UNIVERZITA PARDUBICE
FAKULTA EKONOMICKO-SPRÁVNÍ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Analýza herních strategií ve hře Superfarmář a její využití při rozhodovacích procesech v ekonomické praxi

Ústav podnikové ekonomiky a managementu

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Libor Koudela, Ph.D.**

Vypracovala: **Alexandra Crhová**

Studijní program: B6208 - Ekonomika a management

Studijní obor: 6208R146 - Ekonomika a provoz podniku

Forma studia: kombinovaná

Rok odevzdání: 2019

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: **2018/2019**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Alexandra Crhová**
Osobní číslo:	**E17785**
Studijní program:	**B6208 Ekonomika a management**
Studijní obor:	**Ekonomika a provoz podniku**
Název tématu:	**Analýza herních strategií ve hře Superfarmář a její využití při rozhodovacích procesech v ekonomické praxi**
Zadávající katedra:	**Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Zásady pro vypracování:

Cíl práce: V práci budou shrnuty obecné základy teorie her, bude popsána hra Karola Borsuka Superfarmář, formulovány možné způsoby záznamu průběhu hry a analyzovány různé herní strategie z hlediska teorie her. Bude diskutována možnost využití získaných poznatků při rozhodovacích procesech při řízení podniku.

Osnova:
-Základní pojmy a poznatky teorie her.
-Hra Superfarmář: popis, pravidla, historie.
-Analýza herních strategií ve hře Superfarmář.
-Diskuse možností využití získaných poznatků.

Rozsah grafických prací:	–
Rozsah pracovní zprávy:	**cca 50 stran**
Forma zpracování bakalářské práce:	**tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

DLOUHÝ, M., FIALA, P., Úvod do teorie her, 2. vydání. Oeconomica, Praha 2009.
CHVOJ, Martin. Pokročilá teorie her ve světě kolem nás. Praha: Grada, 2013. ISBN 978-80-247-4620-3.
MAŇAS, M., Teorie her a konflikty zájmů. Oeconomica, Praha 2002.
OSBORNE, Martin J. a Ariel RUBINSTEIN. A Course in Game Theory. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1994. ISBN 0-262-65040-1.

Koudela

Vedoucí bakalářské práce:	**Mgr. Libor Koudela, Ph.D.**
	Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání bakalářské práce:	**3. září 2018**
Termín odevzdání bakalářské práce:	**30. dubna 2019**

doc. Ing. Romana Provazníková, Ph.D.
děkanka

L.S.

doc. Ing. Marcela Kožená, Ph.D.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 3. září 2018

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Alexandra Crhová

Název práce: Analýza herních strategií ve hře Superfarmář a její využití při rozhodovacích procesech v ekonomické praxi

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Ústav podnikové ekonomiky a managementu

Vedoucí práce: Mgr. Libor Koudela, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2019

Abstrakt: V práci budou shrnuty obecné základy teorie her, bude popsána hra Karola Borsuka Superfarmář, formulovány možné způsoby záznamu průběhu hry a analyzovány různé herní strategie z hlediska teorie her. Bude diskutována možnost využití získaných poznatků při rozhodovacích procesech při řízení podniku.

Klíčová slova: teorie her, superfarmář, strategie, teorie her v ekonomii, management

Počet stran: 56

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Alexandra Crhová

Title: Game strategy analysis in Superfarmar game and its use in decision making processes in economic practice

Type of thesis: Bachelor's

Department: Institute of Business Economics and Management

Supervisor: Mgr. Libor Koudela, Ph.D.

The year of presentation: 2019

Abstract: The thesis summarizes the general principles of game theory, describes the game of Karel Borsuk Superfarmar, formulates possible ways of recording the game and analyzes various game strategies in terms of game theory. The possibility of using acquired knowledge in decision-making processes in company management will be discussed.

Key words: game theory, Superfarmer, strategy, game theory in economics, management

Number of pages: 56

Number of appendices: 0

Language: Czech

Tuto práci jsem vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury. Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše. Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 9/2012, bude práce zveřejněna v Univerzitní knihovně a prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 30.4.2019 Alexandra Crhová

Obsah

Seznam obrázků

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala panu doc. Mgr. Karlu Pastorovi, Ph. D., a svému vedoucímu bakalářské práce panu Mgr. Liboru Koudelovi, Ph.D., za čas strávený konzultacemi, za rady a připomínky při zpracování bakalářské práce. Dále bych chtěla vřele poděkovat celé své rodině a manželovi za trpělivost a pevné nervy s mnoha opakováními hraní hry Superfarmář.

Úvod

V této bakalářské práci se budu zabývat teorií her, jak obecně, tak i jednou konkrétní hrou. Na toto téma mě přivedl doc. Pastor v době mého studia na Univerzitě Palackého v Olomouci. Hra i teorie her samotná mě ihned zaujaly. Hra Superfarmář má zajímavé okolnosti vzniku, kdy za 2. světové války vytvořil hru pro své děti polský matematik Karol Borsuk a za účelem zisku ji rozšiřoval mezi veřejnost. Hra je výjimečná pro své dvě hrací kostky, nejedná se o obyčejné hrací kostky, ale o kostky ve tvaru pravidelného dvanáctistěnu.

Bakalářská práce je rozdělena do dvou kapitol. V první kapitole představím teorii her jako takovou a její problematikou. Vysvětlím, co je to hra s konstantním i nekonstantním součtem, hra v rozvinutém tvaru, Nashova rovnováha a strategie her. Ukáži možnou aplikaci teorie her v ekonomii. Vybrala jsem si aplikaci teorie her na model duopolu, kde popíši a na příkladech vysvětlím Cournotovo, rovnovážné a Stackelbergovo řešení.

Ve druhé kapitole se soustředím na hru Superfarmář. Na úvod představím hru a jejího autora. Dále se budu věnovat strategiím hry a budu se snažit odhadnout pravděpodobnosti výhry dle zvolené strategie hráče. Popíši zápis hry, který umožňuje zpětně promítnout celou odehranou hru, najít chyby a optimalizovat možnosti výhry. Ukáži průběh celé jedné hry s mou a soupeřovou zvolenou strategií.

Kapitola 1

V této části bakalářské práce bude věnována pozornost teorii her. Budou vysvětleny základní pojmy teorie her a u každého z nich bude uvedena názorná ukázka.

1.1. Základní pojmy

Teorie her se zabývá popisem konfliktních rozhodovacích situací. O vznik současné teorie her se zasloužili John von Neumann (1903-1957) a Oskar Morgenstern (1902-1977) ve své knize z roku 1944: *The Theory of Games and Economic Behavior.* Mezi důležité představitele patří Ernst Zermelo (1871-1953) a Émile Borel (1871-1956).

Původně se teorie her zabývala společenskými neboli salónními hrami jako je poker apod., z čehož pak vznikl samotný název. Nyní budou přiblíženy základní pojmy:

- Hra – rozhodovací situace neboli konflikt, nejedná se pouze o salónní hry, ale také o jakoukoli konfliktní situaci mezi dvěma a více účastníky.
- Hráč – účastník konkrétní hry, který může ovlivnit výsledek hry svým chováním. Racionální hráč je ten, který usiluje o optimální výsledek hry a indiferentní hráč je ten, kterému je výsledek hry lhostejný.
- Strategie – konkrétní alternativa, kterou může hráč zvolit.
- Optimální strategie – hráčem zvolená alternativa, která je pro hráče nejvýhodnější.

- Prostor strategií – množina všech možných alternativ, které jsou hráči dostupné.
- Výplatní funkce – výsledek hry neboli užitek, výhra hráče v závislosti na zvolených strategiích.
- Inteligentní hráč – účastník konfliktu, který má dokonalé informace (hráč má dostatek informací o tom, co dělají ostatní hráči – jejich prostory strategií a výplatní funkce) a maximalizuje výhru.
- Antagonistický konflikt – konflikt, ve kterém jsou zájmy hráčů v přímém protikladu, tzn. jeden účastník ztrácí právě to, co druhý získává.
- Neantagonistický konflikt – konflikt, při kterém každý z účastníků sleduje své vlastní zájmy a tyto zájmy nemusí být v přímém protikladu. Můžeme rozlišit dva případy, zda hráči mají možnost uzavírat před volbou strategií závazné smlouvy o tom, jakou volbu učiní (kooperativní teorie) nebo naopak (nekooperativní teorie) [1].

1.2. Hra s konstantním součtem

Hra s konstantním součtem patří mezi rozdělení her podle charakteru plateb. Jiným názvem antagonistické hry. Součet plateb hráčů na konci každé partie se rovná stejné konstantě. V této podkapitole je čerpáno ze zdrojů [1], [2], [3] a [4].

1.2.1. Definice hry

Použijeme hru v normálním tvaru (neboli hru ve strategickém tvaru), která je dána třemi množinami:

Množina hráčů neboli účastníky konfliktní situace $\{1, 2, ..., N\}$. Množina prostorů strategií $\{X_1, X_2, ..., X_N\}$, kde X_i označuje i-tého hráče. Množina výplatních funkcí všech hráčů $\{f_1(x_1, x_2, ..., x_N), f_2(x_1, x_2, ..., x_N), ..., f_N(x_1, x_2, ..., x_N)\}$.

Nejprve se budeme zabývat hrami s antagonistickým konfliktem dvou hráčů. Jako první máme hru s konstantním součtem, ve které pro libovolné $x \in X, y \in Y$ pro výplatní funkci hráčů platí:

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = K,$$

kde K je libovolné reálné číslo. Pro libovolné K je možné hru transformovat na hru s nulovým součtem ($K = 0$). V takovém případě platí:

$$f_1(x, y) = -f_2(x, y).$$

1.2.2. Maticová hra

Máme konečný prostor strategií, přičemž první hráč si může zvolit m různých strategií a druhý hráč n různých strategií. Z čehož plyne, že počet možných strategií je m x n a můžeme každé kombinaci strategií přiřadit výhru $f_{mn}(x, y)$. Matice $\mathbf{A} = (a_{ij}), i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n$ znázorňuje množinu všech výher ve hře s nulovým součtem. Matici nazýváme výplatní maticí. Výběr i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ odpovídá výběru i-té strategie hráčem 1, výběr j-tého sloupce matice $\mathbf{A}$ odpovívá výběru j-té strategie hráčem 2. Hodnota výplatní funkce hráče 1 je rovna prvku a_{ij} a výplatní funkce hráče 2 je rovna prvku $-a_{ij}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nyní máme dostatečný modelový aparát pro zápis jakékoli maticové hry. Dále budeme potřebovat najít optimální chování hráčů ve hře, tzn. hráč 1 zvolí řádek a hráč 2 zvolí sloupec v matici. Za prvé můžeme vyřadit řádky a sloupce se strategiemi, které nikdy nezvolíme. Řádek, ve kterém jsou všechny prvky menší než prvky v jiném řádku a sloupec, ve kterém jsou všechny prvky větší než v jiném sloupci (tyto prvky značí prohru daného hráče). Pokud jsou všechny prvky v řádku (sloupci) větší než v ostatních řádcích (sloupcích), jde o silnou dominovanost.

Příklad: Máme hru, zapsanou v následující matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Druhý hráč nikdy nezvolí poslední sloupec, byla by to jeho prohra, můžeme jej tedy odstranit. Dostaneme matici ve stavu:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & - \\ 5 & 6 & - \end{pmatrix}.$$

V této upravené matici je vždy druhý řádek lepší než ten první, 1. hráč jej tedy nikdy nezvolí. Můžeme odstranit i první řádek a dostaneme matici ve tvaru:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} - & - & - \\ 5 & 6 & - \end{pmatrix}.$$

Nyní máme konečnou matici. 2. hráč má na výběr ze dvou možností prohrát -5 nebo prohrát -6. Víme, že 1. hráč si vybere druhý řádek svou "výhru", je to pro něj optimální strategie. Pro 2. hráče je optimální strategie první sloupec. Protože se jedná o hru s nulovým součtem je zřejmé, že výhra hráče 1 je prohrou hráče 2.

Příklad: Určitě všichni známe hru Kámen, nůžky, papír, je to nejrozšířenější hra v maticovém tvaru. Představíme si rozšířenou verzi této hry. *Kámen, nůžky, papír, tapír, Spock* je hra dvou hráčů a každý hráč má na výběr z pěti možných strategií. Pravidla: kámen vyhrává nad nůžkami, papír vyhrává nad kamenem, nůžky vyhrávají nad papírem, tapír vyhrává nad Spockem, Spock vyhrává nad nůžkami, nůžky vyhrávají nad tapírem, tapír vyhrává nad papírem, papír vyhrává nad Spockem, Spock vyhrává nad kamenem a kámen vyhrává nad tapírem (nůžky stříhají papír, papír balí kámen, kámen rozdrtí Spocka, Spock zničí nůžky, nůžky utnou hlavu tapírovi, tapír sní papír, papír usvědčí

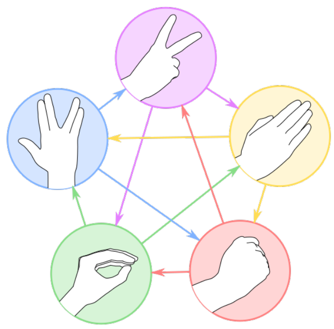
Spocka, Spock vypaří kámen a kámen tupí nůžky). V případě stejné strategie obou hráčů vzniká remíza.

1.hráč / 2.hráč	Kámen	Nůžky	Papír	Tapír	Spock
Kámen	0	+1	-1	+1	-1
Nůžky	-1	0	+1	+1	-1
Papír	+1	-1	0	-1	+1
Tapír	-1	-1	+1	0	+1
Spock	+1	+1	-1	-1	0

Tabulka 1.1: Výhry - prohry

Zdroj: Vlastní zpracování podle [6].

Použité ukazatele, můžeme vidět na následujícím schématu po směru hodinových ručiček, shora nůžky, papír, kámen, tapír, Spock.



Obrázek 1.1: Kámen, nůžky, papír, tapír, Spock

Zdroj: Wikipedia [6].

Tato hra má nulový součet v každém řádku a každém sloupci, je tedy hra s konstantním (nulovým) součtem. Pro oba hráče je rovnovážnou strategií vektor (1/5; 1/5; 1/5; 1/5; 1/5), kde tato čísla představují pravděpodobnosti vybrané strategie. Tento typ se nazývá smíšená (pravděpodobnostní) strategie [6].

1.3. Hra s nekonstantním součtem

U těchto her neplatí, že výhra jednoho hráče je prohrou druhého hráče. Hru s nekonstantním součtem rozlišujeme na hru nekooperativní (hráči nemohou mezi sebou spolupracovat) a na hru kooperativní (hráči mohou mezi sebou spolupracovat). V práci bude rozvedena nekooperativní hra s nekonstantním součtem.

1.3.1. Teorie nekooperativních her

Nekooperativní teorie her se zabývá racionální volbou strategií hráčů, kde hráči mezi sebou nemohou uzavírat dohody. Mějme dánu hru dvou hráčů s nekonstantním součtem $\{Q = \{1, 2\};\ \mathcal{X},\ \mathcal{Y};\ M_1(1, 2),\ M_2(x, y)\}$, tj. $M_1(x, y)+M_2(x, y) = \varphi(x, y)$. Dvojci strategií $\bar{x}$, $\bar{y}$ nazveme rovnovážným bodem této hry, jestliže platí $M_1(x, \bar{y}) \leq M_1(\bar{x}, \bar{y})$ a současně platí $M_2(\bar{x}, y) \leq M_2(\bar{x}, \bar{y})$ pro všechna $x \in \mathcal{X}$ a $y \in \mathcal{Y}$. Strategie $\bar{x}$ je rovnovážná strategie prvního hráče a strategie $\bar{y}$ je rovnovážná strategie druhého hráče [10].

1.3.2. Dvoumaticová hra

Uvažujme hru pro dva hráče, tzv. dvoumaticovou hru. Výplatní funkce prvního a druhého hráče budou charakterizovat matice $\mathbf{A}$ a matice $\mathbf{B}$. Při výběru i-té strategie $(i = 1, 2, ..., m)$ prvního hráče a j-té strategie $(j = 1, 2, ..., n)$ druhého hráče je hodnota výplatní funkce prvního hráče rovna prvku a_{ij} a hodnota výplatní funkce druhého hráče prvku b_{ij}. Mezi těmito hodnotami výher není pevný vztah, jak tomu bylo u her s konstantním součtem. Pro zjištění optimálních strategií porovnáváme hodnoty a_{ij} a b_{ij} $(i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$ [3].

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Příklad: Jako příklad si uvedeme hru *Osadníci z Katanu – junior.* Každý hráč má sedm hradů, které si musí postupně koupit do hracího plánu. Herní plán obsahuje políčka: ovce, rum, zlato, les (dřevo) a poklad. Na začátku hry dostane každý hráč dva hrady, ty si umístí na herní plán, jak uzná za vhodné. Každé políčko na herním plánu je očíslované od 1 do 5. Každý hráč na začátku kola hází kostkou a podle padlých čísel dostanou hráči suroviny. Kostkou hází hráč na začátku svého tahu a suroviny dostávají všichni hráči, podle toho, co padlo hráči na kostce, který je právě na tahu. Suroviny dostávají v závislosti na tom, zda mají na daném políčku postavený hrad, pokud ano, suroviny dostane, pokud ne, nedostane je. Pokud padne číslo 6, nic se nestane [8].

Hráč A má na začátku kola postavené hrady na políčkách: zlato s číslem 1, les s číslem 4, rum s číslem 3 a ovci s číslem 2. Hráč B má na začátku kola postavené hrady na políčkách: zlato s číslem 1, rum s číslem 4, les s číslem 3 a vlna s číslem 2. Na kostce padne číslo 4, hráč A dostane jeden les(dřevo) a hráč B dostane jeden rum. Výplatní matice budou vypadat následovně:

$$\begin{pmatrix} ovce & rum & zlato & les & poklad & nic \\ ovce & rum & zlato & les & poklad & nic \\ ovce & rum & zlato & les & poklad & nic \\ ovce & rum & zlato & les & poklad & nic \\ ovce & rum & zlato & les & poklad & nic \\ ovce & rum & zlato & les & poklad & nic \end{pmatrix}$$

Kde pořadí řádků odpovídá číslu, které padlo na kostce.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4. Hra v rozvinutém tvaru

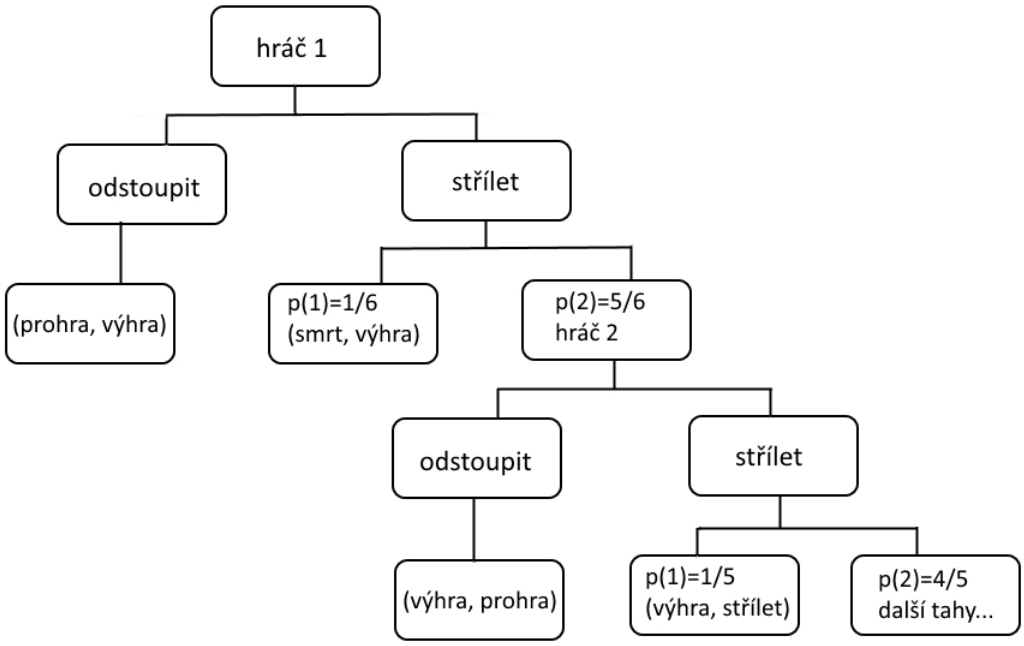
V této podkapitole byly použity tyto zdroje [1], [2], [3] a [4].

V předešlém textu jsme předpokládali, že hráči realizují své strategie ve stejném časovém okamžiku. Nyní se budeme zabývat hrami, kde hráči svou strategii volí až po předešlém tahu protihráče (reagují na tah protihráče). Jako příklad si můžeme uvést dámu nebo šachy, zde se střídá v tahu bílý a černý hráč. Každou hru v rozvinutém tvaru můžeme rozložit na jednotlivé části původní hry, nebo-li tzv. podhry. Tyto podhry jsou taktéž hry, pro které hledáme nejlepší řešení. Analýzou jednotlivých podher dostaneme konečný výsledek celé tahové hry.

Hru v rozvinutém tvaru (neboli hry v explicitním tvaru či tahové hry) zapíšeme pomocí grafu (stromu hry). Grafem rozumíme množinu uzlů a hran. Strom je souvislý graf, který má jeden počáteční uzel a několik koncových uzlů. Hráči se v tahu střídají, vybírají si z možných alternativ hráče v dané fázi hry. V tomto okamžiku se nacházejí v rozhodovacích uzlech hry. Jestliže začneme analýzu v posledních tazích rozhodovacích uzlů, kde se snažíme najít optimální řešení jednotlivých podher a tímto procesem se dostaneme až k počátečnímu uzlu (kořenu stromu), tak nalezneme řešení celé hry. Tento proces můžeme nazvat i zpětnou indukcí.

Příklad: Ruská ruleta. Pravidla: Máme šestiranný revolver s jediným ostrým nábojem. Hráč může ze hry odstoupit (prohrát) nebo zvedne revolver ke své hlavě a zmáčkne spoušť. Mohou nastat dvě situace, první je, že revolver vystřelí a hráč zemře, v druhém případě revolver nevystřelí a hráč předá revolver druhému hráči. Tato situace se opakuje s druhým hráčem. Při této hře hraje velkou roli pravděpodobnost. Při prvním zmáčknutí spouště jsou pravděpodobnosti („vystřelí"; „nevystřelí") (1/6; 4/6), při šestém zmáčknutí spouště (1; 0).

Na obrázku můžeme vidět průběh prvních dvou tahů ruské rulety. Abychom dostali řešení hry, museli bychom znát užitek obou hráčů v případě všech možných výsledků (výhra, prohra, smrt). Řešení totiž závisí na hodnotě užitku.



Obrázek 1.2: Průběh ruské rulety

Zdroj: Vlastní zpracování podle [2].

1.5. Strategie hry

Teorie her se zabývá možnostmi výběru strategie tak, aby účastník v rozhodovacích situacích dosáhl co největšího efektu neboli výhry. Při zpracování této podkapitoly jsem čerpala ze zdrojů [2], [9] a [13].

1.5.1. Optimální strategie - Nashova rovnováha

Způsoby rozhodování hráčů v rozhodovacích situacích se nazývají strategie. Strategie, při které hráč dosáhne výhry, se nazývá optimální strategie. Optimální strategii získáme pomocí Nashovy rovnováhy (Nashovo rovnovážné řešení). Pokud první hráč zachová strategii x^0 a druhý hráč by se od strategie y^0 odchýlil, nezískal by žádnou výhodu. Strategii prvního hráče označíme $x^0 \in X$ a strategii druhého hráče označíme $y^0 \in Y$, pokud pro tyto strategie platí:

$$f_1(x, y^0) \leq f_1(x^0, y^0) \texttt{ a } f_2(x^0, y) \leq f_2(x^0, y^0),$$

nastává Nashova rovnováha. Pro hru s nulovým součtem platí: $f_1(x, y) = f(x, y)$ a tedy $f_2(x, y) = -f_(x, y)$ a Nashova rovnováha bude vypadat následovně

$$f(x, y^0) \leq f(x^0, y^0) \leq f(x^0, y).$$

Optimální strategie představující Nashovu rovnováhu nazýváme rovnovážnými strategiemi [2].

Rozhodování při riziku

Pokud první hráč zná možné varianty volení strategie druhým hráčem, zná jejich pravděpodobnosti uskutečnění a možné důsledky jeho rozhodnutí, mluvíme o rozhodování při riziku.

Rozhodování při nejistotě

Rozhodování při nejistotě nastává tehdy, pokud hráč nezná pravděpodobnosti zvolení strategie protihráčem.

Rozhodovací principy

- Maximinní neboli pesimistické kritérium (MAXIMIN – Waldeovo kritériem) – rozhodovatel (pesimista) zvolí tu variantu, která má z maximálních hodnot užitku jednotlivých variant nejnižší hodnotu,
- Maximaxní neboli optimistické kritérium (MAXIMAX) – rozhodovatel (optimista) zvolí tu variantu, která má z maximálních hodnot užitku jednotlivých variant nejvyšší hodnotu,
- Hurwitzovo kritérium – rozhodovatel bere v úvahu nejvyšší i nejnižší hodnotu užitku jednotlivých variant a zvolí tu, která má nejvyšší hodnotu v kombinaci obou hodnot užitku [9].

1.5.2. Smíšené a čisté strategie hry

Konečnou množinu strategií má každý hráč konečné hry, kdy hráčů je nejvýše n. Za konečnou množinu strategií označujeme pravidla, která určují ve všech možných situacích, které mohou nastat během hry v závislosti na průběhu hry, chování hráče. Tyto strategie nazýváme čisté strategie hráče a značíme X_i nebo J_i.

Každá čistá strategie, které přiřadíme pravděpodobnost možnosti volby $p_i \geq 0$, se nazývá smíšená strategie. Pokud v maticové hře hráč určí smíšenou strategii, náhodný mechanismus zvolí čisté strategie podle zadaných pravděpodobností. Cílem smíšené strategie je zabránit protihráči určit zvolenou strategii hráče na základě analýzy odehraných partií zkoumané hry [13].

1.6. Aplikace teorie her na model duopolu

V ekonomické praxi je teorie her významným pomocníkem při řešení ekonomických konfliktů. Bude představen model duopolu – nejtypičtější aplikace v teorii her dvou hráčů. Při zpracování této podkapitoly bylo čerpáno ze zdrojů [10], [14], [15] a [16].

Pokud je na ekonomickém trhu na straně nabídky velmi málo výrobních firem, nazýváme tuto strukturu trhu oligopol. Oligopol je trh s nedokonalou konkurencí, kde všichni výrobci ovlivňují cenu svou nabídkou. Monopol vzniká na straně nabídky v případě dvou výrobních firem homogenních výrobků na trhu. Za předpokladu maximalizace zisku se pokusíme najít optimální nabídku pro oba výrobce. Proměnné pro model duopolu označíme:

- První firma (1) - objem výroby q_1,
- Druhá firma (2) - objem výroby q_2.

Celková nabídka, která určuje cenu bude $q_1 + q_2$. Z čehož plyne, že cenu můžeme napsat jako funkci celkové nabídky: $p = f(q_1 + q_2)$. Jelikož je nabídková funkce klesající, je klesající i funkce p (s rostoucí nabídkou klesá cena). Obrat, $R_1(q_1, q_2)$, resp. $R_1(q_1, q_2)$, obou firem vyjádříme:

$$R_1(q_1, q_2) = pq_1 = f(q_1 + q_2)q_1, \quad R_2(q_1, q_2) = pq_2 = f(q_1 + q_2)q_2.$$

Předpokládáme diferencovatelnost funkcí R_1 a R_2. Derivací obratů firem R_1 a R_2 spočítáme mezní příjem MR_1, resp. MR_2:

$$MR_1 = \frac{\partial R_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = f(q_1, q_2) + q_1 \frac{\partial f(q_1, q_2)}{\partial q_1} = p + q_1 \frac{\partial p}{\partial q_1},$$

$$MR_2 = \frac{\partial R_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = f(q_1, q_2) + q_2 \frac{\partial f(q_1, q_2)}{\partial q_2} = p + q_2 \frac{\partial p}{\partial q_2}.$$

Dále předpokládáme diferencovatelnost nákladových funkcí $C_1(q_1)$ a $C_2(q_2)$. Jejich derivací získáme mezní náklady MC_1, resp MC_2:

$$MC_1 = \frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1}, \quad MC_2 = \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2}.$$

Mezní náklady jsou kladné, jelikož je nákladová funkce rostoucí. Zisky firem $\pi_1(q_1, q_2)$, resp. $\pi_2(q_1, q_2)$ vyjádříme pro zadané předpoklady následovně:

$$\pi_1(q_1, q_2) = pq_1 - C_1(q_1) = f(q_1 + q_2)q_1 - C_1(q_1) = R_1(q_1, q_2) - C_1(q_1),$$

$$\pi_2(q_1, q_2) = pq_2 - C_2(q_2) = f(q_1 + q_2)q_1 - C_2(q_2) = R_2(q_1, q_2) - C_2(q_2).$$

Proměnná $\pi_1(q_1, q_2)$ je závislou proměnou na q_1 a q_2. Zisk závisí na vlastní i konkurenční produkci, ovlivňuje ho vlastní i konkurenční nabídka.

Pro nás je nejdůležitější vědět, jaká cena a jaká nabídka vznikne na duopolistickém trhu. Každá z firem má dvě varianty řešení. První varianta je stát se vůdcem. Vůdce je firma, která zvolí svůj objem výroby (za předpokladu, že je konkurence následovník). Druhá varianta je stát se následovníkem. Následovník je firma, která nechá na konkurentovi zvolení objemu výroby a sama se tomu přizpůsobí – reakční funkce (nabídku zvolí podle nabídky konkurence). Každá firma přezkoumává obě varianty z hlediska svého zisku a následně se rozhoduje, kterou z variant zvolí. Mohou tak vzniknout tři možnosti: Rovnovážné řešení, Cournotovo řešení nebo Stackelbergovo řešení.

1.6.1. Cournotovo řešení

Cournotovo řešení se týká případu, kdy se obě firmy rozhodnou stát následovníkem. Přizpůsobují se tak dlouho, než dojdou k rovnovážnému bodu. Cournotovo řešení je pojmenované po matematikovi Augustinovi Cournotovi, který analyzoval dvě firmy. Cournotovo řešení je založené na množství objemu výroby, kdy si jedna firma zjistí kolik vyrábí druhá a přizpůsobí se. Předpokládáme, že mezní náklady jsou vždy nulové. V teorii her bychom považovali firmy za hráče a jejich funkce zisku za výplatní funkce her. Pomocí teorie her – Nashova rovnovážného bodu – určíme rovnovážný stav na trhu.

Máme zadanou funkci ceny $p = f(q_1 + q_2)$, vypočítáme obraty firem $R_1(q_1, q_2)$, resp. $R_2(q_1, q_2)$. Derivací obratů firem získáme mezní příjem MR_1 a MR_2. Derivací nákladových funkcí $C_1(q_1)$ a $C_2(q_2)$ dostaneme mezní náklady MC_1 a MC_2.

Derivací funkce zisku $\pi_1(q_1, q_2)$, resp. $\pi_2(q_1, q_2)$ dostaneme mezní příjem MR_1, resp. MR_2, který vyjádříme následovně:

$$MR_1 = \frac{\partial \pi_1(q_1, q_2)}{\partial q_1}, \quad MR_2 = \frac{\partial \pi_2(q_1, q_2)}{\partial q_2}.$$

Za předpokladu maximalizace zisku položíme MR_1, resp. MR_2 rovno 0, po dosazení dostaneme:

$$\frac{\partial \pi_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = \frac{\partial R_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \pi_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = \frac{\partial R_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} - \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2} = 0.$$

Vidíme, že podmínky maximalizace zisku jsou (mezní příjem se musí rovnat mezním nákladům):

$$\frac{\partial R_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = \frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial R_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2}.$$

Vyjádřením q_1 z první rovnice a vyjádřením q_2 z druhé rovnice dostaneme reakční funkce obou firem. Reakční funkce označíme $g_1(q_2)$ a $g_2(q_1)$. V závislosti na objemu výroby druhé firmy vyjadřuje optimální množství objemu výroby funkce $g_1(q_2)$, resp. $g_2(q_1)$:

$$q_1 = g_1(q_2), \quad q_2 = g_2(q_1).$$

Pomocí soustavy rovnic o dvou neznámých následně dostaneme rovnováhu na trhu duopolu (viz. následující příklad).

Příklad: Máme dánu rovnici ceny na trhu: $p = 90 - 0.25(q_1 + q_2)$. Za předpokladu, že je p nezáporná funkce, tedy $q_1 + q_2 \leq 360$ a nákladové funkce jsou složeny pouze z funkcí variabilních nákladů $C_1 = 3q_1,\ C_2 = 6q_2$ vyjádříme zisky obou firem:

$$\pi_1(q_1, q_2) = f(q_1 + q_2)q_1 - C_1(q_1) = 90q_1 - 0.25(q_1 + q_2)q_1 - 3q_1,$$

$$\pi_2(q_1,q_2) = f(q_1+q_2)q_2 - C_2(q_2) = 90q_2 - 0.25(q_1+q_2)q_2 - 6q_2.$$

Úpravou dostaneme:

$$\pi_1(q_1,q_2) = 90q_1 - 0,25q_1^2 - 0.25q_1q_2 - 3q_1,$$

$$\pi_2(q_1,q_2) = 90q_2 - 0,25q_1q_2 - 0,25q_2^2 - 6q_2.$$

Mezní příjem získáme pomocí parciální derivace $\pi_1(q_1,q_2), \pi_2(q_1,q_2)$ tedy:

$$\frac{\partial \pi_1(q_1,q_2)}{\partial q_1} = 90 - 0.5q_1 - 0.25q_2 - 3,$$

$$\frac{\partial \pi_2(q_1,q_2)}{\partial q_2} = 90 - 0,25q_1 - 0,5q_2 - 6.$$

Maximalizujeme zisk obou firem položením rovno 0 a dostaneme:

$$90 - 0.5q_1 - 0.25q_2 - 3 = 0,$$

$$90 - 0,25q_1 - 0,5q_2 - 6 = 0.$$

Vyjádříme q_1 z první rovnice a q_2 z druhé rovnice a dostaneme reakční funkce obou firem:

$$q_1 = g_1(q_2) = 174 - 0,5q_2,$$

$$q_2 = g_2(q_1) = 168 - 0,5q_1.$$

Pomocí soustavy dvou rovnic o dvou neznámých dostaneme rovnovážný bod:

$$q_1^* = 120, q_2^* = 108.$$

Pro rovnovážný bod $q_1^* = 120$ a $q_2^* = 108$ spočítáme pomocí dosazení zisky firem, celkové množství na trhu a cenu na trhu.

$$\pi_1^* = 3\ 600, \quad \pi_2^* = 2\ 916,$$

$$q^* = 228, \quad p^* = 33.$$

1.6.2. Rovnovážné řešení

Rovnovážné řešení vzniká tehdy, pokud se jedna firma rozhodne stát vůdcem a druhá firma se rozhodne stát následovníkem. V tomto případě je pro první firmu výhodnější stát se vůdcem a uplatňuje své výhody v případě, že je druhá firma následovníkem. Pro druhou firmu je výhodnější stát se následovníkem, uplatňuje své výhody za předpokladu, že je první firma vůdcem. První firma zvolí objem optimální nabídky a druhá firma se ji přizpůsobí (zvolí svůj objem výroby podle objemu výroby první firmy). Nastává okamžik rovnováhy.

Příklad: Ukážeme si, zda je pro jednotlivé firmy výhodnější být vůdcem či následovníkem. Máme dánu rovnici ceny na trhu: $p = 90 - 0.25(q_1 + q_2)$. Za předpokladu, že je p nezáporná funkce, tedy $q_1 + q_2 \leq 360$ a nákladové funkce jsou složeny pouze z funkcí variabilních nákladů $C_1 = 3q_1,\ C_2 = 6q_2$. První si ukážeme variantu, kdy je první firma vůdcem a druhá firma následovníkem. Zisk první firmy vyjádříme pomocí dosazení reakční funkce $q_2 = g_2(q_1)$ do výrazu $\pi_1(q_1, q_2)$

$$\pi_1(q_1, g_2(q_1)) = 87q_1 - 0,25q_1^2 - 0,25q_1(168 - 0,5q_1).$$

Zisk druhé firmy bude stejný jako v předchozím příkladu $\pi_2(q_1, q_2)$. Zisk první firmy upravíme a dostaneme:

$$\pi_1(q_1, g_2(q_1)) = 45q_1 - 0,125q_1^2.$$

Mezní náklady jsou derivací funkce zisku a pro maximalizaci zisku první firmy dáme výraz roven 0:

$$\frac{\partial \pi_1(q_1, g_2(q_1))}{\partial q_1} = 45 - 0.25q_1 = 0.$$

Vznikla nám rovnice o jedné neznámé, ze které vyjádříme a dopočítáme q_1:

$$q_1^* = 180.$$

Při tomto objemu produkce by první firma dosáhla zisku:

$$\pi_1^* = 4\ 050.$$

Pomocí rovnic z předchozího příkladu dopočítáme ostatní proměnné:

$$q_2 = 168 - 0,5q_1, \quad \pi_2(q_1, q_2) = 90q_2 - 0.25(q_1 + q_2)q_2 - 6q_2,$$

$$q_2^* = 78, \ \pi_2^* = 1\ 521.$$

Po dosazení vypočítáme množství a cenu na trhu:

$$q^* = 258, \quad p^* = 25.5.$$

Nyní si ukážeme případ, kdy bude první firma následovníkem a druhá firma vůdcem. Opět použijeme rovnice z předchozího příkladu a dostaneme pro zisk druhé firmy:

$$\pi_2(g_1(q_2), q_2) = 84q_2 - 0,25q_2^2 - 0.25q_2(174 - 0,25q_2) = 40,5q_2 - 0,125q_2^2.$$

Pro mezní příjmy rovnici zisku zderivujeme a pro maximalizaci zisku položíme rovno 0:

$$40.5 - 0,25q_2 = 0,$$

Obdobně dosadíme a získáme:

$$q_2^* = 162, \quad \pi_2^* = 3\ 280.5,$$

$$q_1^* = 93, \quad \pi_1^* = 2\ 162.25,$$

$$q^* = 255, \quad p^* = 26.25.$$

Vidíme, že pro obě firmy je výhodnější být vůdcem než-li následovníkem, protože jejich zisky jsou vyšší v případě, kdy jsou vůdci, než když jsou následovníky.

1.6.3. Stackelbergovo řešení

Stackelbergovo řešení použijeme v případě, kdy chtějí být obě firmy vůdci. Problém nastává, protože při této variantě nejsou splněny předpoklady. Vůdce získá výhodu jen v případě, že je konkurent následovníkem. Firmy, co chtějí být vůdci, předpokládají, že se konkurent chová podle reakčních rovnic $q_1 = g_1(q_2)$ a $q_2 = g_2(q_1)$. Obě firmy maximalizují následující funkce:

$$\pi_1(q_1, g_2(q_1)), \quad \pi_2(g_1(q_2), q_2).$$

Vidíme, že u obou ziskových funkcí nám vznikla rovnice o jedné proměnné a každá firma ziskovou funkci maximalizuje jednotlivě. Pro parciální derivace vzniknou následující rovnice:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0.$$

Příklad: Použijeme zadání z předchozího příkladu:

$$p = 90 - 0.25(q_1 + q_2),\ C_1 = 3q_1,\ C_2 = 6q_2.$$

Pomocí poznatků z předešlých příkladů dopočítáme proměnné v případě, že jsou obě firmy vůdci. Víme, že:

$$q_1^* = 180, \quad q_2^* = 162.$$

Po dosazení dostaneme:

$$\pi_1^* = 270, \quad \pi_2^* = -243,$$

$$q^* = 342, \quad p^* = 4.5.$$

Vidíme, že je tento stav pro obě firmy velice nevyhovující. Obě mají nejnižší zisk a cenu, druhá firma má dokonce ztrátu. Tato situace je neudržitelná.

Všechny situace můžeme vidět v následující tabulce. Všimněme si, že obě firmy mají nejvyšší zisk v případě, že jsou vůdci a druhý je následovníkem. Nejnižší mají v případě, že jsou oba vůdci.

situace	q_1	q_2	π_1	π_2	q	p
oba následovníci	120	108	3 600	2 916	228	33
oba vůdci	180	162	270	-243	342	4.5
1. vůdce, 2. následovník	180	78	4 050	1 521	258	25.5
1. následovník, 2.vůdce	93	162	2 162.25	3 280.5	255	26.25

Tabulka 1.2: Výsledky

Zdroj: Vlastní zpracování podle [15].

Kapitola 2

Hra Superfarmář

Při zpracování druhé části bakalářské práce jsem čerpala především z vlastních poznatků a pravidel hry Superfarmář [7].

Ve Varšavě roku 1943 vznikla hra Superfarmář, tehdy ještě pod názvem „Chov zvířátek". Jejím autorem je Karol Borsuk, který je významný polský matematik a univerzitní profesor. Jeho žena Zofia Borsuková mu pomáhala s výrobou, obrázky kreslila Janina Śliwická. Hru si nečekaně všichni oblíbili, jak rodinní příslušníci, tak i ostatní lidé. Líbila se dětem i dospělým, bylo to jejich zpříjemnění smutného válečného období. Původní verze hry bohužel shořela během Varšavského povstání v roce 1944, zachoval se pouze jeden exemplář mimo Varšavu. U příležitosti 100. narozenin Borsukové, 25. výročí úmrtí Borsuka a u příležitosti 10. výročí obnovení hry, vznikla na podzim roku 2007 nová dynamičtější verze hry.

Hra obsahuje:

- 2 různé dvanáctistěnné kostky,
- pravidla,
- 4 tabulky výměn,
- 196 kartiček s obrázky zvířat: 128 králíků, 24 ovcí, 20 prasat, 12 krav a 6 koní,

- 6 figurek: 4 figurky malých psů a 2 figurky velkých psů.

Jsou dvě dvanáctistěnné kostky, každá je jiná. Na první se vyskytují zvířata: 1x liška, 6x králík, 2x ovce, 2x prase, 1x kůň. Na druhé se vyskytují zvířata: 1x vlk, 6x králík, 3x ovce, 1x prase, 1x kráva.

2.1. Autor hry

Karol Borsuk (1905-1982) je významným představitelem Varšavské matematické školy. Je známý především díky své práci v diferenciální geometrii a topologii. Borsuk studoval na varšavské univerzitě, kde získal magisterský titul (1927) a doktorát (1930). Dizertační práci napsal pod vedením Kazimierze Kuratowského a obhájil ji roku 1934. Roku 1938 se stal docentem Varšavské univerzity. Od roku 1952 byl členem Polské akademie věd. Zabýval se teorií absolutních retraktů (je zakladatelem teorie retraktů) a teorií tvarů. Teorie tvarů patří do větve topologie, která poskytuje globální pohled na topologické prostory. Proslavil se především Borsukovou domněnkou (neboli „Borsukův problém v geometrii"). Společně se Stanisławem Ulamovem je autorem tzv. Borsukovy-Ulamovy věty. Je autorem Multidimenzionální analytická geometrie (1950), Podstata geometrie (1955), Základy geometrie (1960), Teorie retraktů (1967), Teorie tvarů (1975) [12].

Obrázek 2.1: Karol Borsuk

Zdroj: Wikipedia [5].

Na nápad s hrou Superfarmář přišel za 2. světové války po uzavření Varšavské univerzity, když ztratil práci. Během německé okupace provozoval papírnu, která byla kontaktním místem domácí armády. V letech 1939-1944 přednášel na tajné Varšavské univerzitě. V roce 1943 byl zatčen za aktivity v hnutí odboje a několik měsíců byl vězněn ve varšavské věznici Pawiaku. Během Varšavského povstání byl s rodinou deportován do tábora v Pruszkówu. Po útěku z tohoto tábora se ukrýval až do konce války.

Po válce se vrátil na Varšavskou univerzitu, kde se v roce 1946 stal řádným profesorem a vedoucím katedry geometrie. V letech 1952-1964 byl vedoucím katedry matematiky. Jeho nejvýznamnějším studentem byl Samuel Eilenberg (1913-1998), polský a americký matematik židovského původu [5].

2.2. Pravidla hry

Hra nutí hráče předvídat, počítat, plánovat a kalkulovat s riziky. Hra učí strategickému myšlení jak děti, tak i rodiče.

Hráč se zabývá chovem domácích zvířat a tím se stává farmářem. Hráč se snaží stát superfarmářem. Jeho stádo se ustavičně zvětšuje, a to mu přináší užitek. Hráč může zvířata směňovat za jiná zvířata, která právě potřebuje. Aby vyhrál, musí jako první vlastnit stádo, ve kterém bude alespoň jeden kůň, jedna kráva, jedno prase, jedna ovce a jeden králík. Jeho plány mohou být rychle překaženy, musí si dát pozor na lišku s vlkem, kteří ho mohou o všechna zvířata připravit [7].

2.2.1. Průběh hry

Hra Superfarmář je rodinná hra pro 2 - 6 hráčů od 7 let. Jeden z hráčů nebo další hráč, který stojí mimo hru, může organizovat výměny zvířat hráčů s hlavním stádem, a zároveň pečovat o hlavní stádo. Při zahájení hry nemají hráči žádná zvířata. Veškerá zvířata jsou v hlavním stádě. V nové verzi hry z roku 2008 hráči navíc obdrží vlastní hrací plochu – ohradu pro chování zvířat.

2.2.2. Zvětšování stáda

V průběhu hry hází hráči vždy oběma kostkami zároveň. Pokud hráči padnou stejná zvířata na obou kostkách najednou, dostane hráč kartičku s tímto zvířetem z hlavního stáda. Když hráč už nějaká zvířata má, obdrží po každém hodu tolik zvířat zobrazeného druhu na kostkách z hlavního stáda, kolik zvířat téhož druhu má ve svém stádě párů (včetně zvířat právě hozených na kostkách).

Příklad:

- Hráč má 1 králíka a 6 ovcí, hodil králíka a ovci. Má tedy celkem 1 pár králíků (1 ve stádě a 1 na kostce) a 3 páry ovcí, proto dostane 1 králíka a 3 ovce.
- Hráč má 6 králíků a 1 krávu, hodil ovci a krávu. Dostane 1 krávu.
- Hráč má 3 ovce a 1 prase, hodil králíka a krávu. Nedostane nic.
- Hráč má 2 králíky, 1 krávu a 1 koně, hodí 2 prasata. Dostane 1 prase.

Na obou kostkách se vyskytují kráva a kůň pouze jedenkrát, každé zvíře na jiné kostce. Proto první krávu a prvního koně může hráč získat pouze výměnou zvířat s hlavním stádem, nikoli hodem kostek.

Nastane-li situace, kdy v hlavním stádě je méně zvířat daného druhu, než kolik jich hráč požaduje, dostane jich jen tolik, kolik jich ve stádu zbývá. Nárok na další zvířata mu tímto zaniká.

Příklad:

- Hráč má 3 králíky a 2 ovce, hodí 1 králíka a 1 ovci. Má nárok na obdržení 2 králíků a 1 ovce, ale ve stádě zbývá už jen 1 králík a 1 ovce. Hráč tedy dostane pouze 1 králíka a 1 ovci, na zbytek zvířat (tzn. 1 králík) mu nárok zaniká.

2.2.3. Výměna

Hráč může před každým hodem provést neomezené množství výměn zvířat. Zvířata lze vyměňovat s hlavním stádem (pokud je v hlavním stádu dostatek zvířat, o které má hráč zájem) nebo s jiným hráčem (pokud jiný hráč s výměnou souhlasí). Výměna se provádí podle následujících pravidel:

- 1 ovce = 6 králíků,
- 1 prase = 2 ovce,
- 1 kráva = 3 prasata,
- 1 kůň = 2 krávy,
- 1 malý pes = 1 ovce,
- 1 velký pes = 1 kráva.

Výměnu zvířat lze i kombinovat, například: 1 prase lze vyměnit za 2 ovce nebo 1 prase lze vyměnit za 12 králíků nebo 1 prase lze vyměnit za 1 ovci a 6 králíků.

Příklad:

- Hráč má 6 králíků. Může je vyměnit za 1 ovci.
- Hráč má 1 ovci a 1 prase. Může je vyměnit následujícím způsobem: 1 ovci za 6 králíků, 1 prase za 2 ovce, 1 prase za 12 králíků, 1 ovci za 6 králíků, a zároveň 1 prase za 2 ovce, 1 ovci za 6 králíků, a zároveň 1 prase za 12 králíků, 1 prase za 1 ovci a 6 králíků, 1 ovci za 6 králíků, a zároveň 1 prase za 1 ovci a 6 králíků.

- Hráč má 3 prasata a 2 ovce. Může vyměnit 3 prasata za 1 krávu, 2 ovce za 1 prase, 2 ovce za 12 králíků atd.
- Hráč má 1 krávu, 2 prasata, 1 ovci a 6 králíků. Může všechna svá zvířata vyměnit za 1 koně (protože 6 králíků = 1 ovce, 2 ovce = 1 prase, 3 prasata = 1 kráva a 2 krávy = 1 kůň) atd.
- Hráč má 1 krávu. Může ji vyměnit například za 2 prasata, 1 ovci a 6 králíků atd.

2.2.4. Ztráta zvířat

Padne-li hráči na kostce liška, přijde o všechny králíky ze svého stáda. Padne-li hráči na kostce vlk, přijde o všechna zvířata kromě koně a malého psa (pokud tato zvířata vlastní).

Před liškou ochrání stádo malý pes. Hodí-li hráč, který vlastní malého psa, lišku, neztrácí ze svého stáda žádné zvíře, ale přichází o malého psa. Toho musí vrátit do hlavního stáda. Každý zakoupený pes může ochránit stádo pouze jednou, poté si jej hráč musí zakoupit znovu.

Před vlkem ochrání stádo velký pes. Hodí-li hráč, který vlastní velkého psa, vlka, nepřichází o žádné zvíře ze svého stáda, ale musí vrátit do hlavního stáda velkého psa. Taktéž platí, že pes ochrání stádo pouze jednou.

Hráč muže vlastnit malého i velkého psa zároveň. V tom případě při hodu lišky ztrácí pouze malého psa a při hodu vlka ztrácí pouze velkého psa. Nastane-li situace, kdy hráč vlastní velkého i malého psa a padne mu na kostce liška i vlk, přichází o oba psy, ale jeho zvířatům se nic nestane.

Velký pes nechrání stádo před liškou a malý pes nechrání stádo před vlkem.

Příklad:

- Hráč hodil lišku a vlka. Má malého psa, ale nemá velkého, ztrácí tedy všechna zvířata kromě koně.
- Hráč hodil lišku. Má velkého psa, ale nemá malého psa, ztrácí všechny králíky.
- Hráč hodil vlka. Má malého psa, ale nemá velkého, ztrácí všechna zvířata kromě malého psa a koně.
- Hráč hodil lišku. Nemá žádného psa, ztrácí všechny králíky.

2.2.5. Konec hry

Vyhrává hráč, který se jako první stane superfarmářem. To znamená, který jako první vlastní od každého druhu zvířete alespoň jedno (jednoho koně, jednu krávu, jedno prase, jednu ovci a jednoho králíka) [7].

2.3. Strategie hry

U výběru strategie musí být brána v potaz pravděpodobnost, protože se hází dvěma dvanáctistěnnými kostkami. Budou představeny čtyři nejčastější (nejoblíbenější) strategie hráčů, podle mých zkušeností.

2.3.1. Čím víc králíků, tím lépe

Tato strategie je založena na sbírání pouze králíků. Jelikož obrázek králíka se na kostkách vyskytuje nejčasteji, padne s větší pravděpodobností než ostatní zvířata. Pravděpodobnost, že padnou dva králíci současně je 1/4 a pravděpodobnost, že padne alespoň jeden králík je 3/4. V případě vlastnictví velkého množství králíků je jejich množení velice snadné a rychlé, jelikož máme 75procentní šanci, že padne alespoň jeden králík. Pomocí vyměňovací tabulky můžeme všechna zvířata převést na králíky. Potřebujeme: 1 králíka, 1 ovci = 6 králíků, 1 prase = 12 králíků, 1 krávu = 36 králíků a 1 koně = 72 králíků. V závěru potřebujeme 127 králíků k dosažení výhry. Problém nastává v případě, kdy máme v hlavním stádě pouze 128 králíků, což znamená, že by nesměl mít králíka nikdo jiný, jinak na králíky v případě hodu králíka ztrácíme nárok. Pokud zvolí více hráčů než jeden tuto variantu, není moc spolehlivá (rychle by došli králíci). Doporučujeme kombinovat s jinou strategií.

Když padne na kostkách vlk nebo liška, ztrácíme všechny králíky. Je nutné si pořídit malého a velkého psa. Malý pes = 6 králíků a velký pes = 36 králíků. Můžeme si i zvolit pořízení pouze jednoho ze psů. To by znamenalo o padesát procent menší šanci ztráty králíků. Každý hráč se rozhodne individuálně, jak moc chce riskovat.

Jako první musíme hodit dva králíky, ty hodíme s pravděpodobností 1/4. Poté nám stačí vždy hodit alespoň jednoho králíka, pravděpodobnost je 3/4. Jakmile se nám podaří hodit dva králíky, máme $4,223$procentní pravděpodobnost získání všech potřebných králíků po jedenácti kolech. Mohli bychom vyhrát ve třináctém kole hry (první kolo musíme hodit dva králíky, poté co nejlépe zvětšovat jejich počet a jedno kolo potřebujeme na výměnu). Celková pravděpodobnost výhry ve třináctém kole je $1,056$ procent.

Výpočet:

Jsou dvě dvánactistěnné kostky, na každé kostce je 6-krát vyobrazen králík. Z toho je zřejmé, že $n = 12$; $n(A) = 6$; $n(B) = 6$, kde A představuje padnutí králíka na oranžové kostce a B představuje padnutí králíka na modré kostce. Pravděpodobnost se vypočítá následovně: $n(A)/n \cdot n(B)/n$, kde n = počet možných jevů, $n(A)$ = počet příznivých jevů jevu A, $n(B)$ = počet příznivých jevů jevu B [11].

Pravděpodobnost:

- hodu dvou králíků zároveň je $6/12 \cdot 6/12 = 1/4$,
- hodu králíka pouze na oranžové kostce je $6/12 \cdot 6/12 = 1/4$,
- hodu králíka pouze na modré kostce je $6/12 \cdot 6/12 = 1/4$,

- hodu alespoň jednoho králíka je $1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4$,
- hodu alespoň jednoho králíka v jedenácti kolech za sebou je $(3/4)^{11} = 0,04223$,
- výhry ve 13. kole je $1/4 \cdot (3/4)^{11} \cdot 1 = 0.01056$.

2.3.2. Sbírám pouze ovce

Tato strategie je založena na sbírání pouze ovcí. V případě získání jiného zvířete, jej měníme na ovce. Obrázek ovce je druhý nejčastější na kostkách, tudíž je celkem velká pravděpodobnost jeho hodu. Pravděpodobnost, že padnou dvě ovce zároveň je 1/24 a pravděpodobnost, že padne alespoň jedna ovce je 3/8. Stádo z ovcí se nám rychle rozroste. Máme $37,5$procentní šanci, že padne ovce. K vítězství ve hře s touto strategií budeme potřebovat: 1 ovce = 6 králíků, 1 ovci, 1 prase = 2 ovce, 1 krávu = 6 ovcí, 1 koně = 12 ovcí. Celkem potřebujeme 22 ovcí. Našim problémem zůstává, že v hlavním stádě máme pouze 24 ovcí. Aby strategie fungovala, nesměli by mít všichni ostatní hráči dohromady více jak dvě ovce a žádný hráč by nesměl použím tutéž strategii. Tady se dostáváme k problému, který lze vyřešit kombinací s jinou strategií.

Ztráta našich zvířat v této strategii je méně pravděpodobná než v předešlé strategii. Jediné zvíře, které může ohrozit ovce, je vlk. Vlk se na kostkách vyskytuje pouze jedenkrát a chránit se před ním můžeme pomocí velkého psa. Liška nás v tomto případě neohrozí, protože jí pouze králíky.

První musíme hodit dvě ovce, ty hodíme s pravděpodobností 1/24. Poté nám stačí vždy hodit alespoň jednu, pravděpodobnost je 3/8. Jakmile se nám na začátku podaří hodit dvě ovce, máme $0,104$procentní šanci získat potřebné ovce v sedmi kolech. Celkové vítězství bychom mohli očekávat v devátém kole hry s pravděpodobností $0,0043$ procent.

Výpočet:

Jsou dvě dvanáctistěnné kostky, na oranžové kostce jsou vyobrazeny 2 ovce a na modré kostce jsou vyobrazeny 3 ovce. Z toho je zřejmé, že $n = 12$; $n(A) = 2$; $n(B) = 3$, kde A představuje padnutí ovce na oranžové kostce a B představuje padnutí ovce na modré kostce. Pravděpodobnost se vypočítá následovně: $n(A)/n \cdot n(B)/n$, kde $n =$ počet možných jevů, $n(A) =$ počet příznivých jevů jevu A, $n(B) =$ počet příznivých jevů jevu B [11].

Pravděpodobnost:

- hodu dvou ovcí zároveň je $2/12 \cdot 3/12 = 1/24$,
- hodu ovce pouze na oranžové kostce je $2/12 \cdot 9/12 = 1/8$,
- hodu ovce pouze na modré kostce je $3/12 \cdot 10/12 = 5/24$,
- hodu alespoň jedné ovce je $1/24 + 1/8 + 5/24 = 3/8$,
- hodu alespoň jedné ovce v sedmi kolech za sebou je $(3/8)^7 = 0,00104$,
- výhry v 9. kole je $1/24 \cdot (3/8)^7 \cdot 1 = 0,000043$.

2.3.3. Všechno má svůj čas

Veškerá zvířata sbíráme postupně. Nejdřív králíky, z části pak uděláme ovce, následují prasata, krávy a pak kůň. Sbíráme a měníme vše průběžně, až máme na závěr všechna zvířata. Celé stádo nám může sníst vlk a králíky nám může sníst liška. Je lepší stádo chránit, proto doporučuji pořídit si velkého i malého psa. Tuto taktiku používá většina všech hráčů (podle mých poznatků).

Z předchozích výpočtů víme, že pravděpodobnost hodu dvou králíků je 1/4, alespoň jednoho králíka 3/4. Pravděpodobnost hodu dvou ovcí je 1/24, alespoň jedné ovce 3/8. Pravděpodobnost hodu dvou prasat je 1/72, alespoň jednoho prasete 17/72. Pravděpodobnost hodu krávy je 1/12 a jednoho koně je 1/12. První musíme hodit dva králíky, poté dvě ovce, následně dvě prasata, alespoň jedno prase, dvě prasata, tři prasata vyměním za krávu a hodím krávu, hodím opět krávu a následující kolo vyměním dvě krávy za jednoho koně. Nejmenší počet kol na výhru je osm, celková pravděpodobnost výhry v osmém kole je $0,00000033$ procent.

Výpočet:

Celková pravděpodobnost se vypočítá jako:

$1/4 \cdot 1/24 \cdot 1/72 \cdot 17/72 \cdot 1/72 \cdot 1/12 \cdot 1/12 \cdot 1 = 0,000000003295$.

2.3.4. Získám koně a vyhraji

V této strategii je nejdůležitější získat koně. Když získáme koně, už ho vlk ani liška nesní, zůstane ve stádu. Na kostkách se vyskytuje kůň pouze jedenkrát. Získáme jednoho koně a k získání druhého nám postačí házet kostkami a čekat, až padne kůň. Jednoho koně si necháme a druhého vyměníme. 1 kůň = 1 kráva, 2 prasata, 1 ovce a 6 králíků. Otázkou zůstává, jak získat prvního koně. Metodu si můžeme vybrat a tuto strategii kombinovat s předešlými strategiemi. Pravděpodobnost hodu koně je 1/12.

2.3.5. Kombinace strategií

Nejvýhodnější pro výhru je kombinovat předchozí strategie. Kombinací máme hned několik.

Příklad:

- Kombinace první a třetí strategie (králíci a koně). Od počátku hry sbíráme pouze králíky, jakmile jich máme dost, měníme je za koně. Poté budeme čekat až nám kůň padne na kostcce. Následující kolo koně směníme a vyhrajeme. Pravděpodobnost hodu koně je 1/12. Pokud použijeme strategii „Čím víc králíků, tím lépe", získáme potřebné králíky (1 kůň=72 králíků) v jedenáctém kole s pravděpodobností $1,41$ procent. Celkové vítězství bychom mohli očekávat ve třináctém kole s pravděpodobností $0,117$ procent.

Výpočet: potřebný počet králíků je $1/4 \cdot (3/4)^{10} = 0,01408$,

celková pravděpodobnost je $1/4 \cdot (3/4)^{10} \cdot 1/12 \cdot 1 = 0.0011732$.

- Kombinace druhé a třetí strategie (ovce a koně). Na začátku hry sbíráme ovce, do doby než máme dostatečné množství. Ovce směníme za koně a čekáme až na kostce padne kůň. Následující kolo po směnění vyhráváme. Jestliže použijeme strategii „Sbírám pouze ovce", získáme potřebné ovce (1kůň=12 ovcí) v šestém kole s pravděpodobností 0,000309. Celkové vítězství můžeme očekávat v osmém kole s pravděpodobností 0,000026 procent.

  Výpočet: potřebný počet ovcí je $1/24 \cdot (3/8)^5 = 0,000309$,

  celková pravděpodobnost je $1/24 \cdot (3/8)^5 \cdot 1/12 \cdot 1 = 0,000026$.

- Kombinace čtvrté a třetí strategie (všechna zvířata a kůň). Sbíráme zvířata postupně. Jestliže hodíme koně a následující kolo ho směníme za ostatní zvířata, vyhráváme. Použijeme-li strategii „Všechno má svůj čas", získáme potřebná zvířata (1 kůň=2 krávy) ve čtvrtém kole s pravděpodobností 0,00645 procent. Nepotřebujeme králíky ani ovce, pouze dvě krávy, tudíž začneme od prasat. První musíme hodit dvě prasata, poté alespoň jedno prase a znovu alespoň jedno prase. Tři prasata vyměníme za krávu a hodíme jednu krávu. Následně můsíme hodit jednoho koně, v dalším kole ho vyměnit za potřebná zvířata a vyhráváme. Celkové vítězství nastane v šestém kole s pravděpodobností 0,00054 procent.

  Výpočet potřebný počet krav je $1/72 \cdot 17/72 \cdot 17/72 \cdot 1/12 = 0.0000645$,

  celková pravděpodobnost je $1/72 \cdot 17/72 \cdot 17/72 \cdot 1/12 \cdot 1/12 = 0,0000054$.

2.3.6. Pořídit/nepořídit psy

Hráč nemá povinnost si v průběhu hry pořídit velkého psa či malého psa. V každém hodu je pravděpodobnost, že padne alespoň liška nebo vlk 23/144, což odpovídá 15,97 procentům. Pravděpodobnosti, že nepadne alespoň liška nebo vlk v prvních deseti kolech můžeme vidět v tabulce.

kolo	pravděpodobnost
1.	0,8403
2.	0,7061
3.	0,5933
4.	0,4985
5.	0,4189
6.	0,3520
7.	0,2958
8.	0,2485
9.	0,2088
10.	0,1755

Tabulka 2.1: Pravděpodobnost hodu jiného zvířete než lišky a vlka

Zdroj: Vlastní zpracování.

Vidíme, že se pravděpodobnosti zmenšují. V desátém kole máme už jen 17,55procentní pravděpodobnost, že nám nepadne na kostkách liška ani vlk. Kdybychom brali v úvahu průměrnou délku hry dvacet kol, máme 3,08procentní pravděpodobnost, že za celou dobu hry nehodíme ani jednou alespoň vlka nebo lišku.

Výpočet pravděpodobností:

- padne vlk i liška $1/12 \cdot 1/12 = 1/144$,
- padne jen vlk (nebo jen liška) $1/12 \cdot 11/12 = 11/144$,
- padne alespoň liška nebo vlk $1/144 \cdot 11/144 \cdot 11/144 = 23/144 = 0,1597$,

- nepadne alespoň liška nebo vlk v prvním kole $1 - 23/144 = 121/144 = 0,8403$,
- v druhém kole $0,8403^2 = 0,7061$, ve třetím kole $0,8403^3 = 0,5933$, ... ,
- ve dvacátém kole $0,8403^{20} = 0,0308$.

2.4. Dynamické varianty hry

Každá hra se může zpestřit úpravou pravidel. Uvádím tři možné příklady dynamické varianty hry.

1. Na začátku hry, obdrží každý hráč jednoho králíka do svého stáda. Hráči nebudou začínat hru bez zvířat.
2. Hodí-li hráč lišku a nevlastní přitom malého psa, nepřijde o všechny své králíky. Jeden králík hráči zůstane (podaří se mu před liškou schovat).
3. Padne-li hráči na kostce vlk a hráč nemá velkého psa, přijde hráč o všechny svá zvířata kromě koně, králíků a malého psa (pokud je před útokem vlka vlastnil).

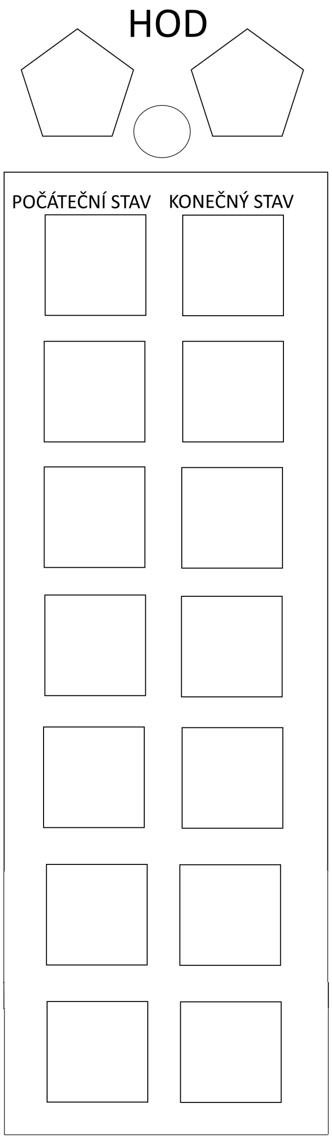
Dynamické varianty hry můžeme různě kombinovat nebo si vybrat jen jednu, to už záleží na počáteční domluvě mezi hráči. Hráči se musí domluvit před zahájením hry, jestli použijí některou dynamickou variantu, popřípadě kombinaci dynamických variant nebo budou hrát bez dynamických variant hry.

2.5. Zápis hry

V této kapitole budou formulovány možné způsoby záznamu průběhu hry. Zápis hry slouží k možnému zpětnému prozkoumání odehrané partie hry. Hráč si pomocí zápisu hry může uvědomit chyby, příležitosti (využité i nevyužité) a následnou analýzou optimalizovat své strategie.

2.5.1. Tabulkový zápis

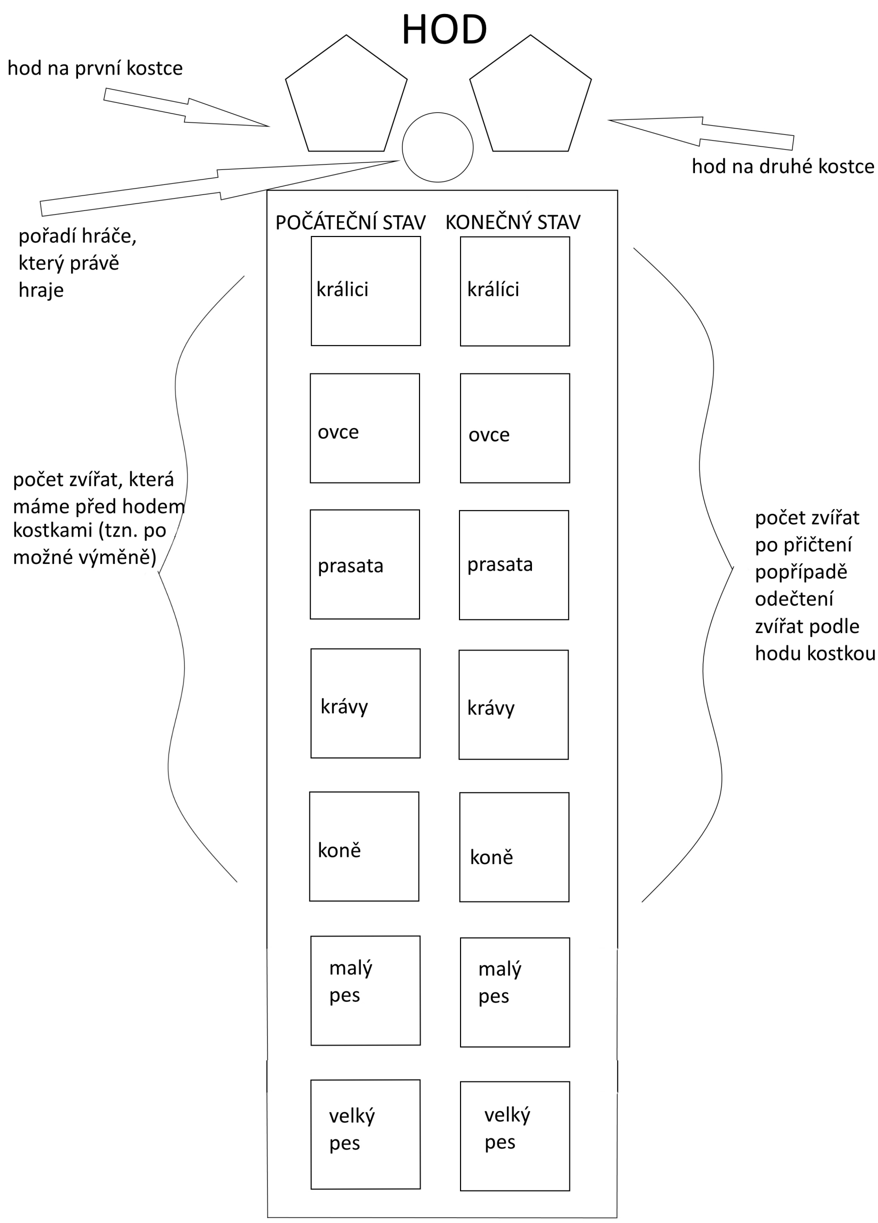
Zápis hry můžeme vidět na obrázku.



Obrázek 2.2: Grafický zápis hry

Zdroj: Vlastní zpracování.

Do pětiúhelníků píšeme, co jsme hodili na kostkách. Do kolečka uprostřed píšeme, který hráč právě hraje. Počáteční stav představuje počet zvířat, které máme před tím, než hodíme kostkou (tzn. až po možné výměně zvířat). Konečný stav představuje počet zvířat po přičtení, popřípadě odečtení zvířat po hodu kostkou. Schéma můžeme vidět na obrázku.



Obrázek 2.3: Grafický zápis hry – vysvětlivky

Zdroj: Vlastní zpracování.

Nevýhodou tohoto zápisu hry je velký objem. Na zapsání jedné partie o dvou hráčích bychom potřebovali velké množství tabulek, což by se v konečné verzi mohlo odrazit i na množství spotřebovaného papíru. Na konci bychom mohli mít knihu o velikosti více než sto stran.

2.5.2. Slovní zápis

Slovní zápis hry Superfarmář spočívá v zápisu událostí slovně. První zapíšeme, zda jsme provedli výměnu zvířat, co jsme hodili na kostkách a poté konečný počet zvířat. Zvířata píšeme v tomto pořadi: králíci, ovce, prasata, krávy, koně, malý psi a velcí psi.

Příklad:

- Hráč má 5 králíků a 4 ovce, hodí králíka a krávu. Zápis by pak vypadal následovně: Kostkami jsme hodili králíka a krávu, máme 8 králíků, 2 ovce a 1 prase.
- Hráč má 6 ovcí a 1 krávu, vymění 1 ovci za 6 králíků, hodí králíka a ovci. Zápis hry pak vypadá následovně: Vyměnili jsme jednu ovci za 6 králíků. Kostkami jsme hodili králíka a ovci, máme 9 králíků, 8 ovcí a 1 krávu.
- Hráč má 3 ovce, 2 prasata a 1 krávu, hodí dva králíky. Zápis by pak vypadal následovně: Kostkami jsme hodili dva králíky, máme 1 králíka, 3 ovce, 2 prasata a 1 krávu.

Nevýhodou tohoto zápisu hry je nepřehlednost, zdlouhavé zapisování a těžká zpětná analýza strategií.

2.5.3. Maticový zápis

Zápis provedeme pomocí matic A a B. Napíšeme slovně, co který hráč hodil na kostkách a ke každému hráči přiřadíme matici. První sloupec hráče A (neboli $a_{1i}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) nám bude značit počty zvířat po výměně zvířat (tzn. počet zvířat, který máme před hodem kostkou po provedení možné výměny zvířat) a druhý sloupec (neboli $a_{2i}, i = 1,2,3,4,5,6,7$) nám bude značit počet zvířat po získání/ztrátě po hodu kostkami. První sloupec hráče B (neboli $b_{1i}, i = 1,2,3,4,5,6,7$) nám bude značit počty zvířat po výměně zvířat a druhý sloupec (neboli $b_{2i}, i = 1,2,3,4,5,6,7$) nám bude značit počet zvířat po získání/ztrátě po hodu kostkami. Kde 1=počtu králíkům, 2=počtu ovcím, 3=počtu prasat, 4=počtu krav, 5=počtu koní, 6=počtu malých psů a 7=počtu velkých psů.

Příklad: Na začátku má hráč A 5 králíků a 2 ovce, hodí králíka a prase. Tzn. hráč A získal 3 králíky. Hráč B má 4 ovce a jednu krávu, hodí lišku a ovci. Ještě před hodem si hráč B vyměnil krávu za velkého psa, poté hodem získal 2 ovce.

$$A \text{ (králík, prase)} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B \text{ (liška, ovce)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice můžeme i transponovat. První řádek hráče A (neboli $a_{j1}, j = 1,2,3,4,5,6,7$) bude značit počty zvířat po výměně zvířat a druhý řádek (neboli $a_{j2}, j = 1,2,3,4,5,6,7$) bude značit počet zvířat po získání/ztrátě po hodu kostkami. První řádek hráče B (neboli $b_{j1}, j = 1,2,3,4,5,6,7$) nám bude značit počty zvířat po výměně zvířat a druhý řádek (neboli $b_{j2}, j = 1,2,3,4,5,6,7$) nám bude značit počet zvířat po získání/ztrátě po hodu kostkami.

Z předchozího příkladu bychom dostali následující matice:

$$A^T \text{ (králík, prase)} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^T \text{ (liška, ovce)=} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6. Ukázka hry

Na tomto místě ukáži jednu celou hru. Některé hry jsou velice dlouhé, vybrala jsem tedy kratší partii. Pro zápis této partie, jsem si vybrala maticový zápis pomocí transponovaných matic.

Hráč A – Adam, hráč B – Alexandra.

1. A^T (králík, králík) $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

B^T (králík, králík)$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. A^T (kráva, králík) $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

B^T (prase, králík)$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. A^T (ovce, prase) $= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

B^T (králík, králík)$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. A^T (králík, králík) $= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

B^T (ovce, králík)$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. A^T (ovce, prase) $= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

B^T (ovce, králík)$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. A^T (králík, králík) $= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

B^T (ovce, prase)= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. A^T (ovce, ovce) = $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

B^T (ovce, kráva)= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. A^T (kráva, kůň) = $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

B^T (prase, králík)= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. A^T (ovce, králík) = $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

B^T (králík, králík)= $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. A^T (králík, králík) = $\begin{pmatrix} 11 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

B^T (králík, ovce)= $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. A^T (králík, kůň) = $\begin{pmatrix} 17 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 26 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

B^T (králík, králík)= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

12. A^T (králík, prase) = $\begin{pmatrix} 26 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 39 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

B^T (ovce, prase)= $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

13. A^T (králík, králík) = $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

B^T (ovce, liška)$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

14. A^T (ovce, ovce) $= \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

B^T (králík, králík)$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

15. A^T (kráva, králík) $= \begin{pmatrix} 5 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

B^T (králík, prase)$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

16. A^T (králík, králík) $= \begin{pmatrix} 8 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

B^T (králík, prase)$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

17. A^T (ovce, králík) $= \begin{pmatrix} 13 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

B^T (králík, liška)$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

18. A^T (-, -) $= \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$, VÝHRA.

Vyhrál hráč A v 18. kole hry. V průběhu hry mužeme vidět, jaké strategie hráči použili. Hráč A použil nejprve strategii „Čím víc králíků tím lépe”a následně ji zkombinoval se strategií „Sbírám pouze ovce”, v posledním kole zvířata už pouze vyměnil. Povšimněme si zde, že si hráč v celém průběhu hry nepořídil velkého ani malého psa, až na závěr v osmnáctém kole si pořídil malého psa, kterého už nevyužil, jelikož vyhrál. Hráč B použil strategii „Všechno má svůj čas”, byl opatrnější a pořídil si v průběhu hry velkého psa. Partii se mu však nepodařilo vyhrát.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo seznámit čtenáře s teorií her, následnou aplikací teorie her v ekonomii a jednou konkrétní hrou Superfarmář.

V první části jsem přiblížila základní pojmy teorie her. Zabývala jsem se hrou s konstantním součtem, kde jsem vysvětlila definici hry a maticovou hru (jako příklad jsem použila hru Kámen, nůžky, papír, tapír, Spock – obdobná hra hře Kámen, nůžky, papír). Dále jsem se zabývala hrou s nekonstantním součtem, zde jsem přiblížila teorii nekooperativních her a dvoumaticovou hru (jako příklad jsem uvedla hru Osadníci z Katanu – junior). Následně jsem popsala hru v rozvinutém tvaru, kde jsem uvedla jako příklad Ruskou ruletu. Pak jsem se zabývala strategiemi her. První jsem rozvedla optimální strategie, kde jsem přiblížila Nashovu rovnováhu, rozhodování při riziku, rozhodování při nejistotě a rozhodovací principy (MAXIMIN, MAXIMAX, Hurwitzovo kritérium). Za druhé jsem rozvedla smíšené a čisté strategie hry.

Následoval příklad aplikace teorie her v ekonomii, vybrala jsem si model duopolu. Rozvedla jsem Cournotovo řešení – obě firmy jsou následovníky, rovnovážné řešení – jedna firma je vždy vůdcem a jedna firma je následovníkem a Stackelbergovo řešení – obě firmy jsou vůdci. U každé ze všech možných situací jsem uvedla příklad. V celkovém zhodnocení jsem ukázala nejvýhodnější a nejméně výhodnou variantu pro obě firmy. Nejvýhodnější je pro obě firmy být vůdcem za předpokladu, že je konkurence následovník. Nejnižší zisky dosahovaly firmy v případě, kdy byly obě současně vůdcem (jedna firma měla dokonce ztrátu).

Ve druhé části jsem se zabývala hrou Superfarmář. Na úvod jsem popsala důležité informace o jejím autorovi Karolu Borsukovi. Vysvětlila jsem pravidla hry, jak hra probíhá, jak si můžeme zvětšovat své stádo, možnou výměnu zvířat a přesný cíl hry.

Popsala jsem jednotlivé strategie hry a vypočítala pravděpodobnosti výhry se zvolenou strategií. První jsem se zabývala strategií, kterou jsem nazvala „Čím víc králíků, tím lépe". Nejmenší počet odehraných kol s touto strategií je 13, pravděpodobnost dosažení výhry ve třináctém kole je 0,01056. Za druhé jsem se zabývala strategií s názvem „Sbírám pouze ovce". Kde je nejmenší počet odehraných kol 9 a pravděpodobnost výhry v devátém kole je 0,00143. Dále jsem studovala strategii „Všechno má svůj čas". Nejmenší počet odehraných kol s touto strategií je 8 a pravděpodobnost výhry v osmém kole je 0,0000000033. Jako další jsem popisovala strategii „Získám koně a vyhraji", kde k získání koně si vybereme jednu z předešlých strategií. Na závěr této kapitoly jsem ukázala možné kombinace strategií, kdy nejlepší možnou kombinací je pomocí králíků získat koně. Výhra nastane ve 13. kole s pravděpodobností 0,0011732. A v závěru této části jsem se zabývala tím, zda je výhodné a potřebné pořídit si malého či velkého psa. Pravděpodobnost, že nám nepadne alespoň liška nebo vlk do 20. kola včetně je 0,0308. Ukázala jsem i dynamické varianty hry, jak si hru oživit a obměnit.

Snažila jsem se vymyslet zápis hry. Uvedla jsem tři možné varianty zápisu hry, kde má každá své výhody i nevýhody. Jako první jsem prezentovala tabulkový zápis, který je velice objemný. Dále jsem představila slovní zápis, který je velmi nepřehledný. A na konec jsem popsala maticový zápis, který bych doporučila.

Přidala jsem ukázku hry, kde se čtenář může podívat na jednu konkrétní hru. Abych hru Superfarmář lépe poznala, pořídila jsem si obě varianty hry, původní verzi i verzi Deluxe s dynamickými variantami. Během psaní této bakalářské práce jsem s hrou Superfarmář odehrála okolo 200 partií.

Mým přínosem v bakalářské práci bylo objasnění teorie her s vysvětlením definic a pojmů, aplikace teorie her v ekonomii s ukázkou a zhodnocením různých variant pro firmy pomocí výpočtů, rozbor hry Superfarmář s příklady možných strategií, mnou vytvořených, s hodnocením jednotlivých strategických kroků a výpočtů pravděpodobností možné výhry, vymyšlení a následné představení jednotlivých zápisů hry a ukázka průběhu jedné celé hry.

Literatura

[1] DLOUHÝ, Martin a Petr FIALA. *Úvod do teorie her.* Vyd. 1. Praha: Oeconomica, 2007. ISBN 978-80-245-1273-0.

[2] DLOUHÝ, Martin a Petr FIALA. *Úvod do teorie her.* Vyd. 2., přeprac. Praha: Oeconomica, 2009. ISBN 978-80-245-1609-7.

[3] MAŇAS, Miroslav. *Teorie her a konflikty zájmů.* Praha: Oeconomica, 2002. ISBN 80-245-0450-2.

[4] WIKIPEDIA. *Rozšířená forma.* [online]. 2016, [cit. 2016-4-26]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Rozšířená forma.

[5] WIKIPEDIA. *Karol Borsuk.* [online]. 2016, [cit. 2016-4-26]. Dostupné z: https://pl.wikipedia.org/wiki/Karol Borsuk.

[6] WIKIPEDIA. *Kámen, nůžky, papír, tapír, Spock.* [online]. 2016, [cit. 2016-4-27]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Kámen,_nůžky,_papír #Kámen,_nůžky,_papír,_tapír,_Spock.

[7] PRESS-PYGMALION. *Pravidla Superfarmář.* Český Těšín: Granna, 2008.

[8] ALBI. *Osadníci z Katanu JUNIOR.* Praha: Albi.

[9] BRODSKÝ, Zdeněk, Milan SIEGL a Barbora JETMAROVÁ. *Management.* Pardubice: Univerzita Pardubice, 2014. ISBN 978-80-7395-857-2

[10] CHOBOT, Michal, František TURNOVEC a Vladimír ULAŠIN. *Teória hier a rozhodovania.* Bratislava: Alfa, 1991. ISBN 8005007027, 9788005007026.

[11] HRON, Karel a Pavla KUNDEROVÁ. *Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statistiky.* Vyd. 2., přeprac. Olomouc: Univerzita Palackého, 2015. ISBN 978-80-244-4774-2.

[12] WIKIPEDIA. *Karol Borsuk.* [online]. 2019, [cit. 2019-3-24]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Karol Borsuk.

[13] VOLEK, Josef. *Modelování a řešení rozhodovacích situací.* Pardubice: Univerzita Pardubice, 2010. ISBN 978-80-7395-311-9.

[14] BUCHTA, Miroslav. *Mikroekonomie: pro magisterské studium.* Pardubice: Univerzita Pardubice, 2007. ISBN 978-80-7395-036-1.

[15] TICHÁ, Michaela. *Aplikace teorie her dvou hráčů v ekonomii,* diplomová práce. Praha: Vysoká škola ekonomická, 2012.

[16] EKOSPACE. *Mikroekonomie 2 - oligopol.* [online]. 2019, [cit. 2019-4-17]. Dostupné z: http://www.ekospace.cz/3-mikroekonomie-2/246-12-oligopol-2?fbclid=IwAR1YACtjjyjihVjqHBeKrGpNO_qdUB1xaV43qRgVKz9ZQaGlDihdEOV871k.