

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Obraz a fraktální dimenze
Jakub Pokorný

Bakalářská práce
2021

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Akademický rok: 2020/2021

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Jakub Pokorný**
Osobní číslo: **I18284**
Studijní program: **B2646 Informační technologie**
Studijní obor: **Informační technologie**
Téma práce: **Obraz a fraktální dimenze**
Zadávací katedra: **Katedra informačních technologií**

Zásady pro vypracování

Cílem je vytvoření aplikace, která bude určovat fraktální dimenzi načteného obrázku. Kromě popisu samotné aplikace a jejího vývoje bude součástí práce také stručný rozbor teoretické části související problematiky, tedy zejména definice fraktální (Hausdorffovy) dimenze objektu a metod jejího určování (odhadu). Stručně může být v této části komentován i samotný pojem fraktálu. V závěru bude provedeno porovnání výsledků vyvinuté aplikace s výsledky jiných veřejně dostupných programů (např. Fractalyze, PASSaGE, či jiných) na několika vybraných obrázcích.

Rozsah pracovní zprávy: **35-45**
Rozsah grafických prací: **5**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

ADAMEC, J., J. NEŠETŘIL: Towards an Aesthetic Invariant for Graph Drawing. In Proceedings of Graph Drawing 2001, LNCS Springer Verlag, 2001.
BÁLEK, M., J. NEŠETŘIL: Measuring of aesthetic invariant of images, KAM-DIMATIA Series, 2003. <http://www.ksr.tul.cz/fraktaly/> [cit. 2018-10-01] URL: <http://www.fit.vutbr.cz/tisnovpa/publikace/diplomka/doc/node2.html> [cit. 2018-10-01]

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Jaroslav Marek, Ph.D.**
Katedra matematiky a fyziky

Datum zadání bakalářské práce: **31. října 2020**
Termín odevzdání bakalářské práce: **14. května 2021**

L.S.

Ing. Zdeněk Němec, Ph.D. v.r.
děkan

Ing. Jan Panuš, Ph.D. v.r.
vedoucí katedry

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 9/2012, bude práce zveřejněna v Univerzitní knihovně a prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 13. 5. 2022

Jakub Pokorný

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji tímto Mgr. Jaroslavu Markovi, Ph.D. z Fakulty elektrotechniky a informatiky za cenné připomínky a rady k tématu. Dále bych rád poděkoval své přítelkyni za trpělivost a podporu během let bakalářského studia.

ANOTACE

Práce je věnována fraktální geometrii, spočtení Hausdorffovy dimenze a odhadu fraktální dimenze pomocí mřížkové metody. Cílem práce je určení fraktální dimenze načteného obrázku. Teoretická část práce je věnována seznámení se základními principy mřížkové metody a její implementaci. Experimentální studie práce porovnává výpočty ve vytvořené aplikaci s výsledky dostupného softwaru Fractalyze.

KLÍČOVÁ SLOVA

Hausdorffova míra, Hausdorffova dimenze, fraktál, fraktální dimenze, mřížková metoda, obvodová metoda, matematické fraktály

TITLE

Image and fractal dimension

ANNOTATION

The Bachelor work is dedicated to fractal geometry, calculation of Hausdorff dimension and estimation fractal dimension with the box counting method. The goal of the work is to determine the fractal dimension of the loaded image. In the theoretical part are introduced basic principle of the box counting method and implementation. Experimental part of the work is compered the results of the application with the results of the available software Fractalyze.

KEYWORDS

Hausdorff measure, Hausdorff dimension, fractal, fractal dimension, Boxcounting method, Calliper method, mathematical fractals

Obsah

Seznam obrázků.....	8
Seznam tabulek	9
Seznam zkratk	10
Úvod	11
1 Fraktální geometrie	12
1.1 Fraktály	13
1.2 Dimenze	14
1.2.1 Topologická dimenze <i>Dt</i>	14
1.2.2 Pokrývající dimenze <i>Dp</i>	15
1.2.3 Soběpodobnostní dimenze <i>Ds</i>	16
1.3 Klasické fraktály	17
1.3.1 Kochova křivka	17
1.3.2 Cantorova množina	17
1.3.3 Sierpiňského trojúhelník a koberec	18
1.3.4 Výpočet fraktální dimenze klasických fraktálu	19
2 Hausdorffova dimenze.....	21
2.1 Míra a dimenze	21
2.2 Hausdorffova míra	23
2.3 Definice Hausdorffovy dimenze	24
3 Metody určování fraktální dimenze.....	25
3.1 Obvodová Metoda (Calliper method)	25
3.2 Mřížková metoda (Boxcounting method).....	27
4 Aplikace	29
4.1 Rozhraní knihovny (Library)	29
4.1.1 Popis algoritmu mřížkové metody	29
4.2 Rozhraní demonstrační aplikace (Fractals_images)	30
4.2.1 Popis výstupních dat	31
5 Porovnání výsledků s Fractalyze	32
5.1 Klasické fraktály	32
5.2 Obrázky Josefa Lady	32
Závěr	34
Použitá literatura	35
Přílohy.....	37

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Pokrývající dimenze – pokrývání bodů, křivky a plochy koulemi (4).....	15
Obrázek 2: Soběpodobnost přímky, čtverce a krychle (9 s. 7).	16
Obrázek 3: Konstrukce Kochovy křivky (11).....	17
Obrázek 4: Konstrukce Cantorovy množiny (9 s. 5).	18
Obrázek 5: Konstrukce Sierpiňského trojúhelníku (8 s. 10).....	18
Obrázek 6: Konstrukce Sierpiňského koberce (8 s. 10).....	19
Obrázek 7: Závislost mezi $\log r$ a $\log L$ (14).	26
Obrázek 8: Projekty třídy (vlastní).	29
Obrázek 9: Ukázka demonstrační aplikace (vlastní).	30
Obrázek 10: Oblasti pokrytí (vlastní).	31
Obrázek 12: Matice dimenzí (vlastní).	31
Obrázek 13: Obecná matice dimenzí (vlastní).....	32
Obrázek 14: Švejk na Bělehrad (7).....	33
Obrázek 15: Matice dimenzí Švejka na Bělehrad (vlastní).	33
Obrázek 16: Mikeš na cestě (13 s. 11).....	33
Obrázek 17: Matice Mikeše na cestě (vlastní).....	33
Obrázek 18: Mikeš na stromě (13 s. 15).....	33
Obrázek 19: Matice Mikeše na stromě (vlastní).....	33

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Soběpodobnostní dimenze klasických fraktálů (9 s. 8).	19
Tabulka 2: Richardsonův efekt pobřežní linie (4).	25
Tabulka 3: Příklad upravených výstupních dimenzí (vlastní).	31
Tabulka 4: Porovnání výsledků mřížkové metody matematických fraktálů (vlastní).	32
Tabulka 5: Porovnání obrázků Josefa Lady (vlastní).	33

SEZNAM ZKRATEK

EPS	sEncapsulated PostScript
HSL	Hue Saturation Lightness
IFS	Iteration Function System
JPG	Joint Photographic Group
PDF	Portable Document Format
PNG	Portable Network Graphics
TEA	Time Escape Algorithms
TIF	Tagged Image File
VS	Visual Studio

ÚVOD

Ze školy si jistě každý vzpomene na geometrii, především tu Euklidovu, kde pracujeme s body, přímkami, čtverci, kvádry a jinými hladkými útvary. Relativně snadno u těchto objektů za pomoci nejrůznějších vzorců umíme spočítat mnohé. Navzdory omezením obyčejného papíru, na který byly prováděny základní črty, máme povědomí i o dimenzích takových objektů.

Svět kolem nás ale není tvořen hladkými hranami a jasnými tvary, které se lehce znázorní či analyticky popíše. Žijeme v křivolakém nepravidelném prostoru, kde se vyskytují spletené a navrstvené objekty jako stromy a mraky. S bližším pohledem tak objevujeme více detailů, až se to zdá být nekonečné a chaotické. Není to ovšem jen chaos, ale i nápadná pravidelnost a někde soběpodobnost. Jako kdybychom se vnořovali do obrazu v obrazu. Hledání nových nástrojů a metod pro popsání našeho světa je tak stále aktuální.

Potřebné jsou i odpovědi na palčivé otázky jako: „Jak dlouhé je pobřeží Velké Británie?“, kterou si kladl Benoit Mandelbrot ve stejnojmenné práci z roku 1977, kde se pojem fraktál objevil. Problém s měřením délky pobřeží spočívá v jeho členitosti. Pobřeží bylo v mapách různých měřítek zjednodušené různě, a to vedlo k značným rozdílům ve výsledcích měření délek. Tento problém jen ilustruje limity, na které lze v reálném světě narazit. Pohled na délku pobřeží Mandelbrot řešil pomocí Hausdorffovy dimenze. Objevil souvislosti a pomocí neceločíselné dimenze zajistil měřítkovou neměnnost měření, a tím i jednotný výsledek. Onen objev neceločíselné dimenze, představující členitost, dal zrodu fraktální geometrii.

Tato práce se bude zabývat především základním popisem tématu a spočtením fraktální dimenze obrazu. Pro výpočet fraktální dimenze objektu vznikly různé metody, z nichž některé popisují v teoretické části této práce společně se základními pojmy fraktální geometrie. Tento teoretický základ slouží pro sestavení aplikace, která spočítá fraktální dimenzi. Obdobné aplikace již existují, a proto své výsledky z vlastní vyvinuté aplikace porovnávám s výsledky dostupného programu Fractalyze.

Výzvou a motivací k volbě tohoto tématu byla jeho matematická složitost a algoritmizační výzva. Snažím se tak uplatnit nabyté vědomosti z bakalářského studia a aplikovat je prakticky. Druhou a osobně méně podstatnou motivací je fakt, že komerčně dostupné PASSaGE a Fractalyse působí zastarale a nová obdobná aplikace by mohla přijít vhod dalším badatelům. V tomto fraktálním světě jakožto nový badatel nacházím krásu a doufám, že se najdou čtenáři, kterým bude moje práce k užitku.

1 FRAKTÁLNÍ GEOMETRIE

Fraktální geometrie je součástí širší obsáhlejší teorie chaosu. Slouží jako nástroj k popisu dynamických, turbulentních a nelineárních dějů, které mají fraktální charakter.

Pouští se tak částečně od Newtonovského determinismu, tedy konceptu příčiny a následku, v který se věřilo do 60. let 20. století. Jedná se tak o součást relativně nové, perspektivní vědní disciplíny, která překonává známé bariéry a má přesah napříč obory jako jsou meteorologie, astronomie, biologie, ekonomie a další. Je to věda o popisu běžných jevů a věcí z jiného pohledu. Upouští se v ní od předpokladu, že vše je spojitě a hladké. Naopak je to geometrie singularit, anomálií, hrbolů, pokřivenin, spleť a deformací.

Fraktální geometrie ve svých počátcích řešila palčivý problém s měřením délky toků řek, hranic a pobřeží. Dnes je nástrojem složitých systémů, např. pohybu vesmírných objektů, kdy nejsme schopni sestavit dostatečný model a předvídat budoucí stav s jistotou, protože je až příliš možných ovlivňujících vlivů. Fraktální geometrie nám takové predikce umožňuje s určitou pravděpodobností správně zkonstruovat.

Složitě strukturované přírodní útvary, těžko popsatelné Euklidovskou geometrií, lze někdy uchopit fraktální geometrií. Cesta k pochopení a vzniku popisu pomocí fraktální dimenze vedla i přes matematické fraktály. Mezi ty nejznámější a první svého druhu patří Cantorova množina s ojedinelou dimenzí mezi 0 a 1 z roku 1884, Kochova křivka z roku 1904 s vlastnostmi tvořící objekt připomínající sněhovou vločku a Juliovy množiny jakožto matematické množiny, které vznikaly během 1. světové války bez pomoci výkonných počítačů, a staly se základy pro další výzkum. Tyto útvary byly konstruovány tak, aby nebyly měřitelné.

Matematik Mandelbrot, který navázal na poznatky svých kolegů a zároveň zavedl pojem fraktál, vycházel i z poznatků Richardsona, který měřil pobřeží ostrova Korsiky. Richardson empiricky odvodil vztah mezi délkou a měřítkem. Jinými slovy – čím menší tyč si na měření ostrova vezmeme, tím přesnější bude výsledek měření. Mandelbrot objevil souvislosti mezi tímto vztahem a Hausdorffovou dimenzí a označil pobřeží za fraktál.

Stalo se tak poprvé, co byl pojem fraktál použit. Mandelbrot a další matematici objevili a sjednotili poznatky s dosud matoucími matematickými objekty. Byli tak u zrodu fraktální geometrie.

(4, 5, 6, 8, 9, 15)

1.1 Fraktály

Podstatná vlastnost, tak jak to Mandelbrot zamýšlel, je měřítková neměnnost.

Samotné slovo „*fraktál*“ vychází z latinského „*fractus*“ a z něj navazující „*frangere*“, což lze přeložit jako „*rozlámat*“. Mandelbrot tak označuje objekty, které vzniknou po onom rozlomení, v ideálním případě tvořící zmenšenou kopii originálu. Obecně jsou to tedy soběpodobné objekty. Geometricky se jedná o objekty těžko popsatelné Euklidovskou geometrií, protože jsou nepravidelné a dělitelné na menší repliky základního motivu.

Fraktály mohou být striktně nebo statisticky soběpodobné. Striktně soběpodobné fraktály jsou takové, které lze rozlamovat na libovolně malé části. Statisticky soběpodobné fraktály jsou celku podobné jen statisticky. Vedle soběpodobných jsou také sobě afinitní neboli soběpříbuzné fraktály. U takových fraktálů mimo struktury úlolek je podstatná transformace měřítka.

Transformace fraktálů jsou lépe popsatelné u matematických množin. Pokud bychom chtěli popsat vznik přírodního fraktálu, přesného popisu se nedobereme, protože podstata takového fraktálu ční z transformace fyzikální anebo chemické podstaty. Příkladem této myšlenky, těžko popsatelného přírodního fraktálu se mi jeví palice kvěťáku. Kvěťák za správných podmínek vzejde ze semínka do určité velikosti a víme přibližně, jaká bude jeho vizuální struktura po podélném rozříznutí, která bude vypadat jako fraktál. Ale vyjádřit přesný popis vzniku výsledné struktury nelze. To se přímo dotýká přírodní unikátnosti světa kolem nás. Nikdy nevypěstujeme dva identické kvěťáky, na zem nikdy nedopadne stejná vločka a podobně, protože nikdy nejsme schopni zajistit identické podmínky, to se opět dotýkáme teorie chaosu.

V matematické rovině je to jiné, máme konstrukční algoritmy a jsme schopni vykreslovat nejrůznější umělecké kreace tvořené ve skutečnosti strojem pomocí matematiky. Jsme schopni replikovat známé fraktální obrazce a hypnoticky se vnořovat do jedné soběpodobné struktury.

V reálném světě vnímejme fraktály s rezervou. Lze se vnořovat do bližšího pohledu na struktury kolem nás a vidět soběpříbuznost s předchozím pohledem z větší dálky s pootočením, posunem nebo jinou transformací.

Je několik definic fraktálu. Obecné definice hovoří o soběpodobnosti a soběpříbuznosti geometricky nepravidelných množin. Důkazem je určení fraktální dimenze.

(4, 5, 6, 8, 9, 15)

1.2 Dimenze

Máme definováno několik dimenzí množin. Liší se výpočtem i zkoumanými vlastnostmi. Dimenze nám obecně určuje, kolik je potřeba souřadnic k popisu bodu v množině. Fraktální dimenze nám navíc přibližuje onu strukturovanost objektu.

Dimenze, jak bylo naznačeno, je pro geometrii klíčový údaj. Fraktální Hausdorffova dimenze je obecná a pokrývá většinu množin, a proto se považuje za hlavní. Pomyslně vedlejší dimenze nahlíží na množinu zjednodušeně, protože se často zajímají o konkrétní vlastnosti množiny.

V práci je uvádím abych lépe popsal pojem dimenze. Zároveň se nejedná o vyčerpávající výčet všech dimenzí, ale o pouhou rešerši k získání základního přehledu a pochopení podstaty fraktální dimenze.

(4)

1.2.1 Topologická dimenze D_t

Topologická dimenze se dívá na geometrické objekty z pohledu jejich vlastností, které jsou pootočením nebo stlačením neměnné. To znamená, že velikost a tvar objektu jsou v této dimenzi irelevantní. V topologické dimenzi se zajímáme o spojitost, zdali objekt obsahuje otvory nebo je zauzlený a podobně.

Topologická dimenze je vždy celočíselná. Množina, kterou lze stlačováním a ohýbáním převést na jeden ze simplexů, má stejnou topologickou dimenzi jako daný simplex:

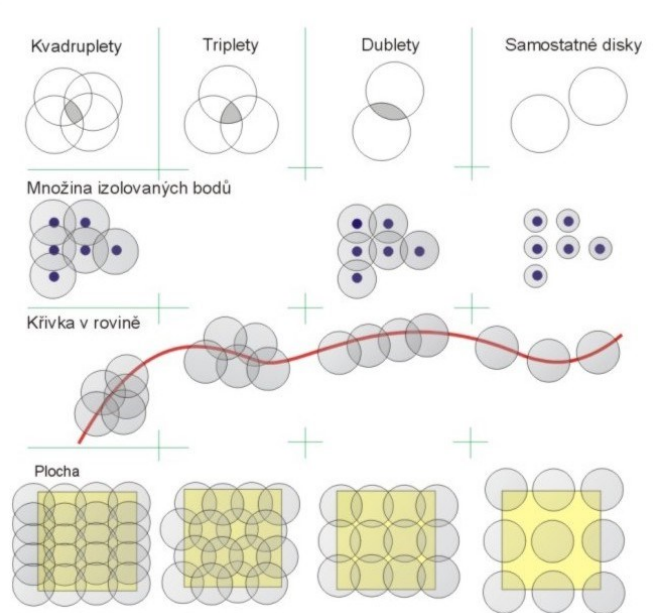
- Bod má $D_t = 0$, příkladem je opět bod.
- Úsečka má $D_t = 1$, příkladem je přímka.
- Pravoúhlý trojúhelník má $D_t = 2$, příkladem je čtverec.
- Tetraedr má $D_t = 3$, příkladem je krychle.

S výjimkou příliš složitých množin si při výpočtu topologické dimenze lze pomoci pokrývající dimenzí, kde se obvykle $D_t = D_p$.

(4)

1.2.2 Pokrývající dimenze D_p

Množinu bodů, křivek a ploch z Obr. 1 lze pokrýt disky, respektive koulemi v prostorových množinách.



Obrázek 1: Pokrývající dimenze – pokrývání bodů, křivky a plochy koulemi (4).

Rozlišujeme uspořádání pokrytí, kde hledáme celé pokrytí množiny S . Množina má dimenzi $D_p = n$ právě tehdy, pokud pro disky nebo koule o poloměru $r > 0$ existuje pokrytí takové, že každý bod z množiny S patří maximálně do $n + 1$ pokrývajících disků nebo koulí a neexistuje takové pokrytí, že by každý bod z množiny S patřil do n disků nebo koulí:

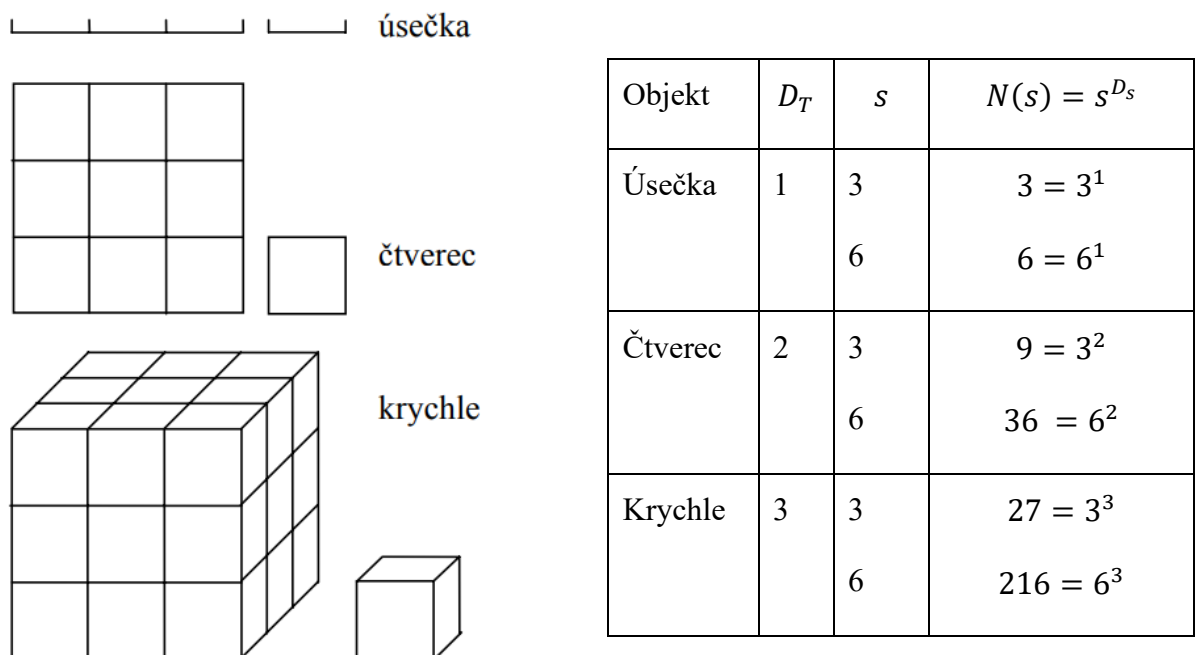
- Body mohou být pokryty diskem o nekonečně malém poloměru, $D_p = 0$.
- K úplnému pokrytí křivky v rovině stačí dublety, tedy jediný průnik dvou disků, $D_p = 1$.
- Na pokrytí celé plochy v rovině je potřeba minimálně tripletů, $D_p = 2$.
- Kvádr vyžaduje kvadruplety, $D_p = 3$.

Z příkladů je patrné, že pro většinu množin platí $D_p = D_t$. Lze si tedy takto pomoci k určení topologické množiny.

(4)

1.2.3 Soběpodobnostní dimenze D_s

Množina je rozdělena na menší části v měřítku s , kde zmenšená část tvoří kopii celku.



Obrázek 2: Soběpodobnost přímky, čtverce a krychle (9 s. 7).

Vztah mezi počtem vytvořených částí N a faktorem změny měřítkem s je dán:
 $N(s) = s^{D_s}$.

Po úpravě soběpodobností dimenzi lze vypočítat:

$$D_s = \frac{\log N(s)}{\log s}$$

Výsledky soběpodobnostní dimenze euklidovských těles vychází, stejně jako jejich topologická dimenze, celočíselně. Z geometrického hlediska se tedy jedná o hladké objekty a nepovažujeme je za strukturované fraktály. Výpočty Hausdorffovy dimenze euklidovských těles jsou také celočíselně.

Soběpodobnostní dimenze je užitečná pro výpočet dimenze klasických fraktálu, které jsou často generovány IFS algoritmem počítače. U takových fraktálů se jedná o značné zjednodušení jinak náročného výpočtu Hausdorffovy dimenze, která vychází u těchto ryze soběpodobných fraktálů stejně.

(4, 9)

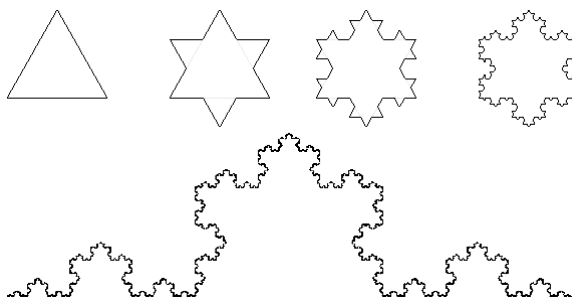
1.3 Klasické fraktály

Pro obecné pochopení fraktálu je dobré vidět onu transformaci, která tvoří soběpodobnost. U klasických fraktálů jsou transformace definovány a v iteracích je patrnější vzniklá soběpodobná struktura.

(4, 5, 6, 9)

1.3.1 Kochova křivka

Kochova křivka vychází z úsečky o délce 1, která je rozdělena na 3 části o délce $1/3$. Poté je prostřední třetina nahrazena rovnostranným trojúhelníkem. Tato transformace nechá vzniknout z původní úsečky čtyři úsečky. S každou iterací tento postup opakujeme na každou úsečku. Pokud stejný postup aplikujeme na strany v rovnostranném trojúhelníku, vznikne nám tzv. Kochova vločka.

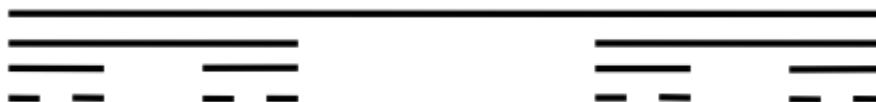


Obrázek 3: Konstrukce Kochovy křivky (11).

(4, 9)

1.3.2 Cantorova množina

Obdobně je to s Cantorovou množinou. Z uzavřeného intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ se odebere střed otevřeným intervalem $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Zbydou nám dva uzavřené intervaly $\langle 0; \frac{1}{3} \rangle$ a $\langle \frac{2}{3}; 1 \rangle$ o délce $\frac{1}{3}$. Takto opakujeme na získané uzavřené intervaly do nekonečna. Zbylé body jsou Cantorovou množinou.



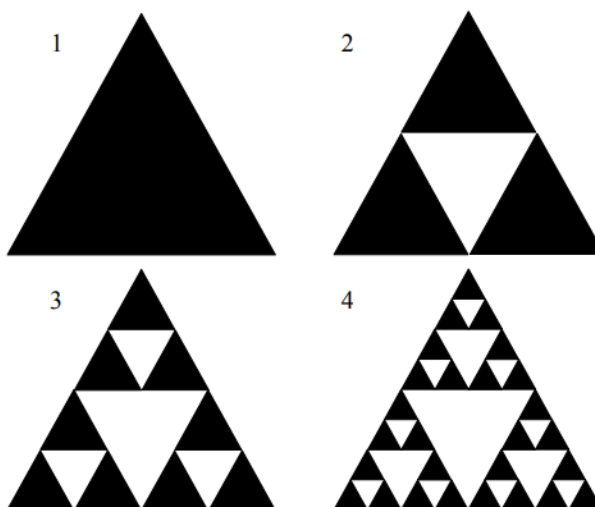
Obrázek 4: Konstrukce Cantorovy množiny (9 s. 5).

Zřejmé je, že mezi tyto spočetné body budou patřit krajní body intervalů v nespočetné množině, což je příklad jedné z pozoruhodných vlastností, které fraktální množiny mohou nabývat.

(4, 9)

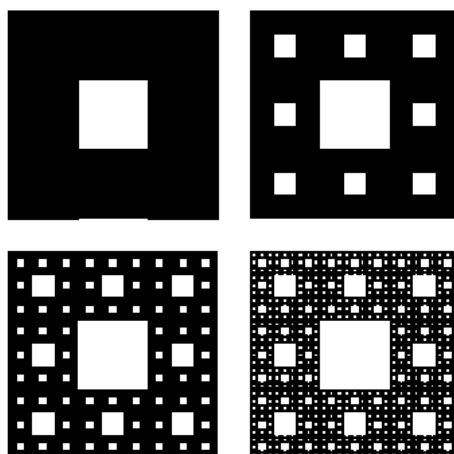
1.3.3 Sierpińského trojúhelník a koberec

Konstrukce Sierpińského trojúhelníku a koberec, ačkoliv to nemusí na první pohled být zřejmé, také nastává rozdělením. V případě trojúhelníku začínáme s rovnostranným trojúhelníkem o hraně 1, ten rozdělíme na čtyři části o hraně $1/3$, tak že každou hranu trojúhelníku rozdělíme na dvě části – středové body spojíme a spatříme čtyři trojúhelníky. Prostřední trojúhelník však vyjmeme, a postup opakujeme na zbylé trojúhelníky do nekonečna.



Obrázek 5: Konstrukce Sierpińského trojúhelníku (8 s. 10).

Koberec sestavujeme obdobně jako trojúhelník. Hrany čtverce rozdělíme na tři části. Tak pomyslně rozložíme čtverec na devět kopií celku a prostřední čtverec vyjmeme. Proces opakujeme do nekonečna a vznikne Sierpińského koberec. Můžeme se setkat i s krychlí, která má název Mengerova houba.



Obrázek 6: Konstrukce Sierpiňského koberce (8 s. 10).

(4, 9)

1.3.4 Výpočet fraktální dimenze klasických fraktálu

Ačkoliv tyto klasické fraktály vycházejí z euklidovských hladkých těles, pravidly transformace jsou objekty změněny v strukturované a na první pohled soběpodobné objekty v objektech. Popis jejich vzniku dává představu i o IFS algoritmech, které by tyto klasické fraktály tvořily ve výpočetní technice v podobném duchu. Tudíž jedna a ta samá operace v počtu iterací.

Z popisu je lehce čitelné a na obrázcích lehce viditelné, jaká je změna měřítka a počet nových částí po transformaci. Pokud doplníme do vzorce pro výpočet soběpodobnostní dimenze dostaneme výsledky v Tab. 1.

Tabulka 1: Soběpodobnostní dimenze klasických fraktálů (9 s. 8).

	D_t	změna měřítka s	počet částí $N(s)$ v první iteraci	$D_s = \frac{\log N(s)}{\log s}$
Kochova křivka	1	3	$3 - 1 + 2 = 4$	1,26
Cantarova množina	0	3	$3 - 1 = 2$	0,63
Sierpienského trojúhelník	1	2	$4 - 1 = 3$	1,58
Sierpienského koberec	1	3	$9 - 1 = 8$	1,89

Neceločíselné výsledky soběpodobnostní dimenze potvrzují patrnou strukturu objektů, kde například Sierpiňského trojúhelník není hladká křivka, ale ani hladká plocha.

(4, 8, 9)

2 HAUSDORFFOVA DIMENZE

Hausdorffova dimenze je obecná a zároveň charakterizuje libovolné fraktální množiny. Má však složitý analytický výpočet, a tak se stává obtížně počítatelnou. Proto vznikly numericky jednodušší metody odhadu fraktální dimenze. Výsledkem se snaží přiblížit k výsledku Hausdorffovy dimenze, avšak vychází ze stejných principů a podobných matematických definic.

Obecně platí, že složité problémy se rozkládají na menší, a v tomto je rekurze jako nástroj velice úspěšná. Proto nejprve uvedu několik základních definic pro popis a k porozumění výpočtu Hausdorffovy dimenze.

(4, 6, 8, 9, 10, 12)

2.1 Míra a dimenze

Fraktály se matematicky popisují jako množiny s vlastnostmi. Míra matematicky popisuje velikost množiny:

Definice 1 Míra

Nechť X je množina a nechť \mathcal{F} je σ -algebra podmnožin X . Míra na \mathcal{F} je množinová funkce $\mathcal{M}: \mathcal{F} \rightarrow (0, \infty)$ taková že

1. $\mathcal{M}(\emptyset) = 0$,
2. $\mathcal{M}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}(A_n)$, *jakmile $\{A_n\}$ je posloupnost navzájem disjunktivních množin*

(3, 8, 10, 12)

Definice 2 Vnější míra

Nechť X je množina. Vnější míra na X je funkce $\bar{\mathcal{M}}$ definována na všech podmnožinách množiny X , která zobrazuje do intervalu $< 0, \infty >$ a zároveň platí

1. $\bar{\mathcal{M}}(\emptyset) = 0$,
2. *Pokud $A \subseteq B$, pak $\bar{\mathcal{M}}(A) \leq \bar{\mathcal{M}}(B)$,*
3. *Pro libovolnou posloupnost množin $A_n \in \mathcal{F}$*

$$\bar{\mathcal{M}}\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \bar{\mathcal{M}}(A_n)$$

(3, 8, 10, 12)

Třetí podmínka zajišťuje, aby míra množiny nebyla větší než suma měr při spočetném prostoru.

Pro každou míru existují množiny, na kterých se míra chová aditivně. Tyto množiny se nazývají μ -měřitelné množiny a matematicky jsou definovány takto:

Definice 3 μ -měřitelná množina

Množina $A \subset X$ se nazývá μ -měřitelná množina právě tehdy, když

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A)$$

pro všechna $E \subset X$.

(3, 8, 10, 12)

Definice 4 *Rozdělení hmoty*

Nechť μ je míra na omezené podmnožině $A \subset \mathbb{R}^n$. Nechť pro ni platí $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Pak tuto míru nazýváme rozdělením hmoty a $\mu(A)$ nazýváme hmotou množiny A .

Složité množiny, pro jednodušší počty, se mohou překrýt prostšími spočetnými množinami.

Definice 5 *Spočetné pokrytí*

Množina množin \mathcal{A} se nazývá spočetné pokrytí množiny F právě tehdy, když

$$F \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

a \mathcal{A} je konečná (často spočetná) množina.

(3, 8, 10, 12)

V potaz je potřeba vzít i maximální možný diametr.

Definice 6 ε -pokrytí

Nechť ε je kladné reálné číslo (často velmi malé). Pokrytí \mathcal{A} se nazývá ε -pokrytí, pokud platí $\text{diam} \leq \varepsilon$ pro všechny množiny $A \in \mathcal{A}$.

(3, 8, 10, 12)

Metody odhadu fraktální dimenze pracují právě na principu překrytí například čtvercovou mřížkou.

Definice 7 *Dolní indukivní dimenze*

Dolní indukivní dimenze prostoru (S, ρ) je definována jako

$$\text{ind } S = -1 \Leftrightarrow S = \emptyset$$

$$\text{ind } S \leq k \Leftrightarrow (\exists \beta \subset \tau \text{ báze})(\forall B \in \beta)(\text{ind } \partial B \leq k - 1)$$

$$\text{ind } S = k \Leftrightarrow \text{ind } S \leq k \wedge \neg \text{ind } S \leq k - 1$$

$$\text{ind } S = +\infty \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N})(\wedge \neg \text{ind } S \leq k)$$

(3, 8, 10, 12)

Definice říká, že množina má dimenzi k , pokud její hranice má dimenzi $k-1$. Tedy krychle má dimenzi 3, protože je ohraničen čtverec s dimenzí 2. Čtverce ohraničují úsečky s dimenzí 1.

2.2 Hausdorffova míra

Hausdorffova dimenze má základy v mírách. I u fraktálů nás obecně zajímají rozměry. Jak je spočítat nám říká Hausdorffova míra.

V definici se pohybujeme v \mathbb{R}^n podmnožinách A .

Definice 8 Hausdorffova s -rozměrná vnější míra

Definujeme

$$\bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F) = \inf \sum_{A \in \mathcal{A}} (\text{diam } A)^s,$$

kde infimum je přes všechna ε -pokrytí \mathcal{A} množiny F . Když se ε bude zmenšovat, pak se $\bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F)$ bude zvyšovat, jelikož se sníží počet dostupných pokrytí. Má tedy smysl definovat

$$\bar{\mathcal{H}}^s(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F) = \sup_{\varepsilon > 0} \bar{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F),$$

což je Hausdorffova s -rozměrná vnější míra množiny F .

Hausdorff dokázal, že existuje číslo $D_H(A)$ takové že

$$\mathcal{H}^s(F) \begin{cases} \infty & \text{pro } s < D_H(A) \\ 0 & \text{pro } s > D_H(A) \end{cases}.$$

(3, 8, 10, 12)

2.3 Definice Hausdorffovy dimenze

Definice 9 *Hausdorffova dimenze*

Pro libovolnou množinu F definujeme Hausdorffovu dimenzi jako

$$D_H F = \inf \{s \geq 0: \overline{\mathcal{H}}^s(F) = 0\} = \sup \{s \geq 0: \overline{\mathcal{H}}^s(F) = \infty\}.$$

(3, 8, 10, 12)

3 METODY URČOVÁNÍ FRAKTÁLNÍ DIMENZE

Jakmile jsou nám transformace tvořící fraktál neznámé, spočtení fraktální dimenze z bude na náročném analytickém výpočtu pomocí Hausdorffovy dimenze. Avšak pro výpočetní techniku je vhodnější projít fraktál po částech, využít numerické metody, statisticky výsledky zpracovat a získat přibližný odhad dimenze. Tato odhadnutá dimenze by se měla přibližovat k oné Hausdorffově dimenzi.

Metody odhadu lze uplatnit na množiny bodů, časové řady i na topologicky 2D a 3D objekty. Musí se však brát v potaz rozpětí dimenze, kterou odhadujeme. Nelze proto na vše mít jednu univerzální metodu. Metody tedy mají spíše za cíl jednodušší koncepci výpočtu. Příkladem je mřížková metoda, která vyžaduje modifikaci základního algoritmu při jiném rozmezí dimenze. Když posuzujeme okolí přímky, zajímá nás interval, u plochy čtverec a pro hrací kostku už nás bude zajímat krychle.

(1, 2, 4, 8, 9, 10)

3.1 Obvodová Metoda (Calliper method)

Jak naznačuje název již název, metoda slouží k určení dimenze linií jako proslulé případy s délkou pobřeží. Metoda vychází z poznatků zmíněného Richardsona, kde náš odhad dimenze bude tak přesný, jak bude malé naše měřidlo. Pro pobřeží L , měřidlo r a počet délek měřidla $N(r)$ platí:

$$L(r) = N(r)r.$$

Pokud by tedy existovala konečná délka pobřeží spočteme:

$$\lim_{r \rightarrow 0} L(r) = L_0.$$

Avšak všechny pobřeží jsou stejně nekonečně dlouhé.

Tabulka 2: Richardsonův efekt pobřežní linie (4).

r[km]	N	L = N * r[km]	log r	log L
200	12	2400	2,3010	3,3802
100	28	2800	2,000	3,4472
50	63	3150	1,6990	3,4983

30	126	3780	1,4771	3,5775
20	230	4600	1,3010	3,6628

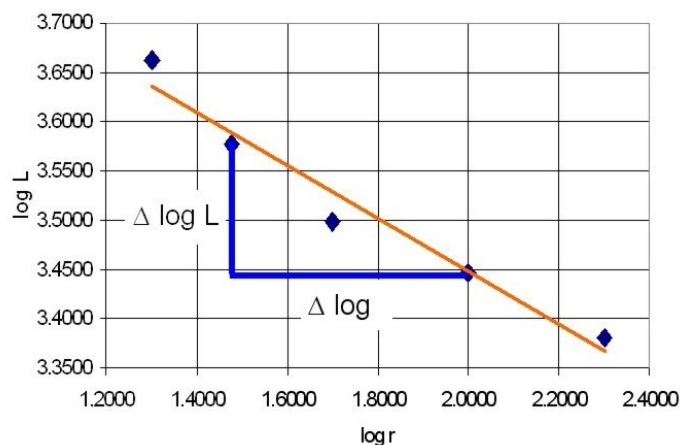
Z tabulky je tedy patrné, že s menším měřídlem se délka pobřeží skutečně prodlužuje. Lewis Fry Richardson z naměřených dat ve svých pracích odvodil vzorec:

$$L(r) = Kr^{1-D_C}.$$

Kde K a D jsou nenulové, konečné, a především nezávislé konstanty na délce použitého měřidla.

Po aproximaci, fraktálních křivek jako pobřeží, měřidly různé délky nám vzniknou souřadnice bodů, které by v logaritmických souřadnicích měly ležet v přímce jejíž směrnice je rovna

$1 - D_C$.



Obrázek 7: Závislost mezi $\log r$ a $\log L$ (14).

Body protněme regresní přímkou a upravíme Richardsonův vzorec následovně:

$$\log L(r) = \log Kr^{1-D_C},$$

$$D_C = 1 - \frac{\Delta \log L(r)}{\Delta \log r}.$$

A dostáváme kýžený odhad fraktální dimenze, v tomto případě pobřežní linie. Avšak hlavní myšlenka je použití obecného Richardsonova vzorce na členité přírodní křivky. V praxi se můžeme setkat s analýzou a rozlišením lemů různých materiálů.

Při praktické realizaci je potřeba si uvědomit, že pracujeme v početně konečné matici. Proto je potřeba si dát pozor na zvolení délek měřidel. Při volbě pouze velkých nebo pouze malých měřidel může být směrnice regresní přímky zkreslena, a tím odhad ztratí přesnost.

(4, 6, 10)

3.2 Mřížková metoda (Boxcounting method)

Principem metody je překrytí fraktálu čtvercovou mřížkou a následným spočtením čtverců, které skutečně fraktál překrývají. Proces se zopakuje na hustší mřížce. Získané výsledky jsou vyneseny do logaritmického grafu, kde ze směrnice regresní přímky spočteme odhad fraktální dimenze.

Hlavní výhodou oproti obvodové metodě je širší záběr, jak bylo naznačeno v úvodu kapitoly. S úpravami algoritmu můžeme odhadovat fraktální dimenze přímek, ploch a objektů, tedy v rozmezí 0–3.

Mřížková metoda obecně vychází z Hausdorffovy míry:

$$H^D(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam} U_j)^D.$$

Kde U_j jsou množiny pokrytí δ . Položíme $\delta = \frac{1}{r}$ a zvolíme průměr čtverců. Počet čtverců, které obsahují část fraktálu označíme $N(r)$. Při praktické realizaci pracujeme v konečném prostoru, kde nejmenší délkou je pixel, takže $r \rightarrow \infty$ není proveditelné. Proto tedy aproximujeme a dostáváme se k odhadu:

$$H^D(E) \approx N(r) r^{-D}.$$

Vyjádříme D .

$$\ln H^D(E) \approx \ln N(r) + \ln r^{-D}$$

$$\ln N(r) \approx -D \ln \frac{1}{r} + \ln H^D(E)$$

Při praktické implementaci volíme rozdílné hodnoty průměrů boxů. Výsledky $N(r)$ proložíme v logaritmických souřadnicích metodou nejmenších čtverců.

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (\ln N(r_i))^2 & \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{r_i} \\ \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{r_i} & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \ln N(r_i) \cdot \ln \frac{1}{r_i} \\ \sum_{i=1}^n \ln N(r_i) \end{pmatrix}$$

Hodnota směrnice přímky $c_1 = -D$ a konstanta $c_2 = H^D(E)$.

Ve zdrojích se můžeme také setkat se stejným principem a zjednodušeným výpočtem, kde Hausdorffova míra je vyjádřena jako konstanta K a výpočet naznačen pro výpočet fraktální plochy, jako Sierpiňského trojúhelník:

$$K = H^D(E),$$

$$N(r) = K \frac{1}{r^{D_B}} = Kr^{-D_B}.$$

Spočítáme plochu pro potřebnou pro pokrytí fraktálu, kde celková plocha pokrytí $A(r)$:

$$N(r) = N(r) \cdot r^2,$$

$$N(r) = K \cdot r^{2-D_B}.$$

Naměřená data jsou vynesena do logaritmického Richardson–Mandelbrotova grafu, kde vztah mezi naměřenou plochu a velikostí strany aproximujeme regresní přímkou. Odhad fraktální dimenze se spočte opět ze směrnice této přímky.

$$-D_B = \frac{\Delta \log A(r)}{\Delta \log r},$$

$$D_B = 2 - \frac{\Delta \log A(r)}{\Delta \log r}.$$

Úprava algoritmu pro spočtení odhadované dimenze mezi (1, 2), tedy pro linie, křivky. Pro délku platí:

$$L(r) = N(r) \cdot r^1.$$

Obdobně pro tělesa ve třech dimenzích, kde jsou místo čtverců použity krychle:

$$C(r) = N(r) \cdot r^3.$$

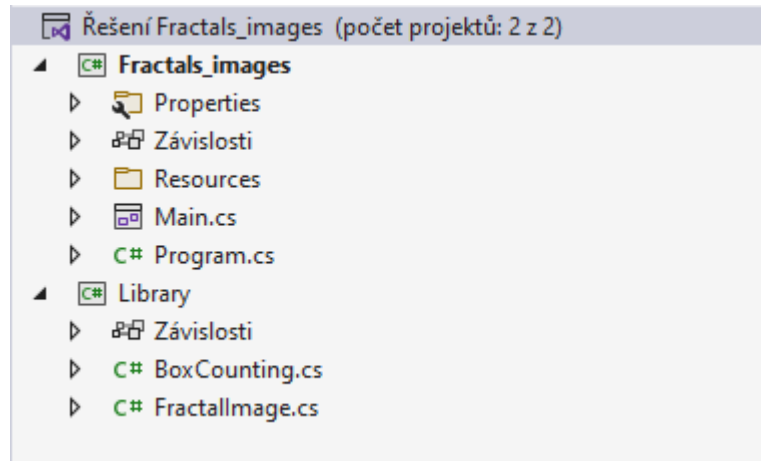
Pro metodu je zásadní volba r . Z implementačního hlediska je potřeba si dát pozor, aby bylo možné například obdélníkový obrázek $[m; n]$ pokryt čtvercovou sítí o zvoleném r . Jako možné řešení je doplnění obrázku na čtverec $[h; h]$ prázdnými řádky barvy pozadí. Hodnotu h rozdělíme na $r \in \mathbb{N}$ dílů. Pokud h je s r nesoudělné, tj. délka boxu není celočíselná, zaokrouhlíme tuto délku strany boxu. Vznikne nám tak přesah přes hranice dat obrázku a ten řešíme jako prázdné pozadí.

(1, 2, 4, 8, 9, 10)

4 APLIKACE

Aplikace je napsána v jazyce C# pro cílovou architekturu .NET Windows v prostředí Visual Studia. Pro lineární regresi je použita externí knihovna Math.net.

Řešení obsahuje demonstrační WinForms aplikaci Fractal_images, která používá knihovní třídy BoxCounting a FractalImage v knihovní aplikaci Library.



Obrázek 8: Projekty třídy (vlastní).

4.1 Rozhraní knihovny (Library)

Třída FractalImage nabízí dvě metody pro načtení vstupního obrazu do bitmapy a vytvoření bitmapového náhledu do demonstrační aplikace.

Třída BoxCounting implementuje rekurzivní algoritmus mřížkové metody v metodě Estimate a událost pro zobrazení průběhu výpočtu mřížkové metody.

4.1.1 Popis algoritmu mřížkové metody

Načtený obraz se pokrývá stejně velkými oblastmi výpočtu, které nemusí být čtvercové. Každá oblast nese označení A z anglického slova *area* a pořadového čísla od nuly. Například: A_0 až A_{20} . A_0 má rozměry načteného obrazu. A_1 až A_4 mají rozměry poloviční a A_5 až A_{20} mají rozměry čtvrtinové. Dále se algoritmus nezanohuje z časové náročnosti výpočtu a zkršení dat, kde sklon regresní přímky se zkrsluje výběrem dat z kraje množiny.

Oblasti A_n jsou pokrývány čtvercovou mřížkovou sítí, která se v iteracích dvojnásobně zhušťuje, dokud je strana čtverce v síti větší než jeden pixel. V iteracích se sčítá plocha, která pokrývá fraktál.

Čtverec sítě pokrývá fraktál, pokud obsahuje pixel, který má svítivost pixelu v HSL modelu menší než 0,5.

Logaritmus pokryté plochy a délky strany čtverce v mřížce jsou následně pomocí Math.net proloženy regresní přímkou. Druhý parametr směrnice přímky c_2 se dosazuje do vzorce pro výpočet dimenze:

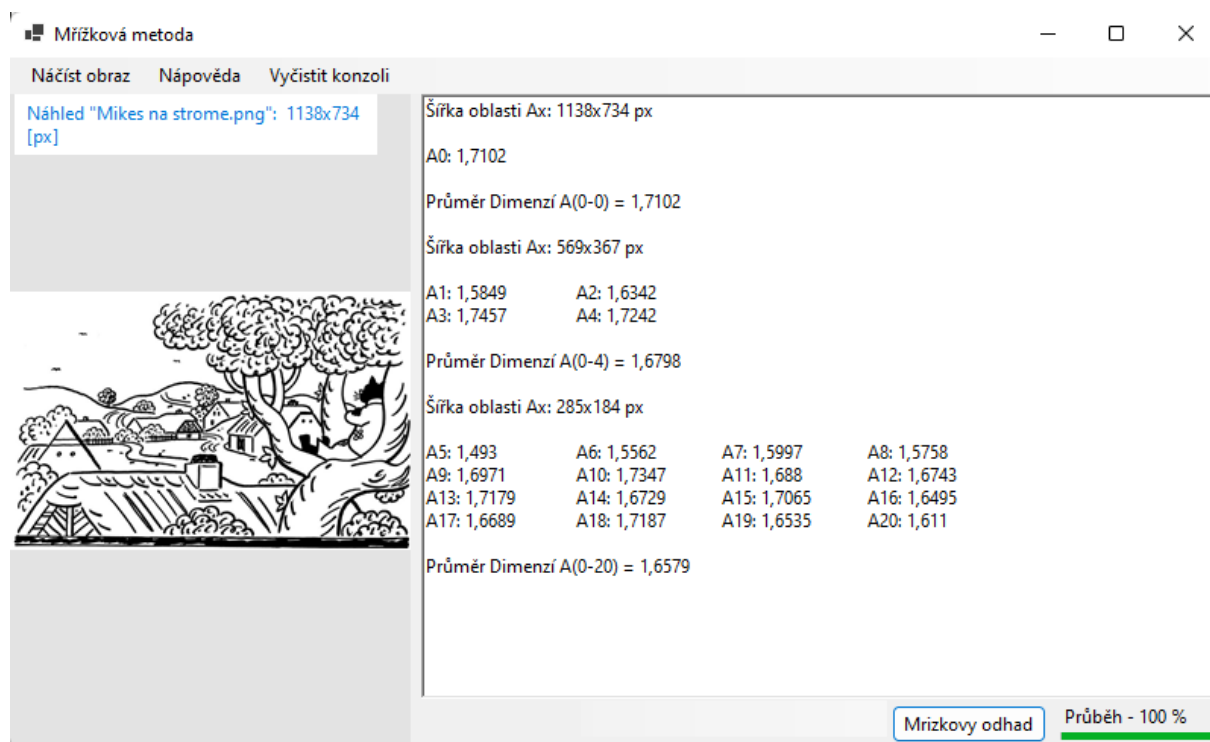
$$D_{A_n} = 2 - c_2.$$

Celková mřížková dimenze obrazu se průměru:

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n D_{A_i}.$$

4.2 Rozhraní demonstrační aplikace (Fractals_images)

Demonstrační aplikace načítá obraz z dialogové okna s filtry png, jpg, eps. Z načteného obrazu se tvoří náhledový obraz, u kterého se zobrazí název obrazu a rozměry. Přes tlačítko Mřížkový odhad se provádí výpočet fraktální dimenze. Získané data jsou vypsány v jednoduché textové formě.



Obrázek 9: Ukázka demonstrační aplikace (vlastní).

Aplikace obsahuje proklik na sepsanou nápovědu v pdf formě a možnost vyčistění výstupní konzole.

4.2.1 Popis výstupních dat

Výstupní data se vypisují v jednoduchém textovém formátu do textového pole. Před výstupními daty se uvádí rozměry oblastí.

Tabulka 3: Příklad upravených výstupních dimenzí (vlastní).

A5	A6	A7	A8
A1		A2	
A9	A10	A11	A12
		A0	
A13	A14	A15	A16
A3			A4
A17	A18	A19	A20

Obrázek 10: Oblasti pokrytí (vlastní).

1,49	1,56	1,6	1,58
	1,58		1,63
1,7	1,73	1,69	1,67
		1,71	
1,72	1,67	1,71	1,65
	1,75		1,72
1,67	1,72	1,65	1,61

Obrázek 11: Matice dimenzí (vlastní).

5 POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ S FRACTALYZE

Načtená data ve Fractalyze byly nejprve načtena ve formátu .tif, následně binarizována na černé a bílé pixely, aby bylo možno provést mřížkovou metodu.

V aplikaci tento krok neprovádím. Pixel vyhodnotím jako součást fraktálu, pokud je jeho svítivost v HSL modelu pod 0,5. Tedy je to tmavší pixel.

5.1 Klasické fraktály

Nejprve jsem porovnal matematické fraktály z rastrových obrázků, kde z předchozích výpočtů Soběpodobnostní dimenze znám fraktální dimenzi.

Tabulka 4: Porovnání výsledků mřížkové metody matematických fraktálů (vlastní).

	Fractalyze	aplikace	Soběpodobnostní dimenze
Sierpiňského trojúhelník	1,572	1,5765	1,5849
Sierpiňského koberec	1,834	1,8670	1,8927
Kochova křivka	1,203	1,2808	1,2618

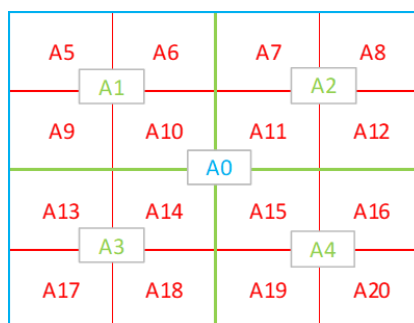
Výsledky odhadu jsou v obou případech podobné Soběpodobnostní dimenzi.

Pozoroval jsem, že mezikrok nutné binarizace ve Fractalyze může vést k ztrátě obrazových bodů. To může vést k snížené přesnosti.

5.2 Obrázky Josefa Lady

Černobílé obrázky Josefa Lady jsem vybral pro dobrý kontrast, aby dopad binarizace byl na výsledek co nejmenší.

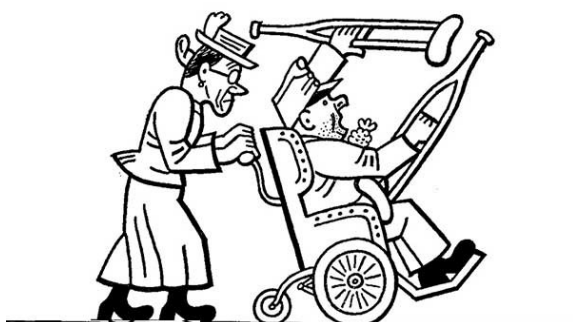
Algoritmus se při odhadu zanořuje do obrázku po čtvercích. Pro každou oblast A_n je provedena mřížková metoda.



Obrázek 12: Obecná matice dimenzí (vlastní).

Celková dimenze je průměrem těchto oblastí $A_0 - A_{20}$.

Tabulka 5: Porovnání obrázků Josefa Lady (vlastní).



Obrázek 13: Švejk na Bělehrad (7).

1,44	1,43	1,5	1,52
1,56		1,53	
1,67	1,69	1,62	1,63
1,58			
1,62	1,59	1,58	1,54
1,6		1,6	
1,31	1,37	1,3	1,33

Obrázek 14: Matice dimenzí Švejka na Bělehrad (vlastní).



Obrázek 15: Mikeš na cestě (13 s. 11).

1,54	1,61	1,65	1,61
1,67		1,74	
1,65	1,65	1,71	1,56
1,68			
1,44	1,61	1,51	1,4
1,61		1,62	
1,49	1,47	1,5	1,34

Obrázek 16: Matice Mikeše na cestě (vlastní).



Obrázek 17: Mikeš na stromě (13 s. 15).

1,49	1,56	1,6	1,58
1,58		1,63	
1,7	1,73	1,69	1,67
1,71			
1,72	1,67	1,71	1,65
1,75		1,72	
1,67	1,72	1,65	1,61

Obrázek 18: Matice Mikeše na stromě (vlastní).

obrázek	dimenze z Fractalyze	průměr dimenzí z aplikace
Švejk na Bělehrad	1,580	1,5241
Kocour Mikeš	1,588	1,5738
Mikeš na stromě	1,679	1,6579

Analyzované obrázky Josefa Lady mají podobnou propracovanost detailů.

ZÁVĚR

Cílem práce bylo naprogramovat aplikaci určující fraktální dimenzi obrázku. Vyvinutá aplikace umožňuje načíst obrázek ve formátu jpg, png, eps a určení dimenze. Mřížková metoda se implementuje na rastrový obraz bez binarizace na bílé a černé pixely. Výsledky jsou dle očekávání v porovnání s Fractalyze odlišné v jednotkách desetín a setin.

V teoretické části jsem představil kontext fraktální geometrie, její základní pojmy a definice, s kterými jsem se setkal v odborné literatuře. Blíže jsem se věnoval dimenzím a jejich výpočtům. Uvedl jsem matematický základ z teorie míry pro definování Hausdorffovy míry, která je klíčová pro odvození výpočtu mřížkové metody Hausdorffovy dimenze.

Aplikaci jsem koncipoval pro snadné rozšíření v souladu se zásadami objektově orientovaného programování a čitelného kódu. Aplikace má nenaplněný potenciál a rád bych ji dále rozšířil a přidal několik funkcionalit. Například funkce pro generování matematických fraktálů, úpravě vstupních dat a exportu výstupních dat.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] ADAMEC, Jan a Jaroslav NEŠETŘIL. Towards an Aesthetic Invariant for Graph Drawing. In: *Graph Drawing* [online]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002, 2002-2-21, s. 287-296 [cit. 2022-05-15]. Lecture Notes in Computer Science. ISBN 978-3-540-43309-5. Dostupné z: doi:10.1007/3-540-45848-4_23
- [2] BÁLEK, Martin a Jaroslav NEŠETŘIL. Measuring of Aestheti Invariant of Images. In: *CiteSeerx* [online]. Praha: Institute of Theoreti al Computer s ien es (ITI) Charles University, 2003 [cit. 2022-05-15]. Dostupné z: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=534179EBD1711C6A1BF79A5AB826D4EA?doi=10.1.1.11.2177&rep=rep1&type=pdf>
- [3] FALCONER, K. J., 1985. *The Geometry of Fractal Sets* [online]. Cambridge: Cambridge University Press. Cambridge Tracts in Mathematics. Retrieved z: doi:10.1017/CBO9780511623738
- [4] *Fraktální geometrie* [online]. Liberec: Technická univerzita, 2011 [cit. 2022-02-03]. Dostupné z: <http://www.ksr.tul.cz/fraktaly/obsah.html>
- [5] HAJMOVÁ, Kateřina. *Průvodce fraktální geometrií*. Univerzita Karlova, 2016. Bakalářská práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Matematický ústav UK. Vedoucí práce Pokorný, Dušan.
- [6] MANDELROT, Benoît B. *The fractal geometry of nature*. Updated and augmented. New York: W. H. Freeman and Company, c1983. ISBN 07-167-1186-9.
- [7] Lada Josef. In: *Čitarny.cz* [online]. Praha: Čitarny.cz, 2008 [cit. 2022-05-14]. Dostupné z: <https://www.citarny.cz/index.php/ilustratori-cesko/lada-josef>
- [8] PAUŠ, Petr. *Počítačové metody analýzy fraktálních množin*. Praha, 2006. Diplomová práce. České vysoké učení technické. Vedoucí práce Dr. Ing. Michal Beneš.
- [9] *Počítačové generování fraktálních množin*. Praha, 2004. Rešeršní Práce. České vysoké učení technické. Vedoucí práce Dr. Ing. Michal Beneš.
- [10] TOMÁŠ, Jan. *Měření Hausdorffovy dimenze reálných objektů*. Brno, 2009. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce Prof. RNDr. Miloslav Druckmüller, CSc.
- [11] ULLMANN, Vojtěch. Geometrie a topologie prostoročasu. *AstroNuklFyzika* [online]. Ostrava: Vojtěch Ullman [cit. 2022-02-14]. Dostupné z: <https://astronuklfyzika.cz/Gravitace3-3.htm>
- [12] VANĚČEK, Ondřej. *Hausdorffova dimenze některých množin*. Univerzita Karlova, 2017. Bakalářská práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra matematické analýzy. Vedoucí práce Zelený, Miroslav.
- [13] Vyrůstáme s Mikešem. In: *Základní škola a mateřská škola bratří Fričů Ondřejov* [online]. Praha: ZŠ a MŠ bratří Fričů Ondřejov, 2014 [cit. 2022-05-14]. Dostupné z: http://www.zsondrejov.cz/SVP/Pr_Mikes.pdf

- [14] Závislost mezi $\log r$ a $\log L$. In: *Katedra sklářských strojů a robotiky* [online]. Liberec: Technická univerzita, 2011 [cit. 2022-04-28]. Dostupné z: <http://www.ksr.tul.cz/fraktaly/printsrc/obr27.jpg>
- [15] ZELINKA, Ivan, František VČELAŘ a Marek ČANDÍK. *Fraktální geometrie: principy a aplikace*. Praha: BEN – technická literatura, 2006. ISBN 80-730-0191-8.

PŘÍLOHY

Příloha A – Aplikace.....	38
---------------------------	----

PŘÍLOHA A – APLIKACE

Obsahuje zdrojový VS projekt s kódy a spustitelnou aplikací.