

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní

Durace a konvexita dluhopisu
Bakalářská práce

2023

Lenka Karalová

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2021/2022

Studijní program: Ekonomika a management
Forma studia: Prezenční
Specializace/kombinace: Management finančních
institucí (MFI)

Podklad pro zadání BAKALÁŘSKÉ práce studenta

Jméno a příjmení: **Lenka Karalová**
Osobní číslo: **E20108**

Téma práce: **Durace a konvexita dluhopisu**
Téma práce anglicky: **Duration and convexity of the bond**

Vedoucí práce: **Mgr. Libor Koudela, Ph.D.**
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Zásady pro vypracování:

Cílem práce je sestavení imunizovaného dluhopisového portfolia. Vedle základních charakteristik dluhopisů bude objasněna závislost ceny dluhopisu na změně úrokové míry a vysvětleny pojmy durace a konvexita, které budou využity při sestavování portfolia.

Osnova:

- Dlouhodobé cenné papíry.
- Dluhopisy – základní znaky a charakteristiky.
- Tržní cena a vnitřní hodnota dluhopisu.
- Změna tržní ceny dluhopisu v závislosti na změně úrokové sazby
- Durace a konvexita dluhopisu.
- Sestavení dluhopisového portfolia.

Seznam doporučené literatury:

CIPRA, Tomáš. Matematika cenných papírů. Praha: Professional Publishing, 2013. ISBN isbn978-80-7431-079-9.
FABOZZI, Frank J. Duration, Convexity, and Other Bond Risk Measures. John Wiley & Sons, 1999. ISBN 978-1-883-24963-2.
MUSÍLEK, Petr. Trhy cenných papírů. 2., aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Ekopress, 2011. ISBN isbn978-80-86929-70-5.
STÁDNÍK, Bohumil. Trhy dluhopisů. Praha: Oeconomica, nakladatelství VŠE, 2015. ISBN isbn978-80-245-2084-1.
ŠOBA, Oldřich a Martin ŠIRŮČEK. Finanční matematika v praxi. 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing, 2017. Partners. ISBN isbn978-80-271-0250-1.
VESELÁ, Jitka. Investování na kapitálových trzích. 3. vydání. Praha: Wolters Kluwer, 2019. ISBN isbn978-80-7598-212-4.

Podpis studenta:

Datum:

Podpis vedoucího práce:

Datum:

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji:

Práci s názvem **Durace a konvexita dluhopisu** jsem vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 7/2019 Pravidla pro odevzdávání, zveřejňování a formální úpravu závěrečných prací, ve znění pozdějších dodatků, bude práce zveřejněna prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 28.4.2023.

Lenka Karalová

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych touto cestou vyjádřila poděkování Mgr. Liboru Koudelovi, Ph.D., za vedení mé práce, za cenné rady a odborné poznatky a také za jeho čas, který mi byl věnován při psaní práce. Dále bych chtěla poděkovat své rodině a přátelům za podporu během psaní mé práce.

ANOTACE

V této bakalářské práci se zabýváme dluhopisy, jejich oceňováním a závislosti na změnu úrokové míry. V první části uvádíme několik základních charakteristik a členění dluhopisu. Dále vysvětlujeme pojmy durace, konvexita dluhopisu a imunizace dluhopisového portfolia. V druhé části bakalářské práce sestavujeme modelové dluhopisové portfolio, z kterého vypočítáme duraci a konvexitu, abychom mohli sestavit imunizované dluhopisové portfolio.

KLÍČOVÁ SLOVA

Dluhopisy, riziko, Taylorův polynom, durace, konvexita, dluhopisové portfolio, imunizace.

TITLE

Duration and convexity of the bond

ANNOTATION

In this bachelor's thesis, we deal with bonds, their valuation and dependence on interest rate changes. In the first part, we present several basic characteristics and breakdown of the bond. Next, we explain the concepts of bond duration, bond convexity and bond portfolio immunization. In the second part of the bachelor's thesis, we compile a model bond portfolio, from which we calculate the duration and convexity, so that we can compile an immunized bond portfolio.

KEYWORDS

Bonds, risk, Taylor polynomial, duration, convexity, bond portfolio, immunization.

OBSAH

ÚVOD.....	8
1 DLOUHODOBÉ CENNÉ PAPÍRY	9
1.1 Obchodování s cennými papíry	9
1.2 Dělení cenných papírů.....	10
2 DLUHOPISY	11
2.1 Druhy dluhopisů.....	12
2.2 Tržní cena a vnitřní hodnota dluhopisu	14
2.3 Výhody a nevýhody spojené s dluhopisy	16
2.4 Faktory ovlivňující cenu dluhopisu.....	17
3 Durace, konvexita a imunizace portfolia	18
3.1 Taylorův polynom	18
3.2 Durace dluhopisu.....	18
3.2.1 Faktory, ovlivňující duraci	20
3.2.2 Macaulayova durace.....	20
3.2.3 Další druhy durace	21
3.3 Konvexita dluhopisu	23
3.4 Imunizace portfolia	25
4 Sestavení dluhopisového portfolia.....	26
4.1 Imunizace portfolia pomocí durace	27
4.2 Imunizace portfolia pomocí durace a konvexity	29
4.3 Změna ceny dluhopisového portfolia	32
ZÁVĚR.....	33

SEZNAM TABULEK A OBRÁZKŮ

Tabulka 1. Dluhopisové portfolio	26
Tabulka 2. Durace a konvexita dluhopisů	26
Tabulka 3. Dluhopisové portfolio se dvěma dluhopisy	27
Tabulka 4. Váhy dluhopisů	28
Tabulka 5. Imunizované portfolio	29
Tabulka 6. Dluhopisové portfolio se třemi dluhopisy	30
Tabulka 7. Váhy dluhopisů	31
Tabulka 8. Imunizované portfolio	31
Obrázek 1. Závislost ceny dluhopisu na změně úrokové sazby pomocí durace a konvexity ...	24
Obrázek 2. Změna ceny dluhopisu	32

ÚVOD

Cílem této bakalářské práce je **sestavení imunizovaného dluhopisového portfolia**. Vedle základních charakteristik dluhopisů bude objasněna závislost ceny dluhopisu na změně úrokové míry a vysvětleny pojmy **durace a konvexita**, které budou využity při **sestavování portfolia**. Téma, kterým se budeme zabývat je důležité zejména pro investory a velké firmy, které investují do dluhopisů. V bakalářské práci se budeme snažit o sestavení portfolia, rezistentního vůči úrokovým změnám. Vybrané téma jsem si vybrala kvůli matematickému pohledu na problematiku dluhopisů, které mi přišlo velmi zajímavé a pro mě navíc přitažlivé.

Struktura práce obsahuje dvě části. První, teoretická část, objasňuje základní charakteristiky nezbytné k seznámení s tématem a k jeho pochopení. V první řadě budou popsány dlouhodobé cenné papíry a jejich dělení. Dále se zaměříme na dluhopisy, jejich základní znaky a charakteristiky. Uvedeme si výpočet tržní a vnitřní hodnoty dluhopisu a také závislost změny ceny dluhopisu při změně úrokových sazeb. Předposledním z bodů teoretické části bude vysvětlení pojmů **durace a konvexita**, které vycházejí z definice Taylorova polynomu, vysvětlené v práci. Nakonec popíšeme, jak funguje imunizace portfolia. Tyto pojmy jsou nezbytné pro sestavení příkladu v praktické části.

V praktické části, která začíná od kapitoly 4, budeme sestavovat modelové příklady, při kterých využijeme **duraci a konvexitu** pro sestavení imunizovaného portfolia. Ze sestaveného modelového portfolia provedeme výpočet **durace a konvexity** v prostředí Microsoft Excel a následně budeme aplikovat hodnoty na imunizaci portfolia, tedy minimalizovat úrokové riziko. V posledním kroku znázorníme graficky změnu ceny dluhopisu, aby byl co nejlépe vidět význam a smysl imunizace.

1 DLOUHODOBÉ CENNÉ PAPIŘY

V první kapitole se budeme zabývat problematikou cenných papírů. Vysvětlíme pojem cenný papír a uvedeme několik členění cenných papírů, které jsou důležité především pro tuto práci. Budeme se zajímat hlavně o dlouhodobé cenné papíry.

Za jeden z nejvýznamnějších investičních instrumentů na finančních a kapitálových trzích jsou považovány cenné papíry. Pod pojmem cenný papír se rozumí listina, se kterou se uplatňuje určitý nárok. Pro vlastníka představuje cenný papír pohledávku vůči emitentovi, který emitoval cenný papír na trh. Tímto obchodem vzniká vztah mezi věřitelem a dlužníkem. Dlužník (emitent) je zavázán, že splní svůj závazek z cenného papíru a vlastník má právo požadovat vyplacení svých nároků. Pro vlastníka mají cenné papíry význam ve zhodnocení jeho peněžních prostředků. (Veselá, 2007)

Dlouhodobými cennými papíry rozumíme ty, které obvykle mají splatnost delší než jeden rok a jsou obchodovatelné na kapitálových trzích. Emitované cenné papíry mají zaručenou veřejnou obchodovatelnost na burzovních trzích. Pro emitenta představuje cenný papír závazek, ze kterého získá finanční prostředky, ty je však povinen splatit do splatnosti cenného papíru. Na druhé straně vlastník má možnost investovat své peněžní prostředky s cílem zhodnocení těchto prostředků. Riziko, které podstupuje investor při obchodování s dlouhodobými cennými papíry, je především riziko likvidity. Výnos z dlouhodobých cenných papírů úzce souvisí se změnami tržních sazeb a také s tím, zda má cenný papír úrokovou sazbu pevnou nebo pohyblivou. (Cipra, 2000, Tuovila, 2022, Rejnuš, 2014)

1.1 Obchodování s cennými papíry

Subjekty na finančních a kapitálových trzích mají buď přebytek nebo nedostatek finančních prostředků. Trhy cenných papírů zajišťují přesun finančních prostředků od přebytkových jednotek k deficitním s cílem jejich produktivního a efektivního využití. Hlavní instrumenty obchodovatelné na trzích jsou především akcie, dluhopisy nebo finanční deriváty (opce, futures, forwardy, swapy).

Obchodování s cennými papíry probíhá buď na burzách, tedy organizovaných trzích nebo na mimoburzovním trhu. Na **burze** je obchodováno s investičními instrumenty s přesně vymezenými a specifickými podmínkami. Burzy jsou obvykle založeny ve formě akciové společnosti. Subjekty, které zde vystupují, jsou označovány jako obchodníci s cennými papíry, k obchodování mají oprávnění od burzovní komory. Pomocí těchto zprostředkovatelů mohou se svými finančními prostředky obchodovat investoři individuální, například osoby nebo firmy, ale také institucionální investoři (banky, investiční společnosti). Registraci cenných papírů upravuje zákon o podnikání na kapitálovém trhu. **Mimoburzovní trh** není vymezen tolik, jako trh burzovní. Jeho fungování v České republice je vymezeno §73-81 zákona č. 256/2004 Sb., o podnikání na kapitálovém trhu. V České republice je jediným mimoburzovním fungujícím trhem RM-systém a.s. Na tento trh mohou zákazníci vstoupit bez jakéhokoliv zprostředkování. Jediným předpokladem je založení účtu ve Středisku cenných papírů. (Čížinská, Režňáková, 2007, Veselá 2007)

Mezi hlavní funkce trhů můžeme uvést alokační a operační efektivnost a dále funkci likvidity. **Alokační** efektivnost požaduje reflektování informací pomocí cen finančních instrumentů, aby nedošlo k vysílání falešných signálů na trhu. **Operační** efektivností finančních trhů rozumíme přesun peněžních prostředků s co nejmenšími náklady. Pro maximalizaci bohatství je za potřebí, aby obě efektivnosti byly na co nejvyšší úrovni. Na trzích mohou jak přebytkové, tak deficitní jednotky měnit své portfolio, a to prodejem nebo nákupem investičních instrumentů. Funkce **likvidity** zajišťuje na trzích rychlou přeměnu těchto instrumentů na hotovost za nízkých transakčních nákladů. Všechny funkce přispívají k hladkému fungování trhů cenných papírů a přispívají tak k důvěře subjektů obchodovat zde se svými finančními prostředky. (Musílek 2011, Čížinská, Režňáková, 2007, Veselá 2007)

1.2 Dělení cenných papírů

Cenné papíry se dají dělit z několika hledisek. Nejčastěji se dělí podle podoby na listinné a zaknihované cenné papíry. Listinné cenné papíry existují ve fyzické podobě, mezi příklady můžeme uvést směnky, šeky nebo také některé dluhopisy. Zaknihované cenné papíry jsou na rozdíl od listinných pouze v elektronické podobě. Většina cenných papírů je dnes emitována v zaknihované podobě.

Dalším důležitým dělením je dělení z majtkové podstaty. Z hlediska zdroje vlastnických práv investora se vymezují dvě skupiny: majtkové cenné papíry a dluhové cenné papíry.

Podle definice „jsou za „klasické“ **majtkové cenné papíry** všeobecně považovány především podnikové neboli tzv. korporální akcie, jejichž zakoupení znamená majtkový vstup investora do akciové společnosti neboli nabytí práv akcionáře společníka.“ (Rejnuš, 2014, str. 230)

Akcie se nejběžněji označují jako obchodovatelné cenné papíry. Akcionář nabývá práva podílet se na zisku společnosti nebo také na řízení, a pokud by došlo k zániku podniku, má právo se podílet na likvidačním zůstatku. Výnos z akcie není předem zaručen, protože cena akcie závisí na poptávce a nabídce na trhu. Jedním z možných výnosů je tedy rozdíl mezi pořizovací cenou a aktuální tržní cenou akcie. Druhou možností výnosu z akcie je dividenda, což je podíl na zisku při vlastnictví akcie. (Cipra, 2000)

Dluhové cenné papíry (dluhopisy) vyjadřují závazek emitenta vůči jeho majitelům, se kterým je spojena povinnost emitenta (dlužníka) splatit jmenovitou hodnotu dluhopisu do jeho splatnosti. Doba splatnosti dluhopisu je pevně stanovena. Podle ní můžeme rozdělit dluhopisy na krátkodobé se splatností do jednoho roku, na střednědobé splatné mezi jedním rokem až čtyřmi lety a dále na dlouhodobé dluhopisy, které mají dobu splatnosti delší než 4 roky. V další kapitole se budeme zabývat pouze střednědobými a dlouhodobými dluhopisy, tedy dluhopisy s dobou splatnosti delší než jeden rok. (Radová, Dvořák, Málek, 2007, Veselá, 2007)

2 DLUHOPISY

V následující kapitole probereme termín dluhopisy podrobněji. Ukážeme si, kdo může dluhopisy emitovat, a další způsoby dělení dluhopisů. Uvedeme několik výhod a nevýhod z hlediska emitování dluhopisu. Dále se budeme zabývat také cenou dluhopisu, jeho jmenovitou hodnotou a výnosem z dluhopisu.

Jak jsme již uvedli v předchozí kapitole, dluhopisy jsou cenné papíry spojené se závazkem emitenta splatit jeho majitelům dlužnou částku do doby splatnosti dluhopisu. Podle Rejnuše (2014, str. 230) *se jedná o cenné papíry dokladující zapůjčení peněžních prostředků investorem, který jejich zakoupením získá právo na předem stanovený úrok, jakož i na navrácení zapůjčené částky (jistiny) za předem stanovených podmínek.*

Cipra (2000) představuje dluhopisy jako velmi rozšířené druhy cenných papírů, jejichž emisí získává emitent úvěrový kapitál. Z tohoto důvodu se z emitenta stává dlužník a z držitele dluhopisu je věřitel.

Zákon v České republice upravující problematiku dluhopisů je zákon č. 190/2004 Sb., o dluhopisech. Pomocí dluhopisů si emitent získává pro své účely finanční prostředky, proto můžeme nazvat nabídku dluhopisů jako poptávku po peněžních prostředcích a obráceně poptávka po dluhopisech představuje jejich nabídku. Rozdíl mezi klasickými úvěry a dluhopisy spočívá v možnosti obchodování s dluhopisy také na sekundárních (mimoburzovních) trzích. (Cipra, 2000, Rejnuš 2014, Veselá 2007)

Mezi nejčastější emitenty, kteří chtějí pomocí emise dluhopisů získat peněžní prostředky jsou podle Veselé (2007):

- stát;
- banky;
- firmy;
- územně samostatný právní celek

ČNB jako regulační orgán musí schválit emisní podmínky předtím, než bude dluhopis vydán.

2.1 Druhy dluhopisů

Prvním základním dělením dluhopisů je dělení podle doby jejich splatnosti. Můžeme tak dluhopisy rozdělit na krátkodobé a dlouhodobé. Mezi **krátkodobé dluhopisy**, se splatností do jednoho roku můžeme zařadit státní pokladniční poukázky, depozitní certifikáty a směnky. V naší práci budeme potřebovat znát především dluhopisy dlouhodobé, proto se dále budeme zajímat právě o tyto dluhopisy. Kromě krátkodobých a dlouhodobých dluhopisů existují také časově neohraňované dluhopisy, které nazýváme **dluhopisy věčné**. Jedná se o dluhopisy, které nemají určen termín splatnosti a zaručují fixní úrokové platby. Tyto dluhopisy se vyskytují výjimečně. (Rejnuš, 2014)

Dlouhodobé dluhopisy, označované také jako obligace, jsou dluhopisy s dobou splatnosti delší než jeden rok. Můžeme se setkat i s dělením dluhopisů na střednědobé a dlouhodobé, kde střednědobé dluhopisy mají dobu splatnosti od jednoho roku do deseti let a za dlouhodobé

dluhopisy se považují ty s dobou splatnosti nad deset let a většinou nebývají emitovány déle než do třiceti let. Spolu s dluhopisy je spojeno mnoho práv, které vyplývají z jejich funkce a také z legislativy daných zemí. Existuje několik druhů dluhopisů a jejich rozdělení spočívá ve výpočtu výnosu z dluhopisu a způsobu vyplacení. Mezi nejběžnější druhy dluhopisů uvádíme dluhopisy s pevným zúročením (kupónové dluhopisy), dluhopisy s proměnlivým zúročením (s variabilní úrokovou sazbou) nebo dluhopisy s nulovým zúročením. (Rejnuš, 2014, Veselá, 2007)

Dluhopisy s fixní úrokovou sazbou (kupónem) představují nejznámější a nejrozšířenější druh dluhopisu. Nákupem investor získá právo na výplatu kupónových plateb, které jsou dány pevně stanovenou úrokovou sazbou, jež je v emisních podmínkách předem určena a je neměnná. Dále má právo na vyplacení jmenovité hodnoty, která je splacena na konci doby splatnosti a bývá splacena zpravidla jednorázově. Pro investora je výhodná držba takového dluhopisu v období neinflačním, protože kurzové riziko spojené s dluhopisem je v tomto případě vyšší než s dluhopisem s variabilním kupónem. Pro emitenta je naopak výhodná emise dluhopisu s pevným kupónem v inflačním období. (Veselá, 2007)

Dluhopis s variabilní úrokovou sazbou (kupónem) má vyšší kupónové platby vázanou na předem určenou úrokovou sazbu, které se výše kupónových plateb přizpůsobují. Vázaná neboli referenční úroková sazba bývá nejčastěji mezibankovní úroková sazba (PRIBOR¹, LIBOR², BRIBOR³). Tyto mezibankovní úrokové sazby znamenají průměrné sazby, za které si banky půjčují mezi sebou. Tato úroková sazba je zvětšena o prémii, stanovenou v emisních podmínkách a její výše závisí na bonitě daného emitenta. Kupónové platby s určitým zpožděním kopírují vývoj tržních úrokových měr, proto při růstu tržních úrokových měr může získat investor vyšší výnos. V druhém případě při poklesu tržních úrokových měr by kupónová platba klesala. (Rejnuš, 2014, Veselá 2007)

Dluhopisy s nulovým kupónem nevyplácí žádné kupónové platby. Jejich výnos plyne z rozdílu mezi nákupní cenou a nominální hodnotou. Tyto dluhopisy jsou emitovány s diskontem, tedy jsou prodávány hluboko pod jejich nominální hodnotou. Očekávaný výnos

¹ Prague Interbank Offered Rate

² London Interbank Offered Rate

³ Bratislava Interbank Offered Rate

získává investor v době splatnosti dluhopisu. Tento druh dluhopisů je ze všech nejvíce citlivý na pohyb úrokových sazeb. (Cipra, 2000, Rejnuš, 2014, Veselá, 2007)

Dalším druhem dluhopisu můžeme uvést **indexované dluhopisy**, jejichž kupónové platby jsou vázány na vývoj některého z ekonomických indexů. Nejčastěji se jedná o míru inflace. Může se ale jednat i o jiné indexy, například pohyb cenové hladiny, úrokové míry nebo index mezd.

Vypověditelné dluhopisy mají v emisních podmínkách stanoveno právo emitenta na dřívější splacení dluhopisu dle své volby. Většinou je v podmínkách uváděno po jak dlouhé době může emitent právo „svolatelnosti“ uplatnit, neboť pro investory je takový dluhopis značně nevýhodný, a proto nejsou vypověditelné dluhopisy tolik atraktivní a je třeba zvýšení úroku. (Cipra, 2000)

Zvláštní formou dluhopisu jsou **hypoteční zástavní listy**. Jedná se o dluhopisy, které jsou zjištěny pohledávkami z hypotečních úvěrů nebo zástavou nemovitosti. Emitentem zástavních hypotečních listů mohou být pouze banky, které mají k této činnosti povolení od regulatorního orgánu. Pro investory je investování do takových dluhopisů výhodné, protože s sebou nenesou takové riziko, jako standardní dluhopisy. Je to dáno tím, že splacení jmenovité hodnoty a kupónových plateb je zajištěno ze strany emitenta a také zástavními právy k nemovitosti. Další výhodou můžeme uvést kupónové platby z dluhopisu, které jsou v ČR osvobozeny od daně z příjmu. Jsou obchodovatelné na sekundárních trzích. (Veselá, 2007)

2.2 Tržní cena a vnitřní hodnota dluhopisu

V této kapitole se budeme soustředit na vysvětlení ceny dluhopisu. Popíšeme tržní cenu dluhopisu a dále vnitřní hodnotu dluhopisu. Uvedeme zde vzorečky, pomocí kterých můžeme výše uvedené pojmy vypočítat.

Při obchodování s dluhopisy na sekundárním trhu je nutnou náležitostí, aby měl dluhopis stanovenou **tržní cenu**. Ta je stanovena především nabídkou a poptávkou na trhu, které jsou ovlivňovány řadou faktorů. Abychom zjistili, jak se bude investor rozhodovat, potřebujeme znát vnitřní hodnotu dluhopisu. Pro výpočet **vnitřní hodnoty** dluhopisu budeme uvažovat dluhopis s pevným kupónem a s pevnou úrokovou sazbou. Tím pak můžeme tržní cenu stanovit

jako současnou hodnotu všech budoucích plateb plynoucích z dluhopisu. Matematicky vyjádříme výpočet následujícím vzorcem:

$$P = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C}{(1+r)^n} + \frac{JH}{(1+r)^n} \quad (1)$$

P vnitřní hodnota dluhopisu neboli současná hodnota budoucích plateb z dluhopisu

C roční kupónová úroková platba ($C = k \times JH$, kde k je kupónová sazba)

JH jmenovitá hodnota dluhopisu

r tržní úroková sazba

n doba splatnosti dluhopisu v letech

Pro stanovení hodnoty dluhopisu je třeba znát očekávané příjmy z dluhopisu, časový okamžik příjmů a dále tržní úrokovou sazbu. Ze vzorečku pro výpočet tržní ceny dluhopisu nám vyplývají následující skutečnosti: pokud tržní úroková míra vzroste, cena dluhopisu bude klesat. Bude-li se rovnat kupónová sazba k úrokové sazbě r , bude se tržní cena dluhopisu P rovnat jmenovité hodnotě JH . Kupónová sazba je procentuální vyjádření kupónových plateb dluhopisu. Pokud bude kupónová sazba k větší než úroková sazba r , cena dluhopisu P bude větší než jmenovitá hodnota JH . (Radová, Dvořák, Málek, 2007, Musílek, 2011)

Po výpočtu vnitřní hodnoty dluhopisu může nyní investor porovnat vnitřní hodnotu s tržní cenou dluhopisu. Můžou nastat tři situace, těmi jsou:

- Tržní cena je větší než vnitřní hodnota dluhopisu – dluhopis je nadhodnocen.
- Tržní cena je menší než vnitřní hodnota dluhopisu – dluhopis je podhodnocen.
- Tržní cena dluhopisu a vnitřní hodnota se rovnají – dluhopis je správně oceněn.

(Musílek, 2011)

Budeme-li uvažovat výpočet vnitřní hodnoty bezkupónového dluhopisu, výraz pro výpočet bude jednodušší, protože se zde nepočítá s žádnými kupónovými platbami během splatnosti dluhopisu. Výraz bude vypadat následovně:

$$P_{NK} = \frac{JH}{(1+r)^n} \quad (2)$$

P_{NK} vnitřní hodnota bezkupónového dluhopisu

JH jmenovitá hodnota dluhopisu

r tržní úroková sazba

n doba splatnosti dluhopisu v letech

(Radová, Dvořák, Málek, 2007)

2.3 Výhody a nevýhody spojené s dluhopisy

S držbou dluhopisu je spojeno několik výhod a nevýhod, kterými se od sebe liší dluhopis a akcie. Můžeme se na ně podívat jak z hlediska majitele dluhopisu, tak z pohledu emitenta. Významnou výhodou pro emitenta dluhopisu je možnost získat velký objem cizích finančních prostředků, s čímž je spojena další výhoda, a to splatit vypůjčené peněžní prostředky až po delší době. Při nastavených emisních podmínkách může emitent splatit peněžní prostředky dřív, než je splatnost dluhopisu. Při držbě dluhopisu majiteli nevznikají žádné práva na zasahování do společnosti, která dluhopis vydala. Náklady na úroky jsou pro emitenta odčitatelnou položkou od daňového základu.

Nevýhodou pro emitenta bude větší zadlužení firmy, dále vysoké emisní náklady. Pro předpoklad emise dluhopisu musí emitent disponovat dobrou hospodářskou situací a prestiží, aby získal dobrý rating a zaujal investory pro koupi jeho dluhopisu. Emitent je povinen v budoucnosti vyplácet ve stanovených termínech kupónové platby a zároveň splácet jmenovitou hodnotu dluhopisu. Pokud není v emisních podmínkách stanoveno, emitent nesmí předčasně dluhopis splatit; to by pro emitenta představovalo nevýhodu v případě klesajících úrokových měr.

Aby měli investoři zájem o dluhopisy, musí jim koupě dluhopisu přinášet nějaké výhody. Těmi je zejména pravidelný příjem peněžních prostředků v podobě kupónových plateb. Při držbě dluhopisu s pevnými úrokovými sazbami je pro ně dluhopis výhodný bez ohledu na tržní podmínky. U dluhopisu je riziko spojené s investicí nižší než u akcie. Pokud je dluhopis obchodovatelný na sekundárním trhu, může investor dluhopis prodat, čímž je zajištěna také likvidita investice. Každá investice sebou nese i nevýhody. Pro investora z držby dluhopisu nevyplývá žádné právo podílet se na řízení firmy. V případě pohyblivých úrokových sazeb je držba dluhopisu nevýhodná za inflace. Majitel je povinen platit daň z kupónových plateb i ze zisků. (Veselá, 2007)

2.4 Faktory ovlivňující cenu dluhopisu

V předchozí kapitole jsme si uvedli, jak se vypočítá vnitřní hodnota dluhopisu a její porovnání s tržní cenou dluhopisu. Tato kapitola se bude zabývat faktory, které cenu dluhopisu ovlivňují.

Ze vzorce pro výpočet vnitřní hodnoty je patrné, že cena dluhopisu je ovlivňována čtyřmi faktory, kterými jsou kupónové platby, jmenovitá hodnota, doba splatnosti a tržní úroková sazba. Kupónové platby, jmenovitá hodnota a doba splatnosti bývá zpravidla předem stanovena, proto je hlavním faktorem právě změna tržních úrokových sazeb.

Pokud budou tržní úrokové sazby růst, vnitřní hodnota dluhopisu klesne a naopak, budou-li tržní úrokové sazby růst, povede to k růstu vnitřní hodnoty. Tento vztah mezi tržní hodnotou a sazbou dluhopisu můžeme nazvat jako inverzní. Platí, že dluhopis s větší kupónovou sazbou má větší absolutní změnu počáteční hodnoty než dluhopis s malou kupónovou sazbou při změně tržních úrokových sazeb. Pro dluhopis s delší dobou splatnosti bude absolutní změna hodnoty při změně tržních úrokových sazeb vyšší než u dluhopisů s kratší dobou splatnosti. Zvýšení hodnoty dluhopisu způsobené poklesem tržní úrokové míry je větší než absolutní pokles hodnoty. (Musílek, 2011)

3 DURACE, KONVEXITA A IMUNIZACE PORTFOLIA

Pro řízení úrokových rizik dluhopisového portfolia firem nebo jiných institucí je nutné pochopit pohyb ceny dluhopisu v závislosti na změně tržních úrokových měr. V této kapitole se seznámíme se dvěma způsoby, jak můžeme riziko měřit. Při malých změnách tržních úrokových sazeb se využívá první derivace ceny dluhopisu podle úrokové sazby, která souvisí s tzv. **durací**. Přesnější aproximaci změny ceny musíme přidat další člen nazývaný jako **konvexita**. Měří zakřivení křivky vyjadřující vztah mezi úrokovou mírou a cenou dluhopisu. S portfoliem citlivým na změny úrokových sazeb by se měl investor snažit o rovnováhu mezi durací (popř. konvexitou) aktiva durací (popř. konvexitou) pasiv. Proces, který má snahu o rovnováhu, se nazývá **imunizace** portfolia. (Radová, Dvořák, Málek, 2007, Veselá, 2007)

3.1 Taylorův polynom

V praxi bývá často účelné uvažovat o nahrazení (aproximaci) dané funkce v okolí daného bodu jinou, jednodušší funkcí, se kterou se bude lépe pracovat. Nejčastěji se využívají polynomy.

Obecně k dané funkci f a k danému bodu x_0 hledáme polynom $T_n(x)$ nejvýše n -tého stupně tak, aby rozdíl $f(x) - T_n(x)$ byl v bodě x_0 nekonečně malý řádu vyššího než n . Dá se ukázat (viz např. Jarník, 1974, s. 289 a n.), že takovým polynomem je výraz

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (3)$$

který nazýváme Taylorovým polynomem funkce f v bodě x_0 .

Pojmy durace a konvexita souvisejí s vyjádřením změny ceny dluhopisu v závislosti na změně tržní úrokové sazby pomocí Taylorova polynomu.

3.2 Durace dluhopisu

V této části se seznámíme s pojmem durace dluhopisu. Vysvětlíme si, co je to durace, na čem závisí a jaká je její vypovídací schopnost a jak dokážeme pomocí durace odhadnout změnu ceny dluhopisu při změně úrokových sazeb. Ukážeme si, jak se durace vypočítá, protože u různých dluhopisů se výpočet durace odlišuje. Podrobněji probereme především Macaulayovu duraci, který termín durace vytvořil. Uvedeme faktory, které ovlivňují hodnotu durace.

Durace měří citlivost ceny dluhopisu na pohyb tržních úrokových měr. (Veselá, 2007, str. 558)
Podle Musílka (2011, str. 412) durace představuje průměrnou dobu, za kterou získáme příjmy z dluhopisu.

Při měření rizika dluhopisu nebo dluhopisového portfolia se využívá všech standardních postupů. Jmenovitě můžeme mluvit o kalkulaci variability nebo rozptylu. Jednou ze specifických měr rizika dluhopisu je durace. Ta je závislá na třech veličinách, a to na době splatnosti dluhopisu, na změně tržních úrokových sazeb a na kupónové platbě. Jedná se o první stupeň, kdy měříme úrokové riziko a vypočítá se derivací ceny dluhopisu podle úrokové míry.

Pro vyjádření durace pro dluhopis s ročními kupónovými platbami budeme vycházet ze vzorce (1) pro výpočet ceny dluhopisu. (část 2.3)

Budeme zkoumat strmost křivky závislosti ceny na výnosu, tedy budeme derivovat cenu dluhopisu podle r . Po derivaci získáme následující vztah:

$$P' = -\frac{C}{(1+r)^2} - \frac{2C}{(1+r)^3} - \frac{3C}{(1+r)^4} - \dots - \frac{nJH}{(1+r)^{n+1}} \quad (4)$$

Zpřehledníme výraz tak, že vytkneme výraz $1/(1+r)$ a zároveň vydělíme a vynásobíme cenou P .

$$P' = \frac{-\frac{1}{(1+r)} \left(\frac{C}{(1+r)} + \frac{2C}{(1+r)^2} + \frac{3C}{(1+r)^3} + \dots + \frac{nJH}{(1+r)^n} \right)}{P} P \quad (5)$$

První část výrazu na pravé straně označíme MD a budeme nazývat Macaulayova durace:

$$MD = \frac{\frac{C}{(1+r)} + \frac{2C}{(1+r)^2} + \frac{3C}{(1+r)^3} + \dots + \frac{nJH}{(1+r)^n}}{P} \quad (6)$$

Symbody odpovídají předchozím vymezením.

Pokud bychom uvažovali dluhopis s nulovým kupónem, bude se Macaulayova durace rovnat době splatnosti, protože střední doba splatnosti dluhopisu s jedním budoucím finančním tokem v době splatnosti je rovna právě této době.

U věčného dluhopisu neboli dluhopisu bez splatnosti bude výpočet následující:

$$MD = \frac{1 + r}{r} \quad (7)$$

3.2.1 Faktory, ovlivňující duraci

Faktory, ovlivňující hodnotu durace, jsou především doba splatnosti dluhopisu, výše kupónových plateb a úroková míra. Platí, že s vyšší dobou splatnosti dluhopisu, bude durace vyšší než u dluhopisu s nižší dobou splatnosti. Je ovšem důležité, že mezní přírůstky durace stále klesají, to znamená, že s vyšší dobou splatnosti roste citlivost ceny dluhopisu, roste však klesajícím tempem.

Dalším ovlivňujícím faktorem durace je výše kupónové platby. Platí, že dluhopis s vyšším kupónem má duraci nižší a klesá tak citlivost ceny dluhopisu na změnu tržních úrokových sazeb. Naopak při nižší kupónové platbě bude dluhopis citlivější na změny tržních úrokových sazeb a zároveň hodnota durace roste. Platí proto, že v případě dluhopisu s nulovým kupónem bude durace nejvyšší.

Tržní úrokové míry mají také vliv na hodnotu durace. Vztah mezi durací a úrokovými měrami je inverzní. Při růstu úrokových měř je hodnota durace nižší a při poklesu se bude hodnota durace neboli citlivost ceny dluhopisu na pohyb úrokových měř růst. Tato skutečnost je dána přepočtem budoucích příjmů na současné hodnoty. Růstem úrokových měř se snižují váhy pro přepočet současných hodnot. Následkem bude snížení hodnoty durace. (Veselá, 2007)

3.2.2 Macaulayova durace

Pojem durace zavedl v roce 1938 Frederick Macaulay. Durace měří průměrnou dobu, kdy investor obdrží budoucí příjmy z dluhopisu. Spočítá se jako **vážený aritmetický průměr** z let, které zbývají do splatnosti s vahami současných hodnot budoucích příjmů.

K čemu bude sloužit vypočtená hodnota investorovi? Čím větší bude hodnota vypočtené durace, tím více je cena dluhopisu citlivá na změnu tržních úrokových měř. Je tedy zřejmé, že vyšší hodnotu durace budou mít dluhopisy s vyšším kurzovým rizikem, které jsou nejvíce citlivé na změnu tržních úrokových měř. Využívá se nejen k vyšetření citlivosti dluhopisu na úrokových mírách, ale slouží také k sestavení imunizovaného dluhopisového portfolia.

Durace takového portfolia potom odpovídá době praktického využití portfolia. Imunizované portfolio je také „imunní“ vůči změnám tržních úrokových měr. (Cipra, 2000, Veselá 2007)

Pomocí durace jsme také schopni vyjádřit přibližnou změnu ceny dluhopisu. Pro výpočet potřebujeme znát hodnotu durace, tržní úrokovou míru před změnou, cenu dluhopisu a změnu úrokové míry. Změnu ceny dluhopisu vypočítáme následujícím vzorečkem:

$$dP \approx -MD \frac{1}{1+r} P \times dr \quad (8)$$

- dP změna ceny dluhopisu
 MD Macaulayova durace
 r tržní úroková míra před změnou
 P výchozí cena dluhopisu
 dr změna úrokové míry.

3.2.3 Další druhy durace

Kromě Macaulayovy durace, kterou jsme popsali v kapitole 3.1, existují další druhy durace, které mohou analytici využívat pro kalkulace. Mezi ně patří modifikovaná durace, dolarová durace nebo efektivní durace.

Modifikovanou duraci nalezneme ve vzorečku pro odhad změny ceny dluhopisu. Můžeme ji zapsat následujícím způsobem:

$$D_M = MD \frac{1}{1+r} \quad (9)$$

- D_M modifikovaná durace
 MD Macaulayova durace
 r tržní úroková míra

Odhad změny ceny dluhopisu můžeme vypočítat i pomocí modifikované durace a to následovně:

$$dP = -D_M \times P \times dr \quad (10)$$

Symbols odpovídají předchozím vymezením.

Efektivní durace se odlišuje od modifikované tím, že u modifikované durace uvažujeme dluhopis, u kterého se tok peněz nemění při změně výnosu. Budeme-li uvažovat dluhopis, u něhož je očekávána změna toku peněz při změně výnosu, efektivní durace bude mít lepší vypovídací hodnotu než modifikovaná durace. (Fabozzi, 1999)

Dalším druhem durace je durace dolarová, kterou můžeme vypočítat následovně.

$$DD = \frac{MD \times P}{1 + r} \quad (11)$$

DD Dolarová durace

Symboly odpovídají předchozím vymezením.

Z matematického zápisu je vidět, že se dolarová durace také vyskytuje ve vzorečku pro výpočet změny ceny dluhopisu. Proto můžeme vyjádřit výpočet změny ceny také s pomocí dolarové durace:

$$dP = DD \times dr \quad (12)$$

Symboly odpovídají předchozím vymezením.

Platí, že čím menší bude změna úrokových sazeb, tím přesnější odhad změny ceny pomocí durace získáme. To je dáno tím, že díky duraci linearizujeme závislost ceny dluhopisu na úrokové sazbě. S růstem úrokových sazeb se snižuje přesnost výsledků. Důvodem je durace, která nahrazuje vývoj ceny dluhopisu tečnou ke křivce v původní úrokové míře. Pro zpřesnění výsledku změny ceny dluhopisu v závislosti na změně úrokových měr, vztah je třeba rozšířit o konvexitu, které se bude věnovat následující kapitola. (Fabozzi, 1999, Veselá, 2007)

3.3 Konvexita dluhopisu

Následující kapitola bude o dalším způsobu měření úrokového rizika u dluhopisů, o konvexitě. V kapitole si uvedeme, co pojem znamená a k čemu nám bude přínosná. Vysvětlíme si, jak můžeme konvexitu vypočítat a z čeho výpočet vychází. V neposlední řadě ukážeme výpočet změny ceny dluhopisu při změně úrokových sazeb, a to za pomoci konvexity a durace.

Podle Veselé (2007, str. 564) *konvexita představuje další, druhý stupeň měření úrokového rizika. Měří zakřivení křivky, která vyjadřuje vztah mezi úrokovou měrou a cenou dluhopisu.*

Pomocí durace jsme byli schopni aproximovat změnu ceny pomocí první derivace ceny dluhopisu, tedy přímkou. Jelikož tento způsob bude zahrnovat určitou chybu, můžeme výsledek zpřesnit, pokud přidáme člen, který získáme druhou derivací ceny dluhopisu podle úrokové míry.

$$dP \approx P' dr + \frac{1}{2} P'' dr^2 \quad (13)$$

V takovém případě mluvíme o konvexitě, která je matematicky definována následujícím vzorcem:

$$CX = \frac{1}{(1+r)^2} \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)C}{(1+r)^k} + \frac{n(n+1)JH}{(1+r)^n} \quad (14)$$

CX	konvexita dluhopisu
r	tržní úroková míra
n	doba splatnosti dluhopisu
C	roční kupónová platba
JH	jmenovitá hodnota.

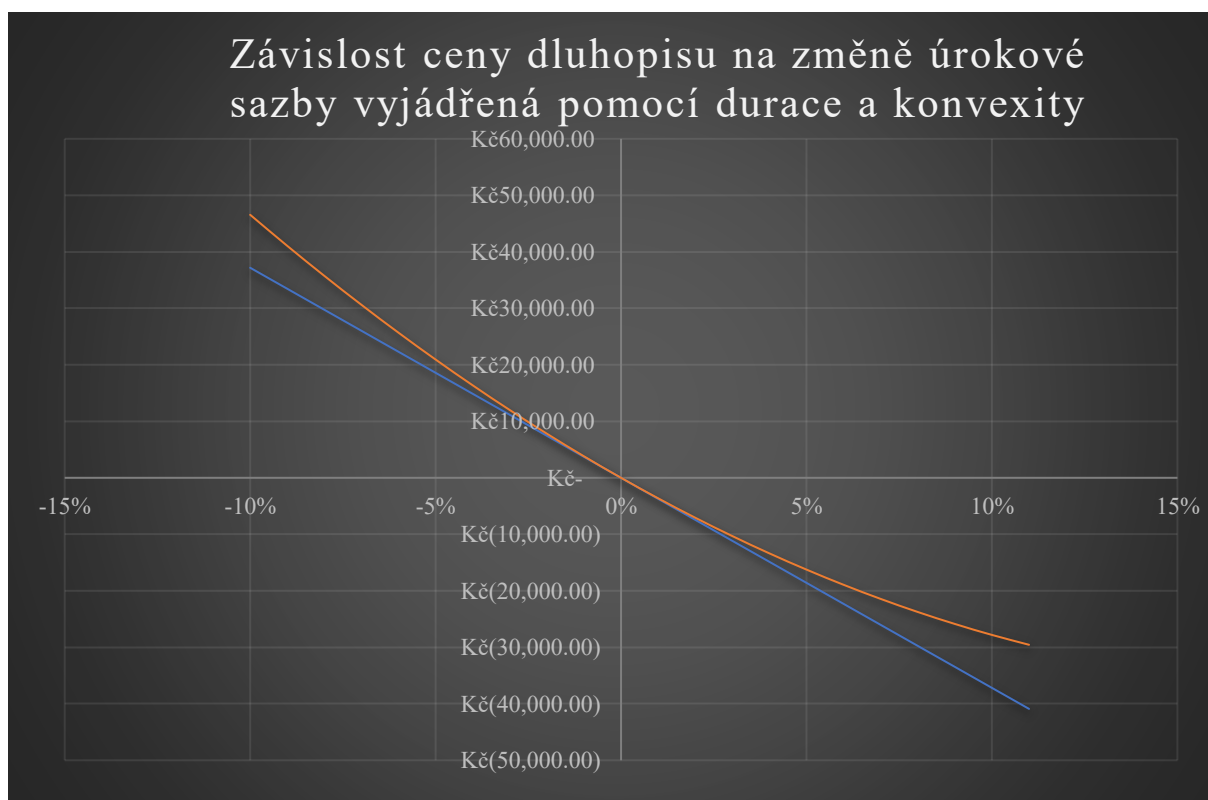
Když spojíme údaje o výpočtu durace a o konvexitě, můžeme tyto dva údaje použít pro výpočet změny ceny dluhopisu při změně tržní úrokové míry.

$$dP = -MD \frac{1}{1+r} P \times dr + \frac{1}{2} CX \times dr^2 \quad (15)$$

Symbole odpovídají předchozím vymezením.

Začleněním konvexity do výpočtu změny ceny dosáhneme přesnějšího výsledku, než kdybychom použili pouze vzorec obsahující pouze duraci.

Můžeme si ukázat závislost mezi změnou ceny dluhopisu na změně úrokové sazby, která je vyjádřena pomocí durace a konvexity. Při uvažovaném dluhopisu s nominální hodnotou 10 000 Kč, s durací 4,13 a konvexitou 18,75 jsme schopni znázornit o kolik se změní cena dluhopisu při různých změnách úrokových sazeb. Oranžová křivka je změna ceny dluhopisu vyjádřená pomocí konvexity a modrá křivka (přímka) vyznačuje změnu ceny dluhopisu vyjádřenou durací. Změna ceny vyjádřená pomocí konvexity je více zakřivená z důvodu většího zpřesnění změny ceny, díky přidání druhého členu Taylorova polynomu.



Obrázek 1. Závislost ceny dluhopisu na změně úrokové sazby pomocí durace a konvexity
Zdroj: vlastní zpracování.

3.4 Imunizace portfolia

Předpokládejme portfolio složené z aktiv a pasiv citlivých na úrokové změny. Cílem takového portfolia bude pro investora rovnost současných hodnot aktiv a pasiv. Pokud by však investor provedl platbu a úrokové míry by se změnily, hodnota pasiv a aktiv se nemusí změnit o stejnou částku. Metodou imunizace jsme schopni sestavit takové portfolio, které bude vůči menším změnám tržních úrokových měr imunní.

Následující technika se provádí za pomoci vypočítané durace, určující míru citlivosti na změně tržních úrokových sazeb. Budeme potřebovat znát hodnotu durace portfolia, která se rovná váženému součtu durací jednotlivých cenných papírů. Pokud si při budoucích závazcích zajistíme současná aktiva s citlivostí na úrokové míry, bude řešením imunizovaného portfolia řešení dvou soustav rovnic:

Durace aktiv = durace pasiv

Současná hodnota aktiv = současná hodnota pasiv

(Cípra, str. 92-94, 2000)

Konvexitu je také možné použít při řešení imunizace portfolia. Jediným rozdílem bude přidání třetí rovnice do soustavy nerovnic:

konvexita aktiv = konvexita pasiv. (Radová, Dvořák, Málek, 2007)

4 SESTAVENÍ DLUHOPISOVÉHO PORTFOLIA

Příklady, které budeme v následujících kapitolách řešit, budou pouze modelové a nebudou počítány ze skutečných hodnot. Cílem je aplikovat teoretické poznatky na konkrétní příklad pro lepší pochopení smyslu durace a konvexity. Jedná se o modelový příklad, při jehož sestavování jsme přihlíželi k reálným údajům (např. na stránce dluhopisrepubliky.cz). Veškeré výpočty byly provedeny v programu Microsoft Excel.

V první řadě budeme sestavovat dluhopisové portfolio, ze kterého později budeme vycházet a počítat jeho duraci a konvexitu. Díky tomu budeme schopni portfolio imunizovat. Sestavíme portfolio ze tří dluhopisů, kde každý z nich má rozdílnou dobu splatnosti, výnos do splatnosti a kupónovou platbu. Uvažujeme dluhopisy s nominální hodnotou 10 000 Kč, které jsme zakoupili při emisním kurzu 97 %, tedy s tržní cenou 9 700 Kč. Hodnoty portfolia nejsou skutečné a slouží pouze k sestavení modelového příkladu. Následující tabulka ukazuje dluhopisy z portfolia a jejich charakteristiky:

Tabulka 1. Dluhopisové portfolio

Dluhopis	Nominální hodnota	Výnos do splatnosti	Kupónová platba	Tržní cena	Doba do splatnosti
A	10 000,00 Kč	7,15 %	600,00 Kč	9 700,00 Kč	3
B	10 000,00 Kč	8,26 %	750,00 Kč	9 700,00 Kč	5
C	10 000,00 Kč	9,55 %	900,00 Kč	9 700,00 Kč	8

Zdroj: vlastní zpracování.

V tabulce 2 jsou uvedeny hodnoty durace a konvexity dílčích dluhopisů, které byly stanoveny pomocí vzorců (6) a (14).

Tabulka 2. Durace a konvexita dluhopisů

Dluhopis	Durace	Konvexita
A	2,831	9,668
B	4,338	21,125
C	6,000	40,429

Zdroj: vlastní zpracování.

Pro vytvoření dluhopisového portfolia s požadovanou durací a konvexitou je za potřebí vyřešit soustavu rovnic.

$$D_{portfolio} = w_A * D_A + w_B * D_B + w_C * D_C$$

$$CX_{portfolio} = w_A * CX_A + w_B * CX_B + w_C * CX_C$$

$$1 = w_A + w_B + w_C$$

Váhy označené jako w_X určují dílčí váhy jednotlivých dluhopisů v portfoliu, které jsou rovny podílu původní investované částky do dluhopisového portfolia. Ze soustavy rovnic nám můžou vyjít tři situace. Soustava rovnic bude mít právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení nebo žádné řešení. Pokud bude existovat právě jedno řešení soustavy rovnic, budeme schopni na základě výsledku sestavit imunizované portfolio.

4.1 Imunizace portfolia pomocí durace

Uvedeme si situaci, ve které budeme uvažovat portfolio s dluhopisem A a B a při imunizaci budeme využívat pouze duraci. Uvažujeme portfolia investora, který má závazek splatit za 4 roky 1 milion korun a jeho cílem bude nalezení takové struktury dluhopisového portfolia, které bude imunizováno. To znamená, že hodnota durace portfolia bude 4.

Tabulka 3. Dluhopisové portfolio se dvěma dluhopisy

Dluhopis	Durace	Doba do splatnosti	Nominální hodnota	Tržní cena	Výnos do splatnosti
A	2,831	3	10 000,00 Kč	9 700,00 Kč	7,15 %
B	4,338	5	10 000,00 Kč	9 700,00 Kč	8,26 %

Zdroj: vlastní zpracování.

V tabulce je uvedena durace dluhopisů, kterou jsme spočítali podle vzorečku pro výpočet durace (6), uvedený v kapitole 3.2. Při imunizaci portfolia pomocí durace budeme vycházet z hodnot z předchozí tabulky, ve které máme portfolio složené ze dvou dluhopisů a snažíme se o nalezení struktury portfolia, při kterém budeme mít závazek 1 milion korun, který máme splatit za 4 roky. Abychom došli k výsledku, je třeba vyřešit následující soustavu rovnic:

$$D_{portfolio} = w_A * D_A + w_B * D_B$$

$$1 = w_A + w_B$$

Neznámé w_A a w_B jsou váhy jednotlivých dluhopisů v portfoliu a naším cílem bude nalézt tyto váhy, pomocí vyřešení soustavy rovnic o dvou neznámých. Poté budeme schopni sestavit dluhopisové portfolio.

Na levé straně první rovnice budeme dosazovat duraci portfolio, v našem případě požadovaná durace, která se rovná číslu 4. Na pravé straně dosazujeme vypočtené durace jednotlivých dluhopisů, které jsme si spočítali. Druhá rovnice má na levé straně číslo 1, abychom získali váhy s hodnotou větší než nula a zároveň menší než jedna.

Po dosazení hodnot dostáváme rovnice:

$$4 = w_A * 2,831 + w_B * 4,338$$

$$1 = w_A + w_B$$

Vyřešením nerovnice získáme hodnoty dílčích vah, které nám budou sloužit k sestavení imunizovaného portfolio. Vyšly nám následující hodnoty:

Tabulka 4. Váhy dluhopisů

w_B	0,776
w_A	0,224

Zdroj: vlastní zpracování.

Tržní úroková míra, která je rovna požadovanému výnosu z portfolio, je rovna 7,7 %. Pokud má náš závazek hodnotu 1 milion korun, jeho současnou hodnotu a zároveň současnou hodnotu portfolio, kterou budeme investovat získáme diskontováním hodnoty investice pomocí vzorce:

$$I_{PV} = \frac{I_{FV}}{(1 + r)^t}$$

(16)

I_{PV} Současná hodnota investované částky

I_{FV} Budoucí hodnota investované částky

r Úroková sazba
 t Počet let investice

Současná hodnota a zároveň investice do dluhopisového portfolia je 743 217,10 Kč. Nyní můžeme pomocí vynásobení částky s vypočtenými vahami sestavit portfolio, které bude vypadat následovně.

Tabulka 5. Imunizované portfolio

Dluhopis	Původní investovaná částka	Tržní cena	Počet nakoupených dluhopisů	Nominální hodnota
A	166 732,80 Kč	9 700,00 Kč	17,2	10 000,00 Kč
B	576 484,31 Kč	9 700,00 Kč	59,4	10 000,00 Kč

Zdroj: vlastní zpracování.

Z výsledné tabulky nám vyplývá, že pokud nakoupíme dluhopis A v hodnotě 166 732,80 Kč a dluhopis B v hodnotě 576 484,31 Kč, změna úrokových sazeb, která by mohla nastat v době držby dluhopisů by neměla ovlivnit výslednou hodnotu portfolia. Tento výpočet ovšem nezahrnuje konvexitu a tím se může stát, že se určité odchylky ve výsledné hodnotě vyskytnou. Abychom dosáhli přesnějších výsledků, bude za potřebí přidat třetí rovnici a také konvexitu do výpočtů pro dílčí váhy dluhopisového portfolia. V následující kapitole budeme tuto variantu aplikovat.

4.2 Imunizace portfolia pomocí durace a konvexity

V minulé kapitole jsme si ukázali, jak jsme schopni imunizovat portfolio pomocí durace dluhopisů. Vyšlo nám portfolio, jehož hodnota se nebude při změně úrokových sazeb příliš měnit. Jelikož jsme ale zahrnuli pouze duraci, odchylka ceny poroste se zvyšující se změnou úrokové míry.

Abychom mohli konečnou hodnotu zpřesnit, můžeme využít konvexity portfolia. Jelikož se jedná o druhý člen Taylorova polynomu, výsledkem budou přesnější hodnoty s menší odchylkou než jen se zahrnutím durace.

Předpokládejme podobnou modelovou situaci jako v předchozí kapitole se závazkem 1 milion korun, který má být za 5 let splacen. Požadované číselné charakteristiky portfolia jsou uvedeny v posledním řádku tabulky. Investor má k dispozici 3 dluhopisy ve svém portfoliu. Dluhopis A se splatností za 3 roky, dluhopis B splatný za 5 let a dluhopis C, který má splatnost za 8 let. Další vlastnosti dluhopisů včetně jejich vypočtené durace a konvexity jsou zobrazeny v následující tabulce. Durace a konvexita byla spočítána podle vzorců (6) a (14).

Durace portfolia se rovná době splatnosti závazku, tedy 5 let. Konvexita portfolia byla vypočtena podle vzorce (14), kde jsme počítali s hodnotami závazku. Použili jsme cenu závazku, tržní úrokovou míru závazku a počet let do splatnosti závazku. Hodnota konvexity nám vyšla 28,93.

Tabulka 6. Dluhopisové portfolio se třemi dluhopisy

Dluhopis	Durace	Konvexita	Doba do splatnosti	Nominální hodnota	Tržní cena	Výnos do splatnosti
A	2,831	9,668	3	10 000,00 Kč	9 700,00 Kč	7,15 %
B	4,338	21,125	5	10 000,00 Kč	9 700,00 Kč	8,26 %
C	6,000	40,429	8	10 000,00 Kč	9 700,00 Kč	9,55 %
Portfolio	5	28,93				

Zdroj: vlastní zpracování.

Abychom mohli sestavit imunizované portfolio, budeme potřebovat vyřešit soustavu rovnic podobně jako v předchozí kapitole. Rozdílem bude přidání třetí rovnice, která obsahuje konvexitu portfolia. Po dosazení do soustavy rovnic budeme řešit tyto 3 konkrétní rovnice o třech neznámých w_A , w_B a w_C :

$$\begin{aligned}
 5 &= w_A * 2,831 + w_B * 4,338 + w_C * 6 \\
 28,93 &= w_A * 9,668 + w_B * 21,125 + w_C * 40,429 \\
 1 &= w_A + w_B + w_C
 \end{aligned}$$

Po vyřešení soustavy rovnic jsme došli k následujícím hodnotám:

Tabulka 7. Váhy dluhopisů

w_A	0,02
w_B	0,57
w_C	0,42

Zdroj: vlastní zpracování.

Výsledné hodnoty nám udávají jednotlivé váhy dluhopisů v portfoliu. Díky zahrnutí durace a konvexity jsme tak schopni snížit úrokové riziko, které by bylo mnohem větší, pokud bychom imunizaci na portfolio nevyužili. Docházelo by tedy k daleko větším odchylkám hodnoty portfolia, pokud by se úrokové míry změnily.

Požadovaná tržní úroková míra je rovna 10 %. Závazek, který budeme muset za 5 let splatit, má hodnotu 1 milion korun. Diskontováním hodnoty investice pomocí vzorce (16) získáme současnou hodnotu investice, kterou vynásobíme jednotlivými váhami, které nám vyšly ze soustavy rovnic. Současná hodnota investice nám vyšla 620 921,31 Kč. Tuto částku je nyní třeba rozdělit mezi dluhopisy v našem dluhopisovém portfoliu. K tomu nám slouží právě vypočtené váhy dluhopisů.

Výsledná podoba imunizovaného portfolia je zobrazena v následující tabulce:

Tabulka 8. Imunizované portfolio

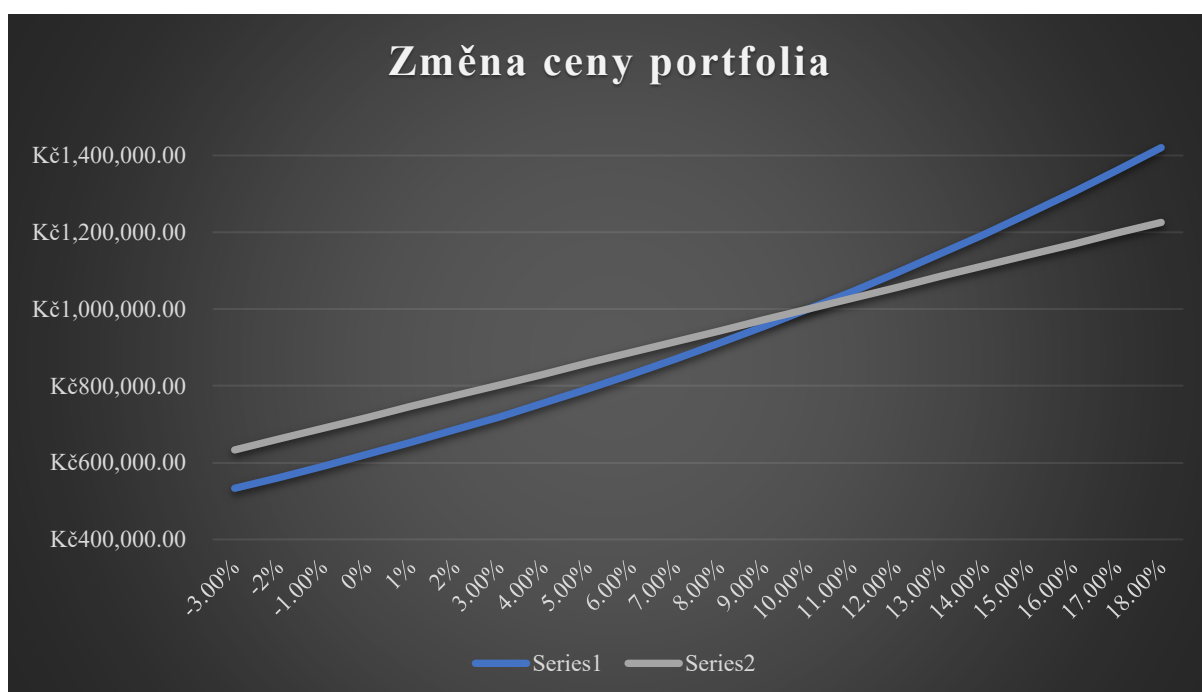
Dluhopis	Původní investovaná částka	Tržní cena	Počet nakoupených dluhopisů	Nominální hodnota
A	11 432,01 Kč	9 700,00 Kč	1,2	10 000,00 Kč
B	351 794,14 Kč	9 700,00 Kč	36,3	10 000,00 Kč
C	257 695,18 Kč	9 700,00 Kč	26,6	10 000,00 Kč

Zdroj: vlastní zpracování.

Díky duraci a konvexitě jsme dokázali sestavit imunizované portfolio, s dílčími váhami pro jednotlivé dluhopisy, které jsme vypočítali soustavami 3 rovnic o třech neznámých. Pokud nastane změna úrokových sazeb, hodnota portfolia bude mít daleko menší odchylky, než kdybychom duraci a konvexitu neaplikovali.

4.3 Změna ceny dluhopisového portfolia

Abychom si mohli co nejlépe ukázat, jaký vliv bude mít využití durace a konvexity na změnu ceny portfolia, znázorníme si změnu ceny v závislosti na změně úrokových sazeb do grafu. Řada 1 ukazuje cenu dluhopisu, pokud bychom nevyužili duraci ani konvexitu. Vypočítáme ji jako současnou hodnotu portfolia vynásobenou úročitelem $(1 + r)^t$. Řada 2 je změna ceny vypočtená pomocí vzorečku (15) v kapitole 3.3.



Obrázek 2. Změna ceny dluhopisu

Zdroj: vlastní zpracování.

Z grafu je patrné, že při použití durace a konvexity se ceny okolo hodnot 1 000 000 Kč příliš nemění s růstem nebo poklesem úrokové sazby. Rozdíly jsou velmi malé. Při zvyšující se změně se odchylky zvyšují. Z matematického hlediska je tato skutečnost dána tím, že jsme aproximovali funkci ceny portfolia v bodě 1 000 000 Kč. Pomocí aproximace je možné funkci nahradit co nejlépe v bodě x_0 a v okolí bodu již budou menší odchylky od původní funkce.

Důležitým závěrem pro nás je, že pokud se úrokové změny budou měnit, jsme díky duraci a konvexitě schopni toto riziko eliminovat a výsledná hodnota portfolia se bude s menšími odchylkami velmi blížit našemu závazku, který budeme muset splatit za 5 let. To znamená, že změny úrokových sazeb, které by mohly nastat, nebudou mít pro nás jako investora tak fatální dopad, jako by tomu mohlo nastat, pokud bychom portfolio neimunizovali.

ZÁVĚR

Cílem bakalářské práce bylo **sestavení imunizovaného dluhopisového portfolia**. Vedle **základních** charakteristik **dluhopisů bude objasněna závislost ceny dluhopisu na změně úrokové míry a vysvětleny pojmy durace a konvexita, které budou využity při sestavování portfolia**. V teoretické části jsme popsali charakteristiky dluhopisu s jeho členěním. Vysvětlili jsme si, jak vypočítat vnitřní hodnotu dluhopisu a tržní cenu dluhopisu. Také jsme objasnili pojmy durace, konvexita dluhopisu a imunizaci dluhopisového portfolia. Jedna z kapitol, která byla věnována Taylorovu polynomu nám objasnila, z čeho vychází výpočet durace a konvexity. Uvedli jsme několik dalších druhů durace, které vychází z Macaulayovy durace.

Z těchto teoretických znalostí jsme vycházeli v praktické části, kde jsme sestavili modelové příklady a modelové portfolio. Z dluhopisového portfolia jsme vypočítali hodnoty durace a konvexity jednotlivých dluhopisů podle vzorců pro výpočet v teoretické části. Portfolio jsme nadále imunizovali, nejprve za pomoci durace a poté také za pomoci konvexity. Při výpočtu vah dluhopisů s pomocí durace jsme došli k imunizovanému portfoliu, které zpřesňovalo cenu dluhopisu pouze u nižších změn tržních úrokových sazeb. Důvodem je využití pouze prvního stupně Taylorova polynomu. Proto jsme v dalším příkladu využili k imunizaci také konvexitu, která umožňuje zpřesnit výslednou hodnotu portfolia i při vyšších úrokových změnách. Váhy, které nám vyšly jsme použili při imunizaci a sestrojili jsme graf, na kterém jsme mohli potvrdit, že skutečně imunizované portfolio, za použití durace i konvexity, snižuje změnu ceny portfolia při změně úrokových sazeb, tedy snižuje úrokové riziko pro investory nebo firmy.

Díky duraci a konvexitě mohou investoři své portfolio upravovat podle svých závazků a mohou tak dosáhnout větších zisků/nížších ztrát svého portfolia při změně úrokových sazeb. Tento nástroj je pro investory velmi důležitý. V práci jsme dokázali pomocí modelových příkladů, že imunizace portfolia má vliv na úrokové riziko a bude tak užitečným nástrojem pro investory nebo také pro firmy investující do dluhopisů.

POUŽITÁ LITERATURA

KNIŽNÍ ZDROJE:

CIPRA, Tomáš. *Matematika cenných papírů*. Praha: HZ, 2000. ISBN 80-86009-35-1.

ČIŽINSKÁ, Romana a Mária REŽŇÁKOVÁ. *Mezinárodní kapitálové trhy: zdroj financování*. Praha: Grada, 2007. Finanční trhy a instituce. ISBN 978-80-247-1922-1.

FABOZZI, Frank J. *Duration, convexity, and other bond risk measures*. New Hope (Pennsylvania). Wiley, 1999. ISBN 1-883249-63-5.

JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet: Celost. vysokošk. učebnice*. vyd. Praha: ČSAV, 1974. Práce Čs. akademie věd.

KOCH, J. *Účetní závěrka podnikatelů za rok 2019*. Český Těšín: PORADCE, 2019. 128 s. ISBN 978-80-7365-431-3.

MUSÍLEK, Petr. *Trhy cenných papírů*. 2., aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Ekopress, 2011. ISBN 978-80-86929-70-5.

RADOVÁ, Jarmila, Petr DVOŘÁK a Jiří MÁLEK. *Finanční matematika pro každého*. 6., aktualiz. vyd. Praha: Grada, 2007. Osobní a rodinné finance. ISBN 978-80-247-2233-7.

REJNUŠ, Oldřich. *Finanční trhy*. 4., aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Grada, 2014. Partners. ISBN 978-80-247-3671-6.

STÁDNÍK, Bohumil. *Trhy dluhopisů*. Praha: Oeconomica, nakladatelství VŠE, 2015. ISBN isbn978-80-245-2084-1.

ŠOBA, Oldřich a Martin ŠIRŮČEK. *Finanční matematika v praxi*. 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing, 2017. Partners. ISBN isbn978-80-271-0250-1.

VESELÁ, Jitka. *Investování na kapitálových trzích*. Praha: ASPI, 2007. ISBN 978-80-7357-297-6.

INTERNETOVÉ ZDROJE:

Long-term debt. *Investopedia.com* [online]. 29.3.2022. Dostupné z:

<https://www.investopedia.com/terms/l/longtermdebt.asp>

Dluhopis republiky. *Dluhopis republiky* [online]. Praha. Dostupné z:

<https://dluhopisrepubliky.cz/cs/dluhopis-republiky>

ZÁKONY:

ČESKÁ REPUBLIKA. Zákon č. 190/2004 Sb., o dluhopisech. In: *O dluhopisech*. 2004,

číslo 190. Dostupné také z: [https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2004-190/zneni-](https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2004-190/zneni-20220529?porov=20210101&porovmin=1#Sum)

[20220529?porov=20210101&porovmin=1#Sum](https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2004-190/zneni-20220529?porov=20210101&porovmin=1#Sum)