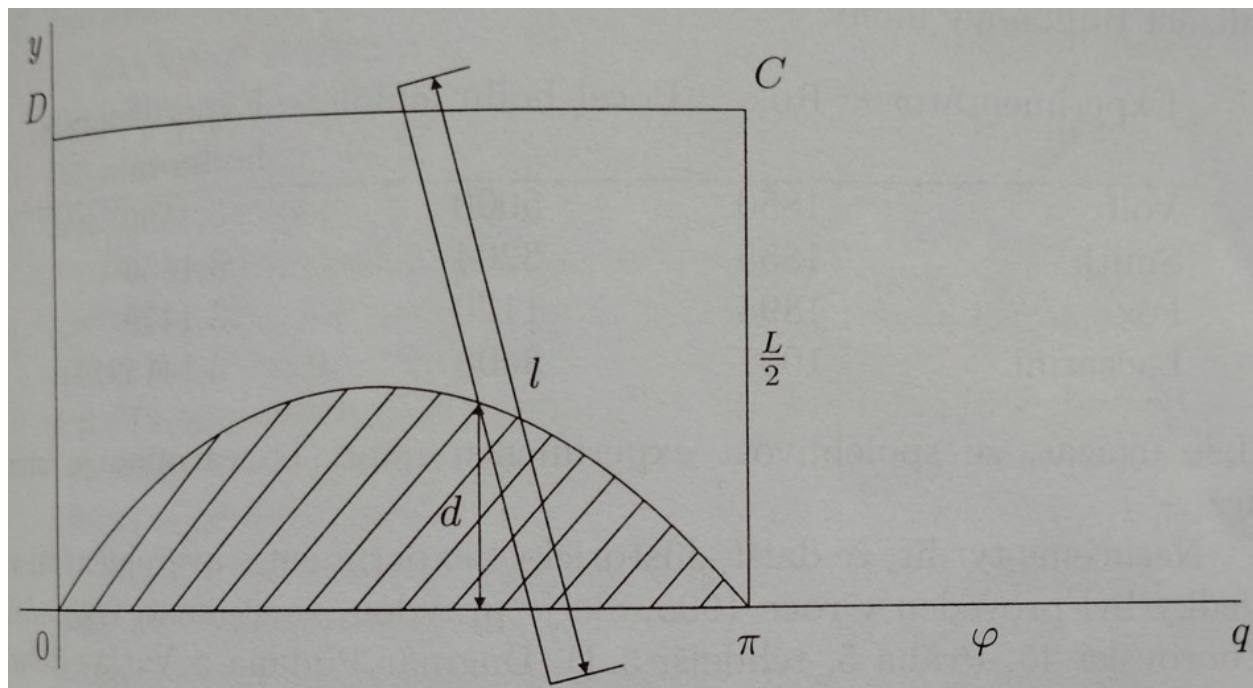
Dej, ó bože, ó mocný, pamatovat si takových čísel řad. Velký, slovatný Archimede, pomáhej trápenému, dej mu moc, nazpaměť, necht' odříká ty slavné sice, ale tak protivné nám, ach, číslice Ludolfovy.

Počet písmen v každém slově této říkanky určuje příslušnou číslici na každé z cifer.

(Fabian, 1998)

4.2 Buffonova úloha

Prvním způsobem, kterým se dá odhadnout přibližná hodnota Ludolfova čísla je tzv. Buffonova úloha. Buffonova úloha je slavná matematická úloha, kterou v roce 1777 vymyslel francouzský matematik Georges Louis Leclerc de Buffon. Řešení této úlohy je založeno na geometrické pravděpodobnosti. Náhodnou veličinu zde představuje jehla, jejíž délku lze označit písmenem l . Další důležitou roli v této úloze hraje rovina, která je vyplněna horizontálními rovnoběžkami. Vzdálenost mezi těmito rovnoběžkami musí být stejná a zároveň delší nebo stejně dlouhá jako délka jehly, tuto vzdálenost lze označit písmenem L . Rovnoběžky jsou rovnoběžné s osou x . Vzdálenost středu jehly od nejbližší rovnoběžky lze označit pomocí d . Tato rovnoběžka svírá s jehlou úhel φ . Poloha jehly, která spadla na rovinu s rovnoběžkami, je určena bodem o souřadnicích $[d, \varphi]$, kde platí následující nerovnosti $0 \leq d \leq \frac{L}{2}$ a $0 \leq \varphi \leq \pi$. Pokud je jehla vhozena na rovinu, mohou nastat dvě možnosti. Pokus je úspěšný, pokud jehla protne jednu z rovnoběžek. Tato situace nastane, pokud $d \leq \frac{l}{2} \sin \varphi$. Zároveň lze počet úspěšných pokusů označit pomocí relativní četnosti písmenem m . Druhou možností je, že jehla neprotne žádnou z rovnoběžek. Celkový počet úspěšných a neúspěšných pokusů pak lze označit písmenem n .



Obrázek 1: Buffonova úloha (Fabian, 1998)

Obsah vyšrafované části:

$$S_{\text{vyšrafovaná část}} = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} l \sin \varphi d\varphi \quad (4.1)$$

Obsah obdélníku $0\pi CD$:

$$S_{\text{obdélník}} = \frac{L}{2} \pi \quad (4.2)$$

Relativní četnost:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (4.3)$$

Pravděpodobnost, že jehla protne rovnoběžku:

$$P(A) = \frac{S_{\text{vyšrafovaná část}}}{S_{\text{obdélník}}} \quad (4.4)$$

Po dosazení jednotlivých obsahů je pravděpodobnost následující:

$$P(A) = \frac{\int_0^{\pi} \frac{1}{2} l \sin \varphi d\varphi}{\frac{1}{2} L \pi} \quad (4.5)$$

V následujícím kroku lze konstantu $\frac{1}{2}l$ vytknout před integrál.

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2}l \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi}{\frac{1}{2}L\pi} \quad (4.6)$$

Lze postupovat určením integrálu funkce $\sin \varphi$.

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2}l[-\cos \varphi]_0^\pi}{\frac{1}{2}L\pi} \quad (4.7)$$

V následujícím kroku dojde k dosazení horní a dolní meze do primitivní funkce $-\cos \varphi$.

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2}l[1 + 1]}{\frac{1}{2}L\pi} \quad (4.8)$$

Po odečtení krajních mezí integrálu vzniká následující rovnice pro pravděpodobnost.

$$P(A) = \frac{2l}{L\pi} \quad (4.9)$$

Za pravděpodobnost jevu A lze dosadit vzorec pro relativní četnost.

$$\frac{m}{n} = \frac{2l}{L\pi} \quad (4.10)$$

Obě strany rovnice lze vynásobit výrazem $n * L\pi$.

$$mL\pi = 2ln \quad (4.11)$$

V posledním kroku stačí vydělit pravou stranu rovnice výrazem mL .

$$\pi = \frac{2ln}{Lm} \quad (4.12)$$

(Fabian, 1998)

(Fabian, 1998) ve své práci zachycuje historické údaje o realizaci Buffonovy úlohy, které jsou uvedeny v následující tabulce. Předpokládá se, že čím více je provedeno pokusů, tím bude hodnota Ludolfova čísla přesnější, to zde však neplatí, protože Volf, který v roce 1850 provedl 5 000 hodů jehlou, dosáhl nejhorší přesnosti ze všech uvedených experimentátorů. O pět let později se o něco blíže přiblížil Smith, který provedl o 1796 pokusů méně, ale přesto dosáhl o něco lepší přesnosti. Až o 39 let později se Fox svým experimentem přiblížil k přesné hodnotě

na 4 desetitisíciny, přestože provedl pouze 1120 pokusů. Nejbližší se však svým experimentem dostal o 7 let později experimentátor Laccarini, který provedl 3408 pokusů a dokázal určit hodnotu Ludolfova čísla s přesností 6 desetinných míst, se spolehlivostí menší než 1/30.

Tabulka 1: Historické údaje o realizaci Buffonovy úlohy

Experimentátor	Rok	Počet hodů jehlou	Experimentální hodnota π
Volf	1850	5000	3,1596
Smith	1855	3204	3,1553
Fox	1894	1120	3,1419
Laccarini	1901	3408	3,1415929

Zdroj: vlastní zpracování, upraveno podle (Fabian, 1998)

K určení přibližné hodnoty Ludolfova čísla byl vytvořen následující algoritmus. V tomto algoritmu jsou nejprve inicializovány proměnné n a m , kde n představuje celkový počet pokusů a pomocí proměnné m se zaznamenávají úspěšné pokusy. Dále jsou nastaveny hodnoty l a L , které představují délku jehly a vzdálenost mezi rovnoběžkami. Následně jsou pomocí cyklu s n iteracemi generovány náhodné úhly, které svírá jehla s nejbližší rovnoběžkou, a náhodné vzdálenosti, které představují vzdálenost jehly od nejbližší rovnoběžky. Algoritmus v následujícím kroku pomocí podmínky zkontroluje, zda jehla protнула nějakou z rovnoběžek. Pokud jehla protнула nějakou z rovnoběžek, inkrementuje se počet úspěšných pokusů. Na závěr je pomocí vzorce vypočtena přibližná hodnota Ludolfova čísla, která je následně vypsána do konzole.

Zdrojový kód v jazyce Java programu pro určení hodnoty Ludolfova čísla pomocí Buffonovy úlohy

```
int n = 100000; // počet pokusů
int m = 0; // počet úspěšných pokusů (jehla protнула rovnoběžku)
double l = 7.5; // délka jehly
double L = 10.0; // vzdálenost rovnoběžek

Random random = new Random();

// Generování náhodného úhlu a vzdálenosti od rovnoběžky a testování
for (int i = 0; i < n; i++) {
    // generování úhlu, který svírá jehla s rovnoběžkou
    double fi = random.nextDouble() * Math.PI;
```

```

// generování vzdálenosti jehly od rovnoběžky
double d = random.nextDouble() * L / 2;

// kontrola, zda jehla protнула nějakou rovnoběžku
if (d < l / 2 * Math.sin(fi)) {
    m++;
}

// Výpočet hodnoty  $\pi$ 
double pi = (2.0 * l * n) / (m * L);

// Výpis přibližné hodnoty  $\pi$ 
System.out.printf("Přibližná hodnota  $\pi$ : ", pi);

```

Tento program byl následně opakovaně spouštěn a za proměnnou n , která reprezentuje počet pokusů, lépe řečeno hodů jehlou, byly dosahovány hodnoty, které jsou zaznamenány v prvním sloupci následující tabulky. V tabulce si lze všimnout, že se hodnotu Ludolfova čísla s přesností na 2 desetinná místa v pěti po sobě jdoucích pokusech podařilo odhadnout až při vygenerování 100 000 000 hodů jehlou. Ani při provedení 1 000 000 000 hodů jehlou se nepodařilo dosáhnout hodnoty Ludolfova čísla s přesností na 4 desetinná místa.

Tabulka 2: Hodnoty Ludolfova čísla získané pomocí Buffonovy úlohy

n	π				
	pokus č. 1	pokus č. 2	pokus č. 3	pokus č. 4	pokus č. 5
10	3,0	3,75	2,5	3,75	3,0
100	3,488372093	3,191489362	3,947368421	3,191489362	2,941176471
1 000	3,289473684	3,138075314	3,012048193	3,246753247	3,246753247
10 000	3,181336161	3,194888179	3,168567807	3,151922673	3,090871626
100 000	3,139980323	3,124934897	3,152585120	3,132047106	3,162755392
1 000 000	3,140170951	3,147669780	3,133211625	3,151220783	3,142210147
10 000 000	3,141227055	3,142046256	3,138943448	3,141077737	3,142982443
100 000 000	3,141433559	3,141392638	3,141868496	3,141972740	3,141313430
1 000 000 000	3,141636595	3,141689045	3,141648887	3,141696737	3,141621968

Zdroj: vlastní zpracování

Z následující tabulky je zřejmé, že pro určení Ludolfova čísla po provedení pěti pokusů, by stačilo při každém pokusu provést 100 000 hodů jehlou, aby byla hodnota Ludolfova čísla určena s přesností na 2 desetinná místa se směrodatnou odchylkou 1 setiny. Na určení Ludolfova čísla s přesností na 4 desetinná místa muselo být provedeno 5 pokusů, kdy v každém pokusu muselo být provedeno 100 000 000 hodů jehlou. Směrodatná odchylka a procentuální odchylka měla s přibývajícím počtem hodů jehlou až na výjimky klesající tendenci. Nejpresnějšího výsledku bylo zaznamenáno při 100 000 000 hodů jehlou, zatímco směrodatná odchylka byla nejnížší až při 1 000 000 000 hodů jehlou.

Tabulka 3: Přesnost hodnot Ludolfova čísla získaných pomocí Buffonovy úlohy

n	Aritmetický průměr	Směrodatná odchylka	Procentuální odchylka
10	3,2	0,484768	1,859164
100	3,351979	0,344489	6,696810
1 000	3,186621	0,100641	1,433288
10 000	3,157517	0,036219	0,506897
100 000	3,142461	0,013683	0,027627
1 000 000	3,142897	0,006225	0,041508
10 000 000	3,141255	0,001341	0,010736
100 000 000	3,141596	0,000270	0,000112
1 000 000 000	3,141659	0,000029	0,002101

Zdroj: vlastní zpracování

4.3 Metoda obsahu čtverce a kruhu

Buffonova úloha ale není ani zdaleka jediným způsobem, jakým se dá odhadnout hodnota Ludolfova čísla. Další metoda, která zde bude představena, využívá stejně jako předchozí metoda geometrickou definici pravděpodobnosti, ale je daleko přesnější. K lepší představě této metody poslouží čtverec o straně délky dvou centimetrů se středem v počátku ve dvourozměrném souřadném systému. Následně je do tohoto čtverce vepsána jednotková

kružnice, tedy kružnice o poloměru jednoho centimetru, střed kružnice bude také v počátku souřadného systému. V této úloze se vychází ze znalosti obsahu čtverce a obsahu plochy kruhu.

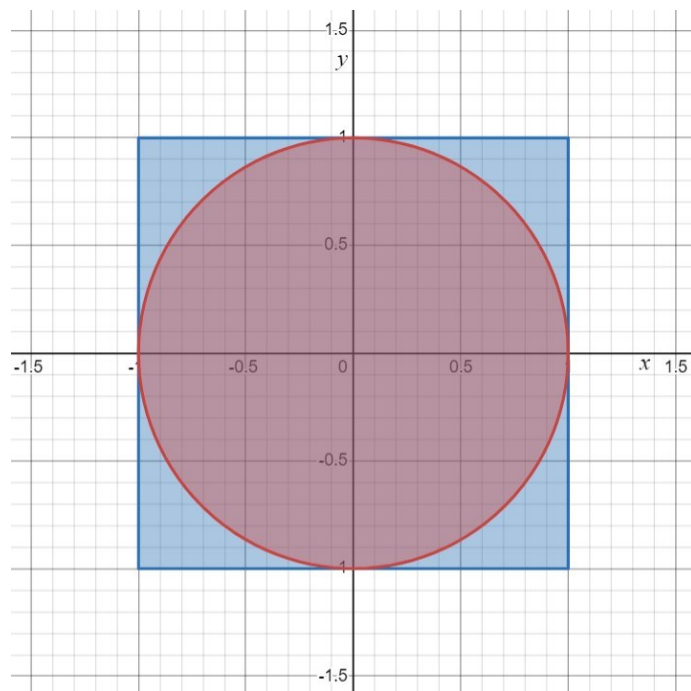
Obsah čtverce:

$$S_{\text{čtverec}} = a^2 \quad (4.13)$$

Obsah kruhu:

$$S_{\text{kruh}} = \pi r^2 \quad (4.14)$$

Všechny body ležící uvnitř tohoto čtverce pak lze popsat pomocí uspořádané dvojice $[x, y]$, kde x, y jsou z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Pro všechny body uvnitř kruhu zase platí nerovnice $x^2 + y^2 \leq 1$. Postupovat lze generováním náhodně uspořádaných dvojic. Všechny vygenerované body budou ležet uvnitř čtverce, to pro nás ale není příliš zajímavé, proto bude sledován počet bodů, které budou zároveň i součástí plochy kruhu. Z tohoto vztahu lze určit, že pravděpodobnost tohoto jevu je dána poměrem obsahu kruhu a obsahu čtverce.



Obrázek 2: Metoda kruhu a čtverce (vlastní zpracování)

Pravděpodobnost bodu uvnitř kruhu:

$$P(A) = \frac{\pi r^2}{a^2} \quad (4.15)$$

Relativní četnost, která je dána poměrem úspěšných pokusů a celkového počtu pokusů:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (4.16)$$

Pokud se za pravděpodobnost jevu A dosadí vzorec pro relativní četnost, vznikne následující rovnice:

$$\frac{m}{n} = \frac{\pi r^2}{a^2} \quad (4.17)$$

Obě strany rovnice se následně vynásobí výrazem $a^2 n$.

$$ma^2 = \pi r^2 n \quad (4.18)$$

Poté se obě strany rovnice vydělí výrazem $r^2 n$ a vznikne vzorec pro výpočet hodnoty Ludolfova čísla.

$$\pi = \frac{ma^2}{r^2 n} \quad (4.19)$$

Protože strana čtverce je dvakrát delší než poloměr kruhu, lze nahradit a za $2r$.

$$\pi = \frac{4mr^2}{r^2 n} \quad (4.20)$$

Na závěr lze zkrátit výraz ve zlomku výrazem r^2 a vzniká následující rovnice:

$$\pi = 4 \frac{m}{n} \quad (4.21)$$

Momentálně už stačí otestovat tyto skutečnosti pomocí nějakého generátoru pseudonáhodných čísel.

(Fabian, 1998)

Pro určení přibližné hodnoty Ludolfova čísla byl vytvořen následující algoritmus. Nejprve jsou inicializovány proměnné n a m , kde n představuje celkový počet vygenerovaných bodů a m zaznamenává počet bodů, které jsou uvnitř jednotkové kružnice. Dále je v cyklu s n iteracemi generováno n náhodných bodů s rovnoměrným rozložením v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ pro obě souřadnice x a y . Poté je testováno, zda každý vygenerovaný bod leží uvnitř jednotkové kružnice pomocí nerovnice $x^2 + y^2 < 1$. Pokud ano, inkrementuje se proměnná m . Na závěr je pomocí vzorce pro výpočet přibližné hodnoty Ludolfova čísla pomocí geometrické metody vypočtena přibližná hodnota Ludolfova čísla, která je následně vypsána do konzole.

Zdrojový kód v jazyce Java program pro určení přibližné hodnoty Ludolfova čísla pomocí čtverce a kruhu

```
int m = 0; // počet bodů uvnitř kruhu
int n = 100; // počet vygenerovaných bodů

// Generování náhodných bodů a testování, zda jsou uvnitř kruhu
Random random = new Random();
for (int i = 0; i < n; i++)
{
    double x = random.nextDouble(); // generování x souřadnice
    double y = random.nextDouble(); // generování y souřadnice

    // Testování, zda je bod uvnitř kruhu podle nerovnice  $x^2 + y^2 < 1$ 
    if ((x * x + y * y) < 1)
    {
        m++;
    }
}

// Výpočet hodnoty  $\pi$ 
double pi = 4.0 * m / n;

// Výpis přibližné hodnoty  $\pi$ 
System.out.println("Přibližná hodnota  $\pi$ : " + pi);
```

Pomocí předchozího programu bylo postupně vygenerováno 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000, 10 000 000, 100 000 000 a 1 000 000 000 bodů. Pro dosažení co nejpřesnějších hodnot byl tento program spuštěn pro každou hodnotu n pětkrát.

V následující tabulce jsou vidět hodnoty Ludolfova čísla, které byly získány pomocí metody čtverce a kruhu pro výpočet přibližné hodnoty Ludolfova čísla. Je zřejmé, že čím více bylo vygenerováno náhodných bodů, tím více se jednotlivé pokusy přibližovaly přesné hodnotě Ludolfova čísla. Od počtu 100 000 vygenerovaných náhodných bodů se už přibližná hodnota Ludolfova čísla určila s přesností na dvě desetinná místa nebo s odchylkou jedné setiny.

Tabulka 4: Hodnoty Ludolfova čísla získané pomocí metody čtverce a kruhu

	π				
n	pokus č. 1	pokus č. 2	pokus č. 3	pokus č. 4	pokus č. 5
10	2,4	3,2	3,6	2,4	3,2
100	3,24	3,28	3,08	3,16	2,76
1 000	3,256	3,172	3,12	3,132	3,124

10 000	3,148	3,1188	3,1436	3,1264	3,144
100 000	3,13764	3,13256	3,1416	3,14644	3,14652
1 000 000	3,143084	3,141812	3,14242	3,14298	3,144488
10 000 000	3,1410528	3,141936	3,1418624	3,1408768	3,1413148
100 000 000	3,14152096	3,14163884	3,14171684	3,14193828	3,14155224
1 000 000 000	3,141592964	3,141582616	3,141562908	3,141601732	3,141556916

Zdroj: vlastní zpracování

V následující tabulce bylo provedeno porovnání přesnosti dosažených hodnot. S narůstajícím počtem generovaných bodů se snižovala směrodatná odchylka a procentuální odchylka. Při vygenerování 1 000 000 000 bodů se podařilo určit hodnotu Ludolfova čísla s přesností na čtyři desetinná místa, kdy procentuální odchylka byla pouhé 4 desetitisíciny.

Tabulka 5: Přesnost hodnot Ludolfova čísla získaných pomocí metody čtverce a kruhu

n	Aritmetický průměr	Směrodatná odchylka	Procentuální odchylka
10	2,96	0,48	5,780274
100	3,104	0,185213	1,196611
1 000	3,1608	0,051062	0,611389
10 000	3,13616	0,011434	0,172927
100 000	3,140952	0,005347	0,020393
1 000 000	3,142957	0,000890	0,043422
10 000 000	3,141409	0,000425	0,005860
100 000 000	3,141673	0,000149	0,002571
1 000 000 000	3,141579	0,000017	0,000421

Zdroj: vlastní zpracování

(Fabian, 1998) ve své práci uvádí výsledky, které byly dosaženy studentem J. Vrabcem, když prohluboval své znalosti při řešení uvedeného problému bezprostředně po seznámení s podstatou metody Monte Carlo. Dosažené výsledky jsou uvedeny v následující přehledové tabulce. Studentovi se podařilo určit hodnotu Ludolfova čísla s přesností na jedno desetinné místo, při nejzdařilejších pokusech se od přesné hodnoty odchýlil o necelé 2 setiny, přestože nejvíce vykonal 500 experimentů.

Tabulka 6: Výsledky dosažené studentem J. Vrabcem

Počet experimentů (n)	Počet příznivých pokusů (m)	Experimentální hodnota π
100	75	3,00
200	160	3,20
300	237	3,16
400	317	3,17
500	395	3,16

Zdroj: vlastní zpracování, upraveno podle (Fabian, 1998)

5 Výpočet jednorozměrného integrálu

Tato kapitola se bude zabývat problematikou výpočtu jednorozměrných integrálů. Použití metody Monte Carlo k výpočtu určitého integrálu je jednou z nejčastějších a nejnámějších aplikací této metody. Zatímco jednorozměrné integrály lze snadno vypočítat pomocí numerických metod, u těch složitějších vícerozměrných integrálů často selhávají běžné numerické metody, metoda Monte Carlo tak zůstává jedinou možností. Přestože má použití metody Monte Carlo větší přínos při výpočtu vícerozměrných integrálů, tato práce bude zaměřena především na příklady jednorozměrných integrálů. Pokud neklademe přehnaně velké požadavky na přesnost výsledků výpočtu integrálů, je použití metody Monte Carlo ideálním řešením. Nejprve bude představena geometrická metoda, která využívá geometrických interpretací integrálů k jejich výpočtu. Následující podkapitola pak bude zaměřena na metodu střední hodnoty náhodné veličiny.

5.1 Geometrická metoda

Tato metoda může svou implementací připomínat úlohu, kde byla odhadována hodnota Ludolfova čísla pomocí geometrické definice pravděpodobnosti. Cílem této metody bude odhadnout přibližnou hodnotu následujícího integrálu.

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (5.1)$$

Aby mohla být použita tato metoda při výpočtu předchozího integrálu, musí být splněna následující podmínka, které usnadní samotný výpočet. Funkce $f(x)$ musí být nezáporná, to znamená, že platí nerovnice $f(x) \geq 0$. Tohoto stavu by se dalo dosáhnout přičtením vhodné konstanty, ale pro zjednodušení lze uvažovat, že je funkce nezáporná.

Úkolem je vypočítat hodnotu integrálu I , který představuje plochu obrazce S , který je ohraničen zespodu přímkou $y = 0$, zleva přímkou $x = a$, zprava přímkou $x = b$ a shora křivkou $y = f(x)$. Dále je potřeba určit takzvaný omezující obdélník, který lze označit jako prostor Ω , tedy prostor elementárních jevů. Tento prostor je ohraničený zleva přímkou $x = a$, zespodu přímkou $y = 0$, zprava přímkou $x = b$ a shora přímkou $y = f(x)_{max}$.

Obsah prostoru Ω :

$$S_{\Omega} = (b - a) * f(x)_{max} \quad (5.2)$$

Relativní četnost:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (5.3)$$

Pravděpodobnost, že bude náhodně vygenerovaný bod součástí plochy omezené integrálem I:

$$P(A) = \frac{I}{S_{\Omega}} \quad (5.4)$$

Pravděpodobnost jevu A lze tedy nahradit pomocí relativní četnosti a vzniká rovnice:

$$\frac{m}{n} = \frac{I}{S_{\Omega}} \quad (5.5)$$

Obě strany rovnice se vynásobí výrazem $n * S_{\Omega}$.

$$m * S_{\Omega} = I * n \quad (5.6)$$

Obě strany rovnice se dají vydělit výrazem n .

$$I = \frac{m * S_{\Omega}}{n} \quad (5.7)$$

Na závěr lze do rovnice dosadit vzorec pro obsah prostoru Ω .

$$I = \frac{m * (b - a) * f(x)_{max}}{n} \quad (5.8)$$

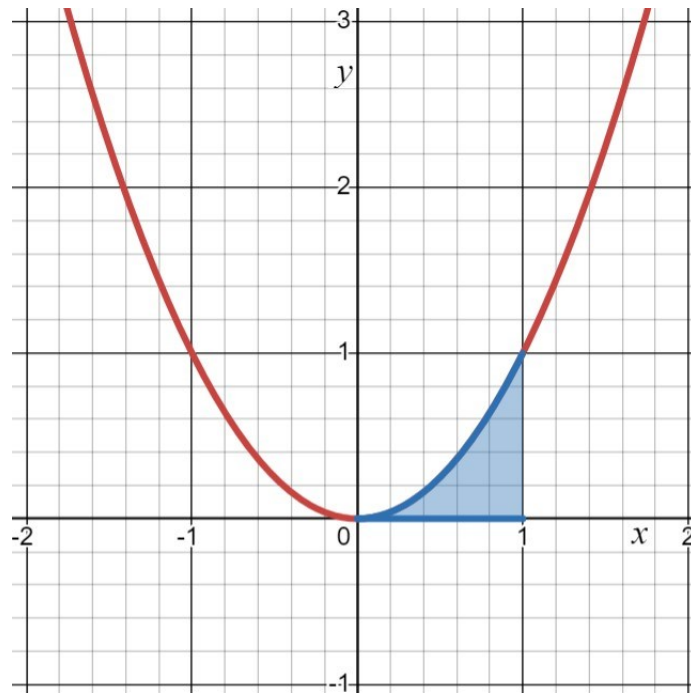
Do této získané rovnice už se dá jednoduše dosadit vše potřebné a získat přibližnou hodnotu integrálu I .

(Virus, 1998)

Na následujícím integrálu bude předveden praktický výpočet jednorozměrného integrálu pomocí geometrické metody.

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (5.9)$$

Na následujícím obrázku je zobrazen průběh funkce x^2 a plocha integrálu $\int_0^1 x^2 dx$, která je ohraničená zleva přímkou $x = 0$, zdola přímkou $y = 0$, zprava přímkou $x = 1$ a shora přímkou $y = 1$, protože hodnota 1 je supremem funkce x^2 na intervalu $\langle 0,1 \rangle$.



Obrázek 3: Graf funkce $f(x) = x^2$ a plocha integrálu $\int_0^1 x^2 dx$ (vlastní zpracování)

Nejprve je vhodné numericky určit přesnou hodnotu daného integrálu, aby se dala později určit přesnost dosažených hodnot.

$$\int_0^1 x^2 = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \approx 0,33 \quad (5.10)$$

Pro určení přibližné hodnoty jednorozměrného integrálu pomocí geometrické metody byl vytvořen následující algoritmus. V prvním kroku je definována funkce, která bude integrována. Dále jsou inicializovány proměnné a a b , které představují dolní a horní mez integrace, a proměnná n , která reprezentuje počet náhodně vygenerovaných bodů. Pro použití této metody je nutné znát supremum funkce na daném intervalu, takže je také inicializováno pomocí proměnné $gMax$. Následně jsou pomocí cyklu s n iteracemi generovány náhodné body s rovnoměrným rozložením na intervalu $\langle a, b \rangle$ pro proměnnou x a v intervalu $\langle 0, gMax \rangle$ pro proměnnou y . Poté se testuje, zda vygenerovaný bod leží pod křivkou integrované funkce $f(x)$. Pokud ano, inkrementuje se počet úspěšných pokusů. Na závěr je vypočtena přibližná hodnota integrálu funkce $f(x)$ pomocí vzorce pro výpočet jednorozměrného integrálu pomocí geometrické metody. Tato hodnota je následně vypsána do konzole.

Zdrojový kód v jazyce Java programu, který odhadne přibližnou hodnotu zadaného integrálu pomocí geometrické metody.

```
// Definice funkce f(x), například f(x) = x^2
Function<Double, Double> f = x -> x * x;
double a = 0.0; // Dolní mez integrace
double b = 1.0; // Horní mez integrace
int n = 1000000000; // Počet náhodných bodů
double gMax = 1.0; // Supremum funkce f(x) pro interval <0, 1>

Random random = new Random();
int m = 0; // Počet úspěšných pokusů, tj. počet bodů v oblasti w

// Generování náhodných bodů a výpočet odhadu integrálu
for (int i = 0; i < n; i++) {
    //Náhodná hodnota x z intervalu <a, b>
    double x = a + (b - a) * random.nextDouble();
    // Náhodná hodnota y z intervalu <0, gMax>
    double y = gMax * random.nextDouble();

    // Pokud bod padne pod křivku f(x), zvýší se počet úspěšných pokusů
    if (y <= f.apply(x)) {
        m++;
    }
}

// Výpočet odhadu integrálu
double integral = (b - a) * gMax * ((double) m / n);

// Výpis přibližné hodnoty odhadu integrálu
System.out.println("Odhad integrálu: " + integral);
```

V následující tabulce jsou zobrazeny hodnoty, které byly získány opakovaným spuštěním předchozího programu. V tabulce si lze všimnout, že od 1 000 náhodně vygenerovaných bodů byla hodnota integrálu odhadnuta s přesností na 1 desetinné místo, od 100 000 vygenerovaných bodů už byla hodnota integrálu pravidelně určena s přesností na 2 desetinná místa. Opět zde platí klasické pravidlo pro geometrickou metodu, že čím více je vygenerováno náhodných bodů, tím přesnější odhadovaná hodnota integrálu je získána.

Tabulka 7: Hodnoty integrálu získané pomocí geometrické metody

	<i>I</i>				
n	pokus č. 1	pokus č. 2	pokus č. 3	pokus č. 4	pokus č. 5
10	0,4	0,2	0,2	0,2	0,4
100	0,29	0,35	0,25	0,3	0,36
1 000	0,316	0,344	0,317	0,331	0,36

10 000	0,3289	0,3355	0,3425	0,3327	0,3289
100 000	0,33572	0,33266	0,33349	0,33066	0,3323
1 000 000	0,334035	0,333355	0,333087	0,333455	0,333005
10 000 000	0,3331316	0,3334238	0,3332673	0,333291	0,3334411
100 000 000	0,33335915	0,33335953	0,33336018	0,33336697	0,33328517
1 000 000 000	0,333314853	0,333326515	0,333333383	0,333346591	0,333313599

Zdroj: vlastní zpracování

V následující tabulce, která pojednává o tom, jaká je přesnost geometrické metody pro výpočet jednorozměrného integrálu, si lze všimnout, že už při 1 000 vygenerovaných náhodných čísel byla hodnota integrálu určená pomocí aritmetického průměru 5 pokusů odhadnuta s přesností na tři desetinná místa. K horšímu výsledku však došlo při generování 100 000 náhodných čísel, ale to mohlo být způsobeno kvalitou generátoru náhodných čísel nebo náhodnými čísly, která byla zrovna vygenerována.

Tabulka 8: Přesnost hodnot integrálu získaných pomocí geometrické metody

n	Aritmetický průměr	Směrodatná odchylka	Procentuální odchylka
10	0,28	0,09798	16
100	0,31	0,040497	7
1 000	0,3336	0,016716	0,08
10 000	0,3337	0,005055	0,11
100 000	0,332966	0,001656	0,1102
1 000 000	0,333387	0,000364	0,01622
10 000 000	0,333311	0,000113	0,006712
100 000 000	0,333346	0,000031	0,00386

1 000 000 000	0,333327	0,000012	0,001904
---------------	----------	----------	----------

Zdroj: vlastní zpracování

5.2 Metoda odhadu střední hodnoty náhodné veličiny

Ačkoliv se předchozí geometrická metoda výpočtu jednorozměrného integrálu používá neprávem častěji, lze konstatovat, že je tato druhá metoda z hlediska náročnosti výpočtu výhodnější, protože potřebuje ke svému výpočtu pouze jednorozměrné náhodné veličiny, odpadá tak porovnávání a není potřeba znát supremum funkce $f(x)$. Výhodou této metody je také to, že meze integrálu mohou být konečné i nekonečné, zatímco geometrická metoda vyžaduje konečné meze.

Cílem této metody bude opět odhadnout přibližnou hodnotu následujícího integrálu:

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (5.11)$$

Střední hodnotu funkce $f(x)$ lze definovat jako:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (5.12)$$

V následujícím kroku bude nutné definovat náhodnou veličinu, kterou lze označit například velkým písmenem X , tato náhodná veličina bude definována na intervalu (a, b) a její rozdělení bude definováno hustotou funkce $f(x)$.

Náhodná veličina X :

$$X = f(x) \quad (5.13)$$

Střední hodnota náhodné veličiny X je rovna střední hodnotě funkce $f(x)$ na intervalu (a, b) .

$$E(X) = \bar{f} \quad (5.14)$$

Hodnotu střední hodnoty náhodné veličiny X lze odhadnout pomocí aritmetického průměru n nezávislých realizací náhodné veličiny X .

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (5.15)$$

Pokud se podaří zjistit střední hodnotu náhodné veličiny X , která se přibližně rovná střední hodnotě funkce \bar{f} , stačí pouze vynásobit střední hodnotu rozdílem horní a dolní meze zadaného integrálu.

$$I = (b - a) * \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (5.16)$$

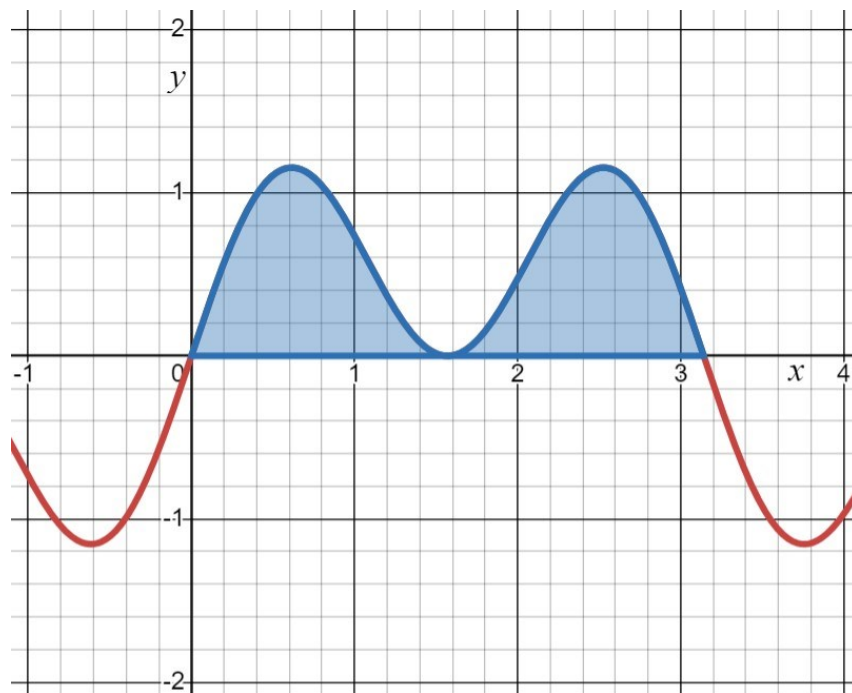
Pomocí této získané rovnice už lze snadno určit přibližnou hodnotu integrálu I .

(Virus, 1998)

V této části budou využity teoretické poznatky k výpočtu následujícího integrálu pomocí metody střední hodnoty náhodné veličiny.

$$\int_0^{\pi} 3 \sin(x) \cos^2(x) dx \quad (5.17)$$

Na následujícím obrázku lze vidět průběh funkce $f(x) = 3 \sin(x) \cos^2(x)$ a plochu integrálu $\int_0^{\pi} 3 \sin(x) \cos^2(x) dx$, která je ohraničená zleva přímkou $x = 0$, zdola přímkou $y = 0$, zprava přímkou $x = \pi$ a shora křivkou funkce $f(x)$.



Obrázek 4: Graf funkce $f(x) = 3 \sin(x) \cos^2(x)$ a plocha integrálu $\int_0^\pi 3 \sin(x) \cos^2(x) dx$ (vlastní zpracování)

Je vhodné nejdříve numericky určit přesnou hodnotu integrálu, aby pak mohla být určena přesnost této metody pro výpočet jednorozměrného integrálu pomocí střední hodnoty náhodné veličiny.

$$\int_0^\pi 3 \sin(x) \cos^2(x) dx = [-\cos^3(x)]_0^\pi = 1 - (-1) = 2 \quad (5.18)$$

Pro odhad integrálu funkce $f(x)$ pomocí střední hodnoty náhodné veličiny byl vytvořen následující algoritmus. Nejprve je definována funkce $f(x)$, která má být integrována. Dále jsou inicializovány proměnné a a b , které představují dolní a horní mez integrace, a proměnná n , která reprezentuje počet náhodně vygenerovaných bodů. Následně jsou v cyklu s n iteracemi generovány náhodné body s rovnoměrným rozložením v intervalu $\langle a, b \rangle$ pro proměnnou x . Poté je pro každý vygenerovaný bod vypočtena hodnota funkce $f(x)$, která je přičtena k proměnné sum , která zaznamenává součet hodnot funkce $f(x)$ pro všechny vygenerované body. Na závěr je vypočten odhad integrálu funkce $f(x)$ pomocí vzorce pro výpočet přibližné hodnoty jednorozměrného integrálu pomocí metody střední hodnoty náhodné veličiny. Tento odhad integrálu je následně vypsán do konzole.

Zdrojový kód v jazyce Java programu pro určení přibližné hodnoty integrálu pomocí metody střední hodnoty náhodné veličiny

```
// Definice funkce f(x), například f(x) = 3 * sin(x) * cos(x) ^ 2
Function<Double, Double> f;
f = x -> 3 * Math.sin(x) * Math.pow(Math.cos(x), 2);
double a = 0.0; // Dolní mez integrace
double b = Math.PI; // Horní mez integrace
int n = 1000000; // Počet náhodných bodů

Random random = new Random();
double sum = 0.0;

for (int i = 0; i < n; i++) {
    // Náhodná hodnota x z intervalu <a, b>
    double x = a + (b - a) * random.nextDouble();
    // Hodnota funkce f(x)
    double y = f.apply(x);
    sum += y;
}

// Výpočet odhadu integrálu
double integral = (b - a) * sum / n;

// Výpis přibližné hodnoty odhadu integrálu
System.out.println("Odhad integrálu: " + integral);
```

V následující tabulce jsou zobrazeny hodnoty, které byly získány pomocí opakovaného spouštění předchozího programu. Opět byl vždy při každém pokusu generován stejný počet náhodných čísel jako u předchozí metody. V tabulce je vidět, že už při 100 náhodně vygenerovaných číslech se s výjimkou druhého pokusu odhadnuté hodnoty blížily přesné hodnotě integrálu s maximální odchylkou 4 setin. Vypadá to, že pro tuto metodu není potřeba generovat tolik náhodných čísel jako u předchozí geometrické metody.

Tabulka 9: Hodnoty integrálu získané pomocí metody střední hodnoty náhodné veličiny

	<i>I</i>				
n	pokus č. 1	pokus č. 2	pokus č. 3	pokus č. 4	pokus č. 5
10	1,654142605	1,930272942	2,351743121	1,503918843	1,756065267
100	1,984251659	2,238289009	2,048250977	2,023956352	2,029203864
1 000	2,012825943	2,005057710	1,968888846	2,029908529	1,973194894
10 000	1,993059473	1,987316662	1,988142592	2,008525140	1,987950246
100 000	1,998143698	2,003632687	2,002200034	2,005138767	1,996699512

1 000 000	1,999008738	1,998383802	2,001045088	1,998899070	1,996672951
10 000 000	1,999440092	2,000781632	1,999320592	1,999414415	2,000098463
100 000 000	2,000095843	2,000026456	1,999941157	2,000041632	2,000126828
1 000 000 000	1,999964472	2,000063923	1,999992111	2,000008924	1,999971103

Zdroj: vlastní zpracování

V následující tabulce je uvedena přesnost hodnot integrálu získaných pomocí metody střední hodnoty náhodné veličiny. Při 10 000 vygenerovaných čísel se aritmetický průměr přiblížil přesné hodnotě na necelých 8 tisícín, při 1 000 vygenerovaných čísel dokonce na necelé 3 tisíciny. Od hodnoty 10 000 a výše se aritmetický průměr blížil čím dál více přesné hodnotě, při 1 000 000 000 vygenerovaných čísel byl průměr téměř stejný jako přesná hodnota integrálu, kdy procentuální odchylka byla pouze 5 miliontin.

Tabulka 10: Přesnost hodnot integrálu získaných pomocí metody střední hodnoty náhodné veličiny

n	Aritmetický průměr	Směrodatná odchylka	Procentuální odchylka
10	1,839229	0,291399	8,038572
100	2,06479	0,089214	3,239519
1 000	1,997975	0,023454	0,101241
10 000	1,992999	0,00803	0,350059
100 000	2,001163	0,003226	0,058147
1 000 000	1,998802	0,001399	0,059904
10 000 000	1,999811	0,000559	0,009448
100 000 000	2,000046	0,000064	0,002319
1 000 000 000	2	0,000036	0,000005

Zdroj: vlastní zpracování

5.3 Způsoby zpřesnění odhadu

V předchozích dvou podkapitolách byly představeny dvě klasické metody na výpočet jednorozměrných integrálů, první metodou byla geometrická metoda, která využívá geometrickou definici pravděpodobnosti, druhou pak metoda, která využívá k odhadu přibližné hodnoty integrálu střední hodnotu náhodné veličiny. Bez znalosti integrované funkce nelze určit, která z těchto dvou metod přináší přesnější výsledky, ale s jistotou lze říct, že nejpřesnější bude klasické numerické řešení, pokud je však možné. Smyslem této podkapitoly je tedy předvést algoritmy, které vedou ke zpřesnění odhadu klasických metod. Nutné je však zmínit, že každá metoda je navržena pro jiný typ funkcí, takže vždy nemusí dojít ke zpřesnění samotného odhadu. Metody se budou snažit zvýšit přesnost odhadu pomocí zmenšení rozptylu.

Pro účely této práce byly zvoleny následující dvě zpřesňující metody:

- výběr na podintervalech
- a symetrizace integrované funkce.

5.3.1 Výběr na podintervalech

Jedním ze způsobů, jakým lze snížit rozptyl základních odhadů, je metoda výběru na podintervalech, někde se uvádí také jako skupinový výběr. Jak už vyplývá z jejího názvu, tak tato metoda využívá ke zpřesnění odhadu integrálů rozdělení intervalu mezi integrované funkce $\langle a, b \rangle$ na n podintervalů.

Tyto podintervaly lze označit následujícím způsobem:

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \dots < b_n = b \quad (5.19)$$

Kvalita zpřesnění záleží právě na tomto faktoru, jakým způsobem bude interval rozdělen na dané podintervaly. V každém podintervalu se generuje jiný počet náhodných čísel x_i . Největší počet náhodných čísel se generuje v částech integrační oblasti, na kterých nejvíce závisí hodnota integrálu.

Délka jednotlivých podintervalů:

$$l_i = a_i - b_i, \text{ kde } i = 1, 2, \dots, n \quad (5.20)$$

Suma délky všech podintervalů pak musí odpovídat rozdílu mezi horní a dolní mezí integrálu.

$$\sum_{i=1}^n l_i = b - a \quad (5.21)$$

Výsledný integrál pak lze zapsat pomocí součtů všech integrálů integrované funkce na daných podintervalech.

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} f(x) dx + \int_{b_2}^{b_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx \quad (5.22)$$

Jednotlivé integrály součtu se pak vypočítají pomocí klasické metody střední hodnoty náhodné veličiny.

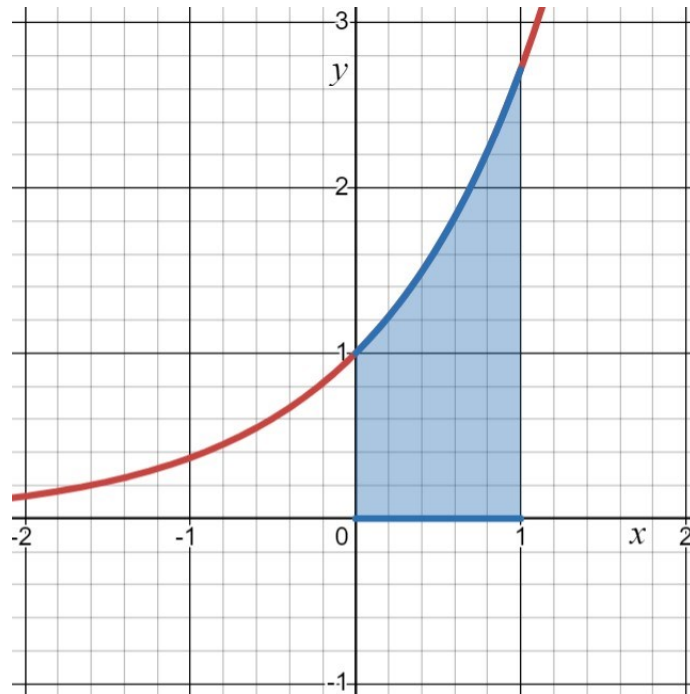
$$I = \sum_{k=1}^n \frac{l_k}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} f(x_i) \quad (5.23)$$

(Virus, 1998)

V této části bude pomocí tohoto vztahu vypočítána přibližná hodnota následujícího integrálu pomocí zpřesňující metody výběru na podintervalech.

$$\int_0^1 e^x dx \quad (5.24)$$

Na následujícím obrázku je zobrazen průběh funkce $f(x) = e^x$ a plocha integrálu $\int_0^1 e^x dx$, která je zleva ohraničena přímkou $x = 0$, zdola přímkou $y = 0$, zprava přímkou $x = 1$ a shora přímkou $y = e$.



Obrázek 5: Graf funkce $f(x) = e^x$ a plocha integrálu $\int_0^1 e^x dx$ (vlastní zpracování)

Opět je vhodné nejprve numericky určit přesnou hodnotu integrálu z důvodu pozdějšího určování přesnosti získaných hodnot pomocí algoritmu pro určení přibližné hodnoty jednorozměrného integrálu pomocí zpřesňující metody výběru na podintervalech.

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1 \approx 1,7183 \quad (5.25)$$

Nejprve je definována funkce $f(x)$, která bude integrována. Dále jsou inicializovány proměnné a a b , které představují dolní a horní mez integrace, dále proměnná *partitionsCount*, která reprezentuje počet podintervalů, proměnná *ratios*, která uchovává poměry rozdělení počtu náhodných čísel mezi jednotlivé podintervaly, a na závěr proměnná n , která určuje počet náhodně vygenerovaných čísel. Následně algoritmus prochází jednotlivé podintervaly a pro každý interval vypočítá průměr hodnot funkce. Počet náhodných čísel v každém podintervalu je určen poměrem *ratios* a celkovým počtem náhodných čísel n . Pro každé náhodné číslo x v daném podintervalu je vypočtena hodnota funkce $f(x)$, která je přičtena do proměnné *partitionSum*, která uchovává součet všech hodnot funkce $f(x)$ v daném podintervalu. Nakonec je pro každý podinterval vypočten průměr hodnot funkce $f(x)$, vážený podle šířky

podintervalu, a tento vážený průměr je přičten k celkovému integrálu. Výsledný odhad integrálu je poté vypsán do konzole.

Zdrojový kód v jazyce Java programu pro výpočet přibližného odhadu hodnoty integrálu pomocí zpřesňující metody výběru na podintervalech

```
// Definice funkce f(x), například f(x) = e^x
Function<Double, Double> f = x -> Math.exp(x);
double a = 0.0; // Dolní mez integrace
double b = 1.0; // Horní mez integrace
int partitionsCount = 2; // Počet podintervalů
double[] ratios = {0.4, 0.6}; // Poměr rozdělení čísel mezi podintervaly
int n = 1000; // Celkový počet náhodných čísel

Random random = new Random();
double integral = 0.0;

for (int k = 0; k < partitionsCount; k++) {
    double partitionWidth = (b - a) / partitionsCount;
    double partitionSum = 0.0;
    // Počet náhodných čísel v daném podintervalu
    int partitionNumbers = (int)(n * ratios[k]);

    for (int i = 0; i < partitionNumbers; i++) {
        // Náhodná hodnota x v rámci dílčího intervalu
        double x =
            a + k * partitionWidth + partitionWidth * random.nextDouble();
        // Hodnota funkce f(x)
        double y = f.apply(x);
        partitionSum += y;
    }

    // Průměr hodnot funkce f(x) v daném podintervalu
    double partitionAverage = partitionSum / partitionNumbers;
    // Vážený průměr hodnot funkce f(x) pro všechny dílčí podintervaly
    integral += partitionAverage * partitionWidth;
}

// Výpis přibližné hodnoty odhadu integrálu s 9 desetinnými místy
System.out.println("Odhad integrálu: " + integral);
```

V následující tabulce jsou zobrazeny hodnoty, které byly získány pomocí opakovaného spuštění předchozího programu pro výpočet jednorozměrného integrálu pomocí zpřesňující metody výběru na podintervalech. S přesností na dvě desetinná místa se vygenerované hodnoty začínají blížit přesné hodnotě při 10 000 vygenerovaných čísel. Při 1 000 000 000 vygenerovaných čísel se ve dvou pokusech podařilo určit hodnotu integrálu s přesností na 5 desetinných míst.

Tabulka 11: Hodnoty integrálu získané pomocí zpřesňující metody výběru na podintervalech

n	<i>I</i>				
	pokus č. 1	pokus č. 2	pokus č. 3	pokus č. 4	pokus č. 5
10	1,756462179	1,741916083	1,599845477	1,673393780	1,669455016
100	1,735222623	1,662073407	1,717818265	1,719853144	1,713300780
1 000	1,714543206	1,724762859	1,710944491	1,726367799	1,732149703
10 000	1,717250818	1,717308433	1,720209081	1,718619993	1,719805335
100 000	1,717780607	1,718769952	1,719310786	1,718898085	1,719579876
1 000 000	1,718489453	1,717947880	1,718093074	1,718203631	1,718504353
10 000 000	1,718300413	1,718227607	1,718291955	1,718281672	1,718204363
100 000 000	1,718291429	1,718306350	1,718258950	1,718262578	1,718259022
1 000 000 000	1,718287561	1,718273463	1,718291969	1,718289614	1,718278115

Zdroj: vlastní zpracování

Z následující tabulky lze určit, jaké přesnosti dosáhla zpřesňující metoda výběru na podintervalech při výpočtu přibližné hodnoty integrálu. Od 10 000 vygenerovaných náhodných čísel se podařilo této metodě určit hodnotu integrálu s přesností na 3 desetinná místa, od 1 000 000 vygenerovaných náhodných čísel pak dokonce na 4 desetinná místa. Směrodatná odchylka má neustálou klesající tendenci. O něco větší procentuální odchylky bylo dosaženo při generování 100 000 náhodných čísel než při 10 000 náhodných čísel.

Tabulka 12: Přesnost hodnot integrálu získaných pomocí zpřesňující metody výběru na podintervalech

n	Aritmetický průměr	Směrodatná odchylka	Procentuální odchylka
10	1,671153	0,669970	2,742812
100	1,709654	0,024906	0,502140

1 000	1,721754	0,007839	0,202050
10 000	1,718639	0,001227	0,020771
100 000	1,718868	0,000616	0,034106
1 000 000	1,718248	0,000219	0,001987
10 000 000	1,718261	0,000038	0,001200
100 000 000	1,718276	0,000020	0,000359
1 000 000 000	1,718284	0,000007	0,000135

Zdroj: vlastní zpracování

Následující tabulka obsahuje hodnoty pro geometrickou metodu, metodu střední hodnoty náhodné veličiny a zpřesňující metodu výběru na podintervalech. U všech metod bylo generováno 200 náhodných čísel nebo bodů. Aritmetický průměr je vytvořen z deseti po sobě jdoucích pokusů. Nejlepšího výsledku dosáhla zpřesňující metoda výběru na podintervalech, to může znamenat, že byl v jednotlivých podintervalech generovaný správný počet náhodných čísel. Naopak nejhoršího výsledku z pohledu aritmetického průměru a procentuální odchylky dosáhla metoda střední hodnoty. Metoda střední hodnoty však měla lepší směrodatnou odchylku než geometrická metoda.

Tabulka 13: Porovnání přesnosti jednotlivých metod pro určení přibližné hodnoty integrálu

$n = 200$	Aritmetický průměr	Směrodatná odchylka	Procentuální odchylka
Geometrická metoda	1,741060	0,071261	1,325608
Metoda střední hodnoty	1,687853	0,034524	1,770883
Výběr na podintervalech	1,711953	0,021562	0,368298

Zdroj: vlastní zpracování

5.3.2 Symetrizace integrované funkce

Druhou zpřesňující metodou pro určení přibližné hodnoty jednorozměrného integrálu byla zvolena metoda symetrizace integrované funkce. Tato metoda vychází z předpokladu, že rozptyl integrálu bude tím menší, čím méně se bude funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ měnit.

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (5.26)$$

Proto se metoda upravuje vhodným způsobem, aby příliš nekolísala a aby se tím snížil rozptyl integrálu. Pokud je funkce $f(x)$ monotónní, to znamená, že se bude její hodnota neustále zvyšovat nebo neustále snižovat, pak lze tuto funkci symetrizovat pomocí vztahu:

$$g(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(a + b - x)] \quad (5.27)$$

V případě úspěšné symetrizace funkce lze očekávat snížení rozptylu integrálu minimálně dvakrát, prodlouží se však doba výpočtu přibližně dvakrát. Po symetrizaci integrované funkce platí, že se integrály původní i té symetrizované budou rovnat.

$$\int_a^b f(x) = \int_a^b g(x) \quad (5.28)$$

Přibližnou hodnotu integrálu lze pak vypočítat pomocí následujícího vztahu:

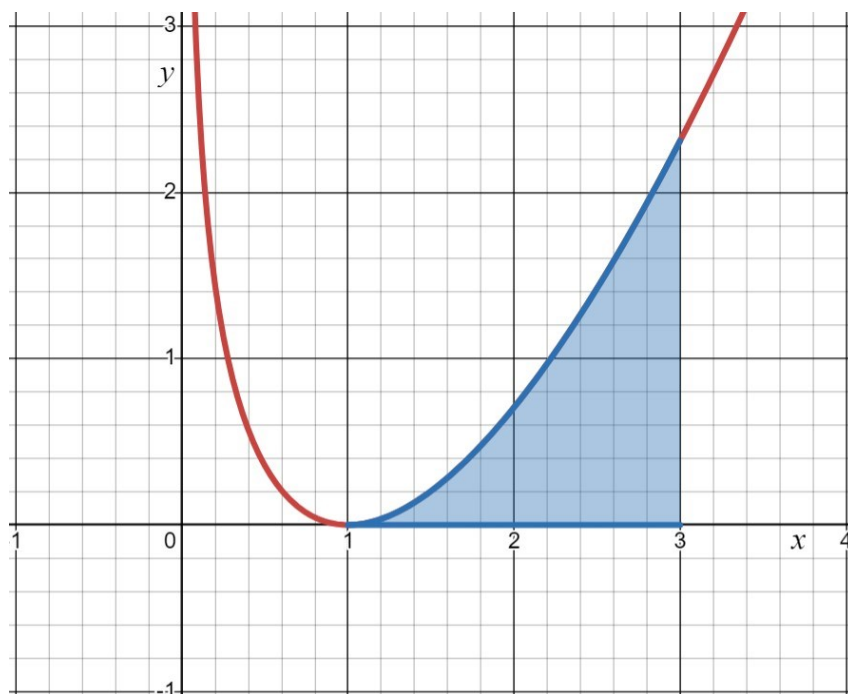
$$I = (b - a) \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [f(x_i) + f(a + b - x_i)] \quad (5.29)$$

(Fabian, 1998)

V této části bude určena přibližná hodnota následujícího integrálu pomocí všech metod, které slouží k určení hodnoty jednorozměrného integrálu a jsou součástí této práce.

$$\int_1^3 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx \quad (5.30)$$

Na následujícím obrázku je zobrazen průběh funkce $f(x) = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}$ a plocha integrálu $\int_1^3 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx$, která je ohraničená zleva přímkou $x = 1$, zdola přímkou $y = 0$, zprava přímkou $x = 3$ a shora přímkou $y = \frac{4}{\sqrt{3}}$.



Obrázek 6: Graf funkce $f(x) = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}$ a plocha integrálu $\int_1^3 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx$ (vlastní zpracování)

Nejprve je numericky určena přesná hodnota integrálu, aby mohla být později porovnána přesnost získaných hodnot pomocí všech metod, které jsou určeny pro výpočet jednorozměrného integrálu a jsou součástí této práce.

$$\int_1^3 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} = \left[\frac{2}{5} \sqrt{x^5} - \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} \right]_1^3 = \frac{8}{5} \sqrt{3} - \frac{16}{15} \approx 1,7046 \quad (5.31)$$

Pro odhad integrálu funkce $f(x)$ pomocí zpřesňující metody symetrizace integrované funkce byl vytvořen následující algoritmus. Nejprve je definována funkce $f(x)$. Dále jsou inicializovány proměnné a a b , které představují dolní a horní mez integrace, a proměnná n , která reprezentuje počet náhodných čísel. Následně jsou v cyklu s n iteracemi generovány náhodné body s rovnoměrným rozložením v intervalu $\langle a, b \rangle$ pro proměnnou x . Pro každý vygenerovaný bod x je poté vypočtena hodnota funkce $f(x)$. Kromě toho je také vypočtena hodnota funkce $f(a+b-x)$, která odpovídá hodnotě funkce $f(x)$ pro symetrický bod vzhledem k intervalu $\langle a, b \rangle$. Tyto dvě hodnoty jsou poté sečteny a přičteny do proměnné sum .

Na závěr je vypočten odhad integrálu funkce $f(x)$ pomocí vzorce pro výpočet přibližné hodnoty jednorozměrného integrálu pomocí zpřesňující metody symetrizace integrované funkce Tento odhad integrálu je následně vypsán do konzole.

Zdrojový kód v jazyce Java programu pro výpočet jednorozměrného integrálu pomocí zpřesňující metody symetrizace funkce.

```
// Definice funkce f(x), například f(x) = (x - 1)^2 / sqrt(x)
Function<Double, Double> f = x -> Math.pow(x - 1, 2) / Math.sqrt(x);
double a = 1.0; // Dolní mez integrace
double b = 3.0; // Horní mez integrace
int n = 1000000; // Počet náhodných čísel

double sum = 0.0;
Random random = new Random();

for (int i = 0; i < n; i++) {
    // Náhodná hodnota x z intervalu <a, b>
    double x = a + (b - a) * random.nextDouble();
    // Hodnota funkce f(x)
    double y = f.apply(x) + f.apply(a + b - x);
    sum += y;
}

// Výpočet odhadu integrálu
double integral = (b - a) * 0.5 / n * sum;

// Vypis přibližné hodnoty odhadu integrálu
System.out.println("Odhad integrálu: " + integral);
```

V následující tabulce jsou zobrazeny přibližné hodnoty integrálu, které byly získány pomocí zpřesňující metody symetrizace integrované funkce. Od 10 000 náhodně vygenerovaných čísel se pravidelně dařilo určit hodnotu integrálu s přesností na dvě desetinná místa, od 10 000 000 náhodně vygenerovaných čísel pak s přesností až na 4 desetinná místa nebo s minimální odchylkou v podobě necelé jedné desetitisíciny od přesné hodnoty integrálu, která byla určena numerickou metodou.

Tabulka 14: Hodnoty integrálu získané pomocí zpřesňující metody symetrizace integrované funkce

	<i>I</i>				
n	pokus č. 1	pokus č. 2	pokus č. 3	pokus č. 4	pokus č. 5
10	1,820863880	1,854729465	1,535186020	1,685534060	1,737258904
100	1,698951203	1,692812677	1,719167236	1,719968346	1,762963693

1 000	1,713612174	1,708021405	1,722795321	1,686550128	1,716514318
10 000	1,706643232	1,703196797	1,703494822	1,707775155	1,705820548
100 000	1,703868227	1,704560291	1,704970855	1,704504511	1,704312372
1 000 000	1,704995191	1,704462009	1,705077329	1,704655257	1,704510353
10 000 000	1,704557374	1,704566700	1,704635116	1,704596104	1,704640223
100 000 000	1,704612751	1,704582163	1,704601562	1,704619774	1,704648174
1 000 000 000	1,704612248	1,704613064	1,704613649	1,704617305	1,704612126

Zdroj: vlastní zpracování

V následující tabulce s přesností hodnot získaných pomocí zpřesňující metody symetrizace integrované funkce je patrné, že už při realizaci nízkého počtu náhodně vygenerovaných čísel se dá určit hodnota integrálu s nižší procentuální odchylkou než jedno procento. Už při vygenerování 1 000 náhodných čísel byla určena hodnota integrálu s přesností na 2 desetinná místa. Nejlepšího výsledku bylo dosaženo podle očekávání při generování 1 000 000 000 náhodných čísel, kdy se podařilo odhadnout hodnotu integrálu s přesností na 6 desetinných míst se směrodatnou odchylkou 2 miliontin.

Tabulka 15: Přesnost hodnot získaných pomocí zpřesňující metody symetrizace integrované funkce

n	Aritmetický průměr	Směrodatná odchylka	Procentuální odchylka
10	1,726714	0,112909	1,296471
100	1,718773	0,024581	0,830569
1 000	1,709499	0,012424	0,286519
10 000	1,705386	0,001780	0,045259
100 000	1,704443	0,000359	0,010054
1 000 000	1,704740	0,000251	0,007357

10 000 000	1,704599	0,000034	0,000911
100 000 000	1,704613	0,000022	0,000102
1 000 000 000	1,704614	0,000002	0,000056

Zdroj: vlastní zpracování

Následující tabulka porovnává přesnost všech metod pro výpočet jednorozměrného integrálu, které byly součástí této práce. Těmito metodami jsou geometrická metoda, metoda střední hodnoty náhodné veličiny, zpřesňující metoda výběru na podintervalech a zpřesňující metoda symetrizace integrované funkce. Pro porovnávání přesnosti daných metod bylo opět generováno 200 náhodných čísel nebo bodů pro každou z metod. Tentokrát bylo ale provedeno 20 pokusů pro každých 200 vygenerovaných náhodných čísel. Aritmetický průměr a tím pádem i procentuální odchylka vyzněly nejlépe pro metodu střední hodnoty a zpřesňující metodu symetrizace integrované funkce, těmto metodám se podařilo určit hodnotu integrálu s přesností na 2 desetinná místa při 200 vygenerovaných číslech. Nejpřesnější hodnotu se pak podařilo určit pomocí metody střední hodnoty. Nejlepší směrodatná odchylka byla podle očekávání zaznamenána u zpřesňujících metod. Je možné, že se u zpřesňující metody výběru na podintervalech mohlo dosáhnout přesnějšího výsledku, pokud by byla správně rozložena generovaná čísla na dané podintervaly. Asi už není překvapením, že nejhoršího výsledku dosáhla opět geometrická metoda, která potřebuje na určení přesnější hodnoty generovat velké množství náhodných čísel.

Tabulka 16: Porovnání přesnosti jednotlivých metod pro určení přibližné hodnoty integrálu

$n = 200$	Aritmetický průměr	Směrodatná odchylka	Procentuální odchylka
Geometrická metoda	1,720504	0,150111	0,932127
Metoda střední hodnoty	1,707319	0,096663	0,158673
Výběr na podintervalech	1,686227	0,044932	1,078712
Symetrizace funkce	1,709600	0,011861	0,292449

Zdroj: vlastní zpracování

ZÁVĚR

V teoretické části byl čtenář blíže seznámen se statistickou metodou Monte Carlo. V první kapitole bakalářské práce byly vysvětleny základní pojmy z oblasti pravděpodobnosti a matematické statistiky, protože jsou základy této metody položeny právě na těchto dvou oblastech. Následovalo vysvětlení principu metody Monte Carlo. Dále zde byla objasněna historie a původ názvu této metody.

Ve druhé části se práce zabývá praktickým využitím metody Monte Carlo v oblasti matematiky. Nejprve byla přiblížena historie Ludolfova čísla, jehož přibližná hodnota byla poté hledána pomocí dvou metod, Buffonovy úlohy, která k výpočtu využívá dopad jehly na rovinu s rovnoběžkami, a geometrické metody, která sleduje počet bodů, které jsou součástí jednotkové kružnice uvnitř čtverce o straně dvou centimetrů. Ukázalo se zde, že vhodnější metodou pro určení Ludolfova čísla je geometrická metoda. V další kapitole bylo přiblíženo, jakými dvěma způsoby se dá určit přibližná hodnota jednorozměrného integrálu. Prvním způsobem je geometrická metoda, která je založena na geometrické definici pravděpodobnosti. Tou druhou je pak metoda, která využívá k určení přibližné hodnoty integrálu střední hodnotu náhodné veličiny. Dále byly v této práci zmíněny dvě zpřesňující metody, které napomáhají ke zpřesnění výsledků pomocí snížení rozptylu integrálu. Pro účely této práce byla zvolena metoda výběru na podintervalech, která rozděluje interval integrálu na více podintervalů a která v každém podintervalu generuje jiný počet náhodných čísel. Druhou zpřesňující metodou pak byla metoda symetrizace integrované funkce, která usiluje o úpravu integrované funkce vhodným způsobem tak, aby funkce příliš nekolísala a snížil se tím tak rozptyl integrálu. Svůj účel tyto metody vlivem snížení rozptylu plnily. Každá z těchto zpřesňujících metod je však určena pro jiný typ funkcí, takže použití nemusí vždy nutně vést ke zpřesnění výsledku. Všechny tyto experimenty byly naprogramovány v jazyce Java v podobě algoritmů, jednotlivé výsledky pak byly zaznamenávány do tabulek. V závěru práce bylo provedeno porovnání všech metod, které byly součástí této práce, při odhadu přibližné hodnoty jednorozměrného integrálu.

V závěru lze říct, že využití statistické metody Monte Carlo je velice přínosné zejména při řešení složitých problémů, které nelze analyticky vyřešit nebo jejichž analytické řešení je příliš složité. Nutné je však podotknout, že čím přesnějších výsledků má být dosaženo, tím větší počet náhodných čísel musí být vygenerován. V případě, že nejsou vyžadovány přesné výsledky při řešení nějakého problému, je tato metoda shledána jako ideální volba.

POUŽITÁ LITERATURA

BLATNÁ, Dagmar, 2003. *Pravděpodobnost a statistika*. Praha: Bankovní institut vysoká škola. ISBN 80-7265-059-9.

FABIAN, František a Zdeněk KLUIBER, 1998. *Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění*. Praha: Prospektrum. ISBN 80-7175-058-1.

KLÍMEK, Petr, 2003. *Aplikovaná statistika pro ekonomy*. Vyd. 1. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. ISBN 80-7318-148-7.

NEUBAUER, Jiří, Marek SEDLAČÍK a Oldřich KŘÍŽ, 2021. *Základy statistiky: aplikace v technických a ekonomických oborech*. 3., rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing. ISBN 978-80-271-3421-2.

PELIKÁN, Štěpán, 2003. *Pravděpodobnosti a statistika*. Vyd. 1. V Ústí nad Labem: Univerzita J.E. Purkyně v Ústí nad Labem. ISBN 80-7044-528-9.

VIRIUS, Miroslav, 1998. *Aplikace matematické statistiky: metoda Monte Carlo*. Vyd. 3. Praha: České vysoké učení technické. ISBN 80-01-01779-6.