HODNOVĚRNOST A INTUITIVNĚ ODHADOVANÁ PRAVDĚPODOBNOST

CREDIBILITY AND INTUITIVELY ESTIMATED PROBABILITY

Zdeněk Půlpán, Andrea Jahodová Berková

Adresa: Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta J. Pernera, Studentská 95, 532 10 Pardubice

E-mail: zdenek.pulpan@post.cz, andrea.jahodova@upce.cz

Abstrakt: V článku [7] jsme na jednoduchých příkladech ukázali, jak lze pracovat s intuitivně odhadovanou pravděpodobností. Zde nabídneme možnost intuitivního odhadu hodnot pravděpodobnosti na základě vhodně cílené představy. Užije se při tom relace hodnověrnosti na jevech z oblasti zkoumání. Pak ukážeme důvody, proč a jak vytvářet správné představy, abychom mohli věřit tomu, že se na základě zkušenosti subjektivně realizovaný odhad může blížit ideální hodnotě pravděpodobnosti.

Klíčová slova: hodnověrnost, pravděpodobnost, intuitivní odhady.

Abstract: We have shown how to work with intuitively estimated probability on simple examples in [7]. In this paper, we offer the intuitive estimate of probability values based on a properly targeted idea. For this purpose, credibility is used for events from the field of investigation. Further, the reasons are shown why and how to create the right ideas to believe that a subjectively realized estimate based on experience can approximate an ideal probability value.

Keywords: credibility, probability, intuitive estimates.

Představení problému

Popisujeme-li určitou reálnou situaci, pak volba pravděpodobnostního prostoru (Ω, S_Ω, P), kde Ω je základní prostor, S_Ω je σ-algebra podmnožin z Ω a $P : S_\Omega \to \langle 0; 1\rangle$ je pravděpodobnostní míra, je volbou modelu. Studovaná situace může nebo nemusí být tímto modelem postačujícím způsobem popsána. Často se stává, že jevové pole (Ω, S_Ω) dobře vystihuje sledované jevy, avšak nemáme dostatek informací pro vhodné určení pravděpodobnosti P. Můžeme však mít aspoň takovou informaci, že pro pravděpodobnost jevů $A, B \in S_\Omega$, relevantních ke studované situaci, lze prohlásit, že buď $P(A) \leq P(B)$ nebo $P(A) \geq P(B)$, tj. odhadneme, který z jevů A, B je aspoň tak pravděpodobný jako druhý.

Z psychologie je známo, že porovnávat lze snadněji ve smyslu nerovnosti než rovnosti. Takže máme-li se pokusit o odhad pravděpodobnosti jen na základě zkušenosti, pak jsme spíše schopni odhadnout, který ze dvou jevů je pravděpodobnější než druhý než hledat k jednomu jevu případně druhý, který je s ním stejně pravděpodobný. Obojí je ale dost významná idealizace zvláště, když uvažovaná základní množina Ω je velmi rozsáhlá, i když konečná nebo dokonce nekonečná, porovnávání pravděpodobností každých dvou různých jevů v tom případě není prakticky realizovatelné. Zkušeností podmíněná intuice je zde nezbytná.

Pravděpodobnost odhadovaná pouze na základě osobní kvalifikované zkušenosti se nazývá intuitivní. Jevové pole (Ω, S_Ω), které je modelem jevů z určitého pozorování, nazveme *observačním polem.* Někteří autoři (např. Pfanzagl v [4]) se předpokladu nekonečného observačního pole vyhýbají a uvažují, že S_Ω je jen algebra jevů. Přesto rozvíjejí náročnou algebraickou teorii vlastností observačního pole a pak na něm definují přístup k rozhodování, který vede k formulaci podmínek pro zdůvodněný odhad intuitivní pravděpodobnosti na základě teorie her (zřejmě motivováno pracemi von Neumanna a Morgensterna [8]). Přístup, který se zde pokusíme prezentovat, popsal ve své monografii ruský matematik Klimov [5]. Nevychází z úvah teorie fuzzy množin (jak je v poslední době v této souvislosti obvyklé, viz např. [3] nebo [4]), ale z několika intuitivně přijatelných předpokladů. Nám se zdá, že jeho přístup je relativně nejbližším teoretickým zdůvodněním subjektivně realizovaných odhadů, proto si ho dovolujeme prezentovat a komentovat. Je zajímavé, že ve velkých monografiích jako například [9], [10], [11], [12] se o jiné než relativně četnostní interpretaci pravděpodobnosti nehovoří.

1. Úvodní úvahy

Aplikace statistické teorie je založena na předpokladu stability relativních četností. Jde-li o data získaná například z vyjádření lidí, nelze se stabilitou relativních četností takových výroků (jevů) počítat. Za určitých okolností je však možné se opřít o (experimentálně psychology ověřenou) stabilitu porovnávání jevů z jistého (přesněji definovaného) hlediska. V tom případě však nemusí jít prvotně o odhad pravděpodobnosti, ale o odhad hodnověrnosti. Podmínky pro to, abychom z odhadu hodnověrnosti získali i odhad jisté pravděpodobnosti, jsou prezentovány ve zmiňované monografii [5].

Pro každé dva jevy A, B z observačního pole definujeme subjektivně podmíněnou relaci hodnověrnosti $\preccurlyeq$ podmínkou:

$$A \preccurlyeq B, \text{ právě když pro intuitivní pravděpodobnost } P \text{ platí } P(A) \leq P(B).$$

V případě $A \preccurlyeq B$ i $B \preccurlyeq A$, budeme jevy A, B považovat za stejně hodnověrné (tedy z uvedeného hlediska ekvivalentní) a to označíme $A \sim B$, resp. $A \sim_p B$. Předpokládáme, že se při rozšiřujícím takovém porovnávání blížíme k ekvivalenci, kterou bychom dostali v případě, že bychom odpovídající míru P znali a za ekvivalentní uvažovali jevy $A, B \in S_\Omega$, pro které je $P(A) = P(B)$.

Ze znalosti míry P je možné určit jednoznačně relaci hodnověrnosti, ale obrácené tvrzení neplatí: je více pravděpodobnostních měr, které indukují tutéž hodnověrnost. Ukážeme to na následujícím příkladu.

Příklad 1. Pro jevy A, B z jistého observačního pole (Ω, S_Ω) má expert určit, zda platí $P(A) \leq P(B)$ nebo $P(B) \leq P(A)$. Sledujme postupně růst informace, kterou k tomu potřebuje. Pokud expert zjistí, že $A \subset B$, pak je $P(A) \leq P(B)$ (předpokládáme, že expertu je observační pole známo). Jsou-li jevy A, B opačné, tj. $A \cap B = \emptyset$ a $A \cup B = \Omega$, pak musí být $P(A) = 1 - P(B)$. Známe-li jednu pravděpodobnost, např. $P(B)$, určíme druhou, tedy $P(A)$. Když jsou však jevy $A, B \in S_\Omega$ libovolné, krom případu $A \subset B$, resp. $B \subset A$, o vztahu jejich pravděpodobností $P(A)$, $P(B)$ nemůže expert (jen ze znalosti observačního pole) nic říci. Proto potřebuje intuitivní odhad.

Předpokládejme nyní, že základní množina Ω je konečná, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Zná-li expert pouze směry nerovností mezi každými dvěma pravděpodobnostmi na elementárních jevech $p(\omega_i) = p_i$ pro $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, může pro každé $A, B \in S_\Omega$ určit, zda je $P(A) \leq P(B)$ nebo obráceně $P(B) \leq P(A)$? Odpověď se získá například sledováním této jednoduché situace:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \quad 0 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq 1, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Je-li $A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B_1 = \{\omega_2, \omega_3\}$, musí být $P(A_1) \leq P(B_1)$, je-li však $A_2 = \{\omega_1, \omega_2\} = A_1$, $B_2 = \{\omega_3\}$, pak pro tyto jevy A_2, B_2 jen na základě porovnání pravděpodobností elementárních jevů příslušný vztah mezi pravděpodobnostmi neurčíme, např. pro $p_1 = \frac{7}{30}$, $p_2 = \frac{10}{30}$, $p_3 = \frac{13}{30}$ je $P(A_2) > P(B_2)$, ale pro následující hodnoty pravděpodobností $p_1 = \frac{1}{10}$, $p_2 = \frac{2}{10}$, $p_3 = \frac{7}{10}$ je $P(A_2) < P(B_2)$.

Jen připomeňme, že i pro intuitivní pravděpodobnost P předpokládáme, že platí $0 = P(\emptyset) \leq P(A) \leq 1 = P(\Omega)$ pro libovolný jev $A \in S_\Omega$.

Expertovi tedy v konečném případě, tj. když Ω je konečná, nestačí znalost posloupnosti velikostí intuitivních odhadů pravděpodobností *všech elementárních jevů* k definování hodnověrnosti na S_Ω. ■

Nyní ukážeme, že když základní množina Ω je nejvýše spočetná, je situace podobná, jak plyne z následujícího příkladu.

Příklad 2. Mějme nejvýše spočetnou základní množinu $\Omega = \{\dots, \omega_i, \omega_j, \dots\}$ a uspořádejme v ní elementární jevy tak, aby $\{\omega_i\} \preccurlyeq \{\omega_j\}$ právě když $P(\{\omega_i\}) \leq P(\{\omega_j\})$ pro všechna $i < j$. Předpokládáme, že uspořádání elementárních jevů z Ω relací hodnověrnosti je zdůvodnitelné pro každé $i \neq j$ expertně. Pro pravděpodobnost P musí ještě platit $\sum_i P(\{\omega_i\}) = 1$, kde $0 \leq P(\{\omega_i\}) \leq 1$ pro všechna i.

Dále volme v případě, že pro jisté i je $P(\{\omega_{i+1}\}) - P(\{\omega_i\}) > 0$ k pravděpodobnosti P pravděpodobnost P^* na S_Ω tak, že

$$\begin{aligned} P^*(\{\omega_j\}) &= P(\{\omega_j\}), \quad \text{pro všechna } j \neq i \quad \text{a} \quad j \neq i+1;\\ P^*(\{\omega_i\}) &= P(\{\omega_i\}) + \frac{1}{k}\big(P(\{\omega_{i+1}\}) - P(\{\omega_i\})\big);\\ P^*(\{\omega_{i+1}\}) &= P(\{\omega_{i+1}\}) - \frac{1}{k}\big(P(\{\omega_{i+1}\}) - P(\{\omega_i\})\big), \quad \text{kde } k \in \{2, 3, \dots\}. \end{aligned}$$

Je tedy také $\sum_j P^*(\{\omega_j\}) = 1$ a $P^*(\{\omega_j\}) \leq P^*(\{\omega_{j+1}\})$ pro $j = 1, 2, \dots$

Původní uspořádání elementárních jevů se novou volbou pravděpodobnosti P^* nemění.

Ptejme se nyní, zda pravděpodobnost P indukuje na S_Ω stejnou hodnověrnost jako pravděpodobnost P^*, tj. zda platí pro dva libovolné jevy $A, B \in S_\Omega$ následující ekvivalence dvou tvrzení:

$$P(A) \leq P(B) \longleftrightarrow P^*(A) \leq P^*(B). \tag{1}$$

Označme $\varepsilon = P(\{\omega_{i+1}\}) - P(\{\omega_i\})$, pro to i pro které je $\varepsilon > 0$.

Protože $P(A) = \sum_{\omega_j \in A} P(\{\omega_j\})$, $P(B) = \sum_{\omega_j \in B} P(\{\omega_j\})$, je

$$\begin{aligned} P^*(A) &= P(A) + \frac{\varepsilon}{k}, \quad \text{když } \omega_i \in A \quad \text{a} \quad \omega_{i+1} \notin A;\\ P^*(A) &= P(A) - \frac{\varepsilon}{k}, \quad \text{když } \omega_i \notin A \quad \text{a} \quad \omega_{i+1} \in A;\\ P^*(A) &= P(A), \quad \text{když } \omega_i \in A \text{ a } \omega_{i+1} \in A, \quad \text{nebo když } \omega_i \notin A \text{ a } \omega_{i+1} \notin A. \end{aligned}$$

Když $P^*(A) = P(A) + \frac{\varepsilon}{k}$ a $P^*(B) = P(B) - \frac{\varepsilon}{k}$ nebo obráceně se znaménky $-$ a $+$, pak z $P(A) \leq P(B)$ za daných podmínek plyne pouze $P^*(A) \leq P^*(B) \pm 2 \cdot \frac{\varepsilon}{k}$, ve zbývajících případech platí (1). Je-li tedy například $P(A) = 0{,}3 < 0{,}4 = P(B)$, pak může být při $\varepsilon = 0{,}2$ a $k = 2$ pro $P^*(A) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4 > 0{,}3 = 0{,}4 - 0{,}1 = P^*(B)$. ■

V následujícím příkladu ukážeme, že ve spojitém případě, tj. když Ω je kontinuum, i malá změna rovnoměrného rozdělení může mít za následek změnu odpovídající hodnověrnosti. Uvažujme situaci z následujícího příkladu.

Příklad 3. Mějme spojité rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0;1\rangle$ s hustotou $f(x)$. V tomto případě všechny borelovské podmnožiny z $\langle 0;1\rangle$ stejné mohutnosti μ jsou ekvivalentní, ať jsou umístěny v intervalu $\langle 0;1\rangle$ kdekoliv. Pro libovolnou borelovskou množinu A z intervalu $\langle 0;1\rangle$ je $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \mu(A) = \mu(A)\cdot 1 = \mu(A)\cdot f(x)$, $x \in \langle 0;1\rangle$, kde $f(x) \equiv 1$ na $\langle 0;1\rangle$ je hustota tohoto rozdělení, μ je σ-aditivní borelovská míra na $\langle 0;1\rangle$. Je-li pak například nová hustota f^* na $\langle 0;1\rangle$ určena takto

$$f^*(x) = \begin{cases} 1-\varepsilon; & x \in \langle 0;0{,}5) \\ 1+\varepsilon; & x \in \langle 0{,}5;1\rangle \end{cases}; \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

je pro jev $A = \{x \in \langle 0;0,5)\}$ a jev $B = \{x \in \langle 0{,}5;1\rangle\}$ pravděpodobnost P^* určena vztahy $P^*(A) = 0{,}5\cdot(1-\varepsilon)$, $P^*(B) = 0{,}5\cdot(1+\varepsilon)$, tedy je $P^*(A) < P^*(B)$, ačkoliv je $P(A) = P(B)$, tedy $A \sim_P B$ ale $A \nsim_{P^*} B$. ■

Nabízí se otázka, za jakých podmínek relace hodnověrnosti $\preccurlyeq$ v S_Ω jednoznačně definuje pravděpodobnost P, odpovídající této hodnověrnosti. Přitom budeme uvažovat obdobně, jako když měříme délku nějakým měřidlem. Výsledkem měření je vždy kladné *racionální* číslo, modelem pak může být náhodná veličina s oborem hodnot v množině všech *reálných* čísel. Vede nás k tomu intuice o možném neomezeném zpřesňování každého měření. Model, používající reálných čísel jako množiny výsledků, tedy více odpovídá limitní ideální představě (jde o aplikaci zákona velkých čísel). V našem případě se bude model opírat o předpokládanou možnost nekonečného porovnávání pravděpodobností dvou libovolných jevů.

2. Teorie

Intuitivní porovnávání pravděpodobností jevů z observačního pole je založeno na chování měřitelné náhodné veličiny $\xi : (\Omega, S_\Omega) \to (\langle 0;1\rangle\,; B_{\langle 0;1\rangle})$, kde $B_{\langle 0;1\rangle}$ je systém borelovských podmnožin z $\langle 0;1\rangle$ a která má na $\langle 0;1\rangle$ spojité rovnoměrné rozdělení, tedy například platí

$$P(\xi \in (a,b\rangle) = b-a; \quad a \le b; \quad a,b \in \langle 0;1\rangle\,;$$
$$P(\xi \in (0,x\rangle); \quad P(\xi = x) = 0; \quad x \in \langle 0;1\rangle\,;$$
$$P(\xi = 0) = 0.$$

O relaci hodnověrnosti na S_Ω nyní vyslovíme několik (intuitivně podmíněných) vlastností podle [5]:

$\Pi 1$. Pro libovolné dva jevy $A, B \in S_\Omega$ platí buď $A \preccurlyeq B$ nebo $B \preccurlyeq$ A, tj. libovolné dva jevy A, B jsou porovnatelné relací $\preccurlyeq$.

Π2. Když $A_1, A_2, B_1, B_2 \in S_\Omega$ jsou jevy, pro které $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$ a $A_i \preccurlyeq B_i$, $i = 1, 2$, pak také $A_1 \cup A_2 \preccurlyeq B_1 \cup B_2$. Označme neplatnost relace $\sim$ znakem $\nsim$. Když pak také $A_1 \nsim B_1$ nebo $A_2 \nsim B_2$, je $A_1 \cup A_2 \nsim B_1 \cup B_2$.

Π3. Platí $\emptyset \preccurlyeq A$ pro každý jev; krom toho $\emptyset \nsim \Omega$.

Chceme-li pracovat s nekonečným systémem jevů z S, musíme požadovat i platnost Π4.

Π4. Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost jevů $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$, $A_i \in S_\Omega$. Označme pro tento případ $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n\geq 1} A_n = A \in S_\Omega$ nebo stručně také $A_n \searrow A$. Platí-li pro $n = 1, 2, \dots$, že $A_n \succcurlyeq B$, $B \in S_\Omega$, pak také platí $A \succcurlyeq B$.

Důsledkem předchozích předpokladů Π1, Π2, Π3, Π4 je pak následující tvrzení o relaci hodnověrnosti na observačním poli S_Ω, jak je možné se přesvědčit z [5].

Věta. Nechť (Ω, S_Ω) je observační pole a na třídě S_Ω je dána relace $\preccurlyeq$ vyhovující předpokladům Π1 až Π4. Pak existuje *jediná* pravděpodobnostní míra P, která je v souladu s relací $\preccurlyeq$.

3. Aplikace

Může nám předchozí věta pomoci k sofistikovanějšímu intuitivnímu odhadu hodnot pravděpodobnosti P pro některé jevy z S_Ω? Myslíme, že ano. Navození vhodné představy podmiňuje správnou intuici, a tedy správnější odhad hledané pravděpodobnosti P. Předchozí teorie nám ukázala, že k intuitivnímu odhadu pravděpodobnosti P nestačí jen považovat „emočně chladnější“, tj. rozumněji podložený odhad pravdivosti výroku „$P(A) \leq P(B)$“ v tomto tvaru pro libovolné dva jevy A, B z observačního pole. Pouze zdánlivě stejnou informaci získáme, když předchozí nerovnost upravíme na tvar $P(B) - P(A) \geq 0 = P(\emptyset)$ a pak třeba i na tvar $P(B - A) \geq P(\emptyset)$. Uvažujeme-li možnost uspořádat všechny jevy z observačního pole na úsečku jednotkové délky podle míry hodnověrnosti, pak musíme například uvažovat o pravděpodobnosti $P(B - A) = P(B) - P(A)$ v představě rozdílu ploch dvou obdélníků (případně dvou úseček) se dvěma stranami o velikosti $P(A)$, resp. $P(B)$, a dvěma stranami o jednotkové velikosti, umístěnými v pravoúhlé soustavě souřadnic, viz Obr. 1.

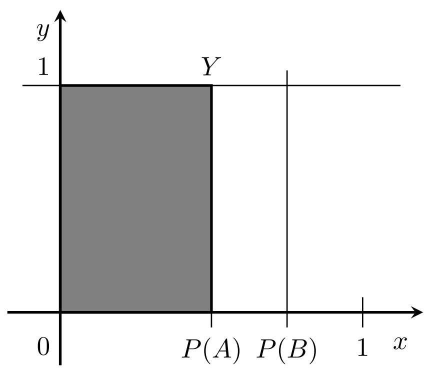
V souladu s naší novou představou není správným řešením úvaha nabízená v *Příkladu 1.* Abychom byli v souladu s nabízenou novou představou, musíme změnit stavbu observačního pole. Diskrétní jevové pole s konečnou základní množinou Ω musíme zaměnit za σ-algebru reprezentovanou všemi možnými obdélníky s vrcholy 0 $P(A)$ Y 1 (Obr. 1), kde poloha bodu $P(A)$ je omezena na úsečku 0 1. Pak bude $P(S_\Omega) = \langle 0; 1 \rangle$ a podle předchozí věty vedou postupně upřesňované intuitivní úvahy limitně a ideálně k jednoznačně určené pravděpodobnosti P.

Zbývá zodpovědět otázku, kde a případně kdy jsou takové úvahy, které mají vést k intuitivně určené pravděpodobnosti, potřebné a jak asi mohou naše teoretické předpoklady odpovídat aspoň částečně skutečnosti.

Hodnocení úrovně nebo kvality některých činností není možné bez subjektivního posouzení experty. V každém takovém posuzování ale hraje určitou váhu jeho neurčitost, podaná například v subjektivní míře pravděpodobnosti expertova názoru na splnění jistého cíle. Klasickým příkladem je posuzování uměleckých výtvorů, například kvality obrazu, architektonického řešení, hudebního či sportovního projevu. Přesto i postup při hodnocení experta (expertů) musí podléhat jistým pravidlům. K těm například patří volba etalonu (vzoru) pro každou úroveň hodnocení. Krom toho experti nepřicházejí obyčejně hodnotit jen jediné dílo, výkon či produkt, ale posuzují vše vzájemně v souboru reálných, ale třeba i fiktivních objektů.

Právě náš článek poukazuje na důležitost znalosti techniky vzájemného porovnávání porovnávaného. Dále je třeba, aby experti měli poměrně jasnou představu o tom, kdy dojde k *splnění jistého cíle*. Právě přípustnost expertova názoru na „vzdálenost“ reálného pozorování od toho, které splňuje jistý ideální cíl, dává možnost definovat pravděpodobnost intuitivně.

Intuitivnost chápeme podle Obr. 1 v představě plochy pod grafem $y = 1$ a omezenou na vodorovné ose body $P(A)$ a 1, představující odhad hodnoty $1 - P(A)$.



Obrázek 1: Geometrická představa pro intuitivní odhad pravděpodobnosti.

3.1. Expertní odhady v krasobruslení

Na příkladu hodnocení výkonu závodníka v krasobruslení ukážeme, že dobře propracovaný systém subjektivního hodnocení může vykazovat mezi různými hodnotiteli stabilně nízkou hodnotu rozptýlení, a tedy i relativně vysokou spolehlivost. Určitý výkon závodníka před porotou (rozhodčími) je jistě náhodný jev, pod subjektivně odhadovanou pravděpodobností můžeme pak rozumět poměr mezi výsledným bodovým ziskem a maximálním možným bodovým ziskem jeho výkonu. Takto odhadovaná hodnota je mírou postavení hodnoceného na škále $\langle 0; 1 \rangle$ a může být interpretována jako pravděpodobnost naplnění nejvyššího cíle u náhodně vybraného závodu určitého závodníka. Jaké asi přesnosti je možné na základě propracovaného expertního odhadu dosáhnout v případě vrcholné sportovní události, ukážeme následujícím konkrétním příkladem.

Krasobruslení je jednou z oficiálních disciplín zimních olympijských her (ZOH)[1]. Sóloví bruslaři jsou zde hodnoceni za krátký program a volnou jízdu skupinou devíti porotců, kteří při hodnocení provádí expertní odhad výkonu bruslaře. V roce 2004 Mezinárodní bruslařská unie zavedla systém hodnocení, který je propracován do nejmenších detailů [2]. Tento bodovací systém je založen na sčítání dvou známek, získaných za techniku a za komponenty programu. Na Obr. 2 je ukázka detailního hodnocení rozhodčích českého bruslaře Michala Březiny na ZOH 2018, detailní hodnocení od jednotlivých rozhodčích jsou pro zdůraznění vyznačeny v červeném rámečku.

Body za techniku se řídí tabulkou hodnot pro jednotlivé prvky sólového a párového bruslení [2]. Při hodnocení určí nejprve techničtí specialisté název a úroveň každého realizovaného prvku (na Obr. 2 sloupeček s názvem *Executed Elements* – zde například 4S znamená Čtverný Salchow). Rozhodčí pak hodnotí kvalitu provedení každého prvku sedmi stupni na stupnici provedení:

$$+3,\ +2,\ +1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3.$$

Každý kladný či záporný stupeň má svou bodovou hodnotu (*GOE*), která je přičtena k základní bodové hodnotě prvku (*Base Value*). Ukázka přidělovaných bodů za jednotlivé krasobruslařské prvky je uvedena v Tab. 1. Kompletní tabulku krasobruslařských prvků může čtenář nalézt v [2].

Výsledná bodová hodnota (resp. stupeň) předvedení daného prvku přidělená sborem rozhodčích se určí výpočtem tzv. useknutého průměru (*trim-*

[1] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Zimní_olympijské_hry`

Krátký program, str. 113

Gangneung Ice Arena
강릉 아이스 아레나
Palais des glaces de Gangneung

PyeongChang 2018

FRI 16 FEB 2018

Figure Skating
피겨 스케이팅 / Patinage artistique
Men Single Skating
피겨 스케이팅 남자 싱글 / Patinage individuel hommes
Short Program
쇼트 프로그램 / Programme court

Judges Details per Skater
선수별 심판 세부채점 정보 / Notation détaillée des juges par patineur

Rank	Name	NOC Code	Starting Number	Total Segment Score	Total Element Score	Total Program Component Score (factored)	Total Deductions
9	BREZINA Michal	CZE	13	85.15	44.34	40.81	0.00

#	Executed Elements	Info	Base Value	GOE	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	Ref.	Scores of Panel
1	4S+2T		11.80	0.00	0	0	0	0	0	0	1	0	0		11.80
2	3A		8.50	1.43	2	2	2	2	1	1	1	1	1		9.93
3	FSSp4		3.00	0.93	2	2	2	2	2	1	2	1	2		3.93
4	CCSp4		3.20	0.71	1	2	2	1	2	2	1	1	1		3.91
5	3F		5.83	x 1.00	1	2	2	0	2	2	2	1	-1		6.83
6	StSq3		3.30	0.93	2	3	2	2	2	1	2	1	2		4.23
7	CCoSp3		3.00	0.71	2	1	1	2	2	1	1	2	1		3.71
			38.63												44.34
	Program Components			Factor											
	Skating Skills			1.00	8.25	8.75	8.25	8.25	8.25	8.50	8.00	7.75	8.25		8.25
	Transitions			1.00	7.25	8.25	7.75	8.00	8.25	8.00	7.50	7.75	8.00		7.89
	Performance			1.00	8.00	8.75	8.50	8.50	8.25	8.25	8.00	8.00	8.25		8.25
	Composition			1.00	8.00	8.50	8.00	8.50	8.50	8.50	7.75	7.75	8.25		8.21
	Interpretation of the Music			1.00	7.75	8.50	8.25	8.50	8.50	8.25	8.25	7.50	8.00		8.21
	Judges Total Program Component Score (factored)														40.81

Volná jízda, str. 143

Gangneung Ice Arena
강릉 아이스 아레나
Palais des glaces de Gangneung

PyeongChang 2018

SAT 17 FEB 2018

Figure Skating
피겨 스케이팅 / Patinage artistique
Men Single Skating
피겨 스케이팅 남자 싱글 / Patinage individuel hommes
Free Skating
프리 스케이팅 / Programme libre

Judges Details per Skater
선수별 심판 세부채점 정보 / Notation détaillée des juges par patineur

Rank	Name	NOC Code	Starting Number	Total Segment Score	Total Element Score	Total Program Component Score (factored)	Total Deductions
18	BREZINA Michal	CZE	17	160.92	76.58	84.34	0.00

#	Executed Elements	Info	Base Value	GOE	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	Ref.	Scores of Panel
1	4S		10.50	-2.23	-1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-1		8.27
2	3A+2T		9.80	1.14	1	1	2	1	1	1	1	1	2		10.94
3	2S		1.30	0.00	0	0	0	1	0	0	0	0	0		1.30
4	FSSp4		3.00	1.00	2	2	2	2	2	1	2	2	2		4.00
5	StSq3		3.30	0.93	2	1	2	3	2	2	2	2	1		4.23
6	3A		9.35	x 2.00	3	2	2	2	2	2	2	2	2		11.35
7	3Lo		5.61	x 1.10	2	2	2	1	1	1	1	2	2		6.71
8	3F+2T+2Lo		9.24	x 0.80	2	1	2	1	1	1	1	1	1		10.04
9	3Lz		6.60	x 0.20	2	1	-1	1	-1	0	1	-1	1		6.80
10	3S		4.84	x -1.50	-1	-2	-3	-3	-2	-2	-2	-2	-2		3.34
11	ChSq1		2.00	1.10	2	1	2	1	2	1	2	1	2		3.10
12	FCCoSp4		3.50	0.50	2	1	1	0	1	1	1	1	1		4.00
13	CCoSp2V		2.00	0.50	2	1	1	1	1	1	1	1	1		2.50
			71.04												76.58
	Program Components			Factor											
	Skating Skills			2.00	8.75	8.25	8.50	8.50	8.25	8.75	8.75	8.75	8.50		8.57
	Transitions			2.00	8.50	8.00	8.25	8.00	8.00	8.25	8.50	8.50	8.00		8.21
	Performance			2.00	8.75	8.25	8.75	8.25	8.00	8.50	8.25	8.50	8.25		8.39
	Composition			2.00	8.75	8.50	8.75	8.25	8.25	8.75	8.50	8.75	8.50		8.57
	Interpretation of the Music			2.00	8.75	8.25	8.75	8.00	8.25	8.50	8.50	8.50	8.25		8.43
	Judges Total Program Component Score (factored)														84.34
	Deductions:														0.00

Obrázek 2: Detailní hodnocení rozhodčích pro bruslaře Michala Březinu na ZOH 2018 (*Judges Details per Skater*), zdroj [1].

Tabulka 1: Ukázka hodnot krasobruslařských prvků – sólové kategorie, zdroj [2]. Base Value je nula.

Krasobruslařské prvky	Zkratka	Body za stupeň provedení (*GOE*)						
		3	2	1	**0**	−1	−2	−3
Čtverný Salchow	4 S	3,0	2,0	1,0	**10,5**	−1,2	−2,4	−4,0
Dvojitý Toeloop	2 T	0,6	0,4	0,2	**1,3**	−0,2	−0,4	−0,6
Skok do nízké piruety, úroveň 4	FSSp 4	1,5	1,0	0,5	**3,0**	−0,3	−0,6	−0,9

med mean). Upravený průměr se počítá vyškrtnutím nejvyššího a nejnižšího hodnocení a následným výpočtem průměru ze zbývajících hodnot[2].

V Tab. 2 jsou přepsána obdržená hodnocení kvality (stupně) provedení jednotlivých prvků bruslaře Michala Březiny a vypočítány základní charakteristiky[3] jak pro hodnocení všech porotců, tak pro hodnocení po odstranění nejvyššího a nejnižšího uděleného stupně (odstraněná hodnocení jsou označena šedě). Nízké hodnoty SEM (směrodatné chyby průměru) naznačují, že hodnocení porotců je poměrně shodné. V Tab. 2 jsou zaznamenána i hodnocení s nulovou odchylkou, a tedy též nulovou směrodatnou chybou průměru, ostatní odchylky rovněž nenaznačují výrazné výkyvy v hodnocení – hodnocení porotců lze považovat za homogenní.

Po udělení bodů za techniku ještě každý rozhodčí hodnotí celkový výkon bruslaře. Toto hodnocení je rozděleno do pěti programových komponent nazývaných bruslařské dovednosti, spojovací prvky, předvedení/provedení, choreografie a interpretace. Komponenty programu jsou rozhodčími hodnoceny po dokončení programu stupnicí známek od 0,25 do 10 s odstupňováním po 0,25 bodech (čím vyšší hodnota, tím lepší výkon). Instrukce týkající se hodnocení jsou publikovány a aktualizovány Mezinárodní bruslařskou unií [2].

V Tab. 3 jsou pro bodová hodnocení programových komponent Michala Březiny opět vypočítány základní charakteristiky. Stabilitu hodnocení jednotlivých porotců dokládají opět nízké směrodatné odchylky a SEM. Pro každou komponentu je v tabulce uveden také variační koeficient[4], tedy bez-

[2]Kombinace a sekvence skoků jsou hodnoceny jako jeden celek, s taktéž jasně danou metodikou. V případě volných jízd sólových kategorií je ještě základní hodnota všech skoků předvedených ve druhé polovině programu vynásobena speciálním faktorem 1,1, aby byla oceněna rovnoměrně rozložená obtížnost programu.

[3]Průměr $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, směrodatná odchylka $s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$, SEM $\frac{s}{\sqrt{n}}$. Směrodatná odchylka a SEM jsou zaokrouhleny nahoru.

[4]Variační koeficient $V = \frac{s}{\overline{x}}$ je taktéž zaokrouhlen nahoru.

Tabulka 2: Michal Březina ZOH 2018 – hodnocení kvality (stupně) provedení jednotlivých prvků.

Výstup	Porotce									Základní charakteristiky			Základní charakteristiky (po odstranění max a min)		
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	Průměr	Sm. od.	SEM	Průměr	Sm. od.	SEM
Krátký program	~~0~~	0	0	0	0	0	~~1~~	0	0	0,11	0,32	0,11	0,00	0,00	0,00
	~~2~~	2	2	2	~~1~~	1	1	1	1	1,44	0,50	0,17	1,43	0,50	0,19
	~~2~~	2	2	2	2	~~1~~	2	1	2	1,78	0,42	0,14	1,86	0,35	0,14
	~~1~~	~~2~~	2	1	2	2	1	1	1	1,44	0,50	0,17	1,43	0,50	0,19
	1	~~2~~	2	0	2	2	2	1	~~−1~~	1,22	1,04	0,35	1,43	0,73	0,28
	2	~~3~~	2	2	2	~~1~~	2	1	2	1,89	0,57	0,19	1,86	0,35	0,14
	~~2~~	~~1~~	1	2	2	1	1	2	1	1,44	0,50	0,17	1,43	0,50	0,19
Volná jízda	~~−1~~	~~−2~~	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−1	−1,78	0,42	0,14	−1,86	0,35	0,14
	~~1~~	1	~~2~~	1	1	1	1	1	2	1,22	0,42	0,14	1,14	0,35	0,14
	~~0~~	0	0	~~1~~	0	0	0	0	0	0,11	0,32	0,11	0,00	0,00	0,00
	~~2~~	2	2	2	2	~~1~~	2	2	2	1,89	0,32	0,11	2,00	0,00	0,00
	2	~~1~~	2	~~3~~	2	2	2	2	1	1,89	0,57	0,19	1,86	0,35	0,14
	~~3~~	~~2~~	2	2	2	2	2	2	2	2,11	0,32	0,11	2,00	0,00	0,00
	~~2~~	2	2	~~1~~	1	1	1	2	2	1,56	0,50	0,17	1,57	0,50	0,19
	~~2~~	~~1~~	2	1	1	1	1	1	1	1,22	0,42	0,14	1,14	0,35	0,14
	~~2~~	1	~~−1~~	1	−1	0	1	−1	1	0,33	1,06	0,36	0,29	0,89	0,34
	~~−1~~	−2	~~−3~~	−3	−2	−2	−2	−2	−2	−2,11	0,57	0,19	−2,14	0,35	0,14
	~~2~~	~~1~~	2	1	2	1	2	1	2	1,56	0,50	0,17	1,57	0,50	0,19
	~~2~~	1	1	~~0~~	1	1	1	1	1	1,00	0,48	0,16	1,00	0,00	0,00
	~~2~~	~~1~~	1	1	1	1	1	1	1	1,11	0,32	0,11	1,00	0,00	0,00

rozměrná míra relativního rozptýlení souboru, která se po odstranění nejvyšší a nejnižší hodnoty pohybuje v rozmezí 2–4 % (vyznačeno v Tab 3).

A jaký je tedy výkon Michala Březiny na letošních ZOH? Nejprve nutno zmínit, že do konečného hodnocení se body udělené ve volných jízdách u mužů započítávají dvojnásobně [2]. Zaměříme se zde jen na hodnocení celkového výkonu, tj. programových komponent. Uvažujeme-li všechny komponenty dohromady (Tab. 4), je po zaokrouhlení průměrný bodový zisk Michala Březiny 8,35 ± 0,06 (95% intervalový odhad) z možných 10 bodů za komponentu.

Celkově Michala Březina na ZOH získal za programové komponenty 125,15 bodů[5] z maximálního možného zisku 150 bodů. Míru jeho výkonu vzhledem k apriorně určenému maximu můžeme tedy odhadnout poměrem $\frac{125{,}15}{150} \doteq 0{,}83$. Toto číslo může být přímo interpretováno jako odhad pravděpodobnosti *zisku maxima* M. Březiny v podobných závodech nebo být podkladem k opět subjektivní předpovědi jeho postavení v některém závodě v poměrně krátké budoucnosti.

Opět podobnou cestou expertního odhadu lze totiž stanovit souvislost mezi číslem 0,83 a pravděpodobností úspěchu v určité soutěži v budoucnosti. Závodníci s vyšší mírou výkonu mají za předpokladu stejných podmínek větší pravděpodobnost úspěchu v nejbližší soutěži. Lze realizovat buď optimistický, nebo pesimistický odhad pravděpodobnosti úspěchu M. Březiny v některém budoucím závodě, tj. předpokládáme v budoucnosti buď jeho lepší nebo horší výkon.

Tak například v závodě s n účastníky, kde n_p (resp. n_o) je počet těch, kteří dosáhli v některém předchozím závodě aspoň průměrného bodového zisku $8{,}35 - 0{,}06$ (resp. $8{,}35 + 0{,}06$) je optimistický odhad pravděpodobnosti jeho úspěchu $\widehat{p}_o = (n - n_o)/n$ a pesimistický $\widehat{p}_p = (n - n_p)/n$.

4. Závěrem

Hodnocení úrovně nebo kvality činností, které jsou kvantifikovatelné jen prostřednictvím expertního odhadu, může vést k odhadu intuitivní pravděpodobnosti. Prvotní expertní odhad se tak stává věcným podkladem k odůvodněné předpovědi pravděpodobnosti možné události v budoucnosti. Realizaci intuitivního odhadu jsme demonstrovali na již delší dobu uplatňovaném kvantitativním hodnocení sportovně-uměleckého výkonu rozhodčími.

V ukázaném případě (výkon M. Březiny na OH 2018) lze číselný údaj 0,83 chápat jako objektivizovaný podklad k opět subjektivně kvantifikova-

[5] Oficiální bodový zisk 125,15 z programových komponent na ZOH je součtem průměrných hodnocení za jednotlivé komponenty (bez průběžného zaokrouhlování u jednotlivých komponent by byl celkový bodový zisk 125,18).

Tabulka 3: Michal Březina ZOH 2018 – hodnocení jednotlivých programových komponent.

Výstup	Porotce									Základní char.				Základní char. (po odstranění max a min)			
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	Pr.	S. o.	SEM	V. k.	Pr.	S. o.	SEM	V. k.
Krátký program	8,25	~~8,75~~	8,25	8,25	8,25	8,50	8,00	~~7,75~~	8,25	8,25	0,27	0,09	0,04	8,25	0,14	0,06	0,02
	~~7,25~~	~~8,25~~	7,75	8,00	8,25	8,00	7,50	7,75	8,00	7,86	0,32	0,11	0,04	7,89	0,23	0,09	0,03
	~~8,00~~	~~8,75~~	8,50	8,50	8,25	8,25	8,00	8,00	8,25	8,28	0,25	0,09	0,04	8,25	0,19	0,08	0,03
	8,00	~~8,50~~	8,00	8,50	8,50	8,50	~~7,75~~	7,75	8,25	8,19	0,31	0,11	0,04	8,21	0,29	0,11	0,04
	7,75	~~8,50~~	8,25	8,50	8,50	8,25	8,25	~~7,50~~	8,00	8,17	0,34	0,12	0,05	8,21	0,25	0,10	0,04
Volná jízda	~~8,75~~	~~8,25~~	8,50	8,50	8,25	8,75	8,75	8,75	8,50	8,56	0,20	0,07	0,03	8,57	0,18	0,07	0,03
	~~8,50~~	~~8,00~~	8,25	8,00	8,00	8,25	8,50	8,50	8,00	8,22	0,22	0,08	0,03	8,21	0,21	0,08	0,03
	~~8,75~~	8,25	8,75	8,25	~~8,00~~	8,50	8,25	8,50	8,25	8,39	0,24	0,08	0,03	8,39	0,19	0,07	0,03
	~~8,75~~	8,50	8,75	~~8,25~~	8,25	8,75	8,50	8,75	8,50	8,56	0,20	0,07	0,03	8,57	0,18	0,07	0,03
	~~8,75~~	8,25	8,75	~~8,00~~	8,25	8,50	8,50	8,50	8,25	8,42	0,24	0,08	0,03	8,43	0,18	0,07	0,03

Tabulka 4: Michal Březina ZOH 2018 – programové komponenty (celkově) – vážený průměr (výstup z programu STATISTICA). Průměr počítán po odstranění nejvyššího a nejnižšího hodnocení u každé programové komponenty. Body udělené ve volných jízdách jsou dle metodiky v [2] započítány dvojnásobně (vážený průměr).

Hodnocení programových komponent	Průměr	Interval spolehlivosti	
		−95%	95%
	8,345238	8,292674	8,397802

nému odhadu pravděpodobnosti úspěchu v nejbližším podobném závodě. Podobně (přibližně stejně přesně za podmínky stanovení podrobných pravidel) lze hodnotit i výkony žáků u maturitní zkoušky (ať je písemná, či ústní). Školní známky jsou totiž možným obrazem toho, jak úspěšný by mohl být student v podobné situaci v budoucnosti.

Dalším příkladem může být odhad míry poškození stavby požárem, posouzení kvality konstrukce nebo projektu a v souvislosti s tím například i stanovení pravděpodobnosti dožití stavby. Podobně z odhadu pokročilosti nemoci je možné odhadnout např. pravděpodobnost přežití pacienta či jiný výhled pro jeho zdraví v budoucnosti.

Reference

[1] Cezar A.: *Official results book: Figure skating* [online]. [citováno dne 2018-03-22], 2018. Dostupné z: `http://www.isuresults.com/results/season1718/owg2018/OWG2018_protocol.pdf`

[2] Dijkema J.: *Communication No. 2089* [online]. International skating union, [citováno dne 2018-03-22], 2017.
Dostupné z: `https://www.usfigureskating.org/content/ISU%202089-sptc-comm-goe-sov-2017-18.pdf`

[3] Dubois D., Prade H.: *Théorie des possibilités, Applications á la representation des connaissances en informatique*, 2. upravené a rozšířené vydání, Masson, Paris, Milan, Barcelone, Mexico, s. 287, 1988.

[4] Hirota K.: *Concepts of Probability Sets,* Fuzzy Sets and Systems, 5(1), 31–46, 1981.

[5] Klimov G. P.: *Teorija verojatnostej i matematičeskaja statistika*, Izdatělstvo Moskovskogo universitěta, 84–88, 1983.

[6] Pfanzagl J.: *Theory of measurement*, 2. vyd., Physica-Verlag, Würzburg--Wien, s. 248, 1971.

[7] Půlpán Z.: *Váha logického důsledku formule s neurčitými předpoklady pravdivosti*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky, 46(2), 2017.

[8] von Neumann J., Morgenstern O.: *The theory of games and economic behavior*, 3. vyd., Princeton Univ. Press, Princeton, 1953.

[9] Anděl J.: *Matematická statistika,* SNTL, Praha, Alfa Bratislava, 1978.

[10] Feller W.: *An introduction to probability theory and its applications,* Vol. 1, Wiley, New York, 1950; Vol. 2, Wiley, New York, 1966.

[11] Loeve M.: *Probability theory,* Van Nostrand, New York, 1963.

[12] Renyi A.: *Teorie pravděpodobnosti,* Academia, Praha, 1972.