

**UNIVERZITA PARDUBICE**

Fakulta elektrotechniky a informatiky

**SROVNÁNÍ ANALYTICKÉHO A SIMULAČNÍHO PŘÍSTUPU V TEORII FRONT**

Petr Záruba

Bakalářská práce

2019

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Petr Záruba**  
Osobní číslo: **I15386**  
Studijní program: **B2646 Informační technologie**  
Studijní obor: **Informační technologie**  
Název tématu: **Srovnání analytického a simulačního přístupu v teorii front**  
Zadávací katedra: **Katedra informačních technologií**

### Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Cílem práce je srovnání analytického a simulačního přístupu v základních modelech teorie front. Práce by měla obsahovat teoretickou část, zaměřenou na základní teoretické poznatky z teorie front, ale hlavně na základní používané modely v této teorii (model  $M/M/1$ ,  $M/M/N$ ,  $M/D/1$ ,  $M/G/1$  a další). V těchto modelech budou řešeny základní úlohy typu "počet požadavků v systému", "délka fronty", "pravděpodobnost čekání" atd. a to jak analytickou cestou s využitím vzorečků, tak s využitím počítačové simulace a tyto přístupy budou srovnány. Součástí bakalářské práce bude praktická aplikace pro simulaci základních úloh teorie front včetně grafických výstupů.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy: 40

Forma zpracování bakalářské práce: tištěná

Seznam odborné literatury:

HEBÁK, Petr. Vícerozměrné statistické metody. 2., přeprac. vyd. Praha: Informatorium, 2007-, 3 sv. ISBN 978-80-7333-056-9.

LINDA, Bohdan. Stochastické modely operačního výzkumu. Bratislava: Statis, 2010. ISBN 978-80-85659-59-7.

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Alena Pozdílková, Ph.D.

Katedra matematiky a fyziky

Datum zadání bakalářské práce: 31. října 2017

Termín odevzdání bakalářské práce: 12. května 2018



Ing. Zdeněk Němec, Ph.D.  
děkan



Ing. Lukáš Čegan, Ph.D.  
pověřený vedením katedry

V Pardubicích dne 20. března 2018

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 9/2012, bude práce zveřejněna v Univerzitní knihovně a prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 29. 4. 2018

Petr Záruba

## **ANOTACE**

Cílem bakalářské práce je srovnání analytického a simulačního přístupu v základních modelech teorie front. Práce je rozdělena na dvě části a to teoretickou a praktickou, dále je praktická část rozdělena na analytický a simulační přístup. Teoretická část obsahuje popis problematiky a popisy základních modelů používaných v této teorii. Praktická část obsahuje aplikaci pro analytický výpočet nejpoužívanějších modelů a simulaci každého z těchto modelů.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

teorie front, Kendallova klasifikace, otevřené systémy, uzavřené systémy

## **ANNOTATION**

The aim of this bachelor thesis is comparison of analytical and simulation approach in basic models of the queue theory. The bachelor thesis is divided into two parts, theoretical and practical, practical part is further divided into analytic and simulation approach. Theoretical part contains description of the queue theory and description of most common models that are used in this theory. Practical part contains application for analytic counting of the most common models and simulation examples of each of these models.

## **KEY WORDS**

queue theory, Kendall classification, open systems, closed systems

# OBSAH

Úvod do Teorie front .....	6
Rovnoměrné rozdělení .....	6
Alternativní rozdělení .....	7
Binomické rozdělení .....	7
Poissonovo rozdělení.....	8
Normální rozdělení.....	9
Markovovy řetězce a procesy.....	10
Typy stavů.....	12
Kendalova klasifikace.....	12
Parametry modelu.....	12
Intenzita vstupu jednotek do systému .....	13
Intenzita obsluhy jednotky na obslužné lince .....	13
Počet obslužných linek v systému .....	13
Maximální kapacita fronty.....	13
Pravidla jednotky pro odchod z fronty k obslužné lince .....	13
Simulační model – Metoda Monte Carlo .....	14
Systémy hromadné obsluhy .....	14
Podmínka stabilizace systému:.....	15
Analytické řešení .....	15
Simulační řešení.....	15
Otevřené systémy.....	15
Systém M/M/1 .....	15
Systém M/M/N/∞.....	18
Systém M/M/N/R.....	19
Systém M/M/N/k (se ztrátami) .....	21
Systém M/M/1/k (se ztrátami).....	22
Systém M/D/1/∞ .....	22
Systém M/G/1/∞ .....	23
Uzavřený systém .....	24
Uzavřený Systém M/M/1 .....	24
Aplikace .....	25
Základní charakteristika.....	25
Popis aplikace .....	25
Model M/M/1 & Model M/D/1.....	26

Model M/M/N/ $\infty$ .....	27
Model M/M/N/R .....	27
Adresářová struktura.....	28
Simulace .....	29
Simulované modely .....	29
M/M/1 .....	29
M/M/N/ $\infty$ .....	30
M/M/N/R.....	30
M/D/1/ $\infty$ .....	31
Srovnání analytického přístupu a simulačního.....	31
Závěr .....	32
Použitá literatura.....	33

## Úvod do Teorie front

Teorie front neboli teorie hromadné obsluhy je obor aplikované matematiky, který se zabývá modely a návrhy, kde jsou zákazníci obsluhováni příslušnými kanály, a jejich optimalizací. Tato teorie vznikla počátkem 20. století jakožto součást operačního výzkumu dánského inženýra Agnera Krarupa Erlanga, který se zabýval analýzou telefonních linek a zjistil, že telefonní systém lze charakterizovat pomocí Poissonova rozdělení.

Jak již bylo naznačeno, teorie hromadné obsluhy se zabývá modely, v jejichž rámci vstupují do obslužného systému jednotky vyžadující obsluhu jednou či více obslužných linek. Cílem těchto modelů je optimalizovat počet linek takovým způsobem, aby nedocházelo k tvoření front nebo ztrátě vstupních jednotek, které odmítnou do systému vstoupit z důvodu nadměrné fronty, a zároveň se zde nenalézaly nevyužité obslužné linky. Frontou se rozumí souhrn požadavků čekající na obsluhu, uvedené modely jsou stochastické, neboli pracující s prvky náhody, která je prezentována například rozdílným vstupem jednotek do systému nebo dobou jejich obsluhy.

Teorie front tedy usiluje o zanalyzování celého procesu a jeho zefektivnění takovými změnami, aby nedocházelo k výskytu nevyužitých zdrojů (obslužných linek) a aby fronta nepřevyšovala určenou délku. Cílem je vyjádření charakteristického fungování daného systému - určení těchto charakteristik lze dosáhnout buď přístupem analytickým, nebo simulačním. Teorie front využívá různá rozdělení pravděpodobnosti, která udávají intenzitu vstupu jednotlivých požadavků a intenzitu jejich obsluhy. Základní rozdělení, která jsou v teorii front využita, jsou následující:

- rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti
- alternativní rozdělení pravděpodobnosti
- binomické rozdělení pravděpodobnosti
- Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti
- normální rozdělení pravděpodobnosti

### Rovnoměrné rozdělení

Def: Náhodná veličina  $X$  má rovnoměrné  $R(n)$  právě tehdy, když je pravděpodobnostní funkce daná vztahem:

$$p(x) = \frac{1}{N},$$

kde  $n$  je počet možných výsledků.

Jedná se například o hody kostkou, kde za předpokladu symetrické kostky je stejná pravděpodobnost pro libovolný výsledek hodu.

Množina možných výsledků:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , pravděpodobnost:  $p(x) = \frac{1}{6}$ .



### Alternativní rozdělení

Def: Náhodná veličina  $X$  s pravděpodobnostní funkcí  $P(x = 0) = 1 - p$ ,

$P(x = 1) = p$  ( $0 < p < 1$ ) má alternativní rozdělení pravděpodobnosti  $A(p)$  s parametrem  $p$ .

Jedná se o dvouprvkovou množinu, kde mohou nastat pouze dva stavy, a to je stav úspěšný a neúspěšný.

Například se jedná o hody mincí, kde množina je  $\{0(\text{rub}), 1(\text{líc})\}$ , jedná se o alternativní rozdělení  $A\left(\frac{1}{2}\right)$

$$P(0) = \frac{1}{2}$$

$$P(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

### Binomické rozdělení

Def: Náhodná veličina  $X$  má binomické rozdělení  $Bi(n, p)$  právě tehdy, když je pravděpodobnostní funkce určena vztahem:

$$P(x) = \binom{n}{x} * p^x * (1 - p)^{n-x} ,$$

kde  $x = 0, 1, \dots, n$ ;  $n$  je počet pokusů a  $p$  je pravděpodobnost úspěšnosti každého pokusu.

Jedná se o jev, který popisuje četnost náhodného jevu v  $n$  nezávislých pokusech, ve kterých má stále stejnou pravděpodobnost.

Příklad: Pravděpodobnost narození dívky je 0.49%. Jaká je pravděpodobnost, že rodiče s 8 dětmi mají alespoň 2 dívky?

Pokus	Úspěch	Neúspěch	Počet pokusů $n$	Pravděpodobnost úspěchu $P$	Počet úspěchů $k$
Porod	Dívka	Chlapec	8	0.49	

Počet úspěchů ( $k$ )  $> 2 = 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8$

$$\begin{aligned} P(x > 2) &= P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 = 1 - P_0 - P_1 - P_2 \\ &= 1 - \sum_{k=0}^2 \binom{9}{k} 0.49^k * (0.51)^{8-k} = 1 - 0.16 = 0.84 \rightarrow 84\% \end{aligned}$$

## Poissonovo rozdělení

Def: Náhodná veličina  $X$  má Poissonovo rozdělení  $P_0(\lambda)$  právě tehdy, když má pravděpodobnostní funkce tvar:

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} * e^{-\lambda}$$

v daném jednotkovém úseku, kde  $x = 0, 1, 2, \dots$  a  $\lambda$  je parametr.

Popisuje pravděpodobnost, neboli náhodnou veličinu, která udává počet výskytů konkrétního nezávislého jevu v určitém časovém horizontu.

$$P(x = n) = \frac{\lambda^n}{n!} * e^{-\lambda}$$

Příklad 1a: Pokud za hodinu přijede 20 aut, jaká je pravděpodobnost, že za 10 minut přijedou právě 3 auta?

$$\lambda = \frac{20 \text{ (aut)}}{6 \text{ (10 minut)}}$$

$$P(x = 3) = \frac{\left(\frac{20}{6}\right)^3}{3!} * e^{-\frac{20}{6}} = \frac{37}{6} * e^{-\frac{20}{6}} = 0.22 \rightarrow 22\%$$

Příklad 1b: Pokud za hodinu přijede 20 aut, jaká je pravděpodobnost, že za 10 minut přijedou maximálně 3 auta?

$$P(x \leq 3) = P_0 + P_1 + P_2 + P_3$$

$$P(x = 3) = \frac{\left(\frac{20}{6}\right)^3}{3!} * e^{-\frac{20}{6}} = \frac{37}{6} * e^{-\frac{20}{6}} = 0.22 \rightarrow 22\%$$

$$P(x = 2) = \frac{\left(\frac{20}{6}\right)^2}{2!} * e^{-\frac{20}{6}} = 0.198 \rightarrow 19.8\%$$

$$P(x = 1) = \frac{\left(\frac{20}{6}\right)^1}{1!} * e^{-\frac{20}{6}} = 0.119 \rightarrow 11.9\%$$

$$P(x = 0) = \frac{\left(\frac{20}{6}\right)^0}{0!} * e^{-\frac{20}{6}} = 1 * e^{-\frac{20}{6}} = 0.036 \rightarrow 3.6\%$$

$$P(x \leq 3) = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 35.3\%$$

Příklad 1c: Pokud za hodinu přijede 20 aut, jaká je pravděpodobnost, že za 10 minut přijedou alespoň 3 auta?

$$P(x > 3) = 1 - P_0 - P_1 - P_2 - P_3 = 64.7\%$$

Příklad 2: Za den přijde 10 úkolů, jaká je pravděpodobnost, že v následující hodině přijde alespoň 1?

$\lambda$  = Průměrný počet výskytů za sledované období.

Nejdříve si musíme spočítat  $\lambda$ , tu dostaneme podílem vstupních požadavků za čas. Víme, že za 1 den (24 hodin) je zadáno 10 úkolů.

$\lambda$  spočítáme tedy následujícím vzorcem:

$$\lambda = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

Dále máme za úkol spočítat pravděpodobnost, že za hodinu přijde alespoň jeden úkol. Čili:

$$P(x \geq 1) = P_1 + P_2 + \dots$$

Jelikož víme, že součet pravděpodobností všech možných stavů je roven jedné tak můžeme upravit vzorec pro výpočet tím, že od jedné (100 %) odečteme stavy, které nechceme aby nastaly, což v našem případě je  $P_0$ , neboli pravděpodobnost, že nepřijde ani jeden úkol:

$$P(x \geq 1) = 1 - P_0 = 1 - \frac{\left(\frac{5}{12}\right)^0}{0!} * e^{-\frac{5}{12}} = 0.34 \rightarrow 34\%$$

Výsledná pravděpodobnost, že za hodinu dostaneme alespoň jeden úkol je tedy 34%.

#### Normální rozdělení

Def: Náhodná veličina  $X$  má normální rozdělení  $N(m, s^2)$  právě tehdy, když má hustota pravděpodobnosti tvar:

$$f_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2 * \pi}} * e^{-\frac{1}{2} * \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \text{ pro } x \in (-\infty, \infty)$$

$\sigma$  = směrodatná odchylka

$\mu = \text{střední hodnota}$

Je též nazýváno jakožto Gaussovo rozdělení, jeho výskyt je nejčastější a grafem hustoty je Gaussova křivka.

Střední hodnota určuje, kde má křivka maximum. Směrodatná odchylka určuje vzdálenost inflexních bodů po obou stranách střední hodnoty.

### Markovovy řetězce a procesy

Markovovy procesy se začaly používat v polovině 20. století a jsou pojmenovány po ruském matematikovi Andreji Markovovi. Markovovy procesy se používají pro optimalizaci modelů pomocí dynamického programování, procesy poskytují matematický rámec pro modelování rozhodnutí ve chvílích, kdy jsou výsledky zároveň náhodné a pod kontrolou uživatele. Mezi nejdůležitější z prvních výzkumů můžeme zařadit knihu z roku 1960 od Ronalda A. Howarda s názvem Dynamické programování a Markovské procesy, jejíž obsah se dnes používá pro automatické řízení průmyslu a ekonomiky.

Markovův řetězec je definován pravděpodobností kdy nastávají jednotlivé změny v systému, respektive přechody mezi dvěma stavy, tyto změny nejsou ovlivňovány historií v procesu.

Jedná se o kontrolovaný stochastický diskrétní proces, kdy v každém čase se proces nachází k určitému stavu „s“ a člověk si následně může vybrat jakoukoliv dostupnou akci „a“, která je pro daný stav „s“ právě dostupná. Na tuto akci proces reaguje změnou do nového stavu „s2“. Pravděpodobnost, že nastane právě stav „s2“ je ovlivněna předešlou akcí. Pravděpodobnost stavu s2 tedy záleží na současném stavu „s“ a provedené akci „a“. Tyto „s“ a „a“ jsou ovšem závislé na všech předešlých stavech a akcích, tento stav přechodu procesu nazýváme, že má proces Markovskou vlastnost.

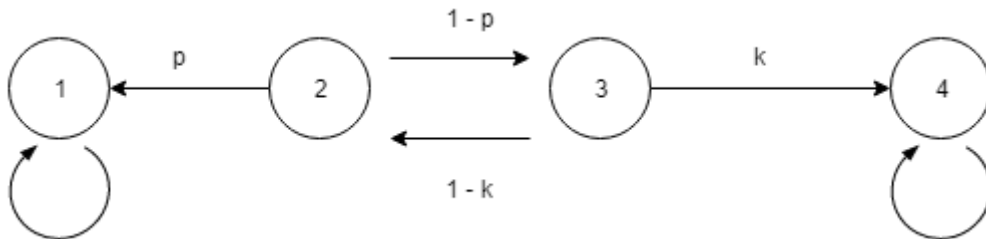
Def: „Říkáme, že posloupnost náhodných veličin  $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$  jejichž hodnoty jsou celá nezáporná čísla, tvoří Markovův řetězec, když pro všechny indexy  $k, r, k > r \geq 0$  platí

$$P(X_k = j | X_r = i, X_{r-1} = i_{r-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_k = j | X_r = i),$$

kde  $X_0$  představuje stav systému na začátku pozorování.“

Příklad: Petr a Karel kopou míčem na bránu, po jednom pokusu se střídají a jako první kope Petr, kdo první zasáhne vyhrává. Petr se strefí s pravděpodobností  $p$  a Karel s pravděpodobností  $k$ , jaká je pravděpodobnost výsledku?

Petr a Pavel kopou míčem na bránu a po jednom pokusu se střídají.



Po první střele bude Petr s pravděpodobností  $p$  vyhrávat a s pravděpodobností  $1-p$  bude hra pokračovat. Po 2. střele bude Karel vyhrávat s pravděpodobností  $k(1-p)$ , nebo bude situace stejná jako na začátku a šance budou stejné.

$$\text{Petrovy šance: } \frac{p}{p + (1-p) * k} = \frac{p}{p + k - pk}$$

$$\text{Karlovy šance: } \frac{(1-p) * k}{p + (1-p) * k} = \frac{(1-p) * k}{p + k - pk}$$

Přechodová matice:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pravděpodobnosti jevů:

$$P(0) = (0, 1, 0, 0)$$

$$P(1) = (0, 1, 0, 0), P = (p, 1-p, 0)$$

$$P(2) = (p, 0, 1-p, 0), P = (p, (1-p) * (1-k), 0, k * (1-p))$$

$$P(3) = (p, (1-p) * (1-k), 0, k * (1-p)),$$

$$P = (p + p * (1-p) * (1-k), 0, (1-p)^2 * (1-k), k * (1-p))$$

První kope Petr a pro nastání 3. stavu je jeho kop podmínkou. Bez něj získáme zjednodušený zápis.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & (1-p) * (1-k) & k * (1-p) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pokud má Petr šanci na zásah  $1/2$  a Karel  $1/3$  tak:

První kop:

$$P1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Druhý kop:

$$P2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Typy stavů

#### *Absorpční stav*

- Je takzvaný stav, který pokud nastane, tak není možnost, aby nastal stav jiný.

#### *Přechodový stav*

- Stav, jehož pravděpodobnost výskytu je menší než 100 %.

#### *Trvalý stav*

- Se nazývá stav, ze kterého když vyjdeme, tak se 100 % pravděpodobností se do něj opět dostaneme.
- Ergodický trvalý stav
  - Je stav, který může nastat kdykoliv.
- Periodický trvalý stav
  - Je stav, který se naskytne znovu po určitém počtu kroků.

#### Kendallova klasifikace

V roce 1951 byla D.G. Kendallem vytvořena Kendallova klasifikace, která obsahuje základní informace o systému hromadné obsluhy. Původně se používaly tři znaky, ale jelikož byly nedostatečné tak se rozšířily na znaků pět a nazýváme je parametry modelu, přičemž při zkoumání reálných událostí (systémů) není vždy třeba určovat všechny charakteristiky, pokud pro daného pozorovatele systému nejsou důležité.

#### Parametry modelu

Pro vytvoření modelu hromadné obsluhy je třeba specifikovat následující parametry:

- A – intenzita vstupu jednotek do systému,
- B – intenzita obsluhy jednotky na obslužné lince,
- C – počet obslužných linek v systému,

- D – maximální kapacita fronty,
- E – pravidla jednotky pro odchod z fronty k obslužné lince.

#### Intenzita vstupu jednotek do systému

Vstup jednotek neboli vstupní tok do systému obsluhy je nejzákladnější informace nutná k simulaci hromadné obsluhy. Vstupní tok především charakterizuje časové intervaly mezi vstupem jednotek do systému. Vstupní tok může být konstantní neboli deterministický, ale ve většině případů se jedná o náhodnou veličinu neboli stochastický tok. Vstupní tok v uzavřeném systému je konečný nebo v případě otevřeného systému je nekonečný. Existuje zde možnost, že vstupy jednotek nebudou nezávislé náhodné veličiny a v tomto případě by došlo k selhání modelu. Optimálním způsobem, jak tomuto problému předejít, je rozdělit model do podmodelů. Například řešení intervalů semaforů na křižovatce bude rozděleno z jednoho modelu na model nočního provozu, denního provozu a denní špičky. Další komplikací simulace modelu je rozhodování vstupních jednotek, zda se zařadí do fronty nebo systém opustí.

#### Intenzita obsluhy jednotky na obslužné lince

Dobou obsluhy se rozumí doba nutná k obslužení požadavku jednotky. Nejčastěji se opět jedná o náhodnou veličinu, kterou si lze snadno představit na příkladu doby obsluhy v obchodě, kde každá vstupní jednotka neboli zákazník má rozdílně objemný nákup, a tudíž se u každého doba obsluhy liší.

#### Počet obslužných linek v systému

Systémem obslužných linek se hlavně rozumí počet obslužných linek, ale zároveň nese i informaci o tom, zda linky mohou obsluhovat vstupní jednotky paralelně (pokladny v obchodě), sériově (objednávací a výdejová jednotka) nebo zda existuje speciální uspořádání.

Systém obslužných linek rozlišujeme na systém s jednoduchou obsluhou (jedna obslužná linka), systém s vícenásobnou obsluhou (více obslužných linek) nebo systém adaptabilní (počet obslužných linek se liší v závislosti počtu vstupních jednotek, například otevírání/zavírání pokladen v obchodě v závislosti na počtu zákazníků).

#### Maximální kapacita fronty

Jedná se o maximální kapacitu fronty u obslužných linek, po jejímž naplnění začne být vstup vstupních jednotek do fronty odmítán a systém opouštějí jako neobsloužené vstupní jednotky.

#### Pravidla jednotky pro odchod z fronty k obslužné lince

Jedná se o pravidla, dle kterých jsou vstupní jednotky přijímány do obslužného systému. Správně zvolený režim obsluhy je klíčový pro efektivní funkčnost.

- FIFO (First in – First out)

- Metoda FIFO je nejběžnějším užívaným pravidlem, kde první požadavek zařazen do fronty je obslužen jako první, druhý jako druhý atd.
- P-FIFO (Priority FIFO)
  - Jedná se o režim FIFO, kde některé jednotky vstupují s prioritou, nejběžněji jsou buď zařazeny na začátek fronty nebo jsou přímo přijaty do obslužného systému, kde právě obsluha aktuálně obsluhované vstupní jednotky je buďto pozastavena, nebo je přerušena, a tato vstupní jednotka se vrací do fronty buď s prioritou nebo bez ní.
- LIFO (Last in – First out)
  - Je to režim, kde poslední vstupní jednotka má nejvyšší prioritu pro vstup do obslužného systému.
- SIRO (Search in random order)
  - Jedná se o systémy s neuspořádanou frontou, protože vstupní jednotky jsou vybírány náhodně k postupu do obslužného systému.
- SJF (Shortest job first)
  - Jedná se o režim, kde požadavek s nejkratší dobou obsluhy je obsluhován nejdříve.

### Simulační model – Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo se používá pro řešení numerických úloh (simulací) pomocí opakování náhodných iterací modelu, kde dostatečným počtem iterací určíme pravděpodobnost. Jedná se o stochastický přístup používající pseudonáhodná čísla generované příslušnými nasadami.

### Systémy hromadné obsluhy

Systémy hromadné obsluhy dělíme na otevřené a uzavřené. Otevřené systémy jsou systémy, kde požadavek vstupuje do systému vstupním tokem a po obslužení tohoto požadavku systém opouští, na rozdíl od toho v uzavřeném systému, požadavek po obslužení místo toho, aby systém opustil tak se do něj vrací.

Význam znaků Kendellovy klasifikace:

- A – intenzita vstupu jednotek do systému:
  - M = Poissonův proces vstupního toku,
  - D = pravidelné deterministické příchody,
  - G = obecné rozložení (žádné předpoklady o intenzitě příchodů).



- B – intenzita obsluhy jednotky na obslužné lince:
  - M = exponenciální rozložení času obsluhy,
  - D = konstantní doba obsluhy,
  - G = obecná doba obsluhy (jakékoliv rozložení času obsluhy).

Podmínka stabilizace systému:

Ve všech modelech je nutné dodržet podmínku stabilizace systému, aby nedošlo k jeho zahlcení.

Intenzita vstupních požadavků musí být menší než intenzita obsluhy obslužných linek, kterých je „n“.

$$\rho = \frac{\lambda}{n\mu} < 1$$

Analytické řešení

K analytickému řešení dojdeme výpočtem parametrů modelu, kde pro jednotlivé charakteristiky jsou odvozeny konkrétními vztahy, do kterých dosazujeme parametry.

Simulační řešení

K simulačnímu řešení použijeme známé parametry, které použijeme ve vhodném simulačním softwaru. Na základě výsledků iterací naší simulace odhadneme charakteristiky modelu, které jsou pro nás relevantní. Simulační řešení je v podstatě experimentování se systémem, což můžeme chápat jako napodobování daného systému, kde právě zvýšením počtu iterací budeme získávat přesnější data hledaných charakteristik.

Otevřené systémy

Systém M/M/1

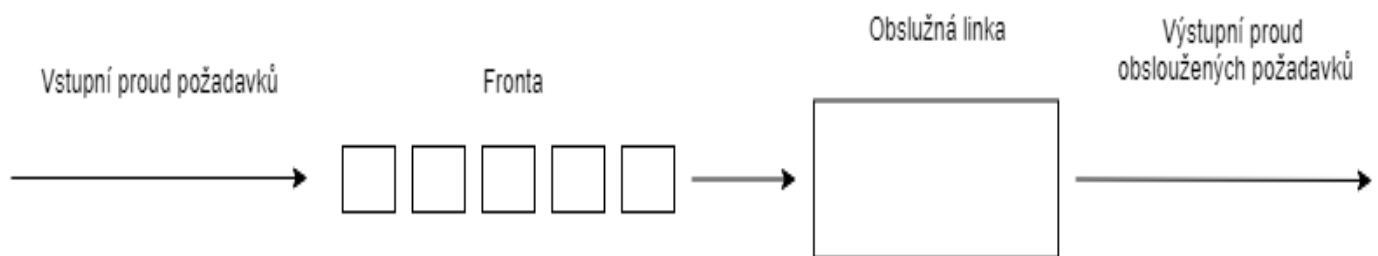
Jedná se o systém se vstupním tokem podléhající Poissonovu rozdělení, s exponenciálním rozdělením doby obsluhy a jednou obslužnou linkou.

*Předpoklady modelu:*

- Systém vlastní pouze jednu obslužnou linku.
- Vstupní tok požadavků je popsateľný exponenciálním rozdělením s parametrem  $\lambda$ .
- Doba obsluhy jednoho požadavku je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením s parametrem  $\mu$ .
- Jedná se o otevřený systém (neomezený vstupní tok).
- Kapacita fronty je neomezená.
- Metoda zpracování je FIFO.

Def: Necht' systém hromadné obsluhy M/M/1 má intenzitu vstupu „ $\lambda$ “ a intenzitu obsluhy „ $\mu$ “. Potom podíl  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  nazýváme intenzitou provozu systému hromadné obsluhy typu M/M/1.

Nejjednodušší případ exponenciálního modelu hromadné obsluhy, kde vstupy a výstupy mají pravděpodobnosti Poissonova rozdělení.



- Střední počet jednotek (požadavků, zákazníků) ve frontě.

$$EN_f = ET_f * \lambda$$

- Střední počet jednotek (požadavků, zákazníků) v systému.

$$EN = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

- Střední doba čekání ve frontě se řídí předpisem.

$$ET_f = ET - \frac{1}{\mu}$$

- Střední doba čekání v systému se řídí předpisem.

$$ET = \frac{EN}{\lambda}$$

- Pravděpodobnost nepracující obslužné linky (ve frontě není žádný požadavek).

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

- Pravděpodobnost pracující linky (alespoň jeden prvek ve frontě).

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$\rho$  = intenzita provozu systému hromadné obsluhy

Intenzita provozu udává pravděpodobnost, že vstupní požadavek přijde do systému a zároveň bude zařazen do fronty, kde setrvá, dokud na něj nepřijde řada.

- Pravděpodobnost, že v daný okamžik je požadavek obsluhován a (n - 1) je ve frontě.

$$p_n = p_0 \rho^n = (1 - \rho) \rho^n$$

Příklad: Město se chystá zbudovat podzemní garáž a zajímá je, zda bude dostačující jeden vjezd, kde bude auto zkontrolováno a následně závorou propuštěno.

Dotazy zákazníka:

- Čas, kdy u vjezdu budou auta.
- Průměrná velikost fronty čekajících aut.
- Průměrná doba čekání jednoho auta.
- Maximální délka fronty, která nebude z 95 % překročena.

Zákazník předpokládá, že do jeho zabezpečené garáže přijede 8 aut za hodinu a bezpečnostní kontrola jednoho auta bude trvat 6 minut.

Čili víme, že  $\lambda = 8$  a  $\mu = \frac{1}{10}$ .

- Čas, kdy u vjezdu budou stát auta.  
Využitelnost vjezdu je  $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{10}$ , neboli 80 %.

- Průměrná velikost fronty čekajících aut.  
Střední délka fronty je

$$EN = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{64}{10(10-8)} = \frac{64}{20} \cong 4 (3,2).$$

- Průměrná doba čekání jednoho auta.

$$ET = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{10-8} = \frac{1}{2}, \text{ neboli } 0.5 \text{ hodiny.}$$

- Maximální délka fronty, která nebude z 95 % překročena

$$P(N \geq K) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$
$$0,8^k \leq 0,05$$
$$k \ln(0,8) \leq \ln(0,05)$$
$$k \cong 14 (13,43)$$

Maximální délka fronty, který z 95 % nebude překročena je 14 aut.

## Systém M/M/N/∞

Jedná se o systém se vstupním tokem podléhající Poissonovu rozdělení, s exponenciálním rozdělením doby obsluhy, „n“ počtem obslužných linek a neomezenou frontou.

### Předpoklady modelu:

- Systém vlastní „n“ naprosto stejných obslužných linek.
- Vstupní tok požadavků je popsateľný exponenciálním rozdělením s hustotou pravděpodobnosti a parametrem  $\lambda$ .

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ pro } t > 0$$

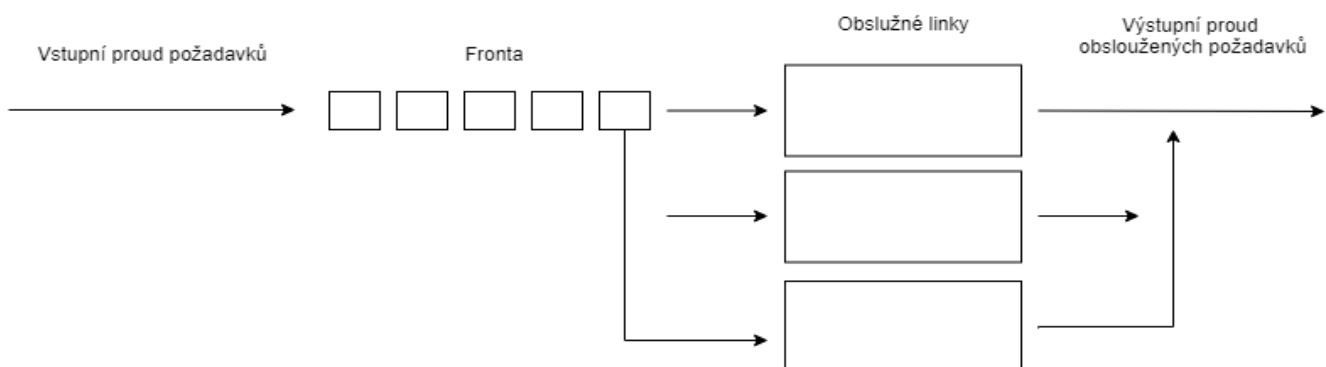
- Doba obsluhy každé z „n“ linek je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením s hustotou pravděpodobnosti a parametrem  $\mu$ .

$$b(t) = \mu e^{-\mu t} \text{ pro } t > 0$$

- Jedná se o otevřený systém (neomezený vstupní tok).
- Kapacita fronty je neomezená.
- Metoda zpracování je FIFO.

Jedná se o Markovův obslužný systém, který je mnohem častější. Vlastní „n“ paralelních obslužných linek se stejnou rychlostí obsluhy. Vstupní tok je neomezený a všechny obslužné linky mají stejnou intenzitu obsluhy.

Intenzita vstupního toku je konstantní pro všechny obslužné linky, ale intenzity obsluhy požadavků už ne. Intenzita obsluhy přímo závisí na stavu systému, respektive na aktuálním množství vstupních požadavků. Každá linka je sice totožná a má tedy i stejnou dobu obsluhy, ale v konkrétní čas může a pravděpodobně bude každá linka v jiném stavu.



- $p_0 = \left[ \sum_{n=0}^{n-1} \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{\mu}{n\mu - \lambda} \right]^{-1} = \left[ \sum_{n=0}^{n-1} \frac{n^n(\rho)^n}{n!} + \frac{n^n(\rho)^n}{n!(1-\rho)} \right]^{-1}$ .
- Střední počet jednotek (požadavků, zákazníků) ve frontě.

$$EN_f = \frac{p_0}{(n-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\lambda * \mu}{(n\mu - \lambda)^2}$$

- Střední počet jednotek (požadavků, zákazníků) v systému.

$$EN = \lambda ET$$

- Střední doba čekání ve frontě se řídí předpisem

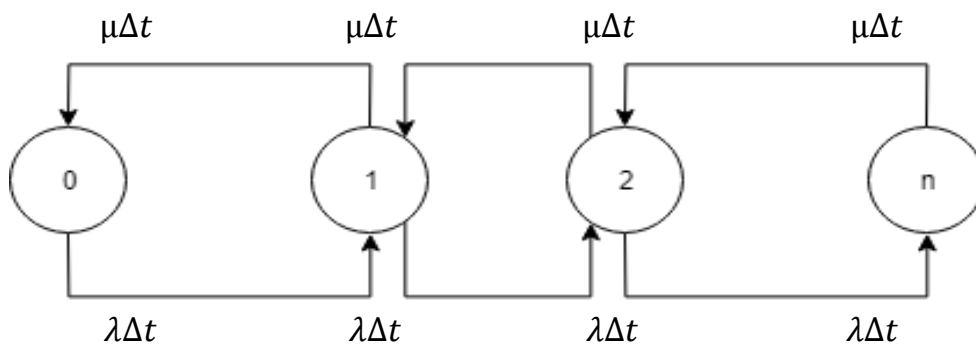
$$ET_f = \frac{EN_f}{\lambda}$$

- Střední doba čekání v systému se řídí předpisem

$$ET = ET_f + \frac{1}{\mu}$$

- Podmínka stabilizace

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu n}$$



Příklad: Na hranicích mezi dvěma státy je 10 parkovacích míst pro náhodnou kontrolu nákladu nákladních vozidel. Každou hodinu celníci vyberou 12 nákladních vozidel ke kontrole a důkladná doba kontroly je 45 minut. Pokud nově přichází kamion nemůže rovnou vjet na parkovací místo, čeká ve frontě.

Celníky zajímá:

- Pravděpodobnost, že budou všechna parkovací místa využita
- Průměrný počet obsazených parkovacích míst.

System M/M/N/R

Jedná se o systém se vstupním tokem podléhající Poissonovu rozdělení, s exponenciálním rozdělením doby obsluhy, „n“ obslužnými linkami a omezenou délkou fronty „r“.

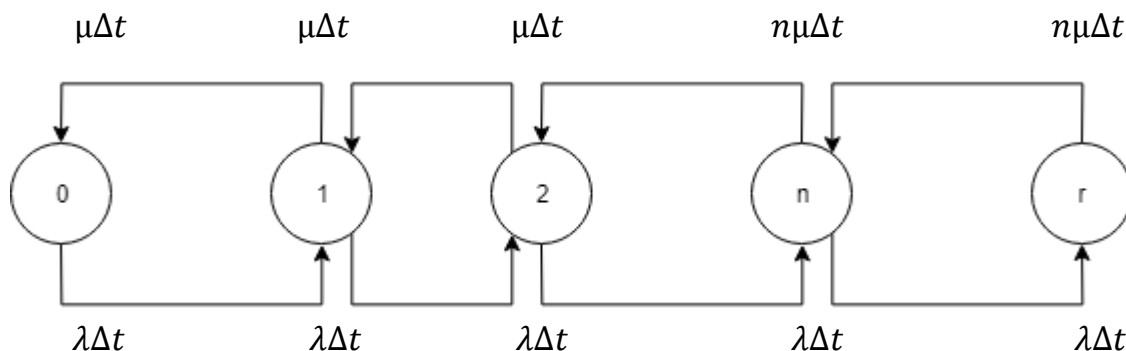
*Předpoklady modelu:*

- Pravděpodobnostní charakteristiky zůstávají z důvodu výskytu konečných sum v základním tvaru.
- Pravděpodobnost odmítnutí vstupního požadavku je stejná jako pravděpodobnost, že systém bude plně obsazený  $p_{n+r}$ .
- Pravděpodobnost, že bude vstupní požadavek muset čekat na obsluhu obslužnou linkou.

$$p = \sum_{k=n}^{n+r-1} p_k$$

Systém M/M/N/R je jiný druh systému M/M/N/ $\infty$ , kde na rozdíl od něj v tomto systému uvažujeme maximální počet vstupních požadavků ve frontě, čili budou nastávat situace, kdy hned po příchodu vstupního požadavku bude tento požadavek odmítnut a nebude obsloužen.

Jedná se o Markovův proces s konečným počtem stavů.



$$\beta = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_0 = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{\beta^k}{k!} + \frac{\beta^n}{n!} \sum_{k=1}^r \left(\frac{\beta}{n}\right)^k \right]^{-1}$$

- Střední počet jednotek (požadavků, zákazníků) ve frontě.

$$EN_f = \sum_{k=1}^r k p_{n+k}$$

- Střední počet jednotek (požadavků, zákazníků) v systému.

$$EN = \sum_{k=1}^{n+r} k p_k$$

- Střední doba čekání ve frontě se řídí předpisem.

$$ET_f = \frac{EN_f}{\lambda}$$

- Střední doba čekání v systému se řídí předpisem.

$$ET = ET_f + \frac{1}{\mu}$$

- Pravděpodobnost, že bude vstupní požadavek obslužen bez zařazení do fronty.

$$p = \sum_{k=0}^{n-1} p_k$$

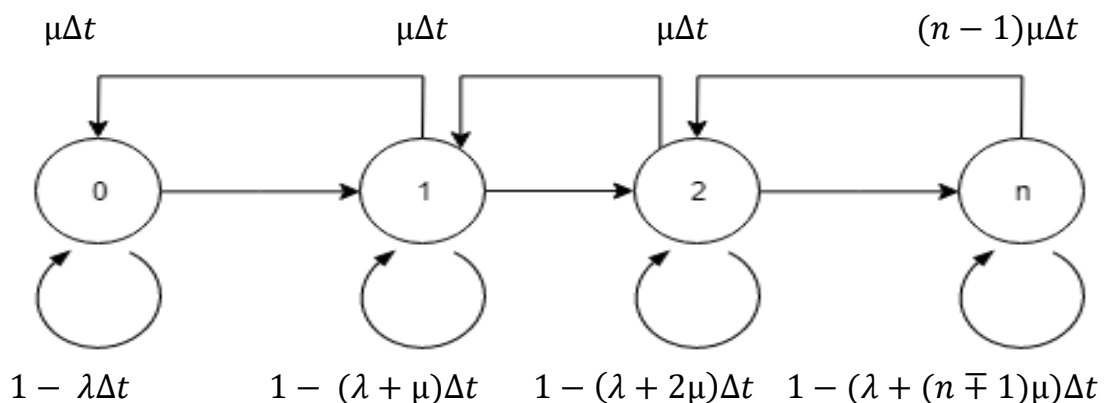
- Průměrný počet obsazených obslužných linek.

$$EU = \sum_{k=1}^n k p_k + n \sum_{k=1}^r k p_{n+k} = \beta (1 - p_{n+r})$$

Systém M/M/N/k (se ztrátami)

Jedná se o systém se vstupním tokem podléhající Poissonovu rozdělení, s exponenciálním rozdělením doby obsluhy, „n“ počtem obslužných linek a omezenou délkou fronty „k“, kde při přetečení délky fronty vstupní požadavek systém opouští jako neobslužen.

Systém M/M/N se ztrátami je Markovův systém s konečnou délkou fronty. Čekání v systému není možné a pravděpodobnost, že systém z kapacitních omezení vstupní požadavek odmítne, se nazývá Erlangův vzorec.



Erlangův vzorec určuje poměr vstupních požadavků, které se snaží být obsluženy, kdy jsou obslužné linky zcela vytížené

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(\frac{1}{n!}\right)$$

Systém M/M/1/k (se ztrátami)

Jedná se o systém se vstupním tokem podléhající Poissonovu rozdělení, s exponenciálním rozdělením doby obsluhy, jednou obslužnou linkou a omezenou délkou fronty „k“, kde při přetečení délky fronty vstupní požadavek systém opouští jako neobsloužen.

*Předpoklady modelu:*

- Existuje pouze jedna obslužná linka.
- Jedná se o otevřený systém.
- Ve frontě může být maximálně  $(k - 1)$  požadavků.
- Frontový režim FIFO.

Ztrátový systém M/M/1/k, je speciální případ modelu M/M/1. Na rozdíl od předešlého systému je zde délka fronty omezena a pokud bude dosažena, tak další vstupní požadavky opouští systém ve stavu neobslouženém.

- Střední doba čekání ve frontě se řídí předpisem.

$$ET_f = ET - \frac{1}{\mu}$$

Systém M/D/1/∞

Jedná se o systém se vstupním tokem podléhající Poissonovu rozdělení, s konstantní dobou obsluhy, jednou obslužnou linkou a neomezenou délkou fronty.

*Předpoklady modelu:*

- Vstupní požadavky tvoří Poissonův proces s parametrem  $\lambda$ .
- Konstantní doba obsluhy je  $1/\mu$ .
- Model obsahuje deterministický čas, respektive doba obsluhy je konstantní.
- Model obsahuje pouze jednu obslužnou linku.

Systém M/D/1/∞ předpokládá, že vstupní tok je Poissonův proces s parametrem  $\lambda$ , zároveň je doba obsluhy konstantní a každý vstupní požadavek je ve velikosti  $1/\mu$ . Doba obsluhy nemá exponenciální rozložení a model obsahuje pouze jednu obslužnou linku.

- Střední počet jednotek (požadavků, zákazníků) ve frontě.

$$ENf = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$



- Střední počet jednotek (požadavků, zákazníků) v systému.

$$EN = EN_f + \rho = \frac{\rho(2 - \rho)}{2(1 - \rho)}$$

- Střední doba čekání ve frontě se řídí předpisem:

$$ET_f = \frac{\rho}{2\mu(1 - \rho)}$$

- Střední doba čekání v systému se řídí předpisem:

$$ET = ET_f + \frac{1}{\mu}$$

#### Systém M/G/1/∞

Jedná se o systém se vstupním tokem podléhající Poissonovu rozdělení, obecnou dobou obsluhy (žádné předpoklady), jednou obslužnou linkou a neomezenou délkou fronty.

#### Předpoklady modelu:

- Vstupní požadavky tvoří exponenciální Poissonovo rozdělení.
- Doba obsluhy je náhodná veličina.

Systém M/G/1/∞ je systémem s Poissonovým vstupním tokem, interval vstupních požadavků je exponenciálním rozložením a náhodnou veličinou jako dobou obsluhy. Pravděpodobnosti změny stavu požadavku v tomto systému také závisí na době, kterou požadavek už strávil uvnitř systému. Nový vstupní požadavek je zařazen do fronty a vyčkává, dokud předchozí požadavek není vyřízen.

- Střední počet jednotek (požadavků, zákazníků) ve frontě.

$$EN_f = \frac{1 + c_v^2}{2} * \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

- Střední počet jednotek (požadavků, zákazníků) v systému.

$$EN = \rho + \frac{1 + c_v^2}{2} * \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

- Střední doba čekání v systému se řídí předpisem:

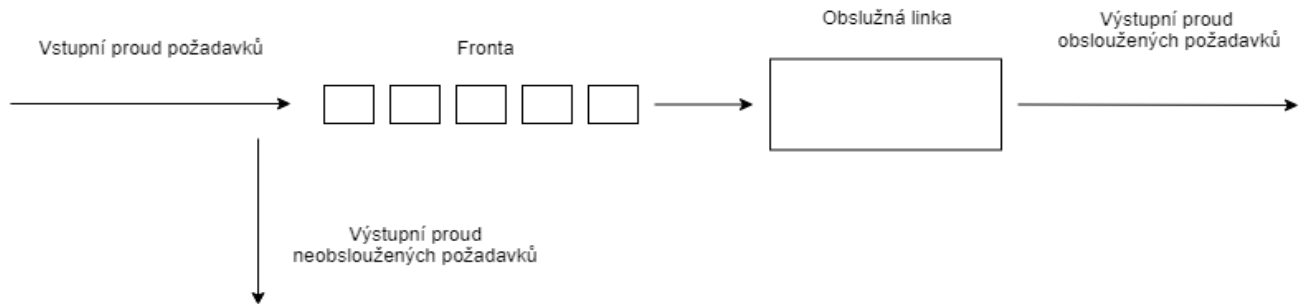
$$ET = \left(1 + \frac{1 + c_v^2}{2} * \frac{\rho}{1 - \rho}\right) ES$$

- Střední doba obsluhy.

$$ES = \frac{\rho}{\lambda}$$

## Uzavřený systém

Na rozdíl od předchozích modelů se zde jedná o Uzavřený systém, který se liší od otevřených tím, že zde existuje omezený vstupní tok. V praxi to znamená, že výstupní požadavek, který projde systémem se do něj opět vrací vstupním tokem jako vstupní požadavek. Čili můžeme říci, že intenzita obsluhy obslužných linek ovlivňuje počet vstupních požadavků.



## Uzavřený Systém M/M/1

Uzavřený systém M/M/1 je z většiny totožný s jeho otevřenou verzí, pouze vyžaduje uzavřený systém místo otevřeného. Vyjádření závislosti intenzity vstupních požadavků s celkovým počtem požadavků v systému, je závislé na intenzitě vstupu požadavků  $\lambda$  otevřeného modelu M/M/1.

### Předpoklady modelu:

- Systém vlastní pouze jednu obslužnou linku.
- Vstupní tok požadavků je popsateľný exponenciálním rozdělením s parametrem  $\lambda$ .
- Doba obsluhy jednoho požadavku je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením s parametrem  $\mu$ .
- Jedná se o uzavřený systém.
- Kapacita fronty je neomezená.
- Metoda zpracování je FIFO.

## Aplikace

Nejběžnější z výše uvedených modelů byly implementovány do samostatné aplikace, abychom získali rychlé analytické řešení těchto modelů a měli efektivní možnost srovnávat analytické řešení s nasimulovanými příklady. Pro výpočet vzorců byla použita knihovna Math, která obsahuje metody provádějící základní numerické, nebo exponenciální operace.

### Základní charakteristika

Aplikace je napsána v programovacím jazyce Java. K tvorbě aplikace bylo použito vývojové prostředí NetBeans.

### Popis aplikace

Účelem aplikace je provádění analytických výpočtů čtyř nejpoužívanějších modelů Teorie front. Jedná se o modely  $M/M/1$ ,  $M/M/N/\infty$ ,  $M/M/N/R$  a  $M/D/1/\infty$ .

Dialogová okna jednotlivých modelů, obsahují textová pole, pro zadávání vstupních dat, a needitovatelná výstupní pole s výsledky, label, kde je v případě nestability systému zobrazena příslušná hláška, proč neproběhl výpočet nebo informace žádost o zadání číselného vstupu, aby výpočet mohl proběhnout a tlačítko „Zavřít“ pro zavření aktuálního dialogového okna.

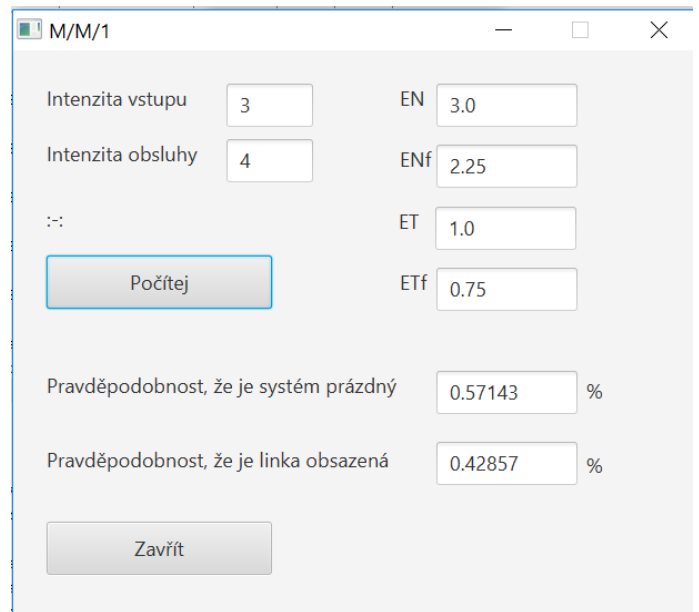
Všechna dialogová okna obsahují výsledky nejzajímavějších výpočtů a to konkrétně:

- $EN_f$ : Střední počet jednotek (požadavků, zákazníků) ve frontě.
- $EN$ : Střední počet jednotek (požadavků, zákazníků) v systému.
- $ET_f$ : Střední doba čekání ve frontě se řídí předpisem.
- $ET$ : Střední doba čekání v systému se řídí předpisem.

## Model M/M/1 & Model M/D/1

Aplikační část pro výpočet zmíněných modelů M/M/1 a M/D/1, se skládá ze dvou textových polí pro zápis vstupních hodnot, konkrétně se jedná o intenzitu vstupu ( $\lambda$ ) a intenzitu obsluhy ( $\mu$ ).

Model M/M/1 mimo jiné obsahuje pole pro výpis pravděpodobnosti toho, že je model obsazený, nebo prázdný.



The screenshot shows a window titled "M/M/1" with the following fields and values:

Input/Label	Value
Intenzita vstupu	3
Intenzita obsluhy	4
EN	3.0
ENf	2.25
ET	1.0
ETf	0.75
Pravděpodobnost, že je systém prázdný	0.57143 %
Pravděpodobnost, že je linka obsazená	0.42857 %

Buttons: Počítej, Zavřít

### Model M/M/N/∞

Aplikační část pro výpočet modelu M/M/1, se skládá ze třech textových polí pro zápis vstupních hodnot, konkrétně se jedná o intenzitu vstupu ( $\lambda$ ) a intenzitu obsluhy ( $\mu$ ) a počtu obslužných linek ( $n$ ).

The screenshot shows a window titled "M/M/N/inf". It contains three input fields on the left: "Intenzita vstupu" with the value 1, "Intenzita obsluhy" with the value 2, and "Počet linek" with the value 1. To the right of these are four empty input fields labeled "EN", "ENf", "ET", and "ETf". At the bottom left, there are two buttons: "Počítej" and "Zavřít".

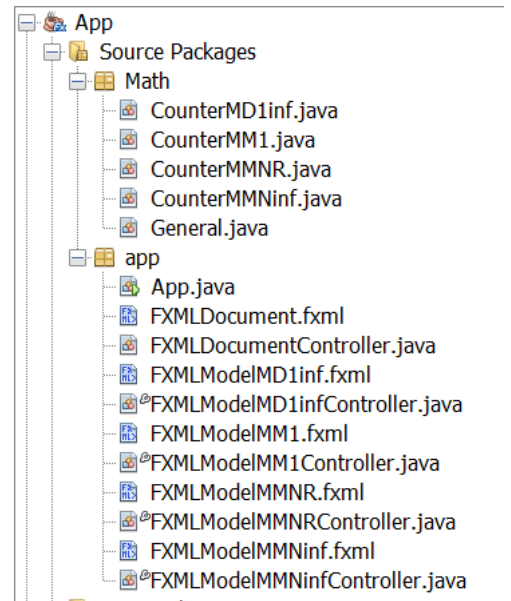
### Model M/M/N/R

Model M/M/N/R mimo jiné obsahuje vstupní pole pro maximální počet míst požadavků ve frontě. Dále obsahuje devět výstupních polí, které slouží k určení pravděpodobnosti toho, že je v systému právě daný počet požadavků. Neboli „p0“ je pravděpodobnost, že je systém prázdný, „p1“ je pravděpodobnost, že se v systému nachází právě jeden požadavek, „p2“ je pravděpodobnost, že v systému jsou právě dva požadavky a tak dále.

The screenshot shows a window titled "M/M/N/R". It contains four input fields on the left: "Intenzita vstupu" with the value 3, "Intenzita obsluhy" with the value 4, "Intenzita linek" with the value 2, and "Míst ve frontě" with the value 3. To the right of these are four empty input fields labeled "EN", "ENf", "ET", and "ETf". On the far right, there are nine empty input fields labeled "p0" through "p8". At the bottom left, there are two buttons: "Počítej" and "Zavřít".

## Adresářová struktura

Adresářová struktura aplikace je rozdělena na výpočetní prvky a dialogové prvky. Dialogové prvky obsahují zobrazení a práci s jednotlivými dialogovými okny a výpočetní prvky obsahují třídy pro specifické výpočty jednotlivých modelů a mimo jiné třídu „general“ obsahující metody společné pro všechny modely.



## Simulace

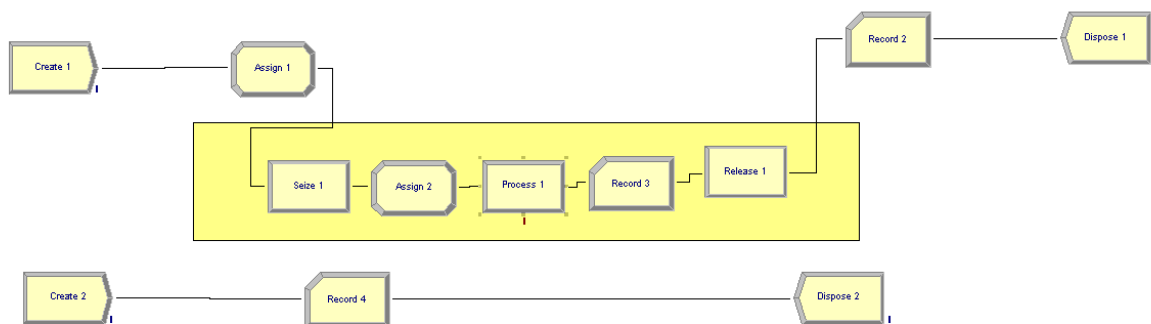
Další částí práce je vypracování simulačních příkladů a jejich následné porovnání s analytickým přístupem. Pro stabilizaci simulací, používáme tisíc provedených replikací a v rámci každé replikace je nasimulován jeden den, kde generování vstupního toku se odehrává exponenciálním rozdělením jednou za minutu. Dále měříme pro nás zajímavé hodnoty což jsou: střední počet jednotek v systému, střední počet jednotek ve frontě, střední dobu čekání v systému a střední dobu čekání ve frontě. Pro měření těchto údajů generuje pomocnou entitu a pro zpřesnění výsledků je tato entita generována konstantně jednou za sekundu. V rámci jedné replikace je vygenerováno necelých devadesát tisíc entit. Mimo již zmíněné monitorujeme stabilitu systému „ $\rho$ “ v části intenzity obsluhy systému. Simulace modelů probíhá na principu zaalokování zdroje, dále zdržení entity v systému o hodnotu intenzity systému „ $\mu$ “ a následném uvolnění zdroje pro vstup další entity do obslužného procesu.

Pro zjednodušení simulace používáme pro intenzitu vstupního toku hodnotu  $\lambda = 1$  a hodnotu intenzity obsluhy  $\mu = 1.3$ , stabilita systému neboli „ $\rho$ “ se v tomto případě rovná podílu těchto hodnot:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{1.3} \cong 0.76923$$

## Simulované modely

M/M/1



### Vstupní hodnoty:

- Intenzita vstupu:  $\lambda = 1$
- Intenzita obsluhy:  $\mu = 1.3$

### Výstupní hodnoty:

- Střední počet jednotek ve frontě:  $EN_f = 2.5498$
- Střední počet jednotek v systému:  $EN = 3.3194$
- Střední doba čekání ve frontě:  $ET_f = 2.5353$

- Střední doba čekání v systému:  $ET = 3.3043$

M/M/N/ $\infty$

Vstupní hodnoty:

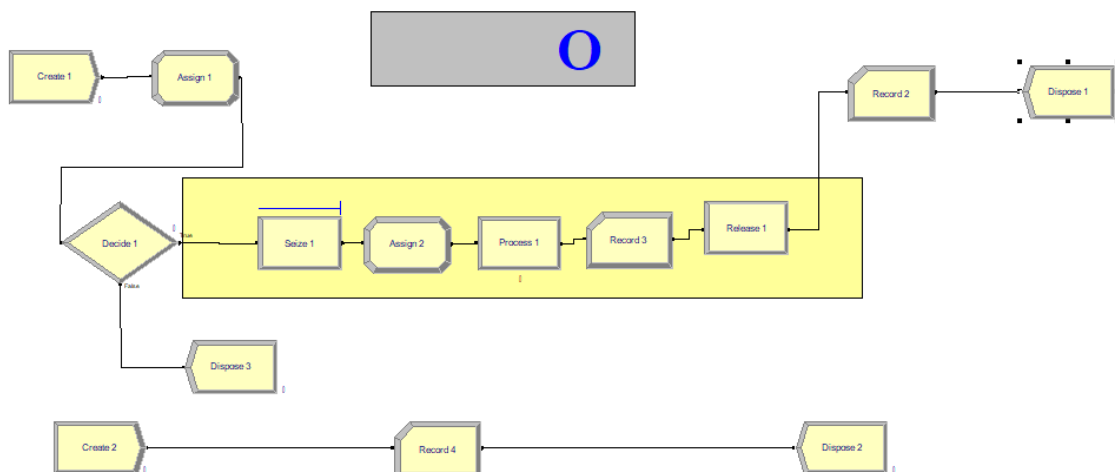
- Intenzita vstupu:  $\lambda = 1$
- Intenzita obsluhy:  $\mu = 1.3$
- Počet obslužných linek:  $n = 2$

Výstupní hodnoty:

- Střední počet jednotek ve frontě:  $EN_f = 0.1329$
- Střední počet jednotek v systému:  $EN = 0.9032$
- Střední doba čekání ve frontě:  $ET_f = 0.1299$
- Střední doba čekání v systému:  $ET = 0.9009$

M/M/N/R

V rámci problematiky simulace modelu, není obecně možno zajistit konstantní frontu při náhodných vstupech exponenciálního rozdělení vstupního proudu, tudíž bylo přistoupeno k tomu, že entity nad rámec fronty jsou zahazovány ze systému pryč, výsledky se liší od analytického řešení přibližně o 0.1, což k rozdílu použité metodiky přístupu (simulačního a analytického) lze považovat za přijatelné.



Vstupní hodnoty:

- Intenzita vstupu:  $\lambda = 1$
- Intenzita obsluhy:  $\mu = 1.3$
- Počet obslužných linek:  $n = 2$



- Kapacita fronty:  $r = 3$

*Výstupní hodnoty:*

- Střední počet jednotek ve frontě:  $EN_f = 0.1124$
- Střední počet jednotek v systému:  $EN = 0.8762$
- Střední doba čekání ve frontě:  $ET_f = 0.1110$
- Střední doba čekání v systému:  $ET = 0.8812$

$M/D/1/\infty$

*Vstupní hodnoty:*

- Intenzita vstupu:  $\lambda = 1$
- Intenzita obsluhy:  $\mu = 1.3$

*Výstupní hodnoty:*

- Střední počet jednotek ve frontě:  $EN_f = 1.2833$
- Střední počet jednotek v systému:  $EN = 2.0531$
- Střední doba čekání ve frontě:  $ET_f = 1.2386$
- Střední doba čekání v systému:  $ET = 2.0461$

Srovnání analytického přístupu a simulačního

	Analytický přístup				Simulační přístup			
	EN	EN <sub>f</sub>	ET	ET <sub>f</sub>	EN	EN <sub>f</sub>	ET	ET <sub>f</sub>
M/M/1	3.3333	2.564	3.3333	2.564	3.3194	2.5498	3.3043	2.5353
M/M/N/ $\infty$	0.9027	0.1335	0.9027	0.1335	0.9032	0.1329	0.9009	0.1299
M/M/N/R	0.7900	0.2099	0.9792	0.2099	0.8762	0.1124	0.8812	0.1110
M/D/1/ $\infty$	2.0512	1.2820	2.0512	1.2820	2.0531	1.2833	2.0461	1.2386

Ze souhrnné tabulky analytických provedení výpočtů a simulací stejných modelů jsme zjistili, že až na případ omezené fronty, kde je simulace velmi problematická jsou výsledky z obou typů přístupu téměř totožné a čili tedy můžeme prohlásit, že simulace daných modelů potvrdila pravdivost vzorců použitých při analytickém řešení.

## Závěr

Na základě zadání bakalářské práce byla popsána teoretická část, která slouží jako úvod do problematiky teorie front, popisující vznik teorie front a její významné osobnosti, dále používané typy rozdělení pro výpočty pravděpodobnostních úloh.

V další části se jedná o popis Kendallovy klasifikace, a to konkrétně informace o autorovi klasifikace a její popis zahrnující například jak parametry modelů, systémy obslužných jednotek tak i pravidla jednotek pro odchod z fronty, kde například pravidlo FIFO, je nejběžnější používané pravidlo používané všude kolem nás.

Dále práce obsahuje podrobný popis jednotlivých nejběžnějších modelů, popis uzavřeného a otevřeného systému.

Analytická část praktické stránky práce obsahuje Java aplikaci sloužící pro analytické výpočty nejběžnějších modelů. Aplikace nám ve všech případech spočítá střední počet jednotek v systému, střední počet jednotek ve frontě, střední dobu čekání v systému a střední dobu čekání ve frontě. Dále například v pro nás zajímavém modelu  $M/M/1$  určí pravděpodobnost obsazenosti systému a v modelu  $M/M/N/R$  určí pravděpodobnosti konkrétních stavů neboli pravděpodobnost, že je systém prázdný, že je v něm pouze jeden požadavek, pouze dva požadavky a tak dále.

Jako poslední, práce obsahuje popis simulačního přístupu k modelům užívaných v analytické Java aplikaci, jsou zde popsány simulace a jejich výsledky a následné porovnání s analytickými výpočty. Práce obsahuje též vypracované příklady pro každý z těchto modelů.

## Použitá literatura

- [1] PLUSADMIN. *Agner Krarup Erlang* [online]. 1997-05-01 [cit. 2019-04-04].  
Dostupné z:  
<<https://plus.maths.org/content/os/issue2/erlang/index?fbclid=IwAR1qlrQPylalajvX5MTAYD1c2rnGRriyMXzJOfvCw-UmvynAT6qo3f97yY>>
- [2] KINGMAN, John. *David George Kendall. 15 January 1918 — 23 October 2007*. Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society [online]. 2009, 55, 121-138 [cit. 2019-04-04]. DOI: 10.1098/rsbm.2008.0017. ISSN 0080-4606. Dostupné z:  
<<http://www.royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsbm.2008.0017>>
- [3] O'CONNOR, J. J. a ROBERTSON, E. F. *Andrei Andreyevich Markov* [online]. ©2006 [cit. 2019.04.04]. Dostupné z:  
<<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Markov.html>>
- [4] O'CONNOR, J. J. a ROBERTSON, E. F. *Siméon Denis Poisson* [online]. ©2002 [cit. 2019.04.04]. Dostupné z:  
<<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Poisson.html>>
- [5] KUMAR, Dharmendra. *Queueing Theory* [online]. [cit. 2019-04-04]. Dostupné z:  
<[https://www.academia.edu/8053038/Queueing\\_Theory-1\\_Queueing\\_Theory?fbclid=IwAR3JIZPDjg1HmQQXTj\\_m3wigx9I2RuBpt8lLuCirfHVAzv1Sn4HG9daqBbl](https://www.academia.edu/8053038/Queueing_Theory-1_Queueing_Theory?fbclid=IwAR3JIZPDjg1HmQQXTj_m3wigx9I2RuBpt8lLuCirfHVAzv1Sn4HG9daqBbl)>
- [6] ADAN, Ivo a RESING, Jacques. *Queueing Theory* [online]. 2002-02-28 [cit. 2019-04-04]. Dostupné z:  
<[https://www.academia.edu/23022961/Queueing\\_Theory](https://www.academia.edu/23022961/Queueing_Theory)>
- [7] NAVARA, Mirko. *Markovovy řetězce* [online]. 2019-01-08 [cit. 2019-04-04].  
Dostupné:  
<[http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/Markov\\_print.pdf?fbclid=IwAR0cQPLG0cZbeFrOf8QinrPN8R2nXyT1uq|BRJcoYziKzx5Rt3XD-ZrJLls](http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/Markov_print.pdf?fbclid=IwAR0cQPLG0cZbeFrOf8QinrPN8R2nXyT1uq|BRJcoYziKzx5Rt3XD-ZrJLls)>
- [8] HEBÁK, Petr. *Vícerozměrné statistické metody*. 2004. ISBN 80-7333-025-3.

[9] HEBÁK, Petr, Jiří HUSTOPECKÝ a Ivana MALÁ. *Vícerozměrné statistické metody*. [2]. Praha: Informatorium, 2005. ISBN 80-7333-036-9.

[10] LINDA, Bohdan. *Stochastické metody operačního výzkumu*. Bratislava: Statis, 2004. ISBN 80-85659-33-6.