Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní

Rozhodování v konfliktních situacích pomocí maticové hry

Diplomová práce

2023

Bc. Nikol Jiskrová

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2022/2023

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	**Nikol Jiskrová**
Osobní číslo:	**E21087**
Studijní program:	**N0413A050009 Ekonomika a management**
Specializace:	**Ekonomika a management podniku**
Téma práce:	**Rozhodování v konfliktních situacích pomocí maticové hry**
Zadávající katedra:	**Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Zásady pro vypracování

Cíl práce: Popis a řešení reálných úloh ekonomického rozhodování, které lze považovat za maticové hry. V teoretické části budou maticové hry popsány jako úloha lineárního programování a v závěru bude řešeno několik příkladů z podnikové praxe.

Osnova:
- Konfliktní situace a modely rozhodování.
- Lineární programování.
- Teorie her.
- Maticová hra.
- Příklady využití maticových her v praxi.

Rozsah pracovní zprávy: **35**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

BLACKWELL, David a Meyer A. GIRSHICK. Theory of games and statistical decisions. New York: Dover Publications, 1979. ISBN 0-486-63831-6.
DLOUHÝ, Martin a Petr FIALA. Úvod do teorie her. Vyd. 2., přeprac. Praha: Oeconomica, 2009. ISBN 978-80-245-1609-7.
FIALA, Petr. *Modely a metody rozhodování*. 3., přeprac. vyd. V Praze: Oeconomica, 2013. ISBN 978-80-245-1981-4.
FIALA, Petr. Teorie rozhodování. [1. vyd.]. Ústí nad Labem: Univerzita J.E. Purkyně, 1999. Skripta. ISBN 80-7044-237-9.
MAŇAS, Miroslav. Teorie her a optimální rozhodování. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1974. Matematický seminář SNTL, 6.
SEHNALOVÁ, Iva, Radomil BÁBEK a Jiří BÁBEK. *Jak zvládat konfliktní situace: příručka pro každého*. Praha: Inboox CZ, 2015. ISBN 978-80-905416-1-0.
ŠUBRT, Tomáš. Ekonomicko-matematické metody. 3. upravené a rozšířené vydání. Plzeň: Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk, 2019. ISBN 978-80-7380-762-7.
VOLEK, Josef. Modelování a řešení rozhodovacích situací. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2010. ISBN 978-80-7395-311-9.

Vedoucí diplomové práce: **Mgr. Jana Heckenbergerová, Ph.D.**
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: **1. září 2022**
Termín odevzdání diplomové práce: **30. dubna 2023**

L.S.

prof. Ing. Jan Stejskal, Ph.D. v.r.
děkan

doc. Ing. Michaela Kotková Stříteská, Ph.D. v.r.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 1. září 2022

Prohlašuji:

Práci s názvem Rozhodování v konfliktních situacích pomocí maticové hry jsem vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 7/2019 Pravidla pro odevzdávání, zveřejňování a formální úpravu závěrečných prací, ve znění pozdějších dodatků, bude práce zveřejněna prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 25. 4. 2023

Nikol Jiskrová, v.r.

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucí mé diplomové práce Mgr. Janě Heckenbergerové, Ph.D. za cenné rady, připomínky, ochotu, trpělivost a v neposlední řadě za čas, který mi při psaní diplomové práce věnovala. Poděkování patří také mé rodině a přátelům, kteří mě po celou dobu studia podporovali.

ANOTACE

Tato diplomová práce se zabývá řešením konfliktních situací pomocí maticové hry. První část práce je věnována vymezení pojmu konfliktní situace a modelům rozhodování. Dále je rozebráno lineární programování, teorie her a maticová hra. Ve druhé části jsou vypočítány příklady, se kterými je možné setkat se v praxi, pomocí maticové hry.

KLÍČOVÁ SLOVA

konflikt, lineární programování, simplexová tabulka, teorie her, maticová hra, hra, hráč, rozhodovací situace

TITLE

Decision-making in conflict situations using a matrix game

ANNOTATION

This diploma thesis deals with solving conflict situations using a matrix game. The first part of the thesis is devoted to the definition of the concept of a conflict situation and decision-making models. Further there will be discussed linear programming, game theory and matrix game. In the second part, examples that can be encountered in practice are calculated using the matrix game.

KEYWORDS

conflict, linear programming, simplex table, game theory, matrix game, game, player, decision situation

OBSAH

SEZNAM ILUSTRACÍ

SEZNAM TABULEK

ÚVOD

Tato diplomová práce se věnuje problematice rozhodování v konfliktních situacích pomocí maticové hry. S konfliktními situacemi se člověk setkává v každodením životě, ať už se jedná o konflikty na pracovišti, v obchodě či v rodině. V těchto případech postačí k jejich řešení pouhý kompromis mezi oběma účastníky konfliktu. Existuje však mnoho situací, kde zdravý selský rozum nestačí a s rozhodnutím musí pomoci výpočty.

Na vysokých pracovních pozicích hraje rozhodování zásadní roli. Špatné rozhodnutí může negativně ovlivnit vývoj celé společnosti. V krajních případech lze hovořit i o fatálních důsledcích. Mohou nastat i rozhodnutí, která nepovedou ke ztrátám společnosti, ale ani k žádným posunům kupředu. Cílem manažerů by mělo být nalézat co nejefektivnější řešení situací, nikoli to nejjednodušší.

Cílem této práce je seznámit čtenáře s pojmy týkající se konfliktních situací, rozhodování, lineárního programování, teorie her a maticové hry. Následné představení příkladů z podnikové praxe, k jejichž řešení nepostačí pouhý selský rozum.

Práce je členěna do pěti kapitol. První tři se týkají teorie. V první kapitole jsou popsány konfliktní a nekonfliktní situace, rozhodovací problém a samotný proces rozhodování. Taktéž se zde hovoří o modelech rozhodování, kterými jsou například diskrétní modely rozhodování, vícekriteriální diskrétní modely rozhodování a vícekriteriální spojité modely rozhodování. Následně je tu znázorněno grafické schéma dělení rozhodovacích situací.

Druhá kapitola se věnuje modelu lineárního programování, pojmům souvisejícím se simplexovou tabulkou a teorií duality. Třetí kapitola se poté zabývá teorií her a maticovou hrou. V této části je popsána historie a vývoj teorie her, jsou zde vymezeny základní pojmy související s teorií her a samotná maticová hra. Na závěr jsou uvedeny základní modely konfliktů teorie her.

Zbývající kapitoly se zabývají řešením konfliktů pomocí lineárního programování. Ve čtvrté je popsán převod úlohy teorie her na úlohu lineárního programování. V poslední, páté, jsou řešeny příklady konfliktních situací, se kterými je možné setkat se v profesním životě. Jedná se například o konflikt mezi vedením společnosti a odborovým svazem, konflikt mezi dvěma společnostmi na trhu či mezi více uchazeči o jednu pracovní pozici. Tyto konflikty jsou řešeny pomocí simplexové metody, která je specifikována ve druhé kapitole.

1 KONFLIKTNÍ SITUACE A MODELY ROZHODOVÁNÍ

Konfliktním situacím lze ve společnosti předcházet. Může tomu tak být za pomoci celkové atmosféry či způsobu komunikace ve skupině lidí či podniku. Podle některých studií je známo, že muži mají větší sklon z konfliktních situací ustupovat. Může tomu tak být z důvodu předcházení dalšímu konfliktu. Naopak ženy se snaží jít konfliktům naproti, hovořit o nich a řešit je. Muži k hádkám přistupují spíše s logickým pohledem, naopak ženy projevují své emoce.

Iva Sehnalová (2015) ve své publikaci uvádí následujících pět zásad dobrého řešení konfliktu:

1. řešení je realistické, uskutečnitelné
2. pro obě strany konfliktu je přijatelné
3. vyřešením daného konfliktu se předchází jeho opakovanému objevení
4. přináší určité zisky a užitky všem účastníkům konfliktu
5. vyřešení problému je zásluhou všech účastníků

1.1 Konfliktní a nekonfliktní situace

Na začátku je zapotřebí definovat rozdíl mezi konfliktními a nekonfliktními situacemi. Do těchto situací se dostává zejména jedinec v okamžik, kdy se musí rozhodnout mezi dostupnými variantami.

a) Konfliktní situace

„Konfliktní situace jsou situace, ve kterých dochází ke střetu zájmů jednotlivých účastníků konfliktu." Konfliktní situace představují všechny situace, kdy je dosažení cíle jednoho účastníka omezeno úmysly a zájmy ostatních. V tomto případě je úkolem najít takové chování každého aktéra, které bude z pohledu ostatních pro všechny optimální. Při aplikaci v ekonomii se hovoří o nalezení strategie s maximálním ziskem. Může se však jednat také o minimální náklady či ztrátu. Optimální řešení, které je výsledkem, je v každém případě ovlivněno zájmy ostatních zúčastněných. Jedná se tak o výběr nejlepšího z dosažitelných cílů, nikoli o pouhou optimalizaci. Vybírá se tedy z řešení, která jsou přijatelná pro ostatní hráče. (Šubrt, 2019, s. 145)

Konflikty, kde se vyskytuje větší počet účastníků, se zabývá teorie her. Využívá se například při rozdělování výdajů na reklamu či při obsazování nových trhů.

b) Nekonfliktní situace

Pokud v dané situaci vystupuje pouze jeden racionální hráč jedná se o nekonfliktní rozhodovací situaci. Obecněji řečeno lze říci, že jde o rozhodování za jistoty. V tomto případě jsou známy budoucí stavy a taktéž jejich důsledky.

„Budeme předpokládat, že důsledek rozhodnutí x lze charakterizovat číslem M(x), a to tak, že účastník dává důsledku rozhodnutí x přednost před důsledkem rozhodnutí x', právě tehdy, když M(x) > M(x').“ To znamená, že si rozhodovatel vybírá takovou variantu, která je pro něj nejvýhodnější. (Maňas, 1974, s. 12)

1.2 Rozhodovací proces a rozhodovací problém

Rozhodovací proces je definován jako postup při řešení rozhodovacích problémů. Jde o problém s jedním a více variantami, jehož cílem je vybrání možnosti, která je pro rozhodovatele nejvýhodnější. (Šubrt, 2019, s. 116)

Pojem rozhodovací problémy obecně představuje odchylky mezi stavem žádoucím a stavem skutečným. Stav žádoucí obsahuje normy, standardy či plány. Většinou se jedná o diferenci nežádoucí, kdy je skutečný stav horší než stav požadovaný. Mnohdy může žádoucí stav vycházet i z minulých zkušeností. (Fotr, 2006, s. 17-18)

Prvky rozhodovacího procesu

Dle Jiřího Fotra (2006) rozhodovací proces obsahuje následující prvky:

a) Cíl rozhodování

Cíl rozhodování je konečný stav, kterého chce rozhodovatel dosáhnout. Požadované situace se dopracuje vyřešením rozhodovacího problému.

b) Kritéria hodnocení

Jedná se o kritéria, která si volí sám rozhodovatel, na základě svých subjektivních pocitů. Zvolená kritéria slouží k porovnávání jednotlivých variant mezi sebou, a k nalezení výhodné možnosti. Daná měřítka úzce souvisí se stanovenými cíli. Rozlišují se kritéria kvantitativní, která se dají vyjádřit číselně (například zisk, rentabilita) a kritéria kvalitativní, vyjádřená slovně (například dopady na životní prostředí). Kvantitativní kritéria se dále dělí na kritéria výnosového (zisk) a nákladového typu (náklady).

c) Subjekt a objekt rozhodování

Subjekt rozhodování neboli rozhodovatel je ten, který rozhoduje o variantě, která se bude realizovat. Může se jednat jak o jednotlivce, tak o skupinu osob. Je-li rozhodovatelem jedna osoba, jedná se o individuální subjekt rozhodování. V opačném případě jde o kolektivní subjekt rozhodování. Objektem rozhodování je oblast, ve které je daný problém definován. Jedná se o konfliktní situaci, kdy je zapotřebí vybrat právě jedno řešení ze všech možných. (Šubrt, 2019, s. 117)

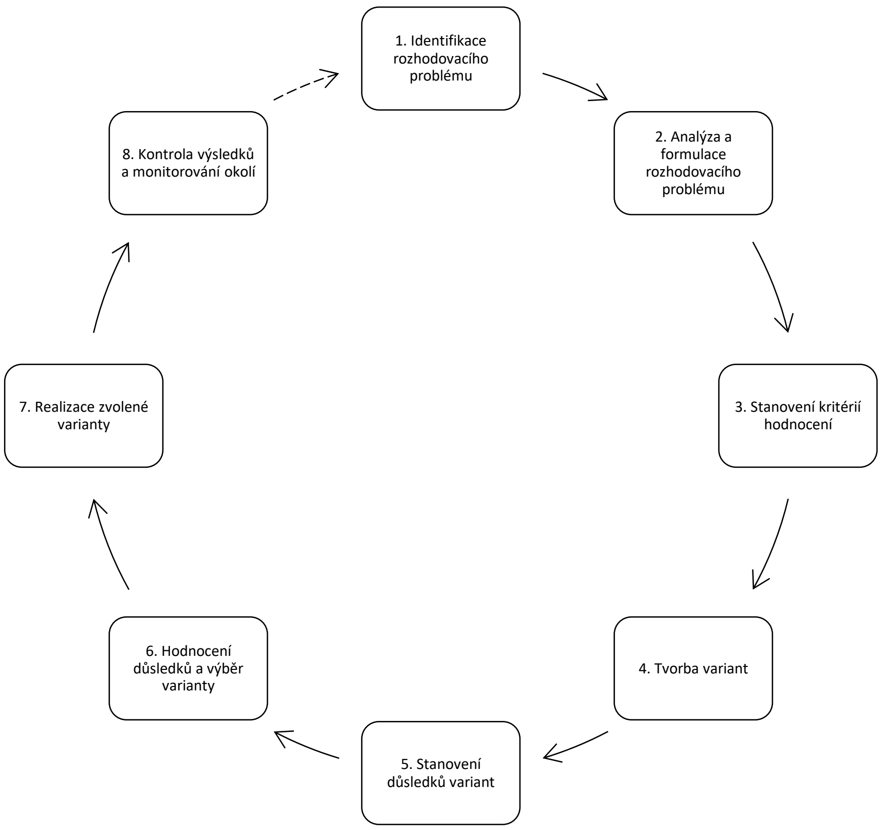
d) Varianty rozhodování a jejich důsledky

Varianty rozhodování představují kroky rozhodovatele, kterými se má dopracovat k vyřešení svého problému. Důsledky jsou předvídané dopady jednotlivých variant na objekt rozhodování. Dané dopady jsou vyjadřovány vždy vůči kritériím hodnocení.

e) Stavy světa

Stavy světa jsou taktéž označovány jako scénáře či rizikové situace. Představují budoucí vzájemně se vylučující situace, které mohou nastat při implementaci dané varianty. Mohou taktéž ovlivnit důsledky zvolené varianty k jednotlivým kritériím.

Obrázek 1: Průběh rozhodovacího procesu



Zdroj: vlastní zpracování dle (Fotr, 2006)

1.3 Modely rozhodování

Rozhodování je proces volby varianty, která vede ke splnění stanoveného cíle. Výběr je závislý na daných kritériích a jejich vzájemném porovnávání. Subjektem, který si vybírá z daných variant je rozhodovatel. Proces rozhodování je možný, pouze v případě existuje-li více možností. Výsledkem rozhodovacího procesu je rozhodnutí. Obsahem rozhodnutí je informace, která vyjadřuje požadovaný cíl. (Fiala, 2013, s. 10; Prukner, 2014)

1.3.1 Diskrétní modely rozhodování

Hlediskem pro diskrétní modely rozhodování jsou informace o stavech světa a důsledcích variant vzhledem k jednotlivým kritériím. (Fotr, 2006, s. 28)

Diskrétní model rozhodování dle Petra Fialy (2013, s. 11-12) lze zapsat ve tvaru:

$$f(a_j) \rightarrow max$$

$$a_j \in A = \{a_1, a_2, \dots , a_p)$$

a) Rozhodování za jistoty

Při rozhodování za jistoty existují úplné informace. Rozhodovatel tedy s jistotou ví, který stav světa nastane. Taktéž si je vědom důsledků, které budou jednotlivé varianty mít. (Fotr, 2006, s. 28) Ve výplatní matici při rozhodování za jistoty je pouze jeden sloupec stavu okolností, který je realizovatelný. Nejvýhodnější varianta se určuje podle velikosti výplaty. (Šubrt, 2019, s. 131)

b) Rozhodování při neurčitosti

Osobě, která se rozhoduje, nejsou známy jednotlivé stavy světa ani jednotlivé důsledky, které mohou nastat. Taktéž nezná ani to, s jakou pravděpodobností dané situace ve skutečnosti nastanou. (Veber, 2009, s. 87)

Rozhodovatel při svém rozhodování vychází z předpokladu, že existuje n možných náhodných stavů $S_1, S_2, \dots, S_n$. Avšak jejich pravděpodobnost není známa. Tato situace se dá modelovat pomocí matice, kde řádky odpovídají variantám $a_1, a_2, \dots, a_p$ a sloupce představují jednotlivé stavy, které mohou nastat $s_1, s_2, \dots, s_p$. Prvky v této matici a_{ij}, kde i = 1, 2,..,p, j = 1,2,…,n, odpovídají ohodnocení dopadů rozhodnutí a_i za předpokladu nastání situace s_j. Výběr nejlepší varianty závisí na různých principech, které zobrazují postoje rozhodovatele, a taktéž na míře jeho optimismu či pesimismu. (Fiala, 2013, s. 22)

Jedná se o *princip ekvivalentní pravděpodobnosti (Laplaceovo kritérium).* Pokud neexistují žádné informace o rozdělení pravděpodobností stavů, počítá se u všech stavů se stejnou pravděpodobností výskytu. Při využití toho principu platí, že v případě výplaty i ztráty jednotlivých alternativ bude vybrána vždy stejná alternativa. *Princip maximaxu* je založen na tom, že rozhodovatel je optimista a je ochoten riskovat. Taktéž předpokládá, že nastane stav, který je pro něj nejvíce příznivý. Tedy vybírá takovou variantu, která je pro něj maximalizační. V praxi to znamená, že výběr konečné varianty je určován největší hodnotou v matici. *Princip maximinu (Waldovo kritérium)* je typický pro konzervativního pesimistu. Ten vždy předpokládá, že nastane nejméně příznivý stav. Při výběru z jakékoli varianty je mu zajištěna nejmenší hodnota. Rozhodovatel vybírá tu variantu, která je pro něj ta nejlepší z nejhorších. Výběr konečné varianty je tak určen minimální hodnotou v řádcích, z nichž je vybírána hodnota největší. *Hurwitzovo pravidlo* je kombinací principu maximaxu a principu maximinu. Optimista očekává vždy ty nejlepší výsledky, naopak rozhodovatel pesimista předpokládá vždy to nejhorší. Při použití tohoto pravidla se bude konečný výsledek nacházet někde mezi oběma pohledy. *Savageovo kritérium* je založeno na koncepci ztracené příležitosti. Ztráty jsou chápány jako rozdíly mezi maximální výplatou a výplatami jednotlivých alternativ. Výsledkem je poté alternativa, jejíž maximální ztráta je co nejmenší. (Fiala, 2013, s. 22-23; Šubrt, 2019, s. 132-134)

c) Rozhodování při riziku

V tomto případě rozhodovatel zná všechny možné budoucí situace. Jsou mu známy taktéž důsledky jednotlivých variant při jednotlivých stavech světa a pravděpodobnosti, se kterými mohou tyto situace nastat. (Fotr, 2006, s. 28)

Při rozhodování za rizika se vychází z předpokladu, že existuje n možných náhodných stavů $S_1, S_2, \ldots, S_n$, jejichž pravděpodobnostní rozdělení p_j známe, $j = 1,2,\ldots,n$. Při praktickém výpočtu je matice stejná jako v případě rozhodování při neurčitosti. S rozhodováním za rizika je spojena *Bayesovská analýza*. Při této analýze se sestrojí matice ztrát *Z*. Při jejím sestavování se postupuje stejně jako u principu minimaxu ztráty při rozhodování za neurčitosti. Stanoví se ztráta, která se očekává, při znalosti pravděpodobnostních stavů. (Fiala, 1999, s. 26-27)

d) Víceetapové rozhodovací procesy

Principem víceetapových rozhodovacích procesů je posloupnost dílčích rozhodnutí. Cílem rozhodovatele je vybrat si ze všech možných posloupností tu, která ho dovede k nejlepšímu konečnému řešení. Víceetapové procesy se skládají ze dvou částí. První fází je konstrukce rozhodovacího stromu. Druhá část procesu obsahuje vyhodnocení rozhodovacího stromu. Grafické znázornění rozhodovací stromu znázorňuje větvení možností. (Fiala, 2013, s. 30)

1.3.2 Vícekriteriální diskrétní modely rozhodování

Vícekriteriální modely rozhodování předpokládají, že má rozhodovatel na výběr z mnoha modelů a metod, které mu pomohou nalézt jeho konečné, tedy optimální, řešení. V praxi se však při rozhodování využívá více kritérií. Větší množství měřítek napomáhá přiblížit se realitě a následně usnadňuje využití nalezeného řešení. Vícekriteriální modely rozhodování se skládají z variant, hodnotících kritérií a vazeb mezi nimi. Mnohdy se stává, že do modelu následně vstupuje dodatečná informace. Většinou se jedná o subjektivní kritérium, které vyjadřuje představy rozhodovatele. Při řešení těchto problémů určuje, který model využije k vyřešení svého problému. Druhým, kdo se rozhodování účastní, je analytik, který zpracovává informace obdržené od rozhodovatele a následně mu předkládá doporučení. (Fiala, 1999, s. 47-48)

a) Vícekriteriální hodnocení variant

Úlohy vícekriteriálního hodnocení jsou vždy zadány přesným výčtem variant *(A)*, seznamem kritérií *(F)* a hodnocením variant podle daných kritérií. Tyto prvky se zapisují do kriteriální matice, kde vyjadřují informace o hodnocení variant podle jednotlivých kritérií. Rozlišují se tři formy informací, a to kardinální, ordinální a relativní. Skutečné hodnoty, kterých dosahují jednotlivé varianty jsou informace kardinální. Pořadí dané varianty je informace ordinální. Relativní informace srovnává jednotlivé varianty mezi sebou podle jednotlivých kritérií. V praxi se předpokládá, že jsou všechna kritéria maximalizační.

Jednotlivé varianty se dělí na nedominovanou, ideální a bazální. V nedominované variantě neexistuje v množině všech variant žádná jiná, která je hodnocena lépe minimálně podle jednoho kritéria a ne hůře podle kritérií ostatních. Ideální varianta *(H)* dosahuje ve všech kritériích té nejlepší možné hodnoty. Naopak bazální varianta *(D)* dosahuje hodnot, které jsou nejhorší. (Fiala, 2013, s. 48-49)

b) Metody s aspiračními úrovněmi

V případě metod s aspiračními úrovněmi je od rozhodovatele požadováno, aby určil variantu, kterou upřednostní před jinou. Možnost, která dosáhne dané aspirační úrovně je akceptovatelná. Naopak ta, která aspirační úrovně nedosáhne se považuje za neakceptovatelnou. Rozhodovatel zpřesňuje aspirační úrovně do té doby, než dojde k výslednému kompromisu. *Konjunktivní metoda* volí právě akceptovatelné varianty, které splňují zadané aspirační úrovně. Naopak *disjunktní metoda* vybírá ty varianty, pro které platí, že alespoň jedno kritérium splňuje aspirační úroveň. *Metoda PRIAM* využívá heuristického prohledávání množiny variant. Pro přístupnou aspirační úroveň je dán počet variant, který je heuristickou informací. Rozhodovatel si sám vybere, jakým směrem bude prohledávání množiny variant prováděno. (Fiala, 1999, s. 50-53)

c) Metody s ordinální informací

Pokud se jedná o ordinální informace o kritériích, seřazují se jednotlivá kritéria od nejvíce důležitého po nejméně důležité. Mezi jednoduché postupy, které využívají ordinálních informací se řadí *lexikografická metoda*. Podle pořadí důležitosti jednotlivých kritérií se hodnotí jednotlivé varianty. Nevýhoda tohoto postupu je shledávána v tom, že se vždy zaměřuje pouze na jedno kritérium a nebere v potaz hodnoty dalších kritérií. *Metoda permutační* vychází z předpokladu, že jsou kritéria uspořádána podle důležitosti. Cílem je najít optimální uspořádání jednotlivých variant. Při použití tohoto postupu se využívají všechny permutace pořadí p variant, kterých je p!. Z tohoto důvodu se tato varianta používá pouze v okamžik, kdy je malý počet variant. Permutační metoda je využívána v případech, kdy jsou známy jednotlivé váhy kritérií. *Metoda ORESTE* ke svému využití požaduje výlučně ordinální informaci o kritériích a variantách. Rozhodovatel dodává k výpočtu úplné kvaziuspořádání kritérií a úplné kvaziuspořádání variant podle jednotlivých kritérií. Metoda se skládá ze dvou částí, kdy se první část zabývá určením vzdálenosti každé varianty podle každého kritéria od fiktivního počátku. Druhá část obsahuje preferenční analýzu. (Fiala, 1999, s. 60-66)

d) Metody s kardinální informací

Kardinální informace o kritériích jsou vyjadřovány pomocí vah. Váhy udávají informace o důležitosti jednotlivých kritérií. Čím je kritérium důležitější, tím je váha vyšší. Metod, které využívají kardinální informace o kritériích je mnoho. Mezi základní patří princip maximalizace užitku, princip minimalizace vzdálenosti od ideální varianty a princip vyhodnocování variant na základě preferenční relace.

Princip maximalizace užitku zahrnuje vytvoření hodnoty užitku, která se získává výběrem určité varianty. Rozpětí této hodnoty je mezi 0 a 1. Čím vhodnější je daná varianta podle kritéria, tím je hodnota užitku vyšší. Na závěr je konečná varianta ohodnocena celkovou hodnotou užitku. Ta se získá sloučením dílčích hodnot užitku jednotlivých kritérií, s použitím jejich vah. Princip maximalizace užitku tvoří metoda funkce užitku, metoda váženého součtu a metoda AHP. *Princip minimalizace vzdálenosti od ideální varianty* zahrnuje metodu TOPSIS.

Výsledkem tohoto principu je nalezení ideální varianty. Tato možnost se skládá z nejlepších hodnot, kterých dosahují jednotlivá kritéria. Řešení, tedy ideální varianta, je většinou hypotetická. *Princip vyhodnocování podle preferenční relace* se skládá z relací mezi dvojicemi variant vzhledem k jednotlivým variantám. Taktéž se sem zahrnují agregační procedury. Mezi metody, které jsou založeny na sestavování preferenčních relací patří metoda AGREPREF, třída metod ELECTRE, třída metod PROMETHEE a metoda MAPPAC. (Fiala, 2013, s. 86-122)

1.3.3 Vícekriteriální spojité modely rozhodování

Spojité vícekriteriální modely rozhodování nemají množinu variant vyjádřenou přímo soustavou omezujících podmínek. Tento soubor je vyjádřen pomocí několika kriteriálních funkcí, jejichž extrém se nachází na množině omezujících podmínek. Výsledkem spojitých vícekriteriálních modelů, je takové řešení, které vyhovuje soustavě omezujících podmínek. Zároveň však musí dosahovat co nejvyšších hodnot požadovaných kritérií. V takovémto případě se jedná o řešení nedominované. (Fiala, 2013, s. 13-14)

a) Model vícekriteriálního lineárního programování

Určení kritérií bývá obvykle subjektivní záležitostí, proto rozhodovatel určuje také dodatečné informace o důležitosti jednotlivých kritérií. Ona důležitost může být vyjádřena pomocí aspiračních úrovní, v ordinální formě pořadím důležitosti kritérií či v kardinální formě pomocí vah kritérií.

Řešením úloh vícekriteriálního lineárního programování je celá množina nedominovaných řešení, tedy jedná-li se o situaci, kdy nejsou známy žádné dodatečné informace. Pokud dodatečné informace existují, je výsledkem úlohy kompromisní řešení. Kompromisní řešení je závislé na preferencích rozhodovatele a také na postupu řešení problému. (Fiala, 1999, s. 14-15, 99)

b) Metody s informací a priori

Metody s informací a priori jsou založeny na předpokladu, že je rozhodovatel na začátku svého rozhodování schopen určit preferenční informaci. Tato informace poté napomáhá řešit úlohu vícekriteriálního rozhodování stejně, jako úlohy s jedním kritériem. (Fiala, 2013, s. 14)

c) Metody s průběžnými informacemi

V případě metod s průběžnými informacemi je nutné předávání informací mezi analytikem a rozhodovatelem o jeho preferencích během řešení problému. Tyto podrobnosti o svých preferencích podává pouze na konkrétní část problému, nikoli na celý. Metody s průběžnými informacemi se skládají z výpočetní a rozhodovací fáze. Rozhodovací fáze je určena k diskusi o dosaženém průběžném řešení. Pokud dosažené výsledky rozhodovateli nevyhovují, musí upřesnit své preference. (Fiala, 2013, s. 139-140)

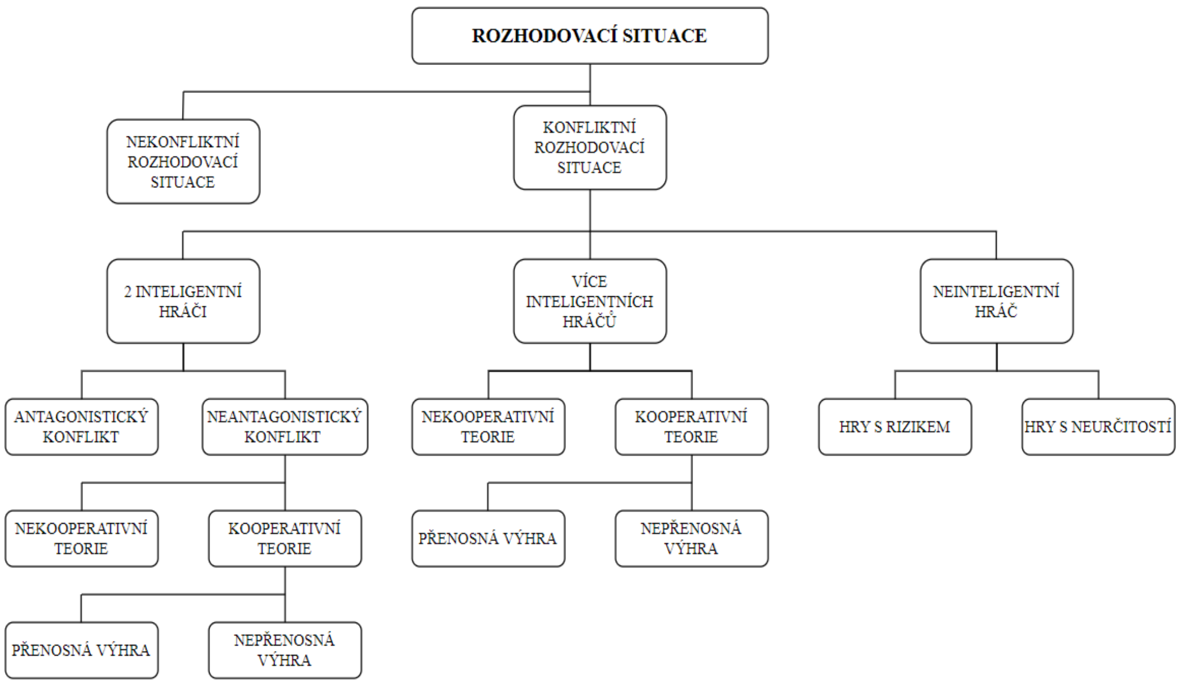
d) Metody s informacemi a posteriori

Metody s informací a posteriori jsou založeny na principu nedominovanosti. Nejprve se musí nalézt množina variant, které nejsou dominantní. Poté je díky dodatečné preferenční informaci nalezeno řešení konečné. Preference si rozhodovatel tedy volí až dodatečně, nikoli na začátku jak bývá zvykem. (Fiala, 1999, s. 15)

1.4 Dělení rozhodovacích situací

Jedno z možných rozdělení rozhodovací situací je uvedeno na následujícím obrázku.

Obrázek 2: Schéma rozhodovacích situací



Zdroj: vlastní zpracování dle (Volek, 2010, s. 100)

Základní dělení rozhodovacích situací je na nekonfliktní a konfliktní. Konfliktní rozhodovací situace se dále rozdělují na hry se dvěma inteligentními hráči, na hry s více inteligentními hráči a na hry s neinteligentním hráčem. U prvních zmíněných se rozlišuje antagonistický a neantagonistický charakter her. Neantagonistický konflikt se dále dělí na nekooperativní teorie a kooperativní teorie, jež se rozlišují na hry s přenosnou či nepřenosnou výhrou. Stejné dělení jako je u neantagonistických konfliktů je použito u her s více inteligentními hráči. Hry, kde vystupuje neinteligentní hráč, se dělí na hry s rizikem a hry s neurčitostí. Některé uvedené hry jsou v práci popsány.

2 LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

První myšlenky spojené s lineárním programováním lze najít na konci 18. století v publikacích, které sepsal J. Fourier. Na přelomu 19. a 20. století maďarský matematik B. Farkas sestavil teorii soustav lineárních nerovností, jež se stala jednou ze základů teorie lineárního programování. (Plesník, 1990, s. 29)

Zprvu se zkoumané problémy týkaly plánování střídání pěstovaných plodin, plánování rozsáhlých vojenských akcí či směřování lodí mezi přístavy. (Dantzig, 1963, s. 1) Sovětský vědec L. V. Kantorovič roku 1939 napsal článek s názvem „Matematické metody v organizaci a plánování výroby“, který je považován za první práci o lineárním programování. Ve své publikaci formuloval některé optimalizační problémy řízení výroby, které byly ve tvaru úloh lineárního programování. K těmto problémům navrhl i metodu jejich řešení. O dva roky později se anglický vědec F. L. Hitschcock zabýval optimalizačními problémy, jež vedly k řešení dopravní úlohy. Největších úspěchů a zásluh v oblasti teorie lineárního programování však dosáhl G. B. Dantzig spolu s R. Hurwitzem a T. S. Koopmansem. Společně zformulovali všeobecnou úlohu lineárního programování a vyvinuli simplexový algoritmus na její řešení. (Linda, 2016, s. 10) V roce 1975 byli L. V. Kantorovič spolu s T. S. Koopmansem oceněni za zásluhy o rozvoj lineárního programování a jeho aplikaci v ekonomii Nobelovou cenou ze ekonomii. (Plesník, 1990, s. 29)

2.1 Model lineárního programování

Při řešení rozhodovacích problémů si rozhodovatel musí určit omezující podmínky, v rámci kterých se musí nalézt optimální řešení. Jestliže je pro formulování problému využito pouze lineárních funkcí, rovnic a nerovnic bude se jednat o model lineárního programování. Taktéž může jít o lineární optimalizační model, který je nejvíce používaným modelem optimalizačních úloh. Přestože se jedná o modely, které udávají výsledky s určitou mírou nepřesnosti, dávají rozhodovateli důležité informace pro jeho konečné rozhodnutí. Modely lineárního programování jsou nejvyužívanější metodou při rozhodování, z důvodu jejich jednoduchosti a široké oblasti jejich využití. (Šubrt, 2019, s. 9)

2.1.1 Základní pojmy lineárního programování

Bohdan Linda a Josef Volek (2016, s. 7-21) ve své knize „Lineární programování“ definují následující základní pojmy, sloužící pro pochopení teorie lineárního programování.

- ***N*-rozměrný reálný vektor** je *n*-tice reálných čísel, která je uspořádaná. Značí se $(v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$.
- ***N*-rozměrný reálný vektorový prostor** je množina všech *n*-rozměrných reálných vektorů. V této množině jsou zahrnuty i obvyklé operace s vektory, jako je sčítání a násobení vektorů reálným číslem. Tento prostor se označuje jako E_n.
- Množina, která je podmnožinou *n*-rozměrného vektorového prostoru se nazývá **konvexní množina**.
- *„**Konvexní kombinace** vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$, $k=1,2,\ldots,n$, patřících vektorovému prostoru E_n, budeme nazývat takovou jejich lineární kombinaci $a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_kv_k$, jestliže $\alpha_i \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{k} \alpha i = 1$.“*
- **Krajní bod konvexní množiny** je takový bod, který nelze vyjádřit jako konvexní kombinaci dvou jiných různých bodů množiny. Příkladem množiny s neomezeným počtem krajních bodů je kruh. Druhem množiny s omezeným počtem krajních bodů je obdélník.
- **Konvexní polyedr** je každá omezená uzavřená množina, která má konečný počet krajních bodů.
- **Přípustným řešením úlohy lineárního programování** je takový vektor *x*, jehož souřadnice splňují omezující podmínky.
- **Optimálním řešením úlohy lineárního programování** je takový vektor x_o, který minimalizuje účelovou funkci a splňuje omezují podmínky.

Pojem **konvexní obal**, představuje obal konvexní množiny, který se rovná množině všech konvexních kombinací bodů z dané konvexní množiny. (Plesník, 1990, s. 36)

Další základní pojmy vysvětluje ve své knize P. Venkataraman (2002, s. 113).

- Množina hodnot v základním řešením, které mají nenulové hodnoty se nazývají **základní proměnné**.
- Proměnné, které mají nulovou hodnotu se nazývají **nebazické proměnné**.

2.1.2 Složky modelu lineárního programování

Tomáš Šubrt (2019, s. 15-17) ve své knize uvádí čtyři základní komponenty modelu lineárního programování.

a) Proměnné

Prvním krokem při sestavování modelu lineárního programování je definování rozhodovacích proměnných. V některých případech nejsou jednotlivé proměnné jasně formulovány, proto se musí na začátku správně a účelně stanovit. Jestliže je správně vymezen cíl rozhodovacího problému, existují přímé odkazy na procesy, jež by měly být proměnnými. Velice důležitou součástí proměnné je jednotka, ve které se bude po čas řešení problému proměnná vyjadřovat.

b) Omezující podmínky

Omezující podmínky slouží k vymezení přípustných kombinací procesů. Pro stanovení omezujících podmínek jsou využívány pouze lineární rovnice či nerovnice. Levou stranu rovnice tvoří skalární součin hodnot proměnných a technicko−ekonomických koeficientů. Na pravé straně se pak nachází konstanta, která udává velikost kapacity zdroje či stanoveného požadavku. Takovéto omezující podmínky se též označují jako *exogenní*. Ty se dělí na kapacitní, požadavkové a podmínky určení. Pomocí kapacitních podmínek se znázorňuje nemožnost vyčerpání většího množství zdroje, než který je k dispozici. Zapisují se jako $\sum_{j=1}^{n} aijxj \ \leq bi$. Podmínky požadavkové vyjadřují potřebu zajistit alespoň dané množství produkce. Formulují se jako $\sum_{j=1}^{n} aijxj \ \geq bi$. Poslední zmíněné podmínky určení, udávají velikost výstupu, kterého je nutné dosáhnout. Tedy $\sum_{j=1}^{n} aijxj = bi$. Tento typ omezujících podmínek se téměř nevyužívá, protože rozhodovací prostor úlohy zcela omezuje. Existují taktéž podmínky *endogenní*. Vyznačují se tím, že pokud se převedou všechny proměnné z pravé strany na levou, absolutní člen na straně pravé je roven nule.

c) Účelová (kriteriální) funkce

Účelová funkce znázorňuje cíl řešení problému. Účelová funkce může být zadána jako minimalizační. Vynásobením hodnotou -1 se změní na maximalizační. Důležitost je také přikládána tomu, aby funkce byla vyjádřena ve správných jednotkách. Při zápisu kriteriální funkce se využívá cenový koeficient c_j, který ohodnocuje kvalitu každého procesu. Vyjadřuje o kolik se změní celková hodnota sledovaného kritéria, když se změní jedna jednotka daného procesu. Účelová funkce se vyjadřuje jako $z = \sum_{j=1}^{n} cjxj \ \rightarrow MAX$.

d) Podmínky nezápornosti proměnných

Podmínky nezápornosti proměnných zaručují, že nalezené řešení lze snadno interpretovat. Pokud je řešením úlohy záporné číslo, z matematického hlediska je to v pořádku. V případě, že se jedná například o počet kusů výrobku, je to v praxi nerealizovatelné. Další důvod stanovení podmínek nezápornosti je výpočetní. Z hlediska výpočtu modelu lineárního programování pomocí simplexové metody, je podmínka nezápornosti nutností. Bez jejího stanovení by se simplexový algoritmus nedal použít.

2.3 Simplexová metoda

Základní metodou pro řešení úloh lineárního programování je simplexová metoda. Americký matematik G. B. Dantzig ji navrhl v roce 1947, jako způsob řešení úloh lineárního programování, které byly formulovány pro potřeby letectva USA. (Plesník, 1990, s. 107)

2.3.1 Pojmy související se simplexovou metodou

Před prvním použitím simplexové metody je zapotřebí znát následující pojmy, které s touto metodou souvisejí. Ve své publikaci je uvádí B. Linda (2016, s. 20):

- ***„Bazické řešení soustavy lineárních rovnic** nazýváme takový vektor x, který je řešením této soustavy, ve kterém volené proměnné (souřadnice) jsou nuly, přičemž vektor p_j indexově odpovídající zbylým (počítaným) proměnným jsou lineárně nezávislé.“*
- **Bazické proměnné x_j** odpovídají vektorům p_j, které jsou lineárně nezávislé a jejich množství je m. Na tyto vektory se lze dívat jako na bázi prostoru E_m.
- V případě, že bazické řešení obsahuje méně než *m* nenulových prvků jedná se o **degenerované řešení.**

2.3.2 Podmínky pro použití simplexové metody

Pro použití simplexové metody je zapotřebí, aby matematický zápis úlohy lineárního programování splňoval dvě následující podmínky. Vektor pravých stran musí obsahovat pouze nezáporné hodnoty. Pokud tomu tak není, postačí vynásobit celou omezující podmínku hodnotou -1. Druhou podmínkou pro použití simplexové metody je kanonický zápis matice soustavy. (Šubrt, 2019, s. 35)

Cílem většiny úloh lineárního programování je účelovou funkci maximalizovat. **Kanonický tvar** však předpokládá, že je funkce minimalizační. Proto je zapotřebí převod z maximalizační na funkci minimalizační. Převod spočívá v tom, že se vytvoří nový model úlohy lineárního programování lišící se od toho původního pouze účelovou funkcí. Nová účelová funkce se získá pouhou změnou znamének všech koeficientů na opačná. (Linda, 2016, s. 52) Další podmínkou pro kanonický tvar je zápis omezujících podmínek ve tvaru rovnic, protože obvykle jsou zadávány ve tvaru nerovnic. Tento převod spočívá v přidání doplňkové proměnné do každé omezující podmínky, vyjádřené pomocí nerovnice. Pokud se jedná o nerovnici typu ≤ doplňková proměnná se přičítá k levé straně omezující podmínky, a je označována symbolem *d* s indexem odpovídajícím pořadovému číslu podmínky. Jedná-li se o nerovnost typu ≥ doplňková proměnná se od levé strany podmínky odečte. Označuje se stejným způsobem jako v předchozím případě, tedy symbolem *d* s indexem odpovídajícím pořadovému číslu omezující podmínky. (Šubrt, 2019, s. 36)

2.3.3 Simplexová tabulka

Do prvního řádku simplexové tabulky se zapisují hodnoty všech proměnných, o řádek níže pak jejich názvy a názvy doplňkových proměnných. Poslední řádek je věnován testu optimality.

V prvním sloupci je číslo řádku. Ve druhém sloupci jsou bazické vektory, které odpovídají zkoumanému bazickému řešení. Třetí sloupec obsahuje hodnoty účelové funkce. Indexy těchto hodnot odpovídají pořadí jednotlivých bazických vektorů. Čtvrtý sloupec tvoří vektor prvých stran.

Tabulka 1: Obecná simplexová tabulka

i	**Báze**	c_h	x_h	c_1	c_2	…	c_j	…	c_n
				$\mathbf{p_1}$	$\mathbf{p_2}$		$\mathbf{p_j}$		$\mathbf{p_n}$
1	$\mathbf{p_{i_1}}$	$\mathbf{c_{i_1}}$	$x^h_{i_1}$	p_{11}	p_{12}		p_{1j}		p_{1n}
2	$\mathbf{p_{i_2}}$	$\mathbf{c_{i_2}}$	$x^h_{i_2}$	p_{21}	p_{22}		p_{2j}		p_{2n}
..									
i	$\mathbf{p_{i_i}}$	$\mathbf{c_{i_i}}$	$x^h_{i_i}$	p_{i1}	p_{i2}		p_{ij}		p_{in}
..									
m	$\mathbf{p_{i_m}}$	$\mathbf{c_{i_m}}$	$x^h_{i_m}$	p_{m1}	p_{m2}		p_{mj}		p_{mn}
$z_j - c_j$			$f(x_h)$	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$		$z_j - c_j$		$z_n - c_n$

Zdroj: vlastní zpracování dle (Linda, 2016, s. 37)

2.3.4 Maticový zápis simplexové tabulky

Simplexovou tabulku lze popsat také pomocí maticového zápisu.

Tabulka 2: Maticový zápis simplexové tabulky

$\boldsymbol{B_h^{-1}b}$	$\boldsymbol{B_h^{-1}A}$
$\boldsymbol{c_{B_h}^T B_h^{-1} b}$	$\boldsymbol{c_{B_h}^T B_h^{-1} A - c^T}$

Zdroj: vlastní zpracování dle (Linda, 2016, s. 45)

Symboly použité v tabulce maticového zápisu představují následující:

- $\boldsymbol{B_h}$ označuje matici, která je sestavena z původních souřadnic vektorů tvořících bázi v *h*- té iteraci simplexového algoritmu. Jedná se taktéž o matici přechodu mezi bázemi β_1 a β_h,
- Vektor bazických souřadnic, které jsou z výchozího bazického řešení se značí písmenem $\boldsymbol{b}$,
- $\boldsymbol{A}$ je matice soustavy,
- $\boldsymbol{c_{B_h}}$ označuje sloupcový vektor, který je sestaven z koeficientů účelové funkce. Indexy daných koeficientů odpovídají vektorům, z nichž je sestavena báze β_h,
- $\boldsymbol{B_h^{-1}}$ je inverzní matice k matici přechodu B_h,
- Bazické souřadnice bazického řešení v *h*-té iteraci jsou označeny $\boldsymbol{B_h^{-1}b}$,
- $\boldsymbol{B_h^{-1}A}$ jsou souřadnice vektorů $\boldsymbol{p}_j$ vzhledem k bázi β_h,
- Hodnota účelové funkce je vyjádřena jako $\boldsymbol{c_{B_h}^T B_h^{-1} b}$,
- V posledním poli jsou vyjádřeny rozdíly $z_j - c_j$, které se v tabulce označují $\boldsymbol{c_{B_h}^T B_h^{-1} A - c^T}$. (Linda, 2016, s. 45-46)

2.3.5 Algoritmus simplexové tabulky

Algoritmus simplexové metody se skládá ze čtyř základních kroků:

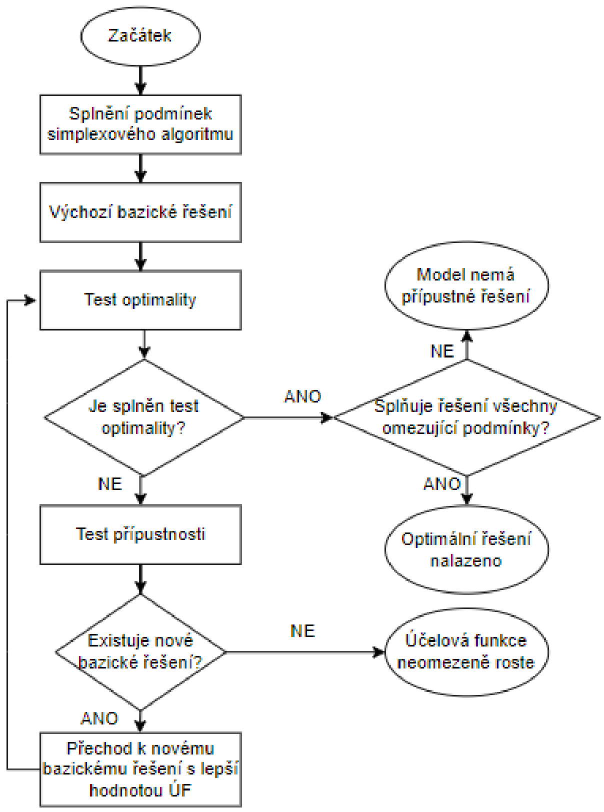
1. Splnění podmínek, které jsou nutné pro aplikaci simplexového algoritmu. Viz kapitola 2.3.2 Podmínky pro použití simplexového algoritmu.
2. Druhým krokem je test optimality zkoumaného řešení. Cílem je zjistit, jestli současná hodnota účelové funkce pro dané bazické proměnné je nejlepší nebo zda existuje jiná kombinace bazických proměnných, která zajistí lepší hodnotu účelové funkce. Řešení je optimální v případě, že platí $z_j - c_j \leq 0$, za předpokladu j = 1, 2, .., n. Pokud toto platí, je nalezeno řešení a algoritmus končí.
3. Test přípustnosti obsahuje určení vektoru, který z báze vystupuje a vektoru, který do báze vstupuje. Vektor, jež do báze vstupuje se označuje $\boldsymbol{p_k}$ a odpovídá maximálnímu rozdílu $z_k - c_k = \max_j(zj - cj)$. Pro vektor, který z báze vystupuje, platí $\frac{x_{i_l}^h}{p_{lk}} = \min_{p_{ik}>0} \frac{x_{i_i}^h}{p_{ik}}$. Tento vektor se označuje jako $\boldsymbol{p_l}$, protože leží v řádku l.
4. Posledním krokem je přechod k novému bazickému řešení. Řádek, ve kterém se nachází proměnná, která je vystupující z báze, se označuje jako klíčový. Sloupec, který obsahuje

proměnnou, která do báze vstupuje, se nazývá klíčový sloupec. Průsečík klíčového řádku a klíčového sloupce určuje klíčový prvek.

Poté dochází k transformaci simplexové tabulky. Prvky nacházející se v l-tém řádku (tedy vektor vystupující z báze) se transformují pomocí vzorce $p'_{lj} = \frac{p_{lj}}{p_{lk}}$, kdy *j* nabývá hodnot od 0 do n. Ostatní prvky simplexové tabulky se přepočítávají podle vzorce $p'_{ij} = p_{ij} - \frac{p_{lj}}{p_{lk}} p_{ik}$. Z transformovaných hodnot vzniká nová simplexová tabulka a algoritmus se opakuje.

5. V moment kdy jsou všechny rozdíly $z_j - c_j \leq 0$ je nalezeno optimální řešení úlohy. (Šubrt, 2019, s. 35-42; Linda, 2016, s. 37-39)

Obrázek 3: Vývojový diagram simplexového algoritmu



Zdroj: vlastní zpracování dle (Šubrt, 2019, s. 35)

Výsledky řešení modelu

Model lineárního programování může nabývat čtyř možných řešení. Tyto výsledky je možné poznat z konečné simplexové tabulky.

a) model nemá žádné přípustné řešení,
b) hodnota účelové funkce může neomezeně růst,
c) model má právě jedno optimální řešení,
d) model má nekonečně mnoho optimálních řešení. (Šubrt, 2019, s. 42)

2.4 Teorie duality

Princip teorie duality je založen na předpokladu, že ke každé primární úloze lineárního programování lze přiřadit duální úlohu. Tyto úlohy jsou vzájemně velice úzce propojeny, protože obvykle vyřešení jedné úlohy znamená zároveň vyřešení úlohy druhé. (Turzík, 1999, s. 53) Vztah, který je mezi primární a duální úlohou se nazývá reflexivní. (Šubrt, 2019, s. 50)

Pomocí maticového zápisu, lze principy duálně sdružených úloh zapsat následovně:

Primární úloha:	Optimalizujete	$\mathbf{c}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{x}$
	za podmínek	$\mathbf{A}\boldsymbol{x}\ R\ \mathbf{b}$
		$\boldsymbol{x}\ R\ \mathbf{0}$
Duální úloha:	Optimalizujete	$\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{b}$
	za podmínek	$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}\ R\ \mathbf{c}$
		$\boldsymbol{y}\ R\ \mathbf{0}$

kde *R* může být některé z relačních znamének ≤, ≥ nebo =.

2.4.1 Konstrukce duálního modelu

Tomáš Šubrt (2019, s. 51) ve své publikaci uvádí univerzální postup pro sestavování duálních modelů, který se skládá ze čtyř základních kroků.

1. Omezující podmínky duálního modelu jsou zobrazeny pomocí proměnných primárního modelu. Omezující podmínky primárního modelu jsou vyjádřeny proměnnými duálního modelu. V případě, že má primární model *m* omezujících podmínek a *n* proměnných, znamená to, že duální model bude mít *n* omezujících podmínek a *m* proměnných. Proměnné v duálním modelu jsou označovány $\mathbf{y}_i$. Při sestavování duálního modelu je zapotřebí transponovat matici soustavy A.
2. Při sestavování duálního modelu se ve druhém kroku určí vektor pravých stran. Vektor bude obsahovat *n* složek, kterým budou odpovídat cenové koeficienty primárního modelu.

3. Následně se určí vektor cen duálního modelu. Tento vektor se bude skládat z *m* složek, kterým bude odpovídat vektor pravých stran primárního modelu.
4. Na závěr se určí směr optimalizace duálního modelu. V případě, že primární model je minimalizační, bude duální model maximalizační, a naopak. Účelová duální funkce je označována symbolem ***f***.

2.4.2 Základní věty o dualitě

Mezi primární a duální úlohou existují vztahy, které jsou definovány následujícími větami.

Slabá věta o dualitě

„Nechť primární úloha je minimalizační a nechť ***x*** *je libovolné přípustné řešení primární a* ***y*** *libovolné přípustné řešení duální úlohy. Potom pro hodnoty účelových funkcí platí:* $\boldsymbol{y^T b} \leq \boldsymbol{c^T x}$. *“*

Silná věta o dualitě

1. *„Jestliže některá z dvojice duálně sdružených úloh má optimální řešení, potom má optimální řešení i druhá úloha a extrémní hodnoty obou účelových funkcí jsou si rovny.“*
2. *„Jestliže některá z dvojice duálně sdružených úloh má přípustné řešení, ale její účelová funkce není omezená, druhá úloha nemá přípustné řešení.“*
3. *„Jestliže některá z dvojice duálně sdružených úloh nemá přípustné řešení, pak druhá úloha buď nemá přípustné řešení, nebo přípustné řešení má, ale hodnota účelové funkce není omezena.“*

Věty o komplementaritě

1. *Nechť* $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *je přípustné řešení primární a* $y^T = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *duální úlohy. Tato řešení jsou optimální tehdy a jen tehdy, jestliže pro* $i = 1, 2, \ldots, m$ *a* $j = 1, 2, \ldots, n$ *platí:*

$$\text{když } x_i > 0, \text{ tak potom } a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m = c_j$$

$$\text{když } a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m < c_j. \text{ tak potom } x_j = 0$$

$$\text{když } y_i > 0, \text{ tak potom } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{inj}x_n = b_i$$

$$\text{když } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{inj}x_n < b_i, \text{ tak potom } y_i = 0$$

2. *Nechť primární i duální úloha mají přípustná řešení. Potom existují taková optimální řešení* $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *a* $y_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ *primární a duální úlohy, že platí:*

$$a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \ldots + a_{in}x_n^0 > b_i \leftrightarrow y_i^0 = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$a_{1j}y_1^0 + a_{2j}y_2^0 + \ldots + a_{mj}y_m^0 < c_i \leftrightarrow x_j^0 = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(Linda, 2016, s. 61-66)

3 TEORIE HER A MATICOVÁ HRA

Lineární programování lze aplikovat pomocí teorie her. *„Teorie her je ekonomická vědní disciplína, která se zabývá studiem konfliktních situací."* Principem teorie her je zkoumání rozhodování v konfliktních situacích, kterými jsou nejčastěji různé společenské hry. (Dlouhý, 2009, s. 7)

Původním předmětem teorie her byly pouze salónní hry, kterými jsou šachy, dáma či poker. V současné době se již nejedná pouze o společenské hry, ale především o konfliktní situace mezi jedinci, armádami, státy či podniky. Své uplatnění teorie her našla také v oblasti politologie, ekonomie, průmyslu, obchodu, služeb či biologie. Z toho vyplývá, že využití teorie her je velice různorodé.

3.1 Historie a vývoj teorie her

Počátky teorie her sahají do Anglie do roku 1713. James Waldegrave přišel s metodou, díky které hráč vítězil ve hře „Le Her". Jednalo se o původní karetní hru pro dva hráče s 52 kartami, jež měla mnoho společných znaků s moderní teorií her. Získané znalosti z použití této metody se však Waldegravovi nepodařilo aplikovat v žádné jiné situaci.

První základy pro samotnou teorii her položil A. Cournot v roce 1838. Jeho práce se zabývala stanovením rozsahu výroby na trhu, na němž vystupují pouze dvě konkurenční firmy. V ekonomii se tato situace označuje jako duopol. Současná teorie her začala vznikat až v první polovině 20. století v dílech Ernsta Zermela (1913), Émile Borela (1921) a Johna von Neumanna (1928). (Dlouhý, 2009, s. 7-8) É. Borel ve své publikaci dokázal popsat souvislosti mezi karetními hrami a reálnými situacemi. Zároveň přišel s novým přístupem k hraní her, kdy je zapotřebí hrát tak, aby bylo minimalizováno riziko prohry.

Jako vědní disciplína se teorie her dostala do povědomí ekonomie a společenských věd až v roce 1944. Tento vzestup byl zapříčiněn knihou *„Theory of Games and Economic Behavior"* Johna von Neumanna a Oskara Morgensterna. Toto dílo se následně stalo základním kamenem pro teorii her a ustanovilo tak novou ekonomickou vědní disciplínu. Jedním z přínosů bylo upozornění na využití technicko-herních modelů, které bylo možné využít v oblasti ekonomických a rozhodovacích procesů. (Dlouhý, 2009, s. 7-8)

Velkým milníkem pro teorii her bylo udělení Nobelovy ceny roku 1994 Johnu Nashovi, Johnu C. Harsanyimu a Reinhradu Seltenovi za analýzu rovnováhy v teorii nekooperativních her.

O jedenáct let později byla udělena další Nobelova cena za ekonomii za využití teorie her. Toto ocenění získali Thomas C. Schelling a Robert J. Aumann za jejich přínos v problematice konfliktů a spolupráce aplikací teorie her.

3.2 Základní pojmy teorie her

Tomáš Šubrt (2019, s. 146-148) ve své publikaci uvádí následující pojmy související s teorií her.

Inteligentní a neinteligentní hráči

Každý, kdo se účastní konfliktu, je nazýván hráčem. Nejedná se však o konkrétní osobu, ale spíše o komplexní pojetí určitých zájmů a cílů. V praxi se jednotliví hráči označují čísly nebo písmeny. Pokud jsou hráči do hry zainteresováváni, hrají tak, aby ve hře zvítězili. Jejich cílem je maximalizace výplatní funkce. (Dlouhý, 2009, s. 8) Tito hráči jsou označováni za inteligentní, taktéž za racionální. Naopak hráče neinteligentní, kteří jsou nazýváni jako hráči neracionální, výsledek hry vůbec nezajímá. Ve hře vystupují pouze jako náhodný mechanismus, který má za úkol ovlivňovat výsledky hráčů inteligentních. Někdy jsou pojmenováváni taktéž jako příroda.

Hra

Hra je modelem konfliktní situace. Popisuje nejen účastníky hry a jejich zájmy. Obsahuje taktéž pravidla, podle nichž se konfliktní situace řídí, způsoby jejího řešení a soubor možných výsledků. Jestliže se střet neopakuje, hra se skládá z jediného kola, neboli partie. Pokud se situace opakují, může mít hra několik kol.

Podle počtu hráčů se hry mohou rozdělovat na hry dvou hráčů a hry více hráčů. Z jiného pohledu se hry člení na hry kooperativní (koaliční) či nekooperativní (nekoaliční).

Strategie

Jako strategie hráče je označován jeho způsob jednání v průběhu jedné partie hry. Prostor (množina) strategií se skládá ze všech možných kombinací jeho chování. Jedná-li se o množiny konečné, hovoří se o hrách konečných. O hry nekonečné jde v případě, je-li alespoň množina jednoho hráče nekonečná.

Strategie taktéž představuje posloupnost jednotlivých kroků hráče v průběhu hry. Krok, také označován jako tah, je částí hry. Je to akce v určitý okamžik v průběhu hry. Klasické modely teorie her mají za to, že strategie jednotlivých hráčů jsou ucelený soubor jejich chování. To znamená, že od okamžiku, kdy si hráč vybere strategii, nemůže své jednání měnit.

Výplatní funkce

„Platba neboli výplata hry je výsledek hry jednotlivých hráčů v závislosti na zvolených strategiích.“ V mnoha případech výplata představuje zisk hráče. Při této závislosti bude hráč volit takovou strategii, při které je jeho zisk maximální. Každému z hráčů je přiřazena výplatní funkce, která každé kombinaci strategie přiřadí velikost výplaty, jež má být hráči vyplacena. Cílem každého hráče je vybrat si takovou strategii, se kterou si zajistí v konkurenci ostatních, co nejlepší výsledek.

Pro lepší pochopení výše popsaných pojmů se uvádí hra šachy. Při této hře, může každý hráč vytvářet své strategie tahů. Počet jednotlivých kroků je konečný, protože je konečný počet polí i figur šachovnice, které jsou určeny k pohybu. Tato hra je velice rozsáhlá, protože počet strategií a kombinací je obrovský. Jedná se o antagonistický konflikt, neboť vyhrát může pouze jeden hráč. Hra se ve většině případů opakuje, proto se skládá z několika partií. Strategie jednotlivých hráčů se skládají z typu zahájení, střední hry, ukončení a jednotlivých tahů. Hráči šachu si jednotlivé kroky v mnoha případech během hry zapisují.

3.3 Modely konfliktního rozhodování v teorii her

Publikace autorů se v klasifikaci modelů konfliktního rozhodování neshodují. Pro tuto práci bylo vybráno následující dělení:

a) antagonistické / neantagonistické hry dvou hráčů,
b) hra v normálním tvaru / hra v rozvinutém tvaru,
c) hry s nulovým / konstantním / nekonstantním součtem.

V případě her, kterých se účastní dva hráči se používá níže uvedené značení (Fiala, 2013, s. 186):

- X je prostor strategií 1. hráče,
- Y je prostor strategií 2. hráče,
- $x \in X$ je strategie 1. hráče,
- $y \in Y$ je strategie 2. hráče,
- $f_1(x,y)$ je výplatní funkce 1. hráče,
- $f_2(x,y)$ je výplatní funkce 2. hráče.

3.3.1 Antagonistické a neantagonistické hry dvou hráčů

Jedním z rozdělení je rozlišení her s antagonistickým a neantagonistickým charakterem. Tyto hry se liší přístupem účastníků k výhře a sledováním individuálních či kolektivních zájmů vyhrát.

a) Antagonistické hry dvou hráčů

Antagonistický konflikt je typický vystupováním dvou inteligentních hráčů, kteří si po výběru svých strategií rozdělí pevnou částku. Výše výplaty však nezávisí na tom, jaké učinili rozhodnutí. Matematicky je antagonistický konflikt vyjádřen pomocí hry v normální stavu s konstantním součtem. (Maňas, 1991, s. 28)

V případě konfliktní situace s antagonistickým charakterem dosažení cíle jednoho hráče znamená zamezení pozitivnímu výsledku hry ostatním. Úspěch hráče je tedy možný pouze na úkor úspěchu ostatních. Úmyslem hráče je svého protihráče určitým způsobem poškodit. (Šubrt, 2019, s. 145-146)

Pro hry s antagonistickou povahou platí, že čím více jeden hráč získá, tím více druhý ztratí. Z tohoto tvrzení vyplývá, že zisk jednoho hráče představuje ztrátu pro druhého hráče. Tento typ konfliktu lze zapsat pomocí maticové hry, která bude mít charakter minimaxu. To znamená, že první hráč má za cíl získat maximální možnou výhru. Naopak druhý hráč má za cíl dosáhnout co nejmenší prohry. (Heissler, 2010)

Nashova rovnováha

John Forbes Nash se soustředil na nekooperativní hry mezi více hráči. Není však nijak zaručeno, že daní aktéři budou dodržovat dané závazky. Nashova rovnováha popisuje situaci, ve které mají všichni účastníci rozhodovacího procesu svou strategii. Nikdo nemůže čerpat ze změny strategie, pokud v současné době nezmění svou strategii také někdo další. Nash rovněž dokázal, že výsledkem každé takové hry je alespoň jedno rovnovážné řešení. (Bělohrad, 2015)

Tato rovnováha představuje návod, podle kterého se dá najít optimální strategie hráčů při konfliktní situaci. Je definována taktéž jako nejlepší strategie. Jedná se o soubor strategií, kdy pro každého z n hráčů hry je jeho nejlepší reakcí na strategii $n-1$ dalších hráčů. Principem je, že jednotlivci své jednání přizpůsobují chování ostatních hráčů a hledají tak strategické možnosti, které jim poskytnou ty nejlepší výsledky. V případě, že se hráč ve své strategii vychýlí, a protihráč svou strategii nijak nezmění, první hráč si nijak nepolepší, právě naopak. Tím lepším výsledkem je, že na tom bude stejně, tím horším, že si ve výplatě pohorší. (Holt, 2004)

Nashova rovnováha má své využití při analýzách válečných konfliktů, závodů ve zbrojení, organizaci aukcí, regulaci silničního provozu či budování environmentální politiky. V roce 2015 mu byla udělena Abelova cena za práci na parciálních diferenciálních rovnicích. (Bělohrad, 2015)

Smíšené strategie

Definice smíšené strategie je rozšířena o pravděpodobnostní množinu. Tyto strategie umožňují nalézání řešení v podobě zvolení dané strategie s určitou pravděpodobností. (Nash, 1950, s. 48- 49)

Jestliže se nepodaří najít sedlový prvek matice, neznamená to, že by hráči neměli rovnovážné strategie. Praktickým příkladem smíšené strategie je známá hra „kámen, nůžky, papír“. Při této hře vystupují dva hráči, z nichž každý může použít tři možné strategie. Pravidla hry jsou taková, že kámen vyhrává nad nůžkami, nůžky vítězí nad papírem a papír nad kamenem. V případě, že hráči zvolí stejnou strategii dochází k remíze, a nikdo ve hře nezvítězil. Tato hra se dá vyjádřit pomocí následující matice.

Tabulka 3: Hra kámen, nůžky, papír

	Kámen	Nůžky	Papír
Kámen	0	+1	-1
Nůžky	-1	0	+1
Papír	+1	-1	0

Zdroj: vlastní zpracování dle (Dlouhý, 2009, s. 22)

V této matici neexistuje žádný sedlový prvek, tedy ani Nashovo rovnovážné řešení v ryzích strategiích. Přesto je známa rovnovážná strategie obou hráčů, která se skládá z vektoru (1/3; 1/3; 1/3). Tato čísla vektoru, znázorňují pravděpodobnosti, s jakými si hráč volí první, druhou nebo třetí strategii.

b) Neantagonistické hry dvou hráčů

Neantagonistický konflikt spočívá ve spolupráci dvou hráčů, jejichž cíle si navzájem neodporují. Jedná se o konflikt, kdy cílem hráče není protihráče nijak poškodit. (Šubrt, 2019, s. 146) Neantagonistické hry dvou hráčů se dělí na kooperativní a nekooperativní hry. O kooperativní hry se jedná v případě, kdy mezi sebou hráči mohou uzavírat dohody a jsou ochotni mezi sebou komunikovat. Toto však pro nekooperativní hry neplatí. (Chvoj, 2013, s. 18)

U her s neantagonistickým charakterem se může stát, že hráč, který si nevybere rovnovážnou strategii, si uškodí. Zároveň ale může více poškodit druhého hráče, ačkoli ten si rovnovážnou strategii zvolí. Proto v těchto hrách platí princip „kdo se odchýlí, může si jedině poškodit, za předpokladu, že ten druhý se neodchýlí“. (Maňas, 1991, s. 94-95)

Kooperativní hry

Základem kooperativních her je předpoklad, že dva hráči jsou ochotni mezi sebou prodiskutovat situaci a následně nalézt racionální společné řešení problému. Konečná dohoda by měla být považována za vynutitelnou. Při výpočtu je situace omezena pouze na matematický model se základními a zásadními informacemi. (Nash, 1953) Při kooperativních hrách mezi sebou hráči tvoří koalice, v nichž jednají v souladu se zájmy celé skupiny, nikoli podle vlastních cílů. (Šubrt, 2019, s. 141)

Tyto hry se dále mohou dělit na hry s přenosnou výhrou a na hry s nepřenosnou výhrou. (Volek, 2010, s. 4) Hry s přenosnou výhrou jsou založeny na tom, že se hráči o výhru mohou dělit. V opačném případě se o výhru dělit nelze.

Nekooperativní hry

Nekooperativní hry jsou založeny na předpokladu, že každý účastník jedná sám, bez součinnosti jiné osoby. (Nash, 1951) Při hrách nekooperativních se hráči do koalic nesdružují, zájmy ostatních jsou pro ně nepodstatné.

Rovnovážná strategie těchto her, je taková, od které nemá hráč důvod se odchýlit. V případě, že by svou strategii změnil, může si svou výhru jedině zmenšit. Musí však existovat předpoklad, že ostatní hráči budou taktéž postupovat podle své rovnovážné strategie. Pokud se od těchto strategií vychýlí více hráčů najednou, tak rovnovážné strategie nevypovídají nic o průběhu konfliktu. (Maňas, 1991, s. 121-122)

3.3.2 Hra v normálním a rozvinutém tvaru

Jedním z nejdůležitějších matematických modelů teorie her je rozdělení na hru v normálním tvaru a na hru v rozvinutém tvaru.

a) Hra v normálním tvaru

Hra v normálním tvaru je definována třemi základními množinami:

- MNOŽINA HRÁČŮ lze také vyjádřit jako skupina účastníků dané konfliktní situace: Q = {1, 2, …, N}. Pokud se na začátku neurčí jinak, předpokládá se vždy hra dvou hráčů. Ti se poté označují jako hráč 1 a hráč 2.
- MNOŽINA PROSTORŮ STRATEGIÍ označována jako: $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$. Jedná-li se o prostor strategií i-tého hráče, značí se jako X_i. Předpokládá-li se hra dvou hráčů, jejich prostor strategií představuje X a Y. Konkrétní strategie hráče 1 se označí *x* a strategie hráče 2 jako *y*.
- MNOŽINA VÝPLANTÍCH FUNKCÍ všech hráčů je zapisována jako: $M = \{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N), \ldots, f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)\}$. Výplatní funkce hráčů jsou znázorněny na kartézském součinu prostoru strategií.

Některé publikace uvádí hru v normálním tvaru, také jako hru ve strategickém tvaru. Při hrách v normálním tvaru se přepokládá, že všichni hráči jsou inteligentní, chtějí maximalizovat svou výplatní funkci a mají dokonalé informace o celé hře. Všichni hráči provádí své rozhodnutí ve stejný čas, proto není možné, aby předem znali rozhodnutí svých protihráčů. (Dlouhý, 2009, s. 17)

b) Hra v rozvinutém tvaru

Hry v rozvinutém tvaru jsou charakteristické posloupností jednotlivých tahů. Hráči svými tahy reagují na předchozí tahy protihráčů. Mezi tyto hry se v praxi řadí například šachy či dáma. Pro tyto salónní hry je typické střídání tahů mezi bílým a černým hráčem. Strategie bílého hráče musí specifikovat první tah a reakci na každou možnou odpověď černého hráče (Blackwell, 1979, s. 3).

Tyto hry se znázorňují pomocí grafu, nazývaného též jako strom hry. Tento graf se skládá z uzlů a hran. Má jeden počáteční uzel (kořen) a několik koncových uzlů. Hráči se během hry střídají a svá rozhodnutí uskutečňují v rozhodovacích uzlech. (Dlouhý, 2009, s. 39)

3.3.3 Hry s nulovým, konstantním a nekonstantním součtem

V souvislosti se zkoumáním vztahu mezi jednotlivými výplatními funkcemi hráčů lze hovořit o těchto hrách:

- s nulovým součtem: v případě, že je suma plateb jednotlivých hráčů pro všechny možné kombinace jejich strategií nulová,
- s konstantním součtem: v případě, že je suma plateb jednotlivých hráčů pro všechny možné kombinace jejich strategií konstantní,
- s nekonstantním součtem: v opačném případě, než je uveden výše.

Vzhledem k podobnosti her s nulovým a konstantním součtem jsou tyto hry mnohdy slučovány pouze pod pojem hry s konstantním součtem.

a) Hry s nulovým a konstantním součtem

Jedná se o hry, kdy se součet výplat všech hráčů rovná nule. Taktéž se může jednat o hry, ve kterých součet výplat nemusí být roven nule, ale předem stanovené konstantě. (Chvoj, 2013, s. 18) Hry dvou hráčů s konstantním součtem představují antagonistické konflikty, proto nemá smysl, aby mezi sebou hráči spolupracovali. Mezi hráče je rozdělována pevná částka. Jejich cílem je získat maximální podíl z dané částky. Jedná se tak o konflikt, kde výhra jednoho hráče je ovlivněna chováním druhého hráče.

Uvažuje-li se hra dvou hráčů jejich libovolné strategie se označují $x \in X$, $y \in Y$. Výplatní funkce hráčů má poté tvar:

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = K$$

kde K představuje jakékoli reálné číslo. Jestliže je K rovno nule, jedná se o hru s nulovým součtem. V takovém případě platí, že přičte-li se ke všem hodnotám výplatní funkce daná konstanta, řešení se nezmění. Proto pro hry s nulovým součtem platí:

$$f_1(x, y) = -f_2(x, y)$$

(Dlouhý, 2009, s. 17-18)

b) Hry s nekonstantním součtem

Hry s nekonstantním součtem jsou charakteristické tím, že součet plateb hráčů se po celou dobu nerovná stále stejné hodnotě. V těchto případech neplatí, že výhra jednoho hráče je prohrou druhého hráče. Proto je zapotřebí rozlišit, zda se jedná o kooperativní či nekooperativní hru.

3.4 Maticová hra

„Konflikt s prostory strategií a s výplatní funkcí zadanou maticí hry se nazývá maticová hra.“ (Maňas, 1991, s. 33) Označení maticová hra se používá, protože při popisu problému stačí pouze jedna matice. (Šubrt, 2019, s. 144)

Základní věta maticových her zní: *„Každá maticová hra má Nashovo rovnovážné řešení ve smíšených strategiích.“* (Dlouhý, 2009, s. 23)

V současné době je nejtypičtějším modelem v teorii her hra dvou hráčů v normálním stavu s nulovým součtem. To znamená, že hodnoty výplatních funkcí obou hráčů mají opačná znaménka. Proto je možné při výpočtu používat pouze jednu výplatní matici. (Šubrt, 2019, s. 144) Vystupují zde dva inteligentní hráči, kteří mají konečně mnoho strategií. Strategie hráčů lze označit přirozenými čísly: X = {1, 2, …, m} a Y = {1, 2, …, n}. Matice výplaty M(x,y) nabývá pouze konečně mnoha hodnot *mn*. Tato výplatní funkce se zapisuje ve formě tabulky, kde čísla řádků označují čísla strategií hráče 1. Číslům strategie druhého hráče odpovídají čísla sloupců. Pokud se označí M(x, y) = a_{xy}, kde platí x ∈ X a y ∈ Y, popisuje se výplatní funkce pomocí matice typu (m, n) obsahující prvky a_{xy}. Tato matice je označována jako matice hry a lze zapsat v následujícím tvaru. (Maňas, 1991, s. 33)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11,} & a_{12,} & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ a_{m1}, & a_{m2,} & \dots, & a_{mn} \end{bmatrix}$$

3.4.1 Hledání rovnovážné strategie hráčů v maticové hře

Rovnovážná strategie hráčů v maticové hře se hledá snadno. Jedná se o prvek, který je nejmenší v řádku, v němž se nachází a zároveň největší ve sloupci, v němž se nachází. Tento prvek je taktéž označován jako sedlový prvek matice hry. Jestliže první hráč zvolí strategii shodující se s číslem řádku, ve kterém se nachází sedlový prvek a druhý hráč strategii odpovídající číslu sloupce, v němž je sedlový prvek, má tato dvojice vlastnosti rovnovážných strategií. To znamená, že pokud se jeden hráč od své strategie odchýlí, může si maximálně pohoršit. Sedlový prvek v matici hry představuje cenu hry. (Maňas, 1991, s. 33-34) Cílem prvního hráče je maximalizovat svou výhru, cílem druhého hráče je minimalizovat svou prohru. Nalezením sedlového prvku je zároveň získána Nashova rovnováha.

Výskyt sedlového prvku v matici

Při hledání sedlového bodu matice mohou nastat tři následující situace:

a) matice má jeden sedlový prvek (prvek je Nashovým rovnovážným řešením),
b) matice má více sedlových prvků,
c) matice nemá žádný sedlový prvek (optimální strategie se daným způsobem nepodařilo najít). (Dlouhý, 2007, s. 13)

V případě, že sedlový prvek nebyl v matici nalezen, jedná se o smíšené (pravděpodobnostní) strategie.

3.5 Základní modely konfliktů v teorii her

Vojtěch Stehel (2019, s. 50-54) ve své publikaci uvádí následující základní hry, které jde po jejich zobecnění uplatnit v ekonomických oborech. Optimální kombinace strategií se řeší pomocí hledání maxim ve sloupcích a maxim v řádcích.

a) Vězňovo dilema

Vězňovo dilema je jednou z nejznámějších situací, které mohou v teorii her nastat. V tomto případě, zde vystupují dva pachatelé, kteří byli zatčeni policií. Protože policie nemá přímé důkazy, nabídne pachatelům dohodu. Pokud se přiznají dostanou snížený trest. To ale pouze v případě přizná-li se pouze jeden pachatel. Jestliže se přiznají oba, snížený trest nebude udělen. Pachatelé jsou vyslýcháni samostatně a zároveň, aby se mezi sebou nemohli domlouvat.

Tabulka 4: Vězňovo dilema

		Pachatel B	
		mlčet	přiznat se
Pachatel A	mlčet	-1; -1	-10; 0
	přiznat se	0; -10	***-5; -5***

Zdroj: vlastní zpracování dle (Carmichael, 2005, s. 59)

Dominantní strategie je v tomto případě a_{22}. To znamená, že se oba pachatelé přiznají. Jedná se tedy o optimální strategii, ale pro vězně ne tu nejlepší. V případě, že by oba pachatelé mlčeli, dosáhli by lepšího výsledku. Tato strategie však nebyla zvolena z důvodu nebezpečí. Pokud by jeden pachatel mlčel a druhý se přiznal, byl by potrestán pouze druhý a první vězeň by trestu unikl. Vzhledem k tomu, že se mezi sebou vězni nemohou domluvit na výběru strategie, je tou nejlepší strategií obou, se ke zločinu přiznat.

b) Manželský spor

Tento typ sporu je mezi manželkou a manželem, ve kterém každý preferuje jinou aktivitu. Manželka chce jít nakupovat, kdežto manžel chce jít na kopanou. Manželé však chtějí trávit čas společně. V případě, že se tak stane, mají užitek i z aktivity, kterou nepreferují. Jedná se však o užitek menší, než v případě jimi preferované aktivity.

Tabulka 5: Manželský spor

		Manželka	
		kopaná	nákupy
Manžel	kopaná	***2; 1***	0; 0
	nákupy	0; 0	***1; 2***

Zdroj: vlastní zpracování dle (Heissler, 2010)

V tomto případě, jsou výsledkem dvě rovnovážná řešení. Pro tuto hru je důležitý předpoklad rozhodování bez možnosti domluvit se. Následně tak může dojít k situaci, kdy si manželé chtějí navzájem vyhovět, a tak jdou oba na aktivitu, která jim nepřinese žádný užitek. Pokud manžel i manželka budou preferovat jen své zájmy, dojde znovu k situaci, kdy se manželé minou. To znamená, že situace opět nepřinese žádný užitek.

c) Lov jelena

Lov jelena představuje situaci, ve které vystupují dva lovci. Každý lovec si vybírá mezi strategiemi lovit jelena či zajíce. Ulovit zajíce dokáže každý lovec sám. Pokud chtějí lovci ulovit jelena musí mezi sebou spolupracovat a následně si mohou ulovenou kořist rozdělit. Rozdělením jelena každý lovec získá více, než když samostatně uloví zajíce. V případě, že jeden lovec zvolí strategii lovu jelena a druhý strategii lovu zajíce, první lovec nezíská nic a druhý získá maso pouze ze zajíce.

Tabulka 6: Lov jelena a zajíce

		Lovec B	
		jelen	Zajíc
Lovec A	jelen	***5; 5***	0; 1
	zajíc	1; 0	1; 1

Zdroj: vlastní zpracování dle (Carmichael, 2005, s. 54)

Z hlediska konečných výher budou oba lovci volit strategii lovu jelena, protože jim přinese více užitku, než jiná kombinace.

d) Tragédie veřejného vlastnictví

Tragédie veřejného vlastnictví je vysvětlována na příkladu zemědělců, kteří řeší problémy způsobené suchem. Řešením je domluva zemědělců na snížení množství užívané vody. Jestliže tuto domluvu všichni farmáři dodrží, bude užitek z jednoho akru půdy 5 tun obilí. V případě, že dohodu budou všichni porušovat, bude užitek z jednoho akru pouze 2 tuny obilí, protože na konci období bude všechna zásoba vody vyčerpána. Vzhledem k velikosti skupiny farmářů, porušení dohody jednotlivcem nebude mít vliv na celkový užitek všech zemědělců.

Tabulka 7: Tragédie veřejného vlastnictví

		Ostatní farmáři	
		nespolupracovat	Spolupracovat
Jednotlivec	nespolupracovat	2; 2	***10; 5***
	spolupracovat	1; 2	5; 5

Zdroj: vlastní zpracování dle (Heissler, 2010)

V matici je uvedena situace znázorňující hru mezi jednotlivcem a zbytkem farmářů. Z tabulky je patrné, že rovnovážný stav je v případě, kdy jednotlivec nespolupracuje, ale ostatní farmáři nadále spolupracují.

4 PŘEVOD ÚLOHY TEORIE HER NA ÚLOHU LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

V případě, že sedlový prvek nebyl v matici nalezen, jedná se o smíšené (pravděpodobnostní) strategie. Tento typ maticové hry, lze řešit pomocí převodu na lineární programování. Metod lineárního programování se využívá v případě řešení her s konstantním součtem, které výplatní funkci maximalizují nebo minimalizují. (Stehel, 2019, s. 46)

Pro všechny optimální strategie platí:

$$M\ (x, y^0) \leq M\ (x^0, y^0) \leq M\ (x^0, y)$$

kde x^0 a y^0 představuje optimální strategii, x a y znázorňuje neoptimální čili ryzí strategii.

Následující postup pro výpočet maticových her pomocí úlohy lineárního programování uvádí ve své publikaci Josef Volek. (2010, s. 25-29)

4.1 Úloha teorie her

Maticová hra bývá zapsána danou maticí plateb A = $(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$, ve které se nevyskytuje sedlový bod matice. Úlohou teorie her je tedy najít pro hráče „1“ vektor řádek smíšené strategie

$\bar{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a číslo *v* tak, aby platilo:

$$E\ (\bar{X}, j) \geq E\ (\bar{X}, \bar{Y}) = v \qquad \text{pro } j = 1, \ldots, n$$

Z výše uvedeného vyplývá soustava *n* lineárních nerovností:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m &\geq v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m &\geq v \\ &\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m &\geq v \end{aligned} \tag{1}$$

Dále pak platí:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_m &= 1 \\ x_1, x_2, \ldots, x_m &\geq 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Pro druhého hráče je zapotřebí nalézt vektor sloupec smíšené strategie

$\bar{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, aby platilo:

$$\mathrm{E}\ (i, \bar{Y},) \leq E\ (\bar{X}, \bar{Y})\ =\ v \qquad \text{pro i} = 1, \ldots, m$$

Tak se dostane soustava *m* lineárních nerovností:

$$\begin{gathered} a_{11}y_1\ +\ a_{21}y_2\ +\ \ldots\ +\ a_{1n}y_n\ \leq\ v \\ a_{21}y_1\ +\ a_{22}y_2\ +\ \ldots\ +\ a_{2n}y_n\ \leq\ v \\ \ldots \\ a_{m1}x_1\ +\ a_{m2}y_2\ +\ \ldots\ +\ a_{mn}y_m\ \leq\ v \\ y_1\ +\ y_2\ +\ \ldots\ +\ y_n\ =\ 1 \\ y_1, y_2, \ldots, y_m\ \geq\ 0 \end{gathered} \tag{3}$$

Dalším nutným předpokladem pro pokračování v postupu je podmínka $v > 0$. Z toho vyplývá, že je nutná podmínka nezápornosti prvků matice plateb A = (a_{ij}). Matice A lze upravit na matici A´, jež neosahuje žádné záporné prvky pomocí dvou postupů:

1. ze všech záporných prvků matice se pomocí absolutní hodnoty určí největší prvek γ

$$\gamma = \max_{i,j}\{|a_{ij}|\} \qquad \text{pro } a_{ij} < 0$$

2. ke všem záporným prvkům matice A = a_{ij} se přičte celé kladné číslo $\omega \geq \gamma$

$$a_{ij}^{'} = a_{ij} + \omega$$

4.2 Transformace úlohy teorie her na úlohu lineárního programování

Transformace úlohy teorie her spočívá v podělení nerovnice pro prvního a druhého hráče hodnotou hry *v*. Poté se $x_i^{'}$ a $y_j^{'}$ vyjádří následovně.

$$x_i^{'}\ =\ \frac{x_i}{v} \tag{4}$$

$$y_j^{'}\ =\ \frac{y_j}{v} \tag{5}$$

Pro $x_i^{'}$ platí:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{'}\ =\ \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{v}\ =\ \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{m} x_i\ =\ \frac{1}{v} \tag{6}$$

Obdobně pro $y_j^{'}$ platí:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^{'}\ =\ \sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{v}\ =\ \frac{1}{v}\sum_{j=1}^{n} y_j\ =\ \frac{1}{v} \tag{7}$$

Cílem prvního hráče je získat co největší výhru, proto je zapotřebí minimalizovat výraz (6). Naopak druhý hráč má za úkol mít co nejmenší prohru, proto se výraz (7) maximalizuje. Funkce (3) případně (4) se použije v modelu lineárního programování jako účelová funkce. Soustava omezujících podmínek vznikne podělením nerovností (1) respektive (3) hodnotou hry *v*.

4.3 Převod úlohy teorie her na lineární programování

Úloha lineárního programování se zapisuje v podobě primární úlohy. Ke každé primární úloze existuje taktéž duální podoba úlohy.

Primární úloha

Cílem primární úlohy je nalézt vektor řádek X′= ($x_1^{'}, \dots ,\ x_m^{'}$), který minimalizuje lineární formu

$$\min f(X^{'}) = x_1^{'} + \dots + x_m^{'}$$

za podmínek

$$a_{11}x_1^{'} + \dots + a_{m1}x_m^{'} \geq 1$$

$$\dots$$

$$a_{1n}x_1^{'} + \dots + a_{mn}x_m^{'} \geq 1$$

a za podmínek nezápornosti

$$x_i^{'} \geq 0 \qquad \text{pro } i = 1, \dots, m$$

Duální úloha

Duální úloha je představována vektorem sloupce Y′ = ($y_1^{'}, \dots ,\ y_n^{'}$), jež maximalizuje lineární formu

$$\max f(Y^{'}) = y_1^{'} + \dots + y_n^{'}$$

za podmínek

$$a_{11}y_1^{'} + \dots + a_{1n}y_n^{'} \leq 1$$

$$\dots$$

$$a_{m1}y_1^{'} + \dots + a_{mn}y_n^{'} \leq 1$$

a za podmínek nezápornosti

$$y_j' \geq 0 \qquad \text{pro j = 1, …, n}$$

V tomto případě platí, má-li hra řešení, mají řešení i výše uvedené symetrické duální úlohy, pro které platí:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i' = max \sum_{j=1}^{n} y_j' = \frac{1}{v}$$

4.3.1 Sestava úlohy lineárního programování pro prvního hráče

V případě prvního hráče se předpokládá soustava *n* lineárních nerovností

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq v$$

$$\dots$$

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq v$$

a rovnici

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$

Převod na úlohu lineárního programování probíhá následovně:

a) všechny nerovnosti se převedou na systém lineárních rovnic, pomocí odečtení nezáporných (doplňkových) proměnných $x_{m+1}, \dots, x_{m+\mathrm{n}} \geq 0$, poté vznikne následující tvar rovnic

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{m1}x_m - x_{m-1} \qquad = v$$

$$\dots$$

$$a_{1n}x_1 + \dots + a_{mn}x_m \qquad - x_{m+n} = v$$

$$x_1 + \dots + x_m = 1$$

b) první rovnice se odečte od ostatních *n* – 1 rovnic

$$(a_{12} - a_{11})\,x_1 + \dots + (a_{m2} - a_{m1})\,x_m + x_{m+1} - x_{m+2} \qquad = 0$$

$$\dots$$

$$(a_{1n} - a_{11})\,x_1 + \dots + (a_{mn} - a_{m1})\,x_m + x_{m+1} \qquad - x_{m+n} = 0$$

$$x_1 + \dots + x_m = 1$$

c) rovnice, která se v předchozím kroku odečetla se použije jako účelová funkce, tak vznikne úloha lineárního programování

$$\max f(\mathrm{X}) = a_{11}x_1 + \dots + a_{m1}x_m - x_{m+1}$$

s omezujícími podmínkami

$$\bar{a}_{12}x_1 + \dots + \bar{a}_{m2}x_m + x_{m+1} - x_{m+2} = 0$$

$$\dots$$

$$\bar{a}_{1n}x_1 + \dots + \bar{a}_{mn}x_m + x_{m+1} - x_{m+n} = 0$$

$$x_1 + \dots + x_m = 1$$

a při splnění podmínek nezápornosti

$$x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n} \geq 0$$

4.3.2 Sestava úlohy lineárního programování pro druhého hráče

Pro druhého hráče se uvažuje soustava *m* lineárních nerovností

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq v$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \leq v$$

a rovnici

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$$

Převod na úlohu lineárního programování probíhá obdobně jako u prvního hráče:

a) k prvním *m* levým stranám nerovností se přičtou nezáporné (doplňkové) proměnné $y_{n+1}, \dots, y_{n+m} \geq 0$, poté vznikne následující lineární soustava *m* rovnic

$$a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + y_{n+1} \qquad = v$$

$$\dots$$

$$a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n \qquad + y_{m+n} = v$$

$$y_1 + \dots + y_m = 1$$

b) první rovnice se odečte od ostatních m – 1 rovnic

$$(a_{21} - a_{11})\, y_1 + \dots + (a_{2n} - a_{1n})\, y_n - y_{n+1} + y_{n+2} = 0$$

$$\dots$$

$$(a_{m1} - a_{11})\, y_1 + \dots + (a_{mn} - a_{1n})\, y_n - y_{n+1} + y_{n+m} = 0$$

$$y_1 + \dots + y_n = 1$$

c) první rovnice se rovněž použije jako účelová funkce

$$min\, f\, (\mathrm{X}) = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + y_{n+1}$$

s omezujícími podmínkami

$$\bar{a}_{21}y_1 + \dots + \bar{a}_{m2}y_n - y_{n+1} + y_{n+2} = 0$$

$$\dots$$

$$\bar{a}_{m1}y + \dots + \bar{a}_{mn}y_n - y_{n+1} + y_{n+m} = 0$$

$$y_1 + \dots + y_n = 1$$

a za podmínek nezápornosti

$$y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m} \geq 0$$

Řešení úloh lineárního programování pokračuje simplexovou tabulkou.

5 PŘÍKLADY VYUŽITÍ MATICOÝCH HER V PRAXI

V praxi se maticové hry dají využít při sporech v bankovním sektoru, v sektoru služeb či v konfliktních situacích na podnikové úrovni. Některé příklady, vyskytující se v praxi, uvádí ve svých publikacích H. A. Taha (2017, s. 593-609) nebo F. Hillier (2021, s. 651-654).

5.1 Konfliktní situace mezi dvěma bankovními institucemi

Na tuzemském trhu vystupují dvě bankovní společnosti A a B. Obě nabízejí mnoho bankovních produktů, kterými jsou například běžné účty, termínované vklady, spotřebitelské úvěry, stavební spoření, hypoteční úvěry a mnoho dalšího. Mezi produkt, který je nabízený v obou bankách patří také spořicí účet.

Cílem každé banky je nastavit takovou úrokovou sazbu na spořicím účtu, aby si stávající klienty udržela a získala co nejvíce nových klientů. Pro tento příklad byla pro banku A stanovena výchozí úroková sazba 5 %, pro banku B byla výchozí sazba nastavena na 4 %. V případě snížení nebo zvýšení úrokové sazby se jedná o výši 1 %.

Obě banky si mohou při stanovování úrokových sazeb stanovit tři strategie, ze kterých budou při rozhodování vybírat. Může se jednat o strategii zvýšení úrokové sazby, snížení úrokové sazby, a nebo ponechání úrokové sazby na sazbě výchozí.

V praxi tak mohou nastat následující situace:

- Banka A se rozhodne snížit své úrokové sazby o 1 %, tutéž strategii zvolí i společnost B. To znamená, že bance A se sníží úroková sazba na 4 % a bance B na 3 %. Pro společnost A, to i přes snížení znamená, že získá 5 000 nových klientů, kteří kvůli snížení opustí banku B.
- Pokud instituce A sníží svou úrokovou sazbu na 4 % a společnost B zvýší svou sazbu na 5 %, znamená to, že banka A přijde o 5 000 klientů.
- V případě, že banka A svou úrokovou sazbu sníží na 4 % a banka B svou úrokovou sazbu nezmění, nedojde k úbytku ani přírůstku klientů.
- Jestliže společnost A použije druhou strategii, tedy zvýšení úrokové sazby na 6 % a instituce B svou úrokovou sazbu sníží na 3 %, získá banka A 10 000 nových klientů.
- Nastane-li situace, kdy společnost A svou úrokovou sazbu zvýší na 6 % a druhá společnost taktéž zvýší své úrokové sazby na 5 %, přibude společnosti A 3 000 nových zájemců o spořicí účet.

- Zvýší-li banka A u svého spořicího účtu sazbu na 6 % a banka B svou úrokovou sazbu nezmění, zvýší se počet klientů bance A o 8 000.
- Zvolí-li banka A strategii ponechání úrokových sazeb na výchozí výši a instituce B sníží svou úrokovou míru na 3 %, banka A získá 7 000 nových klientů.
- Může také nastat situace, kdy banka A svou úrokovou sazbu ponechá na 5 % a banka B svou úrokovou sazbu zvýší na 5%. Instituce A tak nezíská nové klienty a banka B o žádné nepřijde.
- Poslední možnost, která může nastat je ponechání úrokových sazeb na výchozích úrovních. Poté tedy nastane to, že banka A získá 2 000 nových klientů, kteří žádají o spořicí účet právě u nich.

Řešení

V této konfliktní situaci vystupují dva hráči, a to banka A a banka B. Banka A má na výběr ze tří strategií, a to svou úrokovou sazbu na spořicím účtu ponechat, zvýšit nebo snížit. Protihráč, tedy banka B, vybírá ze stejných strategií. Žádný z hráčů však předem neví, kterou strategii jeho protihráč zvolí.

- A: bankovní společnost A
- S, Z, P: snížit, zvýšit, ponechat
- B: bankovní společnost B
- S, Z, P: snížit, zvýšit, ponechat

Následující matice je zadána z pohledu bankovní společnosti A. V matici jsou zapsány změny počtu klientů bankovních společností v tisících.

$$
\begin{array}{c}
 \\ S \\ Z \\ P \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \mathrm{S} & \mathrm{Z} & \mathrm{P} \end{array} \\
\begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 10 & 3 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccc} 10 & 3 & 8 \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \\ -5 \\ 3 \\ 0 \\ \\ \end{array}
$$

Prvním úkolem je najít sedlový bod matice. V této matici se sedlový bod nachází, konkrétně na pozici a_{22}. Jedná se o prvek, který je nejmenší v řádku a zároveň největší ve sloupci. Tímto způsobem tedy bylo nalezeno Nashovo rovnovážné řešení.

Ekonomická interpretace výsledku

Vzhledem k tomu, že byl nalezen sedlový bod matice, vyplývá z toho, že existuje pouze jedna varianta, kterou si bankovní instituce A zvolí. Tuto strategii si vybere s pravděpodobností 1.

Pro bankovní instituci A je tedy nejvýhodnější zvolit strategii zvýšení úrokových sazeb na svém spořicím účtu. V případě zvolení této možnosti získá banka A 3 000 nových klientů. Pokud by zvolila jinou strategii mohla by získat více zákazníků, ale naopak by mohla velké množství zákazníků také ztratit.

Společnost A však musí předpokládat, že banka B zvolí stejnou strategii jako jeho protihráč na trhu. Bude se jednat taktéž o variantu zvýšení úrokových sazeb na jejich spořicím účtu. Pro bankovní instituci B to bude znamenat, že přijde o 3 000 svých zákazníků. Přestože se jedná o strategii zvýšení sazeb, bankovní společnost A nabízí na svém spořicím účtu vyšší procento, díky kterému získá nové klienty.

5.2 Konfliktní situace mezi vedením společnosti a odborovým svazem

Ve společnosti XY bylo vyhlášeno nové výběrové řízení na pozici generálního ředitele, z důvodu odchodu stávajícího do penze. Jedná se o firmu, která se zabývá výrobou skel pro automobily. Ve výběrovém řízení byl zvolen novým ředitelem mladý a ambiciózní muž. Jeho cílem bylo ve společnosti zavést mnoho změn a inovací. Jednou z plánovaných změn bylo snížení nákladů, a s ním spojené snižování mezd.

Ve společnosti zájmy zaměstnanců prosazovaly odbory. Na prvním setkání nového vedení podniku s odbory, byla vyjádřena nespokojenost zaměstnanců s pracovními podmínkami a výší vyplácených mezd. Poté co nový ředitel oznámil, že se mzdy budou snižovat, došlo k pobouření zaměstnanců.

Vzhledem k nastalé situaci ve firmě vidí odbory pouze dvě možná východiska, jak na tuto situaci upozornit. První možností je vyhlásit stávku zaměstnanců, druhou variantou je stávku neorganizovat. Cílem stávky by bylo vyjednávání o zvýšení mezd, nikoli o jejich dalším snižování. Společnost má dvě možnosti, jak na nastalou situaci reagovat. Buď bude s odbory o mzdách vyjednávat nebo nikoli. Vedení si velice dobře uvědomuje, že dojde-li k razantnímu snížení mezd, přijde o mnoho zaměstnanců.

Odborový svaz po analýze situací, které mohou nastat, přišel na následující skutečnosti:

- První situací, která může nastat je odmítnutí vyjednávaní ze strany vedení společnosti o změnách výše mezd. Přesto se zaměstnanci rozhodnou, že nebudou pořádat stávku. To povede k poklesu celkových mezd o 5 milionů korun. V takovémto případě společnost pravděpodobně přijde o velké množství zaměstnanců, kteří dají výpověď z pracovního poměru, z důvodu nedostatečných a neodpovídajících peněžních odměn.

- V případě, že se odbory rozhodnou stávku vyhlásit a společnost ustoupí, povede to ke zvýšení mezd zaměstnancům o 3 miliony korun.
- Jestliže bude nové vedení společnosti ochotno vyjednávat o výši mezd a odbory se rozhodnou, že stávku neuskuteční, zvýší se mzdy o 4 miliony korun. Tento výsledek by byl pro odbory nejvíce přijatelný. Zaměstnanci by neměli důvod ze zaměstnání odcházet, protože by došlo ke zvýšení jejich měsíční odměny.
- Také může dojít k situaci, že jednání mezi vedením společnosti a odbory nebude úspěšné a stávka se uskuteční. To povede ke snížení mezd ze strany vedení společnosti o jeden milion korun.

Řešení

V tomto případě vystupují dva hráči, a to odbory a vedení společnosti. Odborový svaz bude buď stávkovat nebo nestávkovat. Vedení společnosti má na výběr buď s odbory o změnách mezd jednat, nebo nejednat.

- OS: odborový svaz
- N, S: nestávkovat, stávkovat
- VS: vedení společnosti
- N, J: nejednat, jednat

Zadání příkladu lze zapsat pomocí následující matice. V matici jsou uvedeny změny mezd v milionech korun.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{N} & \mathrm{J} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{N} \\ \mathrm{S} \end{array} & \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c} -5 \\ -1 \end{array}$$

Prvním úkolem je najít sedlový bod. Pokud by byl nalezen, jedná se Nashovo rovnovážné řešení a příklad je vyřešen. V této matici se však sedlový bod nenachází. Úloha se proto vyřeší převodem na lineární programování. Pro výpočet je zvolen postup pro hráče „2“, tedy výpočet z pohledu vedení společnosti.

Vzhledem k tomu, že matice obsahuje záporné prvky, přičte se ke všem prvkům matice A hodnota $\omega = 6$. Vznikne tak nová matice A´

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Úlohou teorie her je nalézt vektor $\bar{Y} = (y_1, y_2)$, který vyhovuje následujícím nerovnostem a rovnici

$$y_1 + 10y_2 \leq v$$

$$9y_1 + 5y_2 \leq v$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

Matematický model úlohy lineárního programování vypadá následovně:

- Účelová funkce

$$max\, f(Y) = \frac{y_1}{v} + \frac{y_2}{v}$$

- Soustava omezujících podmínek

$$\frac{y_1}{v} + \frac{10y_2}{v} \leq 1$$

$$\frac{9y_1}{v} + \frac{5y_2}{v} \leq 1$$

Hodnota hry v se dopočítá z účelové funkce f(Y).

$$v = \frac{1}{y_1 + y_2}$$

Dále se označí $\frac{y_j}{v} = y'_j$. Úloha je maximalizační, protože hráč „2“ hraje hru na minimální hodnotu *v*. Vzniká následující úloha lineárního programování:

$$max\, f(Y) = y'_1 + y'_2$$

za podmínek

$$y'_1 + 10y'_2 \leq 1$$

$$9y'_1 + 5y'_2 \leq 1$$

a podmínek nezápornosti

$$y'_1, y'_2 \geq 0$$

Vzhledem k nerovnostem v soustavě omezujících podmínek, k jejich vyrušení dojde přičtením doplňkových proměnných y_3, y_4 k levým stranám nerovnic. Koeficient jejich účelové funkce je roven nule. Kanonický tvar úlohy lineárního programování je tedy ve tvaru:

$$min\ f(Y) = -y'_1 - y'_2$$

$$y'_1 + 10y'_2 + y_3 \quad = 1$$

$$9y'_1 + 5y'_2 \quad + y_4 = 1$$

a podmínky nezápornosti

$$y'_1, y'_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Úloha lineárního programování se bude řešit pomocí simplexové tabulky.

Tabulka 8: Řešení konfliktní situace 5.2 simplexovou metodou

i	B_h	C_{Bh}	Y_h	-1	-1	0	0	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	
1	p_3	0	1	1	10	1	0	1
2	p_4	0	1	9	5	0	1	0,1111
m+1			0	1	1	0	0	

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 9: První iterace simplexové metody

i	B_h	C_{Bh}	Y_h	-1	-1	0	0	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	
1	p_3	0	0,8889	0	9,4444	1	-0,111	0,0941
2	p_1	-1	0,1111	1	0,5556	0	0,1111	0,2000
m+1			-0,1111	0	0,4444	0	-0,1111	

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 10: Druhá iterace simplexové metody

i	B_h	C_{Bh}	Y_h	-1	-1	0	0	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	
1	p_2	-1	0,0941	0	1	0,1059	-0,0118	
2	p_1	-1	0,0588	1	0	-0,0588	0,1176	
m+1			- 1/7	0	0	-0,0471	-0,1059	

Zdroj: vlastní zpracování

Z posledního řádku (m+1) simplexové tabulky je viditelné, že bylo nalezeno optimální řešení, protože všechny rozdíly $z_j - c_j \leq 0$. Optimálním řešením maticové hry pomocí simplexové metody s maticí plateb A´ je $\overline{Y}' = (0{,}0588;\ 0{,}0941)$.

Hodnota účelové funkce optimálního řešení $f(\overline{Y}') = \frac{1}{7}$.

Hodnota původní hry s maticí plateb A se obdrží jako převrácená hodnota $f(\overline{Y}')$.

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{7} \rightarrow v = 7$$

Vzhledem k počátečnímu přičtení hodnoty $\omega = 6$, se teď musí od vypočítané hodnoty hry odečíst. Výsledná hodnoty hry se tedy rovná:

$$v' = v - \omega = 7 - 6 = 1$$

Optimální strategie druhého hráče se stanoví tak, že se vynásobí složky vektoru hodnotou hry v. V našem případě se jedná o strategii vedení společnosti.

$$\overline{Y}' = (0{,}0588 * 7;\ 0{,}0941 * 7) = (0{,}4; 0{,}6)$$

Optimalizační úloha z pohledu prvního hráče, tedy z pohledu odborů, je duálně sdružená, proto budou mít úlohy stejnou hodnotu účelové funkce. Řešení úlohy lze tedy nalézt pod doplňkovými proměnnými s opačnými znaménky. To znamená, že strategie prvního hráče vypadá následovně:

$$\overline{X}' = (0{,}0471 * 7;\ 0{,}1059 * 7) = (0{,}3; 0{,}7)$$

Ekonomická interpretace výsledku

Odborový svaz by měl s pravděpodobností 0,7 stávku uskutečnit. Pokud stávku uskuteční může nastat možnost, že odbory pro své zaměstnance získají peníze navíc. Naopak pravděpodobnost, se kterou by odborový svaz stávku organizovat neměl je 0,3.

Strategie, kterou by mělo vedení společnosti zvolit, je následující. Vedení by mělo o zvýšení mezd ve společnosti s odborovým svazem jednat s pravděpodobností 0,6. Pokud se rozhodne, že s odbory odmítne o odměnách za práci jednat, bude tak s pravděpodobností 0,4.

Podle výsledku hodnoty hry se očekává, že odborový svaz pro zaměstnance získá 1 milion korun na mzdy.

Pro vedení společnosti bude nejlepším východiskem z konfliktu s odborovým svazem zvolit strategii vyjednávání o změnách mezd. Odbory pravděpodobně stávku uskuteční, protože tím dojde alespoň k částečnému zvýšení odměn. I když dojde pouze k nepatrnému nárůstu, bude to pro vedení společnosti znamenat, že zaměstnanci chtějí své zájmy ve společnosti hájit a vyjádřit pomocí odborů svůj názor.

5.3 Konfliktní situace mezi ředitelem a zaměstnanci společnosti

Ve společnosti XY se ředitel rozhodl, že chce zavést pracovní dobu i o víkendech. Jeho cílem je zvýšit počet vyrobených komponentů, a tím zvýšit počet zakázek a následný zisk společnosti. Na druhé straně tu stojí zaměstnanci. Ti se skládají ze dvou táborů. Těch co chtějí pracovat o víkendu a těch, kteří o práci o víkendu nestojí.

Pokud se zaměstnancům změní pracovní doba i na práci o víkendech, je možné, že společnost přijde o stovky zaměstnanců. Společnost by poté mohla hledat nové kolegy na další pozice. Je možné, že pokud zájemci v inzerátu objeví požadavek práce o víkendech, svůj zájem o pozici ve společnosti XY ztratí.

Proto ředitel společnosti požádal personální oddělení, aby byl interní poštou rozeslán dotazník zaměstnancům firmy. Jeho cílem bylo získat informace o tom, zda by při zavedení práce o víkendu ve společnosti zůstali či nikoli. Dotazník byl taktéž rozeslán na vysoké školy, kde se nachází potenciální budoucí zájemci o zaměstnání ve společnosti XY. Výsledky byly následující:

- Bude-li zavedena pracovní doba i o víkendech, přijde společnost o 9 000 zaměstnanců, kteří nejsou ochotni pracovat v sobotu a neděli. Tito lidé zaměstnání opustí a budou si hledat práci tam, kde je pracovní doba od pondělí do pátku.
- Jestliže se práce o víkendech nezavede, získá společnost 5 000 nových zájemců o pracovní pozici v této firmě, kteří o práci v sobotu a neděli nemají zájem. Tito zájemci budou zejména absolventi vysokých škol v okolí.
- Pokud se práce o víkendu zavede, podle výsledků dotazníku to přivede do společnosti 7 000 nových zájemců, kteří nepreferují práci pouze od pondělí do pátku. Nemají tedy žádný problém chodit do zaměstnání i o víkendu.
- Může dojít také k situaci, že se práce o víkendu nezavede. To může znamenat, že bude řada zaměstnanců nespokojena, protože víkendy jsou ochotni trávit v práci. Z průzkumu vyplývá, že společnost tak přijde o 4 000 stávajících zaměstnanců, kteří jsou ochotni pracovat v sobotu i neděli.

Řešení

V této konfliktní situaci vystupují dva hráči, a to ředitel společnosti a zaměstnanci společnosti. Ředitel si vybírá z možností zavedení pracovní doby o víkendu a nezavedení pracovní doby v sobotu a neděli. Zaměstnanci společnosti a možní uchazeči o práci buď o víkendu pracovat chtějí nebo ne.

- Ř: ředitel společnosti
- Z, N: zavedení pracovní doby o víkendu, nezavedení pracovní doby o víkendu
- Z: zaměstnanci
- CH, N: chtějí pracovat o víkendu, nechtějí pracovat o víkendu

Následující matice je zadána z pohledu ředitele. V matici je znázorněno, o kolik se změní počet zaměstnanců ve společnosti v tisících:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} \mathrm{N} & \mathrm{CH} \end{array} & \\ \begin{array}{c} \mathrm{Z} \\ \mathrm{N} \end{array} & \begin{pmatrix} -9 & 7 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} & \quad \begin{array}{c} -9 \\ -4 \end{array} \\ & \begin{array}{cc} 5 & 7 \end{array} & \end{array}$$

Prvním bodem výpočtu je nalezení sedlového bodu matice. V této matici se sedlový prvek nenachází. Dalším krokem je převod úlohy na lineární programování. Pro výpočet je zvolen postup pro hráče „1“, tedy výpočet z pohledu ředitele společnosti.

Vzhledem k tomu, že matice obsahuje záporné prvky, přičte se ke všem prvkům matice A hodnota ω = 10. Tato hodnota slouží pouze k úpravě matice. Vznikne tak nová matice A´

$$\begin{pmatrix} 1 & 17 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$$

Úlohou teorie her je nalézt vektor $\bar{X} = (x_1, x_2)$, který vyhovuje následujícím nerovnostem a rovnici

$$x_1 + 17x_2 \geq v$$

$$15x_1 + 6x_2 \geq v$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

Matematický model úlohy lineárního programování vypadá následovně

- Účelová funkce

$$min\, f(x) = \frac{x_1}{v} + \frac{x_2}{v}$$

- Soustava omezujících podmínek

$$\frac{x_1}{v} + \frac{17x_2}{v} \geq 1$$

$$\frac{15x_1}{v} + \frac{6x_2}{v} \geq 1$$

Hodnota hry v lze vyjádřit z účelové funkce

$$v = \frac{1}{x_1 + x_2}$$

x'_i, se kterým se počítá níže představuje $\frac{x_i}{v}$. Úloha je minimalizační, protože hráč „1“ hraje hru na maximální hodnotu *v*. Vzniká tedy následující úloha lineárního programování.

$$min\ f(X) = x'_1 + x'_2$$

za podmínek

$$x'_1 + 17x'_2 \geq 1$$

$$15x'_1 + 6x'_2 \geq 1$$

a podmínek nezápornosti

$$x'_1, x'_2 \geq 0$$

Vzhledem k nerovnostem v soustavě omezujících podmínek, musí dojít k jejich vyrušení. Převod na soustavu lineárních rovnic nastane odečtením doplňkových proměnných x_3, x_4 od levých stran nerovnic. Koeficienty jejich účelové funkce jsou rovny nule. Omezující podmínky jsou tak upraveny následovně:

$$x'_1 + 17x'_2 - x_3 = 1$$

$$15x'_1 + 6x'_2 - x_4 = 1$$

a podmínky nezápornosti

$$x'_1, x'_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Níže je uvedena matice koeficientů dané soustavy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & -1 & 0 \\ 15 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Výše uvedená matice neobsahuje jednotkovou bázi, která je potřebná pro zapsání úlohy lineárního programování do simplexové tabulky. Matici je potřeba upravit tak, aby jednotkovou bázi obsahovala. V tomto případě pro její získání postačí přičtení umělých proměnných k oběma podmínkám

$$min\ f(X) = x'_1 + x'_2 + \omega x_5 + \omega x_6$$

za podmínek

$$x'_1 + 17x'_2 - x_3 \qquad + x_5 \qquad = 1$$

$$15x'_1 + 6x'_2 \qquad - x_4 \qquad + x_6 \quad = 1$$

a podmínky nezápornosti

$$x'_1, x'_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Úloha lineárního programování se bude dále řešit pomocí dvoufázové simplexové metody.

Tabulka 11: Řešení konfliktní situace 5.3 simplexovou metodou

i	B_h	C_{Bh}	X_h	1	1	0	0	ω	ω	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
1	p_5	ω	1	1	17	-1	0	1	0	0,0588
2	p_6	ω	1	15	6	0	-1	0	1	0,1667
m+1			0	0	0	0	0	0	0	
m+2			2	16	23	-1	-1	0	0	

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 12: První iterace simplexové metody

i	B_h	C_{Bh}	X_h	1	1	0	0	ω	ω	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
1	p_2	1	0,058	0,058	1	-0,058	0	0,058	0	1
2	p_6	ω	0,647	14,647	0	0,352	-1	-0,352	1	0,0441
m+1			0,058	-0,941	0	-0,058	0	0	0	
m+2			0,647	14,647	0	0,352	-1	X	0	

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 13: Druhá iterace simplexové metody

i	B_h	C_{Bh}	X_h	1	1	0	0	ω	ω	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
1	p_2	1	0,056	0	1	-0,060	0,004	0,060	-0,004	
2	p_1	1	0,044	1	0	0,024	-0,068	-0,024	0,068	
m+1			1/10	0	0	-0,036	-0,064	X	X	

Zdroj: vlastní zpracování

V poslední iteraci simplexové metody došlo k vyloučení umělých vektorů z báze. Podle posledního řádku (m+1) simplexové tabulky je viditelné, že bylo nalezeno optimální řešení, protože všechny rozdíly $z_j - c_j \leq 0$. Optimální řešení pro prvního hráče je tedy $\overline{X}' = (0{,}044;\ 0{,}056)$. Hodnota účelové funkce $f\ (\overline{X}') = \frac{1}{10}$. Hodnota celkové hry $v = 10$. Optimální strategie hráče „1“, tedy strategie ředitele společnosti vypadá následovně

$$\overline{X}' = (0{,}044 * 10;\ 0{,}056 * 10) = (0{,}44; 0{,}56)$$

Protože se jedná o duálně sdružené úlohy, bude mít optimalizační úloha z pohledu zaměstnanců stejnou hodnotu účelové funkce. Řešení duální úlohy, lze nalézt pod doplňkovými proměnnými s opačnými znaménky. Z toho vyplývá, že strategie druhého hráče, tedy zaměstnanců, vypadá následovně:

$$\overline{Y}' = (0{,}036 * 10;\ 0{,}064 * 10) = (0{,}36; 0{,}64)$$

Ekonomická interpretace výsledku

Ředitel společnosti by měl s pravděpodobností 0,44 práci o víkendech zavést. Optimální strategie však ukazuje, že s větší pravděpodobností 0,56 by pracovní dobu v sobotu a neděli zavádět neměl.

S pravděpodobností 0,36 budou existovat zaměstnanci a uchazeči o pozici ve společnosti, kteří nejsou ochotni o víkendu pracovat. Naopak s pravděpodobností 0,64 existují zaměstnanci, jenž jsou ochotni v sobotu a neděli pracovat.

Pro ředitele společnosti tedy bude nejlepší strategií nezavádět pracovní soboty i neděle. Pokud bude zavedena práce o víkendech přijde společnost o zaměstnance, kteří jsou v práci proškolení a zkušení. Jestliže zvolí strategii nezavedení práce v sobotu a neděli, získá nové zaměstnance, kteří jsou mladí, iniciativní a chtějí se učit novým věcem. Ve společnosti taktéž zůstanou zapracovaní pracovníci, kteří dokážou předat své zkušenosti novým kolegům.

Ze strany zaměstnanců a uchazečů o práci existuje však větší část těch, kteří pracovat o víkendu chtějí. To znamená, že společnost z důvodu nezavedení pracovních víkendů, o část zaměstnanců přijde. Přestože chce společnost zvýšit počet vyráběných komponentů nestojí však o zaměstnance, kteří svým nasazením zapomínají na kvalitu výrobků. Aby mohli pracovníci vytvářet kvalitní produkty, potřebují mít volný čas, který využijí na regeneraci. Onen prostor na odpočinek jim může být poskytnut taktéž pomocí nepracovních sobot a nedělí.

5.4 Konfliktní situace mezi dvěma společnostmi na trhu

Společnost X a společnost Y spolu sdílí jeden trh s kancelářskými židlemi. Cílem obou společností, je v horizontu následujících dvou let zvýšit své tržby z prodeje svých produktů. Obě společnosti se rozhodují zda investují do vylepšení balení. V takovémto případě může inovace v podobě změny balení vzejít od interního zaměstnance či může být najata firma, která nový design vytvoří. Další možností je zkvalitnění reklamy. Tímto způsobem se zviditelní nejen nabízený produkt, ale také firma jako celek. Poslední strategií, kterou mohou společnosti zvolit, je mírné snížení cen. Pokles cen však nemusí znamenat zvýšení tržeb. V dnešní době mnoho zákazníků ovlivní kvalitní a zajímavá reklama. Také designové balení produktu dokáže ovlivnit rozhodnutí spotřebitele. Náklady na všechny tři možnosti jsou poměrně srovnatelné a dostatečně velké na to, aby si každá společnost vybrala právě jednu variantu.

V tomto konfliktu mohou nastat následující situace:

- Jestliže společnost X i společnost Y zvolí variantu zlepšení balení svého produktu, zvýší se společnosti X tržby o 1 milion korun.
- Zvolí-li společnost X zkvalitnění své reklamy a společnost Y se bude držet vylepšování obalu, zvýší se zisky společnosti X o 2 miliony korun.
- V případě, že společnost X sníží ceny svých produktů, a společnost Y zatraktivní své balení produktu, zvýší se zisky společnosti X o 3 miliony korun.
- Nastane-li situace, že podnik X vylepší své balení a podnik Y zainvestuje do kvalitní reklamy, zvýší se zisky společnosti X o 3 miliony korun.
- O 5 milionů korun se zvýší zisky společnosti X v případě, že obě společnosti zvolí strategii změny reklamy.
- Pokud společnost X zvolí strategii mírného snížení cen a druhá společnost Y zlepší reklamu, sníží se zisky společnosti X o 1 milion korun.
- Situace, kdy se společnosti X zvýší zisky o 4 miliony korun nastane v případě, že vylepší své balení produktu, a společnost Y sníží ceny svých produktů.
- Pokud společnost X zainvestuje do reklamy a společnost Y sníží ceny svých produktů, zisky se společnosti X se zvýší o 1 milion korun.
- Jestliže obě společnosti zvolí strategii mírného snížení cen, zisky se oběma firmám nijak nezmění.

Řešení

V tomto příkladu vystupují dvě společnosti X a Y. Obě společnosti volí ze tří možných strategií. Jedná se o vylepšení balení svých produktů, zkvalitnění reklamy nebo mírné snížení cen.

- X: společnost X
- B, R, C: lepší balení, zvýšená reklama, mírné snížení ceny
- Y: společnost Y
- B, R, C: lepší balení, zvýšená reklama, mírné snížení ceny

V následující matici je zapsáno, o kolik procent se změní tržby společnosti X v závislosti na zvolené strategii společnosti Y:

$$\begin{array}{cc c}
 & \begin{array}{ccc} \mathrm{B} & \mathrm{R} & \mathrm{C} \end{array} & \\
\begin{array}{c} \mathrm{B} \\ \mathrm{R} \\ \mathrm{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccc} 3 & 5 & 4 \end{array} &
\end{array}$$

Prvním krokem je nalezení Nashova rovnovážného řešení. Tohoto výsledku se dosáhne nalezením sedlového prvku matice, který odpovídá nejmenšímu prvku v řádku a zároveň největšímu prvku ve sloupci. V této matici se žádný sedlový bod nenachází, proto je možné k výpočtu použít metodu lineárního programování. V tomto případě je zvolen postup pro hráče „2“, tedy výpočet z pohledu společnosti Y.

Vzhledem k tomu, že matice obsahuje záporné prvky, přičte se ke všem prvkům matice A hodnota ω = 2. Vznikne tak nová matice A´

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Úlohou teorie her je nalézt vektor $\overline{Y} = (y_1, y_2, y_3)$, který vyhovuje následujícím nerovnostem

$$3y_1 + 5y_2 + 6y_3 \leq v$$

$$4y_1 + 7y_2 + 3y_3 \leq v$$

$$5y_1 + y_2 + 2y_3 \leq v$$

a splňuje podmínku

$$y_1 + \ y_2 + \ y_3 = 1$$

Protože jsou podmínky vyjádřeny pomocí soustavy nerovnic, musí dojít k převodu na soustavu lineárních rovnic. Jedná se o úpravu přičtením doplňkových proměnných y_4, y_5, y_6 k levým stranám nerovnic. Kanonický tvar úlohy lineárního programování a omezující podmínky jsou tak upraveny následovně:

$$min\ f(Y) = -y'_1 - y'_2 - y'_3$$

$$3y_1 + 5y_2 + 6y_3 + y_4 = 1$$

$$4y_1 + 7y_2 + 3y_3 + y_5 = 1$$

$$5y_1 + y_2 + 2y_3 + y_6 = 1$$

a podmínek nezápornosti

$$y'_1, y'_2, y'_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0$$

Kanonický tvar úlohy lineárního programování se následně zapíše do simplexové tabulky.

Tabulka 14: Řešení konfliktní situace 5.4 simplexovou metodou

i	B_h	C_{Bh}	Y_h	-1	-1	-1	0	0	0	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
1	p_4	0	1	3	5	6	1	0	0	0,2000
2	p_5	0	1	4	7	3	0	1	0	0,1429
3	p_6	0	1	5	1	2	0	0	1	1,0000
m+1			0	1	1	1	0	0	0	

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 15: První iterace simplexové metody

i	B_h	C_{Bh}	Y_h	-1	-1	-1	0	0	0	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
1	p_4	0	0,286	0,143	0	3,857	1	-0,714	0	0,0741
2	p_2	-1	0,143	0,571	1	0,429	0	0,143	0	0,3333
3	p_6	0	0,857	4,429	0	1,571	0	-0,143	1	0,5455
m+1			-0,143	0,429	0	0,571	0	-0,143	0	

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 16: Druhá iterace simplexové metody

i	B_h	C_{Bh}	Y_h	-1	-1	-1	0	0	0	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
1	p_3	-1	0,074	0,037	0	1	0,259	-0,185	0	2,0000
2	p_2	-1	0,111	0,556	1	0	-0,111	0,222	0	0,2000
3	p_6	0	0,741	4,370	0	0	-0,407	0,148	1	0,1695
m+1			-0,185	0,407	0	0	-0,148	-0,037	0	

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 17: Třetí iterace simplexové metody

i	B_h	C_{Bh}	Y_h	-1	-1	-1	0	0	0	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
1	p_3	-1	0,068	0	0	1	0,263	-0,186	-0,008	
2	p_2	-1	0,017	0	1	0	-0,059	0,203	-0,127	
3	p_1	-1	0,169	1	0	0	-0,093	0,034	0,229	
m+1			-1/4	0	0	0	-0,110	-0,051	-0,093	

Zdroj: vlastní zpracování

Podle posledního řádku simplexové tabulky je patrné, že bylo nalezeno optimální řešení, protože všechny rozdíly $z_j - c_j \leq 0$. Optimálním řešením maticové hry pomocí simplexové metody s maticí plateb A´ je $\overline{\mathrm{Y}}' = (0{,}169; 0{,}017; 0{,}068)$.

Účelová funkce optimálního řešení $f(\bar{Y}') = \frac{1}{4}$. Hodnota původní hry s maticí plateb A se obdrží jako převrácená hodnota $f(\bar{Y}')$.

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{4} \rightarrow v = 4$$

Vzhledem k počátečnímu přičtení hodnoty ω = 4, se teď musí od vypočítané hodnoty hry odečíst. Výsledná hodnoty hry se tedy rovná:

$$v' = v - \omega = 4 - 2 = 2$$

Obdobně se tedy stanoví výsledný vektor optimální strategie druhého hráče, v našem případě se jedná o strategii vedení společnosti.

$$\overline{\mathrm{Y}}' = (0{,}169 * 4;\ 0{,}017 * 4;\ 0{,}068 * 4) = (0{,}6; 0{,}1; 0{,}3)$$

V tomto případě se jedná o optimalizační úlohu z pohledu společnosti X, tedy prvního hráče, která je sdružená. Z toho vyplývá, že mají úlohy stejnou hodnotu účelové funkce. Řešení této duální úlohy lze nalézt pod doplňkovými proměnnými avšak s opačnými znaménky. To znamená, že strategie prvního hráče má následující podobu.

$$\overline{X}' = (0{,}110 * 4;\ 0{,}051 * 4;\ 0{,}093 * 4) = (0{,}5; 0{,}2;\ 0{,}3)$$

Ekonomická interpretace výsledku

Společnost Y si s pravděpodobností 0,6 zvolí strategii, při které bude investovat do zlepšení balení svých produktů. S pravděpodobností 0,1 zainvestuje do zkvalitnění reklamy. Naopak s pravděpodobností 0,3 bude mírně snižovat ceny produktů, a tím získá více zákazníků.

Společnost X bude s pravděpodobností 0,5 volit strategii vylepšení balení a změnu jeho designu. S pravděpodobností 0,2 vloží své finanční prostředky do reklamy a zviditelnění se pomocí ní. Strategii mírného snížení cen zvolí s pravděpodobností 0,3.

Pro obě společnosti vyskytující se na stejném trhu, s kancelářskými židlemi, bude nejvýhodnější zvolit strategii týkající se změny balení. Změna balení se může týkat designu, velikosti nebo obalového materiálu, který židli chrání při transportu. I když tato investice bude pro obě společnosti představovat nové náklady, postupem času přinese společnosti X zvýšení jejich tržeb o milion korun. V praxi tato investice společnosti Y nepřinese zisky žádné, naopak se o jeden milion korun sníží. Je tedy velice pravděpodobné, že se společnost Y v budoucnu vrátí ke starému balení a zainvestuje do změny v jiné oblasti. V tomto případě vyšlo, že ke změně reklamy společnosti dojde pouze s pravděpodobností 0,1. Může se však jednat o možnost, díky které se později zvýší tržby společnosti Y.

5.5 Konfliktní situace mezi projektantem a finančním manažerem

Ve společnosti XY se rozhoduje jakým směrem se dál bude ubírat. Generální ředitel společnosti se proto rozhodl pověřit firemního projektanta navržením možností, do kterých by mohla společnost investovat. Po konzultaci se zaměstnanci a středním managementem společnosti, předložil projektant generálnímu řediteli 3 návrhy na investici. První návrhem je rekonstrukce výrobní haly. Zaměstnanci si stěžují, že v místnostech není klimatizace a v létě jsou tam neúnosně vysoké teploty. Taktéž si stěžují na opadající omítku či nedoléhající okna. Druhým návrhem je digitalizace společnosti. Ta by zahrnovala nový podnikový informační systém, servery či roboty průmyslu 4.0, kteří automatizují výrobu. Třetím navrhovaným projektem je pořízení fotovoltaiky. V této souvislosti finanční manažer společnosti zanalyzoval velikost vlastních zdrojů, možnost získání úvěru a výši dotace, která může být na daný projekt získána. Poté zpracoval následující zprávu:

- V případě, že bude zvolena rekonstrukce výrobní haly, bude na ni poskytnuta dotace 6 milionů korun. U bankovní společnosti bude sjednán úvěr ve výši 5 milionů korun. Společnost tak bude muset poskytnout 10 milionů korun z vlastních zdrojů.
- Jestliže si společnost vybere projekt týkající se digitalizace a zavedení průmyslu 4.0, bude jí poskytnuta dotace ve výši 4 miliony korun. Co se týká úvěru, má možnost ho sjednat v celkové výši 9 milionů korun. Na tento projekt bude muset společnost vynaložit 2 miliony korun z vlastních zdrojů.
- Poslední možností je zvolení třetího projektu. Jedná se tedy o pořízení fotovoltaiky. V tomto případě, bude obdržena dotace 8 milionů korun. Úvěr bude sjednán ve výši 4 miliony korun. Z vlastních zdrojů společnost do tohoto projektu vloží 6 milionů korun.

Řešení

V této konfliktní situaci vystupují dva hráči. Jedná se o projektanta, který podává 3 návrhy na inovaci a finančního manažera, který zanalyzoval finanční možnosti podniku.

- R: rekonstrukce výrobní haly
- DI: digitalizace
- F: fotovoltaika
- D: dotace
- Ú: úvěr
- V: vlastní zdroje

Následující matice znázorňuje zdroje a finanční částku, která bude na daný projekt poskytnuta.

$$\begin{array}{c} \\ \text{R} \\ \text{DI} \\ \text{F} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{D} & \text{Ú} & \text{V} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 5 & 10 \\ 4 & 9 & 2 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 8 & 9 & 10 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ 5 \\ 2 \\ 4 \\ \\ \end{array}$$

Protože tato matice neobsahuje sedlový bod, následuje převod úlohy na lineární programování. Pro výpočet je zvolen postup pro hráče „1“, tedy z pohledu jednotlivých projektů.

Úlohou teorie her je nalézt vektor $\bar{X} = (x_1, x_2, x_3)$, který vyhovuje následujícím nerovnostem a rovnici

$$6x_1 + 5x_2 + 10x_3 \geq v$$

$$4x_1 + 9x_2 + 2x_3 \geq v$$

$$8x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq v$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Vzhledem k nerovnostem vyskytujícím se v soustavě omezujících podmínek, musí dojít k jejich vyrušení. K němu dojde pomocí odečtení doplňkových proměnných x_4, x_5, x_6 od levých stran nerovnic. Koeficienty jejich účelové funkce jsou rovny nule. Omezující podmínky jsou tak upraveny následovně:

$$6x'_1 + 5x'_2 + 10x'_3 - x_4 = 1$$

$$4x'_1 + 9x'_2 + 2x'_3 - x_5 = 1$$

$$8x'_1 + 4x'_2 + 3x'_3 - x_6 = 1$$

a podmínky nezápornosti

$$x'_1, x'_2, x'_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Matice koeficientů dané soustavy vypadá následovně:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 10 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pro zápis do simplexové tabulky je nutné aby matice obsahovala jednotkovou bázi. Je tedy zapotřebí ji do matice doplnit. V tomto případě pro její získání postačí přičtení umělých proměnných k omezujícím podmínkám. Kanonický tvar úlohy lineárního programování má následující tvar a lze zapsat do simplexové tabulky.

$$\min f(X) = x'_1 + x'_2 + x'_2 + \omega x_7 + \omega x_8 + \omega x_9$$

za následujících podmínek

$$6x'_1 + 5x'_2 + 10x'_3 - x_4 + x_7 = 1$$

$$4x'_1 + 9x'_2 + 2x'_3 - x_5 + x_8 = 1$$

$$8x'_1 + 4x'_2 + 3x'_3 - x_6 + x_9 = 1$$

a podmínky nezápornosti

$$x'_1, x'_2, x'_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

Tabulka 18: Řešení konfliktní situace 5.5 simplexovou metodou

i	B_h	C_{Bh}	X_h	1	1	1	0	0	0	Ω	ω	ω	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	
1	p_7	ω	1	6	5	10	-1	0	0	1	0	0	0,100
2	p_8	ω	1	4	9	2	0	-1	0	0	1	0	0,500
3	p_9	ω	1	8	4	6	0	0	-1	0	0	1	0,167
m+1			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
m+2			3	18	18	18	-1	-1	-1	0	0	0	

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 19: První iterace simplexové metody

i	B_h	C_{Bh}	X_h	1	1	1	0	0	0	Ω	ω	ω	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	
1	p_3	1	0,10	0,6	0,5	1	-0,1	0	0	0,1	0	0	0,200
2	p_8	ω	0,80	2,8	8	0	0,2	-1	0	-0,2	1	0	0,100
3	p_9	ω	0,40	4,4	1	0	0,6	0	-1	-0,6	0	1	0,400
m+1			0,10	-0,4	-0,5	0	-0,1	0	0	0	0	0	
m+2			1,20	7,2	9	0	0,8	-1	-1	X	0	0	

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 20: Druhá iterace simplexové metody

i	B_h	C_{Bh}	X_h	1	1	1	0	0	0	Ω	ω	ω	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	
1	p_3	1	0,05	0,43	0	1	-0,1	0,06	0	0,11	-0,1	0	0,118
2	p_2	1	0,10	0,35	1	0	0,03	-0,1	0	0,0	0,13	0	0,286
3	p_9	ω	0,30	4,05	0	0	0,58	0,13	-1	-0,6	-0,1	1	0,074
m+1			0,15	-0,2	0	0	-0,1	-0,1	0	0	0	0	
m+2			0,30	4,05	0	0	0,58	0,13	-1	X	X	0	

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 21: Třetí iterace simplexové metody

i	B_h	C_{Bh}	X_h	1	1	1	0	0	0	ω	ω	ω	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	
1	p_3	1	0,02	0	0	1	-0,2	0,05	0,10	0,17	0,0	-0,1	
2	p_2	1	0,07	0	1	0	0,0	-0,1	0,09	0,02	0,14	-0,1	
3	p_1	1	0,07	1	0	0	0,14	0,03	-0,2	-0,1	0,0	0,25	
m+1			1/6	0	0	0	-0,1	-0,1	-0,1	X	X	X	

Zdroj: vlastní zpracování

Protože v poslední iteraci simplexové metody došlo k vyloučení umělých vektorů z báze, je patrné, že bylo nalezeno optimální řešení, protože všechny rozdíly $z_j - c_j \leq 0$. Optimální řešení pro prvního hráče je tedy $\overline{\mathrm{X}}' = (0{,}074;\ 0{,}074; 0{,}019)$. Hodnota účelové funkce $f(\overline{X}') = \frac{1}{6}$. Hodnota celkové hry se rovná 6.

Optimální výběr projektu vypadá následovně:

$$\overline{\mathrm{X}}' = (0{,}074 * 6;\ 0{,}074 * 6; 0{,}19 * 6) = (0{,}44; 0{,}44; 0{,}12)$$

Optimalizační úloha z pohledu finančního manažera je duálně sdružená znamená to, že úlohy mají stejnou hodnotu účelové funkce. To znamená, že strategie druhého hráče vypadá následovně:

$$\overline{\mathrm{Y}}' = (0{,}056 * 6;\ 0{,}056 * 6; 0{,}056 * 6) = (0{,}336; 0{,}336; 0{,}336)$$

Ekonomická interpretace výsledku

Z pohledu projektanta, který podal tři návrhy na možnou investici vyplývá, že s pravděpodobností 0,44 bude vybrán projekt rekonstrukce výrobní haly. Se stejnou pravděpodobností může dojít k vybrání projektu týkajícího se digitalizace.

Z pohledu financování dojde při výběru projektu rekonstrukce haly k vynaložení 10 milionů korun z vlastních zdrojů společnosti. Úvěr bude poskytnut ve výši 5 milionů korun a 6 milionů korun bude získáno pomocí dotace. Vzhledem k tomu, že všechny možné způsoby financování mají stejnou pravděpodobnost poskytnutí, a to 0,336, dojde pravděpodobně k financování ze všech tří možných zdrojů.

Druhým projektem, který může být realizován je zavedení digitalizace ve společnosti. Pokud bude rozhodnuto o uskutečnění této investice, musí společnost vynaložit 2 miliony korun z vlastních zdrojů. U bankovní instituce bude sjednán úvěr ve výši 9 milionů korun a dotace bude obdržena v částce 4 miliony korun.

Vzhledem k tomu, že k pořízení fotovoltaiky dojde pouze s pravděpodobností 0,12, generální ředitel tuto možnost investice vůbec nezvažuje. Protože pravděpodobnost výběru mezi prvním a druhým projektem je stejná, bude se muset společnost rozhodnout, která investice bude nakonec realizována. Výběr se bude pravděpodobně odrážet od toho, zda bude chtít společnost z vlastních zdrojů vynaložit celých 10 milionů korun, nebo 2 miliony korun a zbytek si ponechat na neočekávané výdaje.

5.6 Konfliktní situace mezi uchazeči o pracovní pozici

Do zavedeného podniku XY se hledá nový zaměstnanec na pozici účetní. Do užšího výběrového řízení postoupili 3 uchazeči. Prvním je Adam, který je čerstvým absolventem vysoké školy. Druhým uchazečem je Barbora, jejíž praxe činí 5 let a v blízké době s partnerem plánují rozšíření rodiny. Posledním postupujícím uchazečem je Cyril, který na stejné pozici již pracoval v jiné firmě a v daném oboru má dlouholetou praxi.

Personalista, který má výběr nového zaměstnance na starost, přiřazoval kandidátům body ve třech oblastech. Kritéria výběru se týkala zkušeností v daném oboru, dosaženého vzdělání a osobního pohovoru. Personalista u každého kritéria rozděloval 20 bodů, podle toho, jak daný kandidát v dané oblasti obstál. Níže jsou uvedeny stavy bodů, které personalista rozdělil.

- V oblasti osobního pohovoru nejvíce obstál a zapůsobil svým chováním a jednáním Cyril, kterému bylo přiřazeno 10 bodů. Druhým byl Adam se sedmi body. Barbora na osobním pohovoru nezaujala. Největší překážku vidí společnost v tom, že se v blízké době chystá odejít na rodičovskou dovolenou, proto jí byly uděleny pouze 3 body.
- V oblasti zkušeností si nejlépe vede Barbora, která nejenže pracovala v podobném oboru již dříve, ale má navíc různé certifikáty, které se jí na dané pozici mohou hodit. Z tohoto důvodu jí bylo přiděleno 8 bodů. Nejvíce zkušeností v oboru, ale bez doplňkových aktivit, má Cyril. Byl proto ohodnocen 7 body. Vzhledem k tomu, že je Adam čerstvý absolvent, nemůže mít toliko zkušeností. V rámci školní praxe však navštěvoval účetní firmu, a tak jeho zkušenosti byly ohodnoceny 5 body.
- Nejvyšší dosažené vzdělání ze všech uchazečů má Adam. Jedná se o absolventa magisterského studia, proto mu personalista přiřadil 9 bodů. Cyril ukončil své studium s titulem bakalář. V tomto kritériu byl ohodnocen 6 body. Barbora má pouze středoškolské vzdělání. Proto jí bylo přiděleno 5 bodů.

Řešení

V této konfliktní situaci vystupují tři hráči. Jedná se o uchazeče na pracovní pozici účetní ve společnosti XY. Jsou jimi Adam, Barbora a Cyril. Personalista na základě stanovených kritérií přiřadil počet bodů, podle toho jak si daný kandidát v jednotlivé oblasti vedl.

  - A: Adam
  - B: Barbora
  - C: Cyril

- P: osobní pohovor
- Z: zkušenosti
- V: vzdělání

V matici jsou znázorněny personalistou přidělené body.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & P & Z & V & \\ \hline A & 7 & 5 & 9 & 5 \\ B & 3 & 8 & 5 & 3 \\ C & 10 & 7 & 6 & 6 \\ \hline & 10 & 5 & 9 & \end{array}$$

Prvním bodem výpočtu je nalezení sedlového bodu matice. V této matici se však sedlový prvek nenachází. Dalším krokem je tedy převod úlohy na lineární programování. Pro výpočet je zvolen postup pro hráče „2“. Tedy postup z pohledu jednotlivých kritérií stanovených personalistou.

Úlohou teorie her je nalézt vektor $\overline{Y} = (y_1, y_2, y_3)$, který vyhovuje následujícím nerovnostem a rovnici

$$7y_1 + 5y_2 + 9y_3 \leq v$$

$$3y_1 + 8y_2 + 5_3 \leq v$$

$$10y_1 + 7y_2 + 6y_3 \leq v$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

V tomto případě je kanonický tvar úlohy lineárního programování a omezující podmínky následující:

$$min\ f(Y) = -y'_1 - y'_2 - y'_3$$

$$7y'_1 + 5y'_2 + 9y'_3 + y_4 = 1$$

$$3y'_1 + 8y'_2 + 5y'_3 + y_5 = 1$$

$$10y'_1 + 7y'_2 + 9y'_3 + y_6 = 1$$

a podmínky nezápornosti

$$y'_1, y'_2, y'_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0$$

Úloha lineárního programování se bude řešit pomocí simplexové tabulky.

Tabulka 22: Řešení konfliktní situace 5.6 simplexovou metodou

i	B_h	C_{Bh}	X_h	-1	-1	-1	0	0	0	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
1	p_4	0	1	7	5	9	1	0	0	0,1111
2	p_5	0	1	3	8	5	0	1	0	0,2000
3	p_6	0	1	10	7	6	0	0	1	0,1667
m+1			0	1	1	1	0	0	0	

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 23: První iterace simplexové metody

i	B_h	C_{Bh}	X_h	-1	-1	-1	0	0	0	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
1	p_3	-1	0,111	0,778	0,556	1	0,111	0	0	0,2000
2	p_5	0	0,444	-0,889	5,222	0	-0,556	1	0	0,0851
3	p_6	0	0,333	5,333	3,667	0	-0,667	0	1	0,0909
m+1			-0,111	0,222	0,444	0	-0,111	0	0	

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 24: Druhá iterace simplexové metody

i	B_h	C_{Bh}	X_h	-1	-1	-1	0	0	0	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
1	p_3	-1	0,064	0,872	0	1	0,170	-0,106	0	0,0732
2	p_2	-1	0,085	-0,170	1	0	-0,106	0,191	0	-0,5000
3	p_6	0	0,021	5,957	0	0	-0,277	-0,702	1	0,0036
m+1			-0,149	0,298	0	0	-0,064	-0,085	0	

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 25: Třetí iterace simplexové metody

i	B_h	C_{Bh}	X_h	-1	-1	-1	0	0	0	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
1	p_3	-1	0,061	0	0	1	0,211	-0,004	-0,146	
2	p_2	-1	0,086	0	1	0	-0,114	0,171	0,029	
3	p_1	-1	0,004	1	0	0	-0,046	-0,118	0,168	
m+1			- 1/7	0	0	0	-0,050	-0,050	-0,050	

Zdroj: vlastní zpracování

Z posledního řádku (m+1) simplexové tabulky je viditelné, že bylo nalezeno optimální řešení, protože všechny rozdíly $z_j - c_j \leq 0$. Optimálním řešením maticové hry pomocí simplexové metody s maticí plateb A´ je $\overline{\mathrm{Y}}' = (0{,}004;\ 0{,}086;\ 0{,}061)$.

Účelová funkce optimálního řešení $f(\bar{Y}') = \frac{1}{7}$. Hodnota původní hry s maticí plateb A se obdrží jako převrácená hodnota $f(\bar{Y}')$.

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{7} \rightarrow v = 7$$

Výsledný vektor optimální strategie druhého hráče, v našem případě se jedná o kritéria výběru nového zaměstnance, se stanoví následovně:

$$\bar{Y}' = (0{,}004 * 7;\ 0{,}086 * 7; 0{,}061 * 7) = (0{,}02; 0{,}60; 0{,}38)$$

Protože se jedná o duálně sdružené úlohy, budou mít stejnou hodnotu účelové funkce. Z pohledu uchazečů o zaměstnání se jedná o optimalizační úlohu. Řešení duální úlohy, lze nalézt pod doplňkovými proměnnými s opačnými znaménky. Strategie prvního hráče má tedy tvar:

$$\bar{X}' = (0{,}050 * 7;\ 0{,}050 * 7; 0{,}050 * 7) = (0{,}33; 0{,}33; 0{,}33)$$

Ekonomická interpretace výsledku

Vzhledem k tomu, že pravděpodobnost přijetí daného uchazeče je u všech stejná, a to 0,33, mají všichni kandidáti stejné předpoklady a možnosti pracovní pozici účetní ve společnosti získat.

Co se týká kritérií, podle kterých personalista výběr uskutečňuje, tak s nejmenší pravděpodobností, tedy 0,02 bude přihlížet ke kritériu týkajícího se osobního pohovoru. Pro některé uchazeče to může být výhodou. V den konání pohovoru jim nemuselo být dobře či se mohla v jejich životě stát jiná nepředvídatelná událost, která napomohla k jejich nervozitě nebo nejistotě. S pravděpodobností 0,6 je přihlíženo ke kritériu zkušeností, které jsou v tomto oboru velice ceněné. Z tohoto důvodu jsou považovány za nejdůležitější. S pravděpodobností 0,38 se přihlíží k dosaženému vzdělání uchazečů o práci.

Přestože se k osobnímu pohovoru přihlíží pouze s nepatrnou pravděpodobností 0,02 nebude se pro další výběrová řízení rušit. Při rozhovoru s možným nadřízeným či personalistou, se může kandidát zeptat na otázky, které ho zajímají či jsou pro něj důležité. Z pohledu společnosti je dobré vědět, jak uchazeč reaguje na nepříjemné dotazy. Do budoucna může společnost uvažovat o dalším možném kritériu pro přijetí, jako je například skupinový pohovor. V tomto případě by personalista pozval všechny kandidáty najednou. Při zadání různých úkolů by pozoroval, jak se chovají a vystupují v kolektivu, či jak se staví k řešení problémů.

5.7 Konfliktní situace mezi vedením společnosti a zaměstnanci

Společnost XY se rozhodla, že chce snížit své výdaje týkajících se benefitů pro zaměstnance, aby mohla investovat do nových projektů. Finanční oddělení udělalo analýzu podnikových benefitů a vybralo tři, o jejichž zrušení uvažuje. Jedná se o zrušení slev na firemní produkty pro zaměstnance, zrušení večerních jazykových kurzů a zrušení školky pro děti zaměstnanců. Podnik zaměstnává 10 000 zaměstnanců. Vedení společnosti pověřilo vedoucí jednotlivých úseků, aby zaměstnancům rozeslali anketu, ve které budou hlasovat, které zrušení je nejméně ovlivní. Na výběr měli možnosti „pro, proti, nevím".

Hlasování dopadlo následovně:

- Pro zrušení slev na firemní produkty hlasovalo 1 000, proti bylo 2 000. V tomto případě však 7 000 zaměstnanců zaškrtlo možnost nevím. Jak bylo zpozorováno, firemní slevy zaměstnanci využívají zřídka. Jedná se pouze o čas před Vánoci. Toto hlasování proto nebylo překvapivé.
- Zrušení večerních jazykových kurzů schvaluje 3 000 lidí. Proti je 5 000 zaměstnanců. V tomto případě 2 000 zaškrtlo možnost nevím. Jedná se o zaměstnance, kteří tuto možnost nevyužívají.
- Co se týká možnosti zrušení školky pro děti zaměstnanců je jich proti 6 000, protože firma XY je jedna z mála společností, která tuto možnost nabízí. Rodiče dětí si tohoto benefitu velice váží. Pro zrušení hlasovalo 1 000 zaměstnanců. 3 000 hlasů bylo typu „nevím". Jednalo se převážně o bezdětné zaměstnance, nebo zaměstnance s dospělými dětmi.

Řešení

V této konfliktní situaci vystupují dva hráči. Jedná se o vedení společnosti, které podává 3 návrhy možných benefitů, které mohou být zrušeny. Druhého hráče představují zaměstnanci, kteří hlasovali v anketě.

  - S: slevy na firemní produkty
  - J: jazykové kurzy
  - Š: škola pro děti zaměstnanců
  - R: proti
  - P: pro
  - N: nevím

V následující matici je znázorněno, kolik zaměstnanců dalo jednotlivým variantám hlasů. Hlasy jsou uvedeny v tisících.

$$\begin{array}{cccc} & R & P & N \\ \begin{array}{c} S \\ J \\ Š \end{array} & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}} \\ & 6 & 5 & 7 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

Protože matice neobsahuje sedlový prvek následuje převod úlohy na lineární programování. Pro výpočet je zvolen postup pro hráče „1“, tedy z pohledu jednotlivých benefitů, které mohou být zrušeny.

Úlohou teorie her je nalézt vektor $\bar{X} = (x_1, x_2, x_3)$, který vyhovuje následujícím nerovnostem a rovnici

$$x_1 + 2x_2 + 7x_3 \geq v$$

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq v$$

$$6x_1 + x_2 + 3x_3 \geq v$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Kanonický tvar úlohy lineárního programování má následující tvar:

$$\min f(\mathrm{X}) = x'_1 + x'_2 + x'_2 + \omega x_7 + \omega x_8 + \omega x_9$$

za následujících podmínek

$$x'_1 + 2x'_2 + 7x'_3 - x_4 + x_7 = 1$$

$$3x'_1 + 5x'_2 + 2x'_3 - x_5 + x_8 = 1$$

$$6x'_1 + x'_2 + 3x'_3 - x_6 + x_9 = 1$$

a podmínky nezápornosti

$$x'_1, x'_2, x'_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

Úloha lineárního programování se bude dále řešit pomocí simplexové metody.

Tabulka 26: Řešení konfliktní situace 5.7 simplexovou metodou

i	B_h	C_{Bh}	X_h	1	1	1	0	0	0	ω	ω	ω	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	
1	p_7	ω	1	1	2	7	-1	0	0	1	0	0	0,143
2	p_8	ω	1	3	5	2	0	-1	0	0	1	0	0,500
3	p_9	ω	1	6	1	3	0	0	-1	0	0	1	0,333
m+1			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
m+2			3	10	8	12	-1	-1	-1	0	0	0	

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 27: První iterace simplexové metody

i	B_h	C_{Bh}	X_h	1	1	1	0	0	0	ω	ω	ω	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	
1	p_3	1	0,14	0,1	0,3	1	-0,1	0	0	0,1	0	0	1,000
2	p_8	ω	0,71	2,7	4,4	0	0,3	-1	0	-0,3	1	0	0,263
3	p_9	ω	0,57	5,6	0,1	0	0,4	0	-1	-0,4	0	1	0,103
m+1			0,14	-0,9	-0,7	0	-0,1	0	0	0	0	0	
m+2			1,29	8,3	4,6	0	0,7	-1	-1	X	0	0	

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 28: Druhá iterace simplexové metody

i	B_h	C_{Bh}	X_h	1	1	1	0	0	0	ω	ω	ω	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	
1	p_3	1	0,13	0	0,3	1	-0,2	0	0,0	0,2	0	0,0	0,455
2	p_8	ω	0,44	0	4,4	0	0,1	-1	0,5	-0,1	1	-0,5	0,100
3	p_1	1	0,10	1	0,0	0	0,1	0	-0,2	-0,1	0	0,2	4,000
m+1			0,23	0	-0,7	0	-0,1	0	-0,2	0	0	0	
m+2			0,44	0	4,4	0	0,1	-1	0,5	X	0	X	

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 29: Třetí iterace simplexové metody

i	B_h	C_{Bh}	X_h	1	1	1	0	0	0	ω	ω	ω	$\frac{x_{ij}}{P_{ij}} > 0$
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	
1	p_3	1	0,10	0	0	1	-0,2	0,1	0,0	0,2	-0,1	0,0	
2	p_2	1	0,10	0	1	0	0,0	-0,2	0,1	0,0	0,2	-0,1	
3	p_1	1	0,10	1	0	0	0,1	0,0	-0,2	-0,1	0,0	0,2	
m+1			3/10	0	0	0	-0,1	-0,2	-0,1	X	X	X	

Zdroj: vlastní zpracování

V poslední iteraci simplexové metody došlo k vyloučení umělých vektorů z báze. Proto je vidět, že bylo nalezeno optimální řešení, protože všechny rozdíly $z_j - c_j \leq 0$. Optimální řešení pro prvního hráče je tedy $\overline{X}' = (0{,}010;\ 0{,}010; 0{,}010)$. Hodnota účelové funkce $f(\bar{X}') = \frac{3}{10}$. Hodnota celkové hry se rovná 10/3.

Optimální výběr projektu vypadá následovně:

$$\overline{X}' = (0{,}10 * 3{,}33;\ 0{,}10 * 3{,}33; 0{,}10 * 3{,}33) = (0{,}33; 0{,}33; 0{,}33)$$

Optimalizační úloha z pohledu hlasování je duálně sdružená. To znamená, že bude mít stejnou hodnotu účelové funkce. Řešení duální úlohy vypadá tedy následovně:

$$\overline{Y}' = (0{,}065 * 3{,}33;\ 0{,}159 * 3{,}33; 0{,}076 * 3{,}33) = (0{,}22; 0{,}53; 0{,}25)$$

Ekonomická interpretace výsledku

Z výsledků ankety vyplynulo, že každá z variant může být zrušena s pravděpodobností 0,33. To znamená, že může být zrušen benefit slev na firemní produkty, stejně jako jazykové kurzy a školka pro děti zaměstnanců.

S pravděpodobností 0,53 hlasovali zaměstnanci pro zrušení některého z benefitů. Je tedy patrné, že zaměstnanci stojí o to, aby nějaký benefit zrušen byl. Proti hlasovali zaměstnanci s pravděpodobností 0,22. S pravděpodobností 0,25 zaměstnancům nezáleží na tom, zda o nějaký z nabízených benefitů přijdou nebo nikoli.

Konečné rozhodnutí o zrušení je však na vedení společnosti. Díky dotazníku bylo zjištěno, že zaměstnanci mají zájem o nové benefity na úkor těch zavedených. Protože má firma mnoho zaměstnanců, kteří mají malé děti a většina z nich navštěvuje právě firemní školku, její zrušení nepřipadá v úvahu. Jazykové kurzy navštěvuje taktéž značná část zaměstnanců, kteří by na soukromé lekce nedocházeli, proto využívají tuto možnost. Znamená to pro ně i čas strávený se svými kolegy, a s tím spojené prohlubování přátelských vztahů na pracovišti. Vzhledem k tomu, že slevy na firemní produkty jsou ve velké míře využívány pouze před Vánoci, pravděpodobně se vedení společnosti rozhodne pro zrušení toho benefitu. Zájemci, kteří tyto slevy využívají, mohou například místo vánočních peněžních odměn dostat poukaz na firemní produkty ve výši zmíněných odměn. Zavedení programu pro podporu duševního zdraví, může být jedním z nových benefitů, který nahradí stávající slevy pro zaměstnance. Program může mít podobu příspěvků na cvičení, na relaxaci v lázních, či na návštěvy kvalifikovaných terapeutů.

ZÁVĚR

Cílem práce bylo popsat maticové hry jako úlohu lineárního programování a následně vyřešit několik příkladů, se kterými se lze setkat v podnikové praxi.

K dosažení hlavního cíle diplomové práce bylo zapotřebí nejdříve nadefinovat základní teoretické pojmy. První část vymezovala konfliktní situace a rozhodovací proces. Popisovala také jednotlivé modely konfliktního rozhodování, jejichž dělení bylo na závěr znázorněno graficky. Druhá kapitola se zabývala modelem lineárního programování a simplexovou metodou. Poslední kapitola teoretické části se věnovala teorii her, její historii a vývoji. Pro pochopení práce byly vysvětleny základní pojmy související s teorií her. Následně také samotná maticová hra. Závěr kapitoly popisoval základní modely konfliktů v teorii her, se kterými se může každý z nás v reálném životě setkat. Jedná se například o manželský spor či vězňovo dilema.

V praktické části práce byl vysvětlen převod úlohy teorie her na úlohu lineárního programování z obou úhlů. Jedná se o pohled prvního hráče a o pohled druhého hráče na celou konfliktní situaci. Následně bylo řešeno sedm příkladů z podnikové praxe. První příklad znázornil, že ne všechny maticové hry se dají počítat pomocí převodu na lineární programování. Další příklady se řešily pomocí simplexové metody. Jednalo se o konfliktní situace mezi vedením společnosti a odborovým svazem, mezi ředitelem a zaměstnanci společnosti nebo mezi dvěma společnostmi na trhu. Dále mezi projektantem a finančním manažerem společnosti či mezi třemi uchazeči o pracovní pozici. Výsledky těchto příkladů však neudávají konkrétní návod, jak se v daných situacích zachovat. Ukazují pouze možnost výběru té nejvhodnější strategie. Příklady jsou stanoveny s jistým zjednodušením skutečnosti. Na základě tohoto ulehčení může dojít k určitému zkreslení výsledků.

Na závěr lze konstatovat, že teorie her se netýká pouze her, jako šachy, dáma či poker. Pokud se tedy hovoří o hrách, nemusí se vždy jednat o hry společenské. Jak práce ukazuje mohou se týkat i konfliktů v oblasti bankovnictví, ekonomie, podniků či ucházení se o novou pracovní pozici.

POUŽITÁ LITERATURA

1. BĚLOHRAD, Radim, 2015. In memoriam Johna Forbese Nashe, I Pro-Fil [online]. s. 100-101 [cit. 2022-10-27]. ISSN 1212-9097. Dostupné z: http://www.phil.muni.cz/journals/index.php/profil/article/view/1130

2. BLACKWELL, David a Meyer A. GIRSHICK, 1979. Theory of games and statistical decisions. New York: Dover Publications. ISBN 0-486-63831-6.

3. CARMICHAEL, Fiona, 2005. A Guide to Game Theory. Edinburgh: Pearson Education. ISBN 0-273-68496-5.

4. DANTZIG, George B., 1963. Linear programming and extensions. Princeton: Princeton University Press. Princeton landmarks in mathematics and physics. ISBN 0-691-05913-6.

5. DLOUHÝ, Martin a Petr FIALA, 2007. Úvod do teorie her. Vyd. 1. Praha: Oeconomica. ISBN 978-80-245-1273-0.

6. DLOUHÝ, Martin a Petr FIALA, 2009. Úvod do teorie her. 2., přeprac. vyd. Praha: Oeconomica. ISBN 9788024516097.

7. FIALA, Petr, 1999. Teorie rozhodování. Ústí nad Labem: Univerzita J.E. Purkyně. ISBN 80-7044-237-9.

8. FIALA, Petr, 2013. Modely a metody rozhodování. 3., přeprac. vyd. V Praze: Oeconomica. ISBN 978-80-245-1981-4.

9. FOTR, Jiří, 2006. Manažerské rozhodování: postupy, metody a nástroje. Praha: Ekopress. ISBN 80-86929-15-9.

10. HEISSLER, Herbert, Radim VALENČÍK a Petr WAWROSZ, 2010. Mikroekonomie: středně pokročilý kurz. 1. vyd. Praha: Vysoká škola finanční a správní. Eupress. ISBN 978-80-7408-040-1.

11. HILLIER, Frederick a Gerald LIEBERMAN, 2021. Introduction to Operations Research. 11th Edition. New York: Mc Graw Hill. ISBN 978-1-260-57587-3.

12. HOLT, Charles a Alvin ROTH, 2004. The Nash equilibrium: A perspective. Proceedings of the National Academy of Sciences [online]. 101(12), 3999-4002 [cit. 2022-10-31]. ISSN 0027-8424. Dostupné z: doi:10.1073/pnas.0308738101

13. CHVOJ, Martin, 2013. Pokročilá teorie her ve světě kolem nás. 1. vyd. Praha: Grada. ISBN isbn978-80-247-4620-3.

14. LINDA, Bohdan a Josef VOLEK, 2016. Lineární programování. Vydání 6., opravené a doplněné. [Pardubice]: Univerzita Pardubice. ISBN 978-80-7560-018-9.

15. MAŇAS, Miroslav, 1974. Teorie her a optimální rozhodování. Praha: SNTL. ISBN 04-012-74.

16. MAŇAS, Miroslav, 1991. Teorie her a její aplikace. 1. vyd. Praha: SNTL. Teoretická knižnice inženýra. ISBN 80-03-00358-x.

17. NASH, John, 1951. Non-Cooperative Games. The Annals of Mathematics [online]. 54(2) [cit. 2023-02-13]. ISSN 0003486X. Dostupné z: doi:10.2307/1969529

18. NASH, John, 1953. Two-Person Cooperative Games. Econometrica [online]. 21(1) [cit. 2023-02-13]. ISSN 00129682. Dostupné z: doi:10.2307/1906951

19. PLESNÍK, Ján, Jitka DUPAČOVÁ a Milan VLACH, 1990. Lineárne programovanie. 1. vyd. Bratislava: Alfa. ISBN 80-05-00679-9.

20. PRUKNER, Vítězslav a Jaromír NOVÁK, 2014. Základy managementu [online]. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci [cit. 2022-11-04]. ISBN 978-80-244-4182-5. Dostupné z: https://publi.cz/books/189/Cover.html

21. SEHNALOVÁ, Iva, 2015. Jak zvládat konfliktní situace: příručka pro každého. Praha: Inboox CZ. ISBN 978-80-905416-1-0.

22. STEHEL, Vojtěch, 2019. Využití teorie her při řízení podniku. Plzeň: Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk, s.r.o. Monografie (Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk). ISBN 978-80-7380-789-4.

23. ŠUBRT, Tomáš, 2019. Ekonomicko-matematické metody. 3. upravené a rozšířené vydání. Plzeň: Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk, 351 s. ISBN 978-80-7380-762-7.

24. TAHA, Hamdy A., 2017. Operations research an introduction. Tenth edition. Boston: Pearson. ISBN 0134444019.

25. TURZÍK, Daniel, 1999. Matematika III: základy optimalizace. Vyd. 3. Praha: Vydavatelství VŠCHT. ISBN 80-7080-363-0.

26. VEBER, Jaromír, 2009. Management: základy, moderní manažerské přístupy, výkonnost a prosperita. 2., aktualiz. vyd. Praha: Management Press. ISBN 978-80-7261-200-0.

27. VENKATARAMAN, P., 2002. Applied optimization with MATLAB programming. New York: John Wiley & Sons. ISBN 0-471-34958-5.

28. VOLEK, Josef, 2010. Modelování a řešení rozhodovacích situací. 1. vyd. Pardubice: Univerzita Pardubice. ISBN 9788073953119.