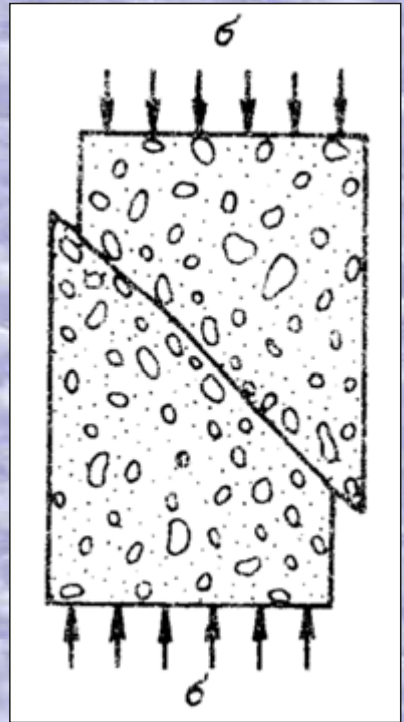
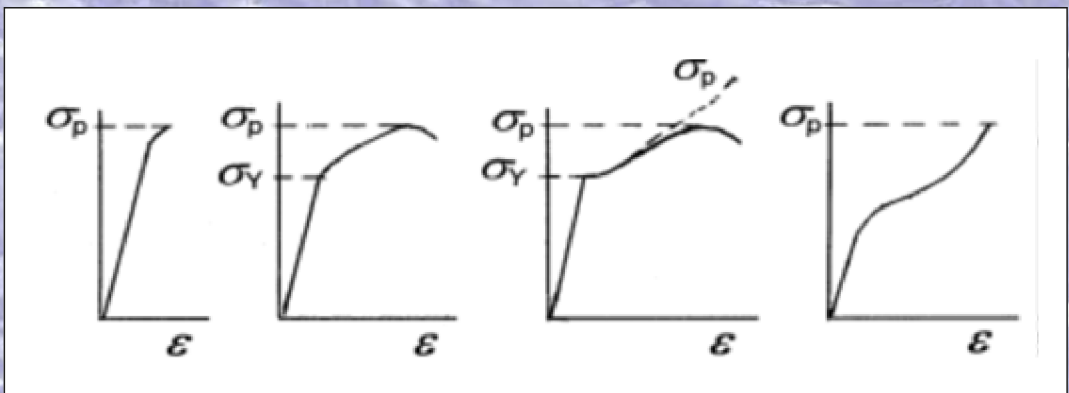


Jaroslav Menčík



Aplikovaná mechanika materiálů



Jaroslav Menčík

Aplikovaná mechanika materiálů

Univerzita Pardubice, 2019

Tato publikace neprošla jazykovou korekturou.

Recenzenti:

Prof. Dr. Ing. Libor Beneš
Doc. Ing. Iva Petříková, PhD.

© prof. Ing. Jaroslav Menčík, CSc., 2019

ISBN 978-80-7560-226-8 (tisk)

ISBN 978-80-7560-227-5 (pdf)

Kniha je volně přístupná na <https://hdl.handle.net/10195/72947> nebo po zadání názvu do vyhledavače Google.

Aplikovaná mechanika materiálů

Konstruktor či projektant musí mít dobré znalosti o chování různých materiálů při zatížení. K tomu přispívá v patnácti kapitolách i tato kniha. První kapitola shrnuje základní pojmy: napětí, přetvoření a deformační energie. Druhá kapitola stručně porovnává metodu konečných prvků a metody analytické pro stanovení napětí a deformací v konstrukcích. Třetí kapitola uvádí kritéria pro posuzování porušení nebo vzniku trvalých deformací. Následuje kapitola o plastickém deformování. Pozornost je dále věnována napětím, která vznikají při změnách teploty. Kapitola šestá pojednává o koncentraci napětí v místech náhlých změn tvaru, kapitola sedmá je o únavě materiálů. Následují kapitoly o lomové mechanice, analýze lomů a o mechanice viskoelastických látek, kde deformace závisí na časovém průběhu zatížení. Další kapitola je věnována součástem se speciálními povrchovými vrstvami pro dosažení vyšší životnosti nebo specifických vlastností. Další kapitoly podávají základy mechaniky kompozitních materiálů, elastomerních materiálů a velmi poddajných těles, včetně textilních. Následují metody optimalizace tvaru těles. Poslední kapitola je věnována použití teorie podobnosti a rozměrové analýzy pro zvýšení efektivity vývoje a konstruování.

Kniha obsahuje četné obrázky i příklady, které ilustrují použití popisovaných metod.

Kniha je volně přístupná na <https://hdl.handle.net/10195/72947>, nebo po zadání jejího názvu do vyhledávače Google.

Poděkování

Autor chce vyslovit poděkování svému učiteli, profesoru Ing. Cyrilu Höschlovi, který v něm během studia na Vysoké škole strojní a textilní v Liberci vzbudil náklonnost k pružnosti a pevnosti.

Za péči, věnovanou pročtení rukopisu, a za cenné připomínky děkuje autor oběma recenzentům, kterými byli:

docentka Ing. Iva Petříková, PhD., z Technické univerzity v Liberci, a profesor Dr. Ing. Libor Beneš z ČVUT v Praze.

Applied mechanics of materials

Components and structures in mechanical and civil engineering are made of various materials, and design engineers must have a good knowledge on their mechanical properties. This book contributes in this area. The first chapter summarises the principal terms: stress, strain, and strain energy. The second chapter compares the finite element method and analytical methods for the determination of stresses and deformations. Chapter 3 presents the principal criteria for fracture and for the onset of permanent deformations. The following chapter is devoted to plastic deforming. Attention is also paid to thermal stresses. Chapter 6 deals with stress concentration at sudden changes of shape. Chapters on fracture mechanics and analysis of fractures follow. Chapter 10 explains the mechanics of viscoelastic materials, whose deformations depend on the duration and time course of loading. The following chapters are devoted to components with treated or coated surfaces, to the properties of composite materials and of elastomeric materials. The methods of shape optimisation for improvement of strength and material economy are the topic of Chapter 14. The last chapter is devoted to the theory of similarity and dimensional analysis and their use for increasing the design effectiveness.

The book contains numerous figures and examples, which illustrate the use of the described methods.

The book is accessible freely at <http://hdl.handle.net/10195/72948>, or after writing its name into Google.

OBSAH

1	Napětí – přetvoření – deformační energie	9
1.1	Napětí	9
1.2	Rovinná napjatost, Mohrova kružnice	10
1.3	Trojosá napjatost	16
1.4	Přetvoření	17
1.5	Práce zatěžujících sil a energie napjatosti	20
2	Metoda konečných prvků, metody analytické a numerické	23
2.1	Metoda konečných prvků	23
2.2	Použití numerických a analytických metod pro řešení úloh mechaniky	26
3	Kritéria porušení, pevnostní hypotézy	31
3.1	Křehký lom	31
3.2	Vznik plastických deformací	32
4	Základy plasticity	35
4.1	Materiálové vlastnosti	36
4.2	Soustava prutů zatížených tahem	39
4.3	Stanovení deformací v pružnoplastickém stavu	41
4.4	Situace po odlehčení	42
4.5	Pružnoplastický ohyb	44
4.6	Pružnoplastický stav tlustostěnné válcové tlakové nádoby	48
4.7	Kritérium plastického tečení při víceosé napjatosti	51
4.8	Zvyšování únavové odolnosti kovových součástí	52
5	Teplotní napětí	54
5.1	Základní vztahy	54
5.2	Postupy zvyšování pevnosti tepelným zpracováním	58
6	Koncentrace napětí	64
6.1	Úvod	64

6.2	Napětí v okolí otvorů	67
6.3	Napjatost při koncentrovaném kontaktu	70
7	Odezva při střídavém zatěžování – únava	74
7.1	Úvod	74
7.2	Změna mechanických vlastností	74
7.3	Vznik a růst únavových trhlin	75
7.4	Doba do porušení únavou	76
7.5	Činitele ovlivňující únavovou životnost	78
7.6	Kumulace poškození	79
8	Základy lomové mechaniky	81
8.1	Situace v tělesech s trhlínami, základy lomové mechaniky	81
8.2	Růst únavových trhlin	88
8.3	Zvyšování odolnosti proti šíření únavových trhlin	90
9	Analýza lomů	93
10	Základy mechaniky viskoelastických látek	98
10.1	Ideálně elastický materiál	98
10.2	Ideálně viskózní materiál	99
10.3	Maxwellovo těleso	100
10.4	Kelvinovo-Voigtovo těleso	103
10.5	Standardní lineární těleso	105
10.6	Burgersovo těleso	106
10.7	Určování deformací při obecném průběhu zatížení	108
10.8	Odezva viskoelastických látek na střídavé zatěžování	109
11	Mechanika součástí s upraveným povrchem	112
11.1	Úvod	112
11.2	Napětí způsobená rozdíly teplotních roztažností	113
11.3	Napětí způsobená membránovými silami	116
11.4	Napětí v povlacích na zakřivených plochách	118
11.5	Poměry u okraje povlaku	118

11.6	Pružnoplastické deformování	120
11.7	Lomová mechanika rozhraní	124
11.8	Zjišťování mechanických vlastností povlaků	132
12	Základy mechaniky kompozitních materiálů	136
12.1	Úvod	136
12.2	Kompozity s dlouhými vlákny	137
12.3	Kompozity s krátkými vlákny	143
12.4	Rozptyl vlastností vláken	146
12.5	Porušení kompozitů	147
12.6	Elastická odezva víceosé napjatosti ortotropních materiálů	148
12.7	Vícevrstvé kompozity, lamináty	150
13	Mechanika elastomerních materiálů a velmi poddajných těles	153
13.1	Mechanika elastomerních materiálů	153
13.2	Popis odezvy elastomerních (hyperelastických) materiálů	155
13.3	Textilní vlákna a konstrukce	157
13.4	Membránové konstrukce	158
14	Optimalizace tvaru a rozměrů součástí a konstrukcí	161
14.1	Součásti a konstrukce konstantních napětí	161
14.2	Optimalizace rozsáhlých konstrukcí	167
14.3	Optimalizace u složitějších tvarů a zatížení	168
14.4.	Stanovení potřebných tolerancí	172
15	Rozměrová analýza a teorie podobnosti	182
15.1	Rozměrová analýza	182
15.2	Podobnost	184
15.3	Další doporučení	185
15.4	Omezení principu podobnosti	187
15.5	Příklady bezrozměrových veličin	189
	Rejstřík	192

Předmluva

Strojní, stavební i další součásti a konstrukce se vytvářejí z různých materiálů. Konstruktor či projektant musí mít dobré znalosti o jejich chování při zatížení. Tato kniha chce pomoci při volbě materiálu, tvaru a rozměrů. Chce připomenout, na co by neměl při návrhu zapomenout, pokud se chce vyvarovat nepříjemných a závažných chyb. Samotný výpočet napětí nestačí; je nutné chápat souvislosti. Autor předpokládá, že čtenář absolvoval nebo navštěvuje základní kurs pružnosti a pevnosti, takže již určité znalosti má. Tato knížka mu připomene základní pojmy, znovu ukáže zajímavé vlastnosti Mohrovy kružnice, včetně jejího využití při analýze lomů, a připomene, na čem závisí teplotní napětí a jak je lze ovlivnit. Také vysvětlí, jak dochází k únavě a lomu nebo k plastickým deformacím. Ukáže i význam koncentrátorů napětí včetně některých nečekaných důsledků. Dále chce čtenáři poskytnout stručný úvod do novějších oblastí mechaniky materiálů, jako je plasticita, lomová mechanika, mechanika viskoelastických látek, mechanika polymerních a kompozitních materiálů, a součástí s povrchovými úpravami.

V knize je také stručně vysvětlena podstata metody konečných prvků, která dnes představuje univerzální nástroj pro analýzu složitých součástí a konstrukcí. Je naznačen i obecný postup při optimalizaci součástí a konstrukcí a vysvětlen pojem robustní design a důležitost stanovení tolerancí při návrhu. V závěrečné části jsou ukázány výhody použití teorie podobnosti a rozměrové analýzy.

Základní zákonitosti jsou vyjádřeny prostřednictvím jednoduchých vzorců a k pochopení textu stačí znalost středoškolské matematiky. Text je doprovázen četnými obrázky, jednoduchými řešeními příklady a soupisem literatury.

Autor by si přál, aby čtení této knížky přinášelo čtenářům stejné potěšení a užitek, jako jemu přinášelo její psaní.

1. Napětí - přetvoření - deformační energie

1.1 Napětí

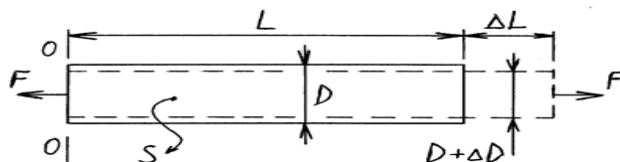
Zatížení vyvolává v součásti vnitřní síly a napětí. Ta jsou definovaná jako síla připadající na jednotku plochy, ve které působí. Vnitřní síly určujeme v obecném případě **metodou myšleného řezu**: součást v daném místě přerušíme fiktivním řezem a přiložíme do něj normálové a smykové síly, a ohybové a krouticí momenty. Jejich velikosti dostaneme z **rovnic rovnováhy všech sil a momentů**, působících na oddělenou část [1 - 4].

Rozlišujeme **napětí normálové** σ , které působí ve směru normály k ploše řezu, a **napětí smykové** neboli **tečné** τ ve směru tečny k této ploše. Obě napětí mají stejný rozměr (N/m², resp. Pa, popřípadě MPa nebo GPa); jejich účinek je však rozdílný. Normálové napětí považujeme za kladné (tahové), působí-li směrem ven z vyšetřovaného řezu a snaží se od sebe odtahovat sousední vrstvy atomů zatíženého materiálu. Tlakové napětí (záporné) se snaží vrstvy atomů k sobě přitlačovat. Smykové napětí se snaží tyto vrstvy po sobě posouvat. Obě napětí ohrožují součást rozdílným způsobem. Normálové tahové napětí přispívá ke křehkému porušení odtržením, smykové napětí podporuje vznik plastických deformací.

V zatížené součásti působí téměř vždy napětí normálová i smyková, i když to na první pohled není zřejmé. Máme-li například dlouhou tyč zatíženou tahovou silou (obr. 1.1), víme ihned, že v místech vzdálených od konců působí normálové tahové napětí o velikosti

$$\sigma_0 = F / S, \quad (1.1)$$

kde F je osová síla a S je plocha průřezu. Mlčky jsme totiž předpokládali řez kolmý k ose tyče (ve vzorci je to naznačeno indexem 0). Jak to bude u šikmého řezu?



Obr. 1.1. Tyč namáhaná tahem – hlavní rozměry a deformace.

Situace je znázorněna na obr. 1.2. Šikmý řez je pootočen vůči kolmému řezu o úhel α . Ve směru normály k němu působí síla normálová, N , a v rovině řezu působí síla tečná, T . Obě síly jsou v rovnováze s osovou silou F , takže platí

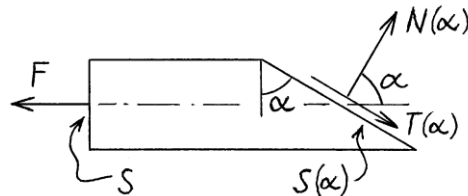
$$N(\alpha) = F \cos \alpha, \quad T(\alpha) = F \sin \alpha. \quad (1.2)$$

Tyto síly vyvozují napětí, a to normálové a tečné (smykové). Ta dostaneme tak, že sílu N nebo T vydělíme plochou šikmého řezu, ve kterém působí. Tato plocha, S_α , je vázána s plochou S kolmého řezu vztahem

$$S_\alpha = S / \cos \alpha. \quad (1.3)$$

Kombinací vztahů (1.2) a (1.3) dostaneme s přihlédnutím ke vztahu (1.1) napětí

$$\sigma(\alpha) = N_\alpha / S_\alpha = \sigma_0 (\cos \alpha)^2, \quad \tau(\alpha) = T_\alpha / S_\alpha = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1.4a, b)$$



Obr. 1.2. Síly v šikmém řezu.

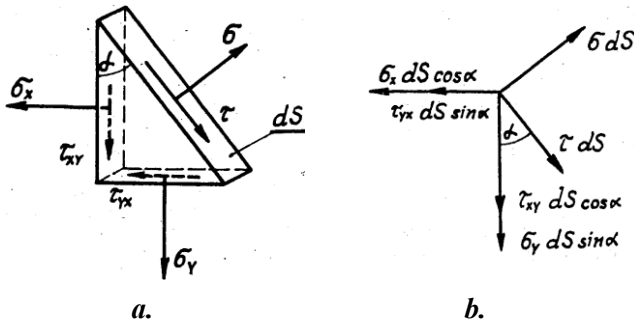
1.2 Rovinná napjatost, Mohrova kružnice

Podívejme se nyní na napětí v šikmém řezu při obecné rovinné napjatosti, kdy ve směrech x, y působí normálová napětí σ_x a σ_y a smyková napětí τ_{xy} a τ_{yx} . Index u normálového napětí vyjadřuje směr napětí i směr normály k příslušné ploše. U smykového napětí vyjadřuje první index směr normály k ploše, kde toto napětí působí, a druhý index označuje jeho směr (smykové napětí může mít různé směry).

Situace v nekonečně malém elementu je znázorněna na obr. 1.3. Napišeme-li rovnici rovnováhy sil do směru normály k šikmému řezu a do směru tečného, dostaneme po vykrácení ploch (s přihlédnutím ke vztahům mezi velikostmi šikmé plochy dS_α a svislé a vodorovné plochy dS_x a dS_y) a po úpravě následující výrazy:

$$\sigma(\alpha) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \quad (1.5a)$$

$$\tau(\alpha) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (1.5b)$$

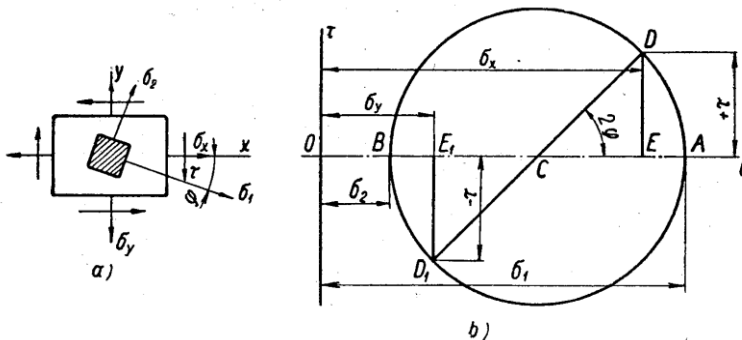


Obr. 1.3. Rovinná napjatost – napětí v šikmém řezu.
a – složky napětí, b – rovnováha sil.

Při odvozování těchto vztahů jsme využili **zákon sdružených smykových napětí**, který říká, že pokud v určitém bodě působí v nějaké rovině smykové napětí, pak stejně velké smykové napětí působí i v rovině k ní kolmé. Tato napětí vždy směřují buď ke společné hraně obou rovin, nebo od ní. Například pro směry x, y platí

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} . \quad (1.6)$$

Pomocí vztahů (1.5a), (1.5b) můžeme vypočítat velikost normálového a smykového napětí v libovolně orientovaném řezu, známe-li složky napětí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ve zvoleném souřadném systému x, y . Dvojici obou hodnot $\sigma(\alpha), \tau(\alpha)$ můžeme znázornit bodem v rovině σ, τ . Zakreslíme-li tyto body pro všechny možné úhly α , vznikne kružnice (obr. 1.4), která se podle svého tvůrce nazývá Mohrova [1 – 4]. Dříve se užívala pro nalezení charakteristických hodnot napětí geometrickou cestou. To dnes není nutné, protože každý počítačový program pro analýzu napětí



Obr. 1.4. Mohrova kružnice. a) složky napětí, b) konstrukce Mohrovy kružnice

může stanovit složky napětí v libovolném řezu. Přesto zůstává Mohrova kružnice velmi důležitým nástrojem, neboť dává názornou představu o vzájemných vztazích mezi složkami napětí v různých směrech a o charakteru namáhání. Umožňuje také snadno posoudit bezpečnost součástí z křehkého nebo tvárného materiálu, a vhodně orientovat tenzometrické snímače pro experimentální určování napětí v součástech a konstrukcích, jak uvidíme dále. Je užitečná i při analýze lomů. Podívejme se na ni proto blíže.

Mohrova kružnice má střed v bodě $C [(\sigma_x + \sigma_y)/2; 0]$ a poloměr

$$\bar{R} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.7)$$

Vzájemná velikost normálového a smykového napětí závisí na orientaci myšleného řezu α . Dvěma řezům, které spolu svírají úhel α , odpovídá v Mohrově kružnici pootočení paprsku o úhel 2α . Dvěma navzájem kolmým řezům (90°) tedy v této kružnici odpovídá přímý úhel ($2 \times 90 = 180^\circ$) a koncové body průměru. Při jejím kreslení vynášíme smykové napětí jako kladné, otáčí-li vyšetřovaným elementem ve smyslu otáčení hodinových ručiček, a jako záporné, otáčí-li elementem v opačném směru. Vždycky existují (nejméně) dva navzájem kolmé směry, ve kterých má normálové napětí extrémní hodnotu (maximální nebo minimální) a smykové napětí je rovno nule (obr. 1.4). Tyto směry se nazývají **hlavní směry** a napětí v nich působící se nazývají **hlavní napětí** a označují se σ_1, σ_2 . Jako σ_1 se označuje vždy to hlavní napětí, které je na Mohrově kružnici nejvíce vpravo. **Maximální smykové napětí** τ_{\max} působí v řezech svírajících se směry hlavních napětí úhel 45° ; na Mohrově kružnici tomu odpovídá pootočení paprsku o 90° . Platí:

$$\sigma_{1,2} = \bar{C} \pm \bar{R} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.8a,b)$$

$$\tau_{\max} = \bar{R} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (1.8c)$$

Úhel mezi rovinou řezu, ve kterém působí napětí σ_x, τ_{xy} , a rovinou hlavní, ve které působí napětí σ_1 , se určí ze vztahu

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (1.9)$$

Znalost hlavních směrů je důležitá pro orientaci výztuže, např. ocelových prutů v betonu nebo vláken v kompozitním materiálu, a také pro orientaci tenzometrických snímačů.

Konstrukci Mohrovy kružnice ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad.

V souřadném systému x, y působí normálová napětí $\sigma_x = 120$ MPa, $\sigma_y = 60$ MPa, a smykové napětí $\tau_{xy} = 40$ MPa. Určete velikosti hlavních napětí σ_1 a σ_2 a jejich směry.

Řešení. Do vzorců (1.7) – (1.9) dosadíme zadané hodnoty a dostaneme:

$$\sigma_1 = \frac{120+60}{2} + \sqrt{\left(\frac{120-60}{2}\right)^2 + 40^2} = 90 + 50 = 140 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 90 - 50 = 40 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \bar{R} = \sqrt{\left(\frac{120-60}{2}\right)^2 + 40^2} = 50 \text{ MPa}$$

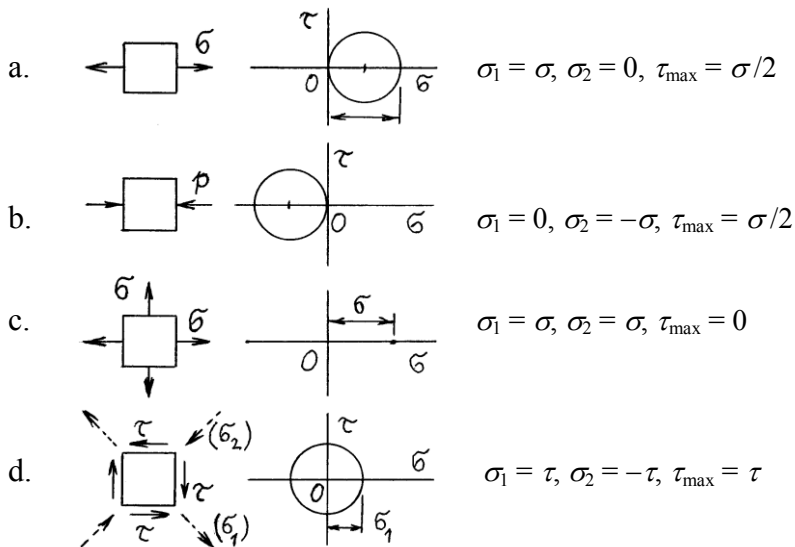
$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \times 40}{120 - 60} = 26,56^\circ \text{ .}$$

Konstrukce Mohrovy kružnice je zřejmá z obr. 1.4.

Nyní se podíváme na několik jednoduchých, ale důležitých případů. Pro každý je nakreslen element s působícím zatížením a Mohrova kružnice, a jsou uvedeny hodnoty hlavních napětí a maximálního smykového napětí.

Prostý (jednoosý) tah (obr. 1.5a)

Ve vyšetřovaném řezu působí normálové napětí σ , ale žádné smykové napětí. To znamená, že zadané napětí σ je hlavní napětí σ_1 . V kolmém směru nepůsobí žádné napětí, takže odpovídající bod (0,0) je druhým bodem průměru Mohrovy kružnice a představuje druhé hlavní napětí σ_2 . Maximální smykové napětí odpovídá poloměru této kružnice (tj. $\tau_{\max} = \sigma/2$) a je pootočené proti směru napětí σ o 45° .



Obr. 1.5. Mohrovy kružnice – příklady.

Jednoosý tlak (obr. 1.5b)

Situace je podobná jako v předchozím případě, ale kružnice je nyní v polovině záporných napětí. Pro hlavní napětí nyní platí $\sigma_2 = -p$ a $\sigma_1 = 0$ (odpovídající bod Mohrovy kružnice pro σ_1 leží více vpravo).

Izotropní tah (obr. 1.5c)

Hodnoty napětí ve dvou navzájem kolmých směrech jsou stejné, a smyková napětí jsou rovna nule. Oba body splynuly a Mohrova kružnice zdegenerovala na pouhý bod. V celé této rovině nepůsobí ani žádné smykové napětí ($\tau = 0$). Skutečná situace je ale složitější, jak uvidíme v oddílu o trojosé napjatosti.

Prostý smyk (obr. 1.5d)

V tomto případě leží střed Mohrovy kružnice v počátku souřadného systému. (V označených řezech elementu totiž nepůsobí žádné normálové napětí, ale pouze napětí smyková, jedno kladné a druhé záporné). V jednom řezu pootočeném o 45° působí tahové napětí o velikosti $\sigma_1 = \tau$, a v řezu kolmém působí tlakové napětí o velikosti $\sigma_2 = -\tau$. Napětí σ_1 , σ_2 jsou hlavní.

Takováto napjatost je například v tyči kruhového průřezu, zatížené **krutem**. Tyč

z křehkého materiálu praskne v takovém případě účinkem tahových napětí, o čemž svědčí šikmá lomová plocha (obr. 1.6). Podobně při ručním ždímání mokrého prádla kroucením z něj vytéká voda díky tlakovým napětím působícím v pootočených řezech. V minulosti, než byla vyvinuta spolehlivá bezpečnostní lyžařská vázání, bývala dosti častým úrazem lyžařů torzní fraktura holenních kostí.

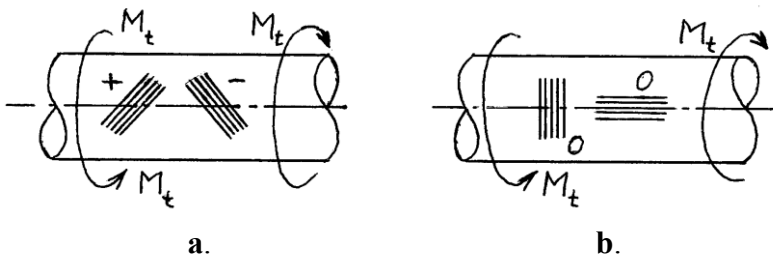


Obr. 1.6. Torzní lom tyče z křehkého materiálu

Jak uvidíme později, plastické deformace vznikají, jestliže maximální smykové napětí dosáhne hodnotu meze kluzu ve smyku; plastické tečení probíhá vzájemným skluzem vrstev materiálu ve směru tohoto napětí. To lze někdy vidět na pásu z měkké oceli zatíženém osovým tahem. Při plastickém tečení se u okrajů pásu objeví soustavy tenkých čar skloněných k ose pásu pod úhlem 45° (tzv. Lüdersovy čáry), které vznikly zmíněnými skluzy v materiálu účinkem smykových napětí.

Poznámka. Je-li potřeba měřit krouticí moment v hřídeli pomocí tenzometrických snímačů, je nutno tyto snímače orientovat do směrů největších normálových napětí, tj. pod úhlem 45° k ose hřídele (obr. 1.7a). Kdyby byly orientovány ve směru osy nebo k ní kolmé (obr. 1.7b), neměřili bychom nic, protože reagují pouze na změnu délek, nikoliv úhlů! Uspořádání dvou snímačů podle obr. 1.7a, kdy jeden je namáhán tahem a druhý tlakem, zdvojnásobuje citlivost měření a navíc kompenzuje vliv změn teploty.

Znalost Mohrovy kružnice je užitečná i při analýze porušení, jak uvidíme později.

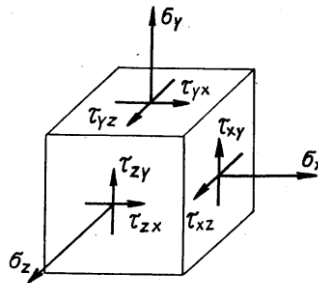


Obr. 1.7. Hřídel zatížený krouticím momentem a tenzometrické snímače.

a - správná orientace snímačů ve směrech hlavních napětí, b - tyto snímače nic neměří.

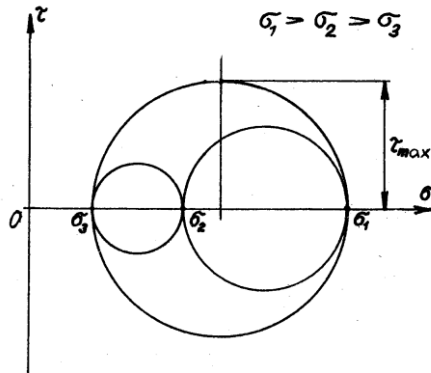
1.3 Trojosá napjatost

Ukázali jsme Mohrovu kružnici pro napětí působící v rovině x, y . Podobně ale mohou působit normálová i smyková napětí v rovině x, z a v rovině y, z . Každá napjatost je obecně trojosá (obr. 1.8). V souřadném systému x, y, z existují tři složky normálových napětí, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, a šest složek napětí smykových: $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$, a τ_{zx}, τ_{xz} . Pro charakterizování smykových napětí se užívají dva indexy; první označuje směr normály k ploše, ve které smykové napětí působí, a druhý index udává směr smykového napětí. Takovéto rozlišení je nutné; na obrázku vidíme, že na ploše s normálou ve směru x může působit smykové napětí ve směru y , ale i z . Normálové napětí působí vždy ve směru normály, proto pro ně stačí jeden index (v teoretické pružnosti se někdy užívají dva, vždy stejné, např. σ_{xx}). K popisu napjatosti v určitém bodě je obecně zapotřebí devět složek napětí. S ohledem na zákon sdružených smykových napětí platí $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ a $\tau_{zy} = \tau_{xz}$, takže stačí šest hodnot: tři pro normálová a tři pro smyková napětí [1 – 4].



Obr. 1.8. Trojosá napjatost. Souřadný systém a složky napětí.

Některé složky napětí mohou být rovny nule. V každé rovině lze najít hlavní napětí. Lze dokázat, že vždy existují **tři** navzájem kolmé směry, ve kterých působí pouze normálové napětí a smykové je rovno nule. Jsou to **hlavní směry**, a uvedená napětí jsou **hlavní napětí**, která se označují $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Obecně lze nakreslit tři Mohrovy kružnice, a platí $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$; nejvíce vpravo je vždy σ_1 (obr. 1.9). Jedna kružnice odpovídá rovině x - y , druhá rovině y - z a třetí odpovídá rovině z - x . Při obecném zadání napjatosti devíti, resp. šesti složkami napětí se hlavní napětí a jejich směry získají řešením kubické rovnice (viz např. [1 – 3]), což umí i běžný software pro analýzu napjatosti. Situace se zjednoduší, známe-li některý hlavní směr. Ten může vyplynout například ze symetrie tělesa nebo z charakteru zatížení. Některé hlavní směry jsou „přirozené“: pro rotační těleso s rotačně symetrickým



Obr. 1.9. Mohrovy kružnice při trojosé napjatosti.

zatížením to je směr radiální a obvodový, pro válcovou tlakovou nádobu to je směr axiální, obvodový a radiální, pro kulovou tlakovou nádobu je jakýkoliv tečný směr směrem obvodovým a napjatost je izotropní; třetím hlavním směrem je směr radiální. U dlouhých tyčí, hřídelů a nosníků zatížených osovou silou nebo ohybovým momentem je osový směr směrem hlavním. U desek, tenkých skořepin a rovinných úloh je jeden hlavní směr kolmý k povrchu; také u nezátíženého povrchu tělesa. V takových případech pro nalezení hlavních napětí stačí použít dříve uvedené vztahy, popřípadě Mohrovu kružnici.

Znalost směrů hlavních napětí je velmi důležitá například pro orientaci vláken v některých typech vláknových kompozitů, pro orientování výztuže v železobetonu (výztužné pruty zde slouží pro přenos tahových napětí a měly by být orientovány do jejich směrů), a v neposlední řadě pro správnou orientaci tenzometrických snímačů (obr. 1.7). Jejich znalost ale pomáhá i při analýze lomů a identifikaci příčin poruch u staveb a strojních součástí, jak uvidíme později.

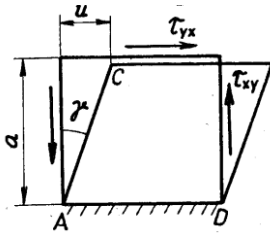
1.4 Přetvoření

Hookeův zákon

Účinkem napětí se součást deformuje. Intenzitu přetvoření materiálu popisují poměrná prodloužení ε a změny γ původně pravých úhlů (obr. 1.10),

$$\varepsilon = \Delta l / l, \quad u/a = \operatorname{tg} \gamma. \quad (1.10)$$

Pro malá přetvoření jsou úhly γ malé a předpokládá se $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$; γ se nazývá zkos.



Obr. 1.10. Zkos způsobený smykem.

U pružných těles při malých přetvořeních (do meze úměrnosti) platí mezi normálovými napětími a poměrnými prodlouženími přímá úměrnost. Při jednoosém zatížení má tento tzv. Hookeův zákon tvar

$$\varepsilon = \sigma / E \quad \text{nebo} \quad \sigma = \varepsilon E ; \quad (1.11)$$

σ je normálové napětí a E je Youngův modul pružnosti v tahu, definovaný jako

$$E = \sigma / \varepsilon . \quad (1.12)$$

Číselně odpovídá modul pružnosti napětí, které by způsobilo prodloužení vzorku na dvojnásobek původní délky (tj. $\varepsilon = 1$). Je tedy mírou tuhosti materiálu.

Obecně je každá napjatost trojosá, s napětími a přetvořeními ve všech směrech, a Hookeův zákon pak je

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] / E , \\ \varepsilon_y &= [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] / E , \\ \varepsilon_z &= [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] / E ; \end{aligned} \quad (1.13)$$

index ukazuje směr. μ je součinitel příčné kontrakce, tzv. Poissonovo číslo, které vyjadřuje poměr zúžení v příčném směru k prodloužení ve směru zatížení (obr. 1.1):

$$\mu = \Delta D / D . \quad (1.14)$$

Hookeův zákon pro smyková přetvoření je

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G , \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz} / G , \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx} / G ; \quad (1.15)$$

τ je smykové napětí a G je modul pružnosti ve smyku, který souvisí s modulem pružnosti v tahu vztahem

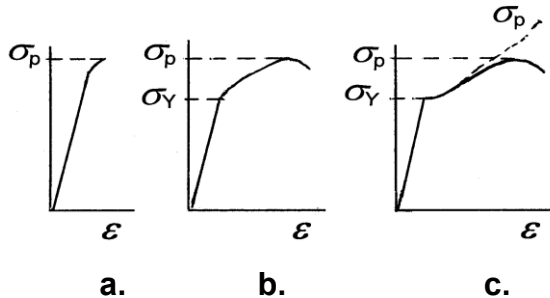
$$G = E / [2(1 + \mu)] , \quad \text{resp.} \quad E = 2(1 + \mu)G . \quad (1.16)$$

U rovinné napjatosti lze vyjádřit napětí (σ_x , σ_y) jako funkce přetvoření ε_x , ε_y :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \quad (1.17)$$

Toho se využívá pro stanovení napětí v konstrukcích pomocí tenzometrických snímačů, které měří prodloužení.

Obrázek 1.11 ukazuje záznamy tahových zkoušek různých materiálů. Křehký materiál (obr. a) praskne náhle, když napětí dosáhne meze pevnosti. U materiálů tvárných při dosažení tzv. meze kluzu začnou deformace rychleji narůstat, a po odlehčení zůstanou trvalé deformace. Mez kluzu je někdy zřetelná prodlevou v pracovním diagramu (obr. c). Někdy zřetelná není (obr. b), a je pak z praktických důvodů definována jako takové napětí, které po odlehčení zanechá trvalé poměrné prodloužení 0,2% = 0,002. Používají se různá označení. V materiálových listech se pro výraznou mez kluzu užívá R_e , a pro nevýraznou $R_{p, 0,2}$; v normě pro kovové konstrukce to je f_Y (Y od slova yield); v české literatuře někdy σ_k ; zde budeme užívat σ_Y . Mez pevnosti se označuje R_m nebo f_u (ultimate); v české literatuře σ_p nebo σ_{Pt} pro pevnost v tahu. Plastických deformací si všimneme v kapitole 4.



Obr. 11.1. Diagramy tahové zkoušky různých materiálů. a - křehké materiály, b, c - elasticko-plastické materiály. σ - napětí, ε - poměrné prodloužení. σ_Y - mez kluzu, σ_p - mez pevnosti

Mohrova kružnice pro přetvoření

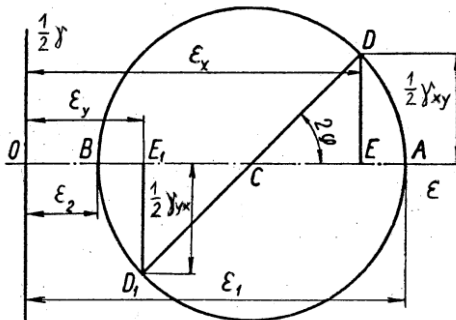
Vzájemná velikost poměrných prodloužení a zkosů v určitém bodě závisí na orientaci myšleného řezu. Podobně jako u napětí platí pro deformace

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\alpha, \quad (1.18a)$$

$$\frac{1}{2} \gamma(\alpha) = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cos 2\alpha. \quad (1.18b)$$

Jedna polovina γ ve výrazech (1.18) vyplývá z toho, že tento vztah vyjadřuje úhel pootočení přímky, která má směr α . Zkos γ vyjadřuje změnu pravého úhlu, a je tvořen součtem pootočení ($\frac{1}{2}\gamma$) dvou kolmých přímek.

Body $\varepsilon(\alpha)$, $\frac{1}{2}\gamma(\alpha)$ pro různé orientace myšleného řezu vyplní v souřadném systému ε , $\frac{1}{2}\gamma$ kružnici podobnou Mohrově kružnici (obr. 1.12). A podobně jako u napětí můžeme i u deformací říci, že existují dva navzájem kolmé směry, v nichž je zkos nulový a poměrná prodloužení extrémní. Těmto poměrným prodloužením (ε_1 , ε_2) říkáme hlavní, a odpovídajícím směrům říkáme **hlavní směry** prodloužení.



Obr. 1.12. Mohrova kružnice pro přetvoření.

U izotropního materiálu se hlavní směry prodloužení shodují s hlavními směry napětí. Jejich znalost usnadňuje orientaci tenzometrických snímačů při zjišťování napětí měřením; pokud možno by měly být orientovány do hlavních směrů. Před lepením tenzometrů bychom proto měli vždy provést analýzu napjatosti v součásti.

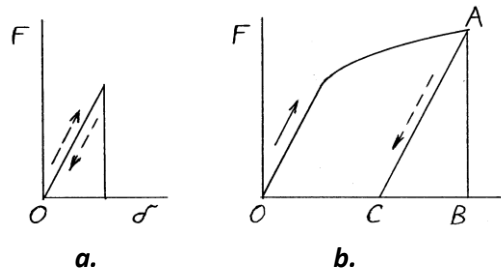
1.5 Práce zatěžujících sil a energie napjatosti

Při zatížení se poddajné těleso deformuje. Přitom dochází k posouvání působících sil, a ty konají práci. Ta je kladná, děje-li se posuv ve směru působení síly, a záporná, děje-li se proti působení síly. (Práci konají i působící momenty, jestliže se jejich působiště pootáčejí.) Při konstantní síle je práce rovna součinu síly a dráhy, $W = F\delta$. Mění-li se síla F v průběhu deformování (obr. 1.13), počítá se práce obecně jako integrál

$$W = \int_{(L)} F d\delta. \quad (1.19)$$

U pružných těles, kde existuje přímá úměrnost mezi silou a deformací,

$$F = k \delta, \quad (1.20)$$



Obr. 1.13. Deformační práce. *a* – pružné deformování, *b* – deformování pružno-plastické. *OABO* – práce vynaložená během zatěžování, *ACB* – energie uvolněná během odlehčení. *F* - síla, *δ* - dráha.

je práce rovna

$$W = \frac{1}{2} F \delta = \frac{1}{2} k \delta^2 = \frac{1}{2} F^2 / k ; \quad (1.21)$$

k je tuhost, která vyjadřuje sílu pro vyvolání jednotkové deformace. Při deformování pružného tělesa se práce zatěžující síly mění v potenciální energii pružných napětí,

$$W = U . \quad (1.22)$$

To je **zákon zachování energie**. Potenciální energii můžeme vyjádřit prostřednictvím sil a posunutí, a následně prostřednictvím napětí a přetvoření.

Například pro tyč o délce *l* a ploše průřezu *S* při zatížení osovou silou *F*, platí

$$U = \frac{1}{2} \sigma S \times \varepsilon l = \frac{1}{2} \sigma^2 / E \times Sl = \frac{1}{2} \varepsilon^2 E Sl . \quad (1.23)$$

Ve všech těchto výrazech se vyskytuje člen *Sl*, což je objem tyče, resp. tělesa. Vydělením těchto vztahů objemem dostaneme energii, připadající na jednotku objemu, neboli **hustotu energie napjatosti** *A*. Ta se používá například při posuzování možného porušení nebo vzniku plastických deformací (viz kapitolu 8).

Odlehčíme-li těleso, deformace i akumulovaná energie vymizí.

Použití zákona zachování energie umožní někdy velice rychlé stanovení maximální síly nebo napětí v tělese, například při nárazu, jak ukážeme dále.

Příklad.

Vozidlo s elastickým nárazníkem narazí rychlostí *v* = 10 km/h na masivní zeď. Jaká bude maximální síla při nárazu? Hmotnost vozidla je *m* = 1000 kg a tuhost nárazníku *k* = 500 N/mm = 500000 N/m.

Řešení. Maximální sílu při nárazu dostaneme snadno ze zákona zachování energie. Vozidlo má na počátku kinetickou energii, která se postupně změní na potenciální energii pružiny nárazníku, $E_{\text{kin}} = U_{\text{pot}}$. Rychlost je $v = 10000/3600 = 2,78$ m/s a kinetická energie je $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = 3865$ J. Ze vztahu (1.21) dostaneme po úpravě

$$F_{\text{max}} = \sqrt{2kE_{\text{kin}}} = \sqrt{2 \times 500000 \times 3865} = 62169 \text{ N}.$$

Z této síly bychom mohli dále určit dráhu a čas do zastavení. Příslušné vztahy a výsledky jsou uvedeny v kapitole 4 knihy [5].

Při zatížení často dochází i ke vzniku trvalých deformací (obr. 1.13b). Neplatí pak již přímá úměrnost mezi deformací a silou, a práci je nutno počítat podle obecného vztahu (1.19). Celková deformační práce je rovna součtu potenciální energie elastických napětí a zmařené (disipované) práce. Během odlehčení vymizí pouze elastická část deformace a práce (obr. 1.13b). Energie se nevratně spotřebovává na plastické deformování a v důsledku tření nebo při lomových procesech na tvorbu nových lomových ploch. I v těchto případech platí vztah (1.19). Energie spotřebovaná při nevratných procesech bývá často mnohokrát větší než akumulovaná energie pružných napětí.

Literatura ke kapitole 1.

1. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 375 s.
- 2, Kolektiv: Pružnost a pevnost I. Skriptum ČVUT, Fakulta strojní, Praha, 1965. 272 s.
3. Novák, O. a kolektiv: Nauka o pružnosti a pevnosti ve stavitelství. Technický průvodce, sv. 3. SNTL, Praha, 1963. 536 s.
4. Timošenko, S. P.: Soprotivlenije materialov I. Fizmatgiz, Moskva, 1960. 380 s. (Timoshenko, S. P.: Strength of materials. Part I. Elementary theory and problems. D. van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1955.)
5. Menčík, J.: Rázy a vibrace. Univerzita Pardubice, Pardubice, 2018. 132 s. ISBN 978-80-7560-147-6. Volně dostupné na webu: <https://hdl.handle.net/10195/70531>, nebo po zadání názvu knihy do vyhledavače Google.

2. Metoda konečných prvků, metody analytické a numerické

2.1 Metoda konečných prvků

Analýza deformací a napjatosti složitých součástí a konstrukcí se v současné době provádí v převážné většině metodou konečných prvků (MKP). Pro tuto metodu existuje řada komerčních programů, které užívají výpočtáři, projektanti i výzkumníci. Proto se zde omezíme jenom na základní informace.

Metoda konečných prvků je numerická metoda, která se po prvních krůčcích ve čtyřicátých letech minulého století ukázala jako velice účinná, a byla postupně propracována pro řešení úloh z mechaniky těles, přenosu tepla, proudění kapalin a plynů, magnetických polí i z dalších oblastí [1 – 5]. Zde se omezíme na stručný výklad, založený na mechanice pružných těles. V tomto případě vychází metoda z Lagrangeova principu: *Za stabilní rovnováhy je minimální celková potenciální energie soustavy, sestávající z deformační energie a úbytku potenciální energie zatížení:*

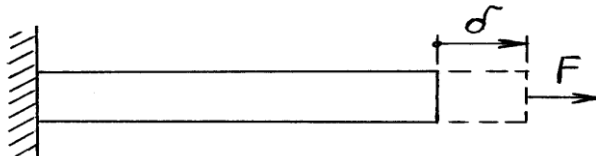
$$\Pi = \Pi_{\delta} + \Pi_z = \min ! \quad (2.1)$$

Použití tohoto principu budeme ilustrovat na jednoduchém tělese – tyči, jejíž jeden konec je upevněn a druhý je zatížen osovou silou F (obr. 2.1). Tato síla je s posunutím volného konce δ vázána vztahem

$$F = K \delta, \quad (2.2)$$

kde $K = F / \delta$ je tuhost tyče v tahu; zde $K = F/[FL/(ES)]$, kde L je délka tyče, S je plocha průřezu a E modul pružnosti v tahu. Během deformování se v tyči akumulovala energie napjatosti

$$\Pi_{\delta} = \frac{1}{2} F \delta = \frac{1}{2} K \delta^2. \quad (2.3)$$



Obr. 2.1. Tyč zatížená tahovou silou.

Síla F se posune o δ . Tím se její potenciální energie zmenší o $\Pi_z = F\delta$. Celková energie soustavy je rovna

$$\Pi = \frac{1}{2} K\delta^2 - F\delta. \quad (2.4)$$

Podle Lagrangeovy věty bude tato energie minimální při takovém posuvu δ , pro který bude její derivace (podle posuvu) rovna nule. Derivováním rovnice (2.4) podle δ dostaneme

$$d\Pi/d\delta = K\delta - F = 0. \quad (2.5)$$

Tento výraz můžeme přepsat do tvaru

$$K\delta = F, \quad (2.6)$$

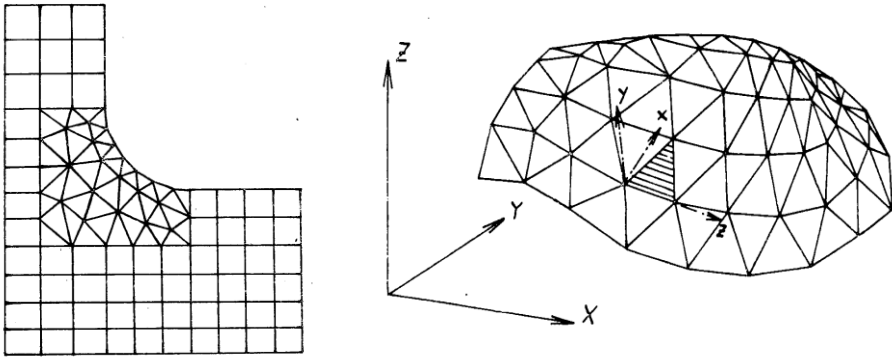
který říká, že **síla je rovna součinu deformace δ a tuhosti K** . Naopak vyřešením rovnice (2.6) pro známé zatížení a tuhost dostaneme hodnotu δ . Například pro zmíněnou tyč o tuhosti $K = ES/L$ dostaneme známý vztah pro prodloužení $\delta = F/K = FL/(ES)$.

Lagrangeův princip se nejprve aplikoval na jednoduchých tělesech, ve formě takzvané Ritzovy metody. U ní se deformace uvnitř tělesa vyjádří pomocí zvolených jednodušších funkcí, např. polynomů: $w = a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots$ apod. Z posuvů a elastických vlastností se s použitím Hookova zákona vyjádří přetvoření a tuhost tělesa. Protože posuvy závisí na (dosud) neznámých hodnotách konstant $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, hledá se minimum potenciální energie tak, že se výraz (2.6) derivuje podle každé z nich, $d\Pi/da_j$, a každá derivace se položí rovna nule. Tím se dostane soustava n lineárních rovnic. Jejím vyřešením se získají hledané konstanty, a následně deformace a napětí v tělese.

Nevýhodou Ritzovy metody je, že pracuje s jedinou aproximační funkcí $w = f(x)$ pro celé těleso. Nemůže se proto dostatečně přizpůsobit složitějšímu tvaru tělesa nebo zatížení. Od ní ale už byl v šedesátých letech minulého století jen krok k metodě konečných prvků, tím spíše, že již začínal rozvoj samočinných počítačů, které jsou pro použití této metody nezbytné. Kromě toho v té době začínalo být běžné použití maticových metod pro řešení rozsáhlých stavebních prutových konstrukcí.

U metody konečných prvků je vyšetřované těleso rozděleno myšlenými řezy na velké množství malých částí, tzv. konečných prvků, které jsou navzájem spojeny

v uzlových bodech (obr. 2.2). Vzniklá síť prvků je navržena tak, aby zatížení působilo v uzlech. Při řešení se hledají posuvy jednotlivých uzlů, z nichž se pak počítají posunutí v různých místech tělesa a přetvoření, vnitřní síly a momenty. Práci s velikými počty těchto hodnot usnadňuje jejich uspořádání do matic.



Obr. 2.2. Metoda konečných prvků - ukázky jednoduchých sítí [4].

Posuvy uvnitř jednotlivých prvků jsou obvykle vyjádřeny pomocí polynomů, například polynom druhého stupně pro j -tý prvek je: $w_j = a_{0j} + a_{1j}x + a_{2j}x^2$. Důležité je, že deformace jednotlivých prvků mohou být aproximovány různými funkcemi, za předpokladu, že se splní podmínky rovnováhy a okrajové podmínky. Z posuvů se potom vyjádří matice přetvoření a matice tuhosti jednotlivých prvků. V dalším kroku se jejich uspořádaným poskládáním vytvoří matice tuhosti celého tělesa. Podobně se sestaví matice zatížení a matice posuvů jednotlivých uzlových bodů pro celé těleso. Výhodou maticového zápisu je jeho jednoduchost a přehlednost. **Základní rovnice metody konečných prvků** vypadá stejně jako výraz (2.6) pro deformaci pružiny zatížené silou F . Rozdíl je v tom, že u metody konečných prvků představují K , F a δ matice tuhosti tělesa, zatížení a posunutí všech uzlů. Uspořádání jednotlivých hodnot do příslušných matic je záležitostí matematika nebo programátora. V konečné fázi se jedná o vyřešení rozsáhlé soustavy rovnic, která má několik set až několik set tisíc neznámých.

Programy pro metodu konečných prvků sestávají ze tří částí: preprocesoru, procesoru (řešiče) a postprocesoru.

Preprocessor slouží k definování geometrie tělesa, zadání materiálových vlastností, zatížení a okrajových podmínek. Každý komerční program MKP nabízí velký výběr prvků i materiálových modelů. Některé programy bývají vhodnější pro určité typy úloh, například kontakt těles, plastické deformace, analýzu elastomerních materiálů, dynamické problémy atd.

Řešič (procesor) obsahuje nástroje pro řešení rozsáhlých soustav lineárních rovnic. Byla to právě metoda konečných prvků a její velký potenciál pro řešení úloh v automobilovém a leteckém průmyslu i jinde, které přispěly k vyvinutí účinných metod řešení velkých soustav rovnic.

Postprocessor zpracovává velká kvanta vypočtených hodnot, např. posuvů uzlových bodů, a počítá z nich velikosti přetvoření, napětí a sil. Počítá také hodnoty ekvivalentních napětí podle různých hypotéz. Pro větší názornost je uvádí i v grafické podobě a v barvách.

Mezi nejznámější programy metody konečných prvků pro analýzu konstrukcí patří (podle abecedy) Abaqus [6], Ansys [7], Cosmos [8], LS Dyna [9] a Marc [10]. Umožňují také řešení nelineárních úloh, například z oblasti velkých deformací, úloh z plasticity a kontaktních úloh, dynamických problémů, proudění a dalších. Bližší informace k jednotlivým programům lze najít na příslušných webových stránkách.

Programy MKP prvků bývají též integrovány do CAD systémů pro navrhování.

2.2 Použití numerických a analytických metod pro řešení úloh mechaniky

Samočinné počítače změnily způsob řešení nejrůznějších úloh. Analýza deformací a napjatosti složitých součástí se dnes v převážné většině provádí metodou konečných prvků. Tato metoda a příslušné počítačové programy jsou univerzální – s vhodným programem lze vyřešit téměř všechno. To je obrovský rozdíl proti době „předpočítačové“, kdy vlastně pro každý typ úlohy existovala specifická metoda řešení. Analýza nosníků se prováděla řešením diferenciální rovnice průhybové čáry, Mohrovou metodou, pomocí Castiglianovy věty a dalšími metodami. Kroucení prutů se řešilo pomocí diferenciálních rovnic obyčejných nebo parciálních, ale také experimentálně pomocí takzvané membránové analogie. Napjatost rotačně symetrických desek se řešila postupnou integrací obyčejné diferenciální rovnice. U obdélníkových desek ale již bylo třeba použít metodu sítí nebo metodu rozvoje do Fourierových řad. V případě pružnoplastických deformací

bylo obvykle nutno omezit se jen na nejjednodušší materiálové modely a nejjednodušší geometrie.

Naproti tomu algoritmus práce uživatele programu MKP je stejný pro řešení jakéhokoliv problému: navrhnout typy prvků a vytvořit odpovídající síť v daném tělese téměř libovolného tvaru, definovat materiálový model nebo modely, okrajové podmínky a zatížení, a nechat pracovat počítač. Potom následuje už „jen“ analýza a interpretace výsledků. Není divu, že který z výpočtářů jednou „přičichl“ k metodě konečných prvků, nemá již chuť řešit úlohy klasickým způsobem. Každý ale také potvrdí, že skutečné zvládnutí metody konečných prvků mu trvalo delší dobu, a zpravidla i přizná, že se v počátečním období dopouštěl při výpočtech řady chyb, ať již se jedná o definování okrajových podmínek, návrh sítě nebo popis zatížení. Někdy také řekne, že narazil na problém, který ani světově uznávaný program MKP nebyl schopen řešit. Nezapomeňme, že i tyto programy se vyvíjejí, a to na základě praktických potřeb a díky poznávání jejich omezení a slabších míst při řešení konkrétních úloh.

Počítače snímají z projektanta břímě rutinních výpočtů, a dávají mu prostor pro lepší pochopení a zohlednění všech možných zatížení, skutečného tvaru konstrukce, okrajových podmínek i vlastností materiálu, a tedy prostor pro celkové zvýšení technické úrovně a spolehlivosti navrhované konstrukce. K tomu jsou ale nezbytné i určité znalosti teoretické. A jak před lety řekl E. Becker,

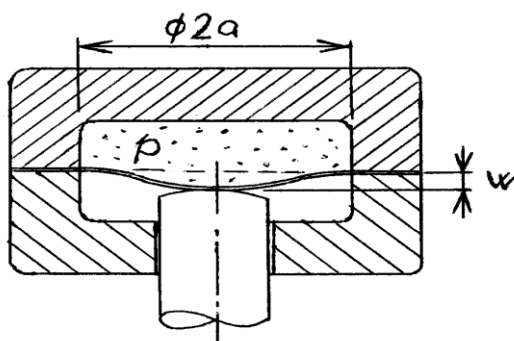
bez dobré teorie není počítání ničím jiným, než produkcí sutin.

Statistiky z minulých let ukazují, že příčinou asi 30% havárií stavebních konstrukcí bylo „nepochopení statického působení konstrukce“ v etapě návrhu. Dobrý projektant nebo konstruktér musí znát pojmy rovnováha sil a metoda myšleného řezu, chápat rozdíly mezi normálovým a smykovým napětím, znát základní rysy napjatosti při jednoosém i víceosém zatížení, rozumí vzniku teplotních napětí. Měl by chápat i pojem energie napjatosti a znát základní mechanismy a kritéria porušení materiálů v křehkém a tvárném stavu. Ale musí si být také vědom toho, že u reálných konstrukcí se vyskytují různé nedokonalosti (imperfekce), a že výpočty jsou prováděny za určitých zjednodušení týkajících se geometrie, zatížení i materiálových modelů.

I v době počítačové je analytická, resp. technická nauka o pružnosti a pevnosti velice důležitá. Jednak proto, že poskytuje inženýrovi všeobecný pohled na problematiku a vytváří pojmový aparát. Dále proto, že ukazuje řešení základních

úloh, pomocí nichž lze testovat nové postupy i programy. V jistém slova smyslu se jedná o řešení asymptotická, která se podobají majákům v neznámém moři, po kterém plujeme. Jednoduchá analytická řešení mají i další přednosti. Ukazují názorně, na kterých činitelích závisí výsledek, a umožňují též velmi snadné a názorné posouzení vlivu jednotlivých činitelů. (Samozřejmě si musíme být vždy vědomi podmínek a omezení, za kterých jsou tato řešení platná). Analytické řešení malých průhybů tenkých nosníků učí inženýrskému způsobu myšlení: právě zde bylo možno na základě předběžné analýzy zanedbat nepodstatné činitele, a řešení tak výrazně zjednodušit. Kromě toho, i aproximační modely používané u některých prvků jsou založeny na zjednodušených analytických modelech. Analytické vztahy také lze snadno transformovat do bezrozměrových výrazů, odpovídajících podobnostním číslům (viz Kap. 15). Umožňují proto – právě jako zmíněné majáky – nasměrovat konstrukční návrh již v úvodních fázích vhodným směrem. Jako příklad zde zmíníme jednu úlohu z technické praxe.

Příklad. Přítlačná síla na pohyblivou část formy vulkanizačního lisu je vyvozována tlakem stlačeného vzduchu na membránu kruhového půdorysu (obr. 2.3). U původního zařízení byla membrána ocelová (jak bývá u strojařských dílů obvyklé), ale po krátké době provozu docházelo k jejímu praskání. Přestože byla uskutečněna řada časově náročných výpočtů metodou konečných prvků, s obměnami tvaru míst, kde docházelo ke koncentraci napětí, vycházela napětí stále příliš vysoká. Proto byla provedena obecná analýza deformace a napětí v kruhové elastické desce. Základní vzorce pro průhyb w vetknuté desky o tloušťce h a poloměru a , zatížené tlakem p , a pro maximální napětí působící v radiálním směru v místě vetknutí jsou [5]:



Obr. 2.3. Tlaková komora mechanismu vulkanizačního lisu (schematicky).

$$w_{\max} = \frac{pa^4}{64D} = \frac{3}{16} \frac{p(1-\mu^2)}{Eh^3} \left(\frac{a}{h}\right)^3 a ; \sigma_{\max} = \frac{3}{4} \left(\frac{a}{h}\right)^2 p, \quad (2.7)$$

Kombinace těchto vztahů dá po úpravě následující vztah pro maximální napětí:

$$\sigma_{\max} = 4 \frac{E}{1-\mu^2} \frac{h}{a} \frac{w_{\max}}{a} ; \quad (2.8)$$

E a μ je Youngův modul a Poissonovo číslo materiálu desky. Je zřejmé, že při zadané velikosti průhybu w (odpovídající požadovanému posuvu pohyblivé části formy) lze napětí výrazněji snížit pouze zmenšením ohybové tuhosti membrány, zejména zásadním snížením modulu pružnosti. Nejjednodušším řešením, které se pak ukázalo jako úspěšné, bylo nahrazení původní ocelové membrány membránou ze speciálního elastomeru. Jeho modul pružnosti, nižší o čtyři řády, zajistil, že i při značně větší tloušťce membrány byla pracovní napětí nižší než pevnost (i únavová) této pryže.

Vztahy (2.7) a (2.8) lze velmi snadno vyjádřit v bezrozměrovém tvaru, takže by byly obecnější. Otázek rozměrové analýzy a podobnosti si všimneme podrobněji v kapitole 15.

Uvedený příklad ukázal, že obecné analytické vztahy mohou někdy naznačit směr velmi účinného řešení, popř. i s použitím méně obvyklých materiálů. (K volbám materiálů pro různé účely lze doporučit výbornou knihu M. F. Ashbyho [12].) Z podobných důvodů, a s cílem podporovat vytváření inženýrského způsobu myšlení, bude i v naší knížce dále používán jednoduchý analytický přístup.

Literatura ke kapitole 2.

1. Španiel, M., Horák, Z.: Úvod do metody konečných prvků. ČVUT, Praha, fakulta strojní, 2011, 158 s. Volně dostupné (14. 2. 2019) na:

http://www.fsiforum.cz/upload/soubory/knihy/mechanika/uvod_do_metody_konecných_prvku.pdf

2. Kolář, V., Němec, I., Kanický, V.: FEM principy a praxe metody konečných prvků. Computer Press, 2001. 401 s.

3. Höschl, C.: Úvod do metody konečných prvků. (Cyklus Stavba strojů XXXVIII.) DT ČSVTS, Praha, 1976. 123 str. Volně dostupné (11. 3. 2019) na:

http://www.it.cas.cz/files/skripta/04_UVOD%20DO%20METODY%20KP-ocr150.pdf

4. Teplý, B.: Maticová analýza konstrukcí. Metoda konečných prvků. VUT, Brno, 1984. 98 s.
5. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 375 s.
6. ABAQUS. 6.13; Getting started with Abaqus interactive edition. Dassault Systemes Simulia Corp., Providence, RI, 2013.
7. Ansys: <https://en.wikipedia.org/wiki/Ansys>, <https://www.ansys.com/>
<https://www.techsoft-eng.cz/software/ansys-fluent>,
<https://www.svsfem.cz/produkty/explicit/ansys-ls-dyna>
8. Cosmos: <http://www.swmath.org/software/4289>
9. LS DYNA: <https://en.wikipedia.org/wiki/LS-DYNA>,
10. MARC a další produkty ze skupiny MSC:
<http://www.mssoftware.com/products>
11. Kolektiv: Pružnost a pevnost II. Skriptum ČVUT, Fakulta strojní, Praha, 1985. 214 s.
12. Ashby, M. F.: Materials selection in mechanical design. Pergamon Press, Oxford – New York, 1992.

3. Kritéria porušení, pevnostní hypotézy

Při dimenzování součástí potřebujeme znát, při jakém zatížení by došlo k porušení lomem nebo ke vzniku trvalých deformací. Napjatost je často víceosá, s různými složkami napětí (σ , τ) v různých směrech. Pevnost a mez kluzu se ale obvykle zjišťují při zkoušce jednoosým tahem nebo tlakem. Potřebujeme proto mít nějaké postupy, abychom mohli ze složek napětí v našem případě vypočítat tzv. ekvivalentní napětí, které bychom srovnali s hodnotou meze kluzu nebo pevnosti.

Ekvivalentní napětí je *takové jednoosé normálové napětí, které má stejný účinek z hlediska porušení nebo plastického deformování, jako naše vyšetřovaná napjatost.* (Někdy se také používá výraz srovnávací nebo redukované napětí.)

V průběhu doby vznikla celá řada kritérií pro posuzování možnosti porušení křehkým lomem, tj. bez vzniku pozorovatelných plastických deformací, a pro posuzování vzniku trvalých, resp. plastických deformací. Nejčastější z těchto tzv. pevnostních hypotéz zde stručně vysvětlíme.

3.1 Křehký lom

Hypotéza maximálního normálového napětí (Rankinova)

Podle ní *dojde k porušení, jestliže největší tahové napětí dosáhne (nebo překročí) mez pevnosti v tahu $\sigma_{p,t}$, anebo jestli největší tlakové napětí dosáhne mez pevnosti v tlaku $\sigma_{p,d}$.* Jedná se vždy o hlavní napětí, takže tyto podmínky můžeme formulovat jako

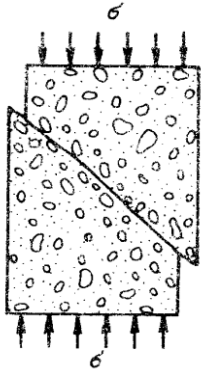
$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 \geq \sigma_{p,t} \text{ , nebo } \sigma_{ekv} = |\sigma_3| \geq \sigma_{p,d} \text{ .} \quad (3.1)$$

Hypotéza maximálního smykového napětí (Guestova)

Vznikla na základě pozorování, že vzorek z křehkého materiálu, zatížený jednoosým tlakem, se poruší usmyknutím pod úhlem 45° , tj. ve směru maximálního smykového napětí (obr. 3.1), a říká: *K porušení dojde, jestliže maximální smykové napětí dosáhne mez pevnosti ve smyku,*

$$\tau_{max} \geq \tau_p \text{ .} \quad (3.2)$$

Dvě napjatosti jsou ekvivalentní, mají-li stejně velké maximální smykové napětí. To je rovno poloměru největší Mohrovy kružnice (obr. 1.9). Pro trojosou napjatost



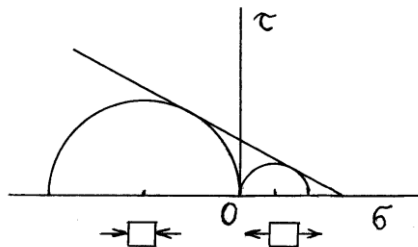
Obr. 3.1. Porušení při tlakovém zatížení účinkem smykových napětí.

je $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$. Pro jednoosou napjatost (odpovídající tahové zkoušce) je $\tau_{\max} = \sigma_1/2 = \sigma_{\text{ekv}}/2$. Porovnáním obou smykových napětí dostaneme po úpravě

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3 \geq \sigma_{\text{p,t}} \quad (3.3)$$

Mohrova – Coulombova hypotéza

Pevnost v tlaku křehkých hmot je zpravidla několikrát vyšší než pevnost v tahu, a předchozí hypotézy nezohledňují dostatečně současné působení tahového napětí a (vyššího) tlakového napětí v různých směrech. Podle O. Mohra *dojde k porušení, jestliže se největší Mohrova kružnice dotkne jisté mezní čáry, která je tvořena obálkou Mohrových kružnic, odpovídajících porušení při různých kombinacích tahových i tlakových napětí*. Coulomb navrhl vytvořit mezní čáru jako tečnu k Mohrovým kružnicím pro jednoosý tah a pro jednoosý tlak (obr. 3.2).



Obr. 3.2. Mohrovo – Coulombovo kritérium porušení.

3.2 Vznik plastických deformací

Hypotéza maximálního smykového napětí (Trescova)

K plastickému tečení materiálu dojde, jestliže největší smykové napětí dosáhne

meze kluzu ve smyku (obr. 1.9). Tato hypotéza je podobná jako Guestova, a podobně vypadá výraz pro ekvivalentní napětí:

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \sigma_3 \geq \sigma_Y . \quad (3.4)$$

Hypotéza hustoty energie napjatosti na změnu tvaru (Misesova, HMM)

Beltrami navrhl hypotézu, podle které dojde k porušení, jestliže hustota energie napjatosti Λ dosáhne určité kritické hodnoty. Tato hypotéza ale není univerzální, protože homogenní materiál snese bez porušení jakkoliv vysoký hydrostatický tlak. Richard von Mises navrhl rozdělit napjatost (a podobně i hustotu energie napjatosti) na dvě složky: jednu, která odpovídá změně objemu, a druhou, která odpovídá změně tvaru. Podle Misesa se *tvárný materiál začne trvale deformovat, jestliže kritické hodnoty dosáhne hustota energie napjatosti, odpovídající změně tvaru*. Porovnáme-li hustotu energie napjatosti na změnu tvaru v obecném trojosém případě a při jednoosém tahovém zatížení ekvivalentním napětím, dostaneme po úpravě následující výraz pro ekvivalentní napětí [1 – 5]:

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} . \quad (3.5a)$$

Tento výraz také ukazuje silný vliv smykových napětí na vznik plastických deformací: působí-li například pouze smykové napětí τ_{xy} (a všechny další složky napětí jsou rovny nule), je jeho vliv stejný, jako kdyby působilo tahové napětí o velikosti $\sigma_x\sqrt{3}$, to znamená o 73% vyšší! Ekvivalentní napětí (3.5a) lze také vyjádřit prostřednictvím hlavních napětí:

$$\sigma_{ekv} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} . \quad (3.5b)$$

Výrazy v závorkách odpovídají průměrům Mohrových kružnic, a průměr každé kružnice je roven dvojnásobku maximálního smykového napětí v příslušné rovině (obr. 1.9). Vidíme tedy, že i u tohoto kritéria, založeného na hustotě energie napjatosti, je zřetelný vliv smykových napětí. Dokonce všech tří, zatímco Trescovo kritérium uvažuje pouze vliv největšího smykového napětí. Nelze ale říci jednoznačně, že jedno kritérium by bylo lepší než druhé. Používají se obě.

Poznámka. Označení HMM udává první písmena jmen tří osob, které přispěly k formulování uvedeného kritéria, tj. Huber, Mises, Hencky.

Poznámka. Ekvivalentní napětí, definované vztahem (3.5a) nebo (3.5b) se také nazývá **intenzita napětí**.

Hodnoty ekvivalentního napětí podle obou kritérií se v některých případech shodují (např. při jednoosém tahu), a někdy se liší. Největší rozdíl je u čistého smyku. Ekvivalentní napětí podle Misesa je $\sigma_{ekv} = \sqrt{3} \tau$, a podle Trescy je $\sigma_{ekv} = 2 \tau$, tj. o 15% více. I takovéto rozdíly (a nemožnost říci, které kritérium je správnější) jsou jedním z důvodů, proč se při dimenzování užívá **součinitel bezpečnosti**. Druhým důvodem je nedostatečná znalost pevnosti nebo meze kluzu materiálu. (Pozor – minimální pevnost uváděná v materiálových listech odpovídá pětiprocentnímu kvantilu pevnosti. To je taková hodnota, že existuje pravděpodobnost 5%, že se může vyskytnout ještě slabší kus. Kdyby konstruktér chtěl zajistit bezpečnost svých výrobků jenom tím, že je bude dimenzovat na tuto tzv. minimální pevnost, znamenalo by to, že každý dvacátý výrobek selže!) Dalším důvodem pro použití součinitele bezpečnosti je nedostatečná znalost zatížení, které souvisí s provozními podmínkami (například u vozidla to je hmotnost nákladu a jeho rozložení, rychlost jízdy a stav vozovky, ale i stav odpružení), a další vlivy.

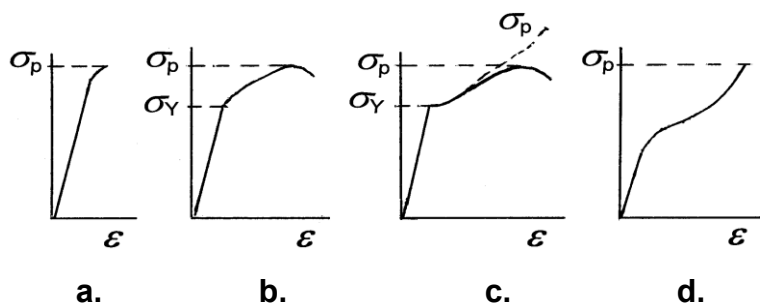
Literatura ke kapitole 3.

1. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 375 s.
2. Kolektiv: Pružnost a pevnost I. Skriptum ČVUT, Fakulta strojní, Praha, 1965. 272 s.
3. Novák, O. a kolektiv: Nauka o pružnosti a pevnosti ve stavitelství. Technický průvodce, sv. 3. SNTL, Praha, 1963. 536 s.
4. Němec, J., Dvořák, J., Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojírenství. SNTL, Praha, 1989. 600 s.
5. Pešina, E.: Základy užití teorie plasticity. SNTL, Praha, 1966. 188 s.

4. Základy plasticity

4.1 Materiálové vlastnosti

Na obrázku 4.1 jsou diagramy tahové zkoušky různých materiálů. Zatímco křehké materiály (obr. 4.1a) se poruší náhle, jakmile napětí dosáhne mez pevnosti σ_p , tvárné kovové materiály snesou i trvalou změnu tvaru. Na obr. 4.1b, c jsou znázorněny pracovní diagramy pružnoplastických materiálů, například ocelí.



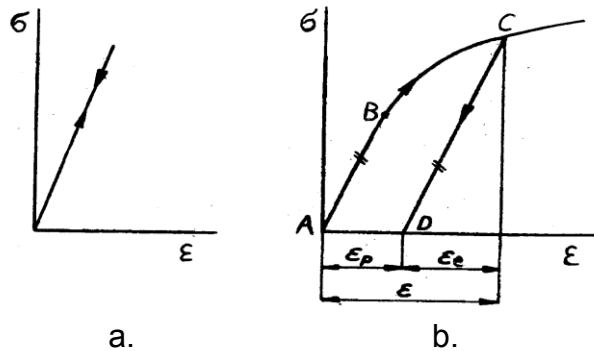
Obr. 4.1. Diagramy tahové zkoušky různých materiálů. a - křehké materiály, b, c - elasticko-plastické materiály, d - elastomerní materiály (pryž).
 σ - napětí, ε - poměrné prodloužení, σ_p - mez pevnosti, σ_Y - mez kluzu.

Je-li napětí nižší než mez kluzu σ_Y , jsou deformace vratné a po odlehčení vymizí. Do meze úměrnosti σ_e existuje mezi napětím σ a přetvořením přímá úměrnost:

$$\varepsilon = \sigma / E, \quad (4.1)$$

kde ε je poměrné prodloužení a E je modul pružnosti v tahu. Hookův zákon v podobném tvaru platí i pro víceosou napjatost a také pro deformace způsobené smykovým napětím.

Poměry při zatěžování a odlehčování pružnoplastických materiálů jsou znázorněny na obr. 4.2. Nepřekročí-li napětí mez kluzu, vrací se záznam zpět po původní křivce a deformace vymizí (obr. 4.2a). Překročí-li napětí mez kluzu (bod B na obr. 4.2b), začnou deformace narůstat rychleji. Následující odlehčování (z bodu C na obr. 4.2b) probíhá v pracovním diagramu podél přímky rovnoběžné s jeho počáteční částí, a po odlehčení zůstanou v materiálu trvalé deformace (bod D). Při novém zatížení probíhá deformování nejprve podle přímky DC. Stoupá-li zatížení dále, pokračuje zatěžovací křivka od bodu C podle původní čáry nakreslené plně.



Obr. 4.2. Pracovní diagram materiálu pružného (a) a pružnoplastického (b).
 ε - poměrné prodloužení, ε_e - elastická složka, ε_p - plastická složka.

Pokud v součásti zůstala z předchozího zatížení zbytková napětí, sečítají se s napětím od nového zatížení.

Dosažení meze kluzu neznamená konec použití součásti. Každý z nás již někdy viděl automobil, jehož plechová karoserie nese stopy předchozí srážky s jiným vozidlem nebo překážkou. Nejsou-li vzniklé deformace příliš velké, může vozidlo dále plnit svoji funkci, i když v omezeném rozsahu. U kovových stavebních konstrukcí se malé plastické přetvoření připouští, pokud neohrozí správné fungování a bezpečnost konstrukce. Dosáhne se tím lepšího využití materiálu a snížení nákladů. Konstrukteur nebo projektant ale musí vědět, co si může dovolit. V prvé řadě musí znát více o materiálových vlastnostech.

Základem je **pracovní diagram materiálu** získaný tahovou zkouškou. Pro lepší pochopení a snadnější výpočty se tyto diagramy často aproximují jednoduchými výrazy. Tři nejobvyklejší aproximace jsou znázorněny na obr. 4.3 [1 – 6]:

1) Bilineární funkce (obr. 4.3a):

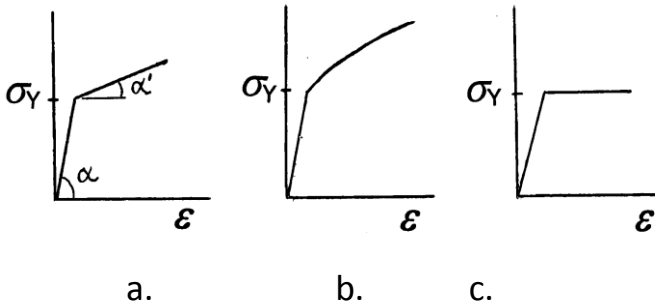
$$\sigma \leq \sigma_Y \quad \varepsilon = \sigma/E \quad \sigma_Y \text{ je mez kluzu (Y - od slova yield)} \quad (4.2a)$$

$$\sigma > \sigma_Y \quad \varepsilon = \varepsilon_Y + (\sigma - \sigma_Y)/E'; \quad E' \text{ je tzv. modul zpevnění} \quad (4.2b)$$

2) Mocninná funkce (obr. 4.3b),

$$\sigma \leq \sigma_Y \quad \varepsilon = \sigma/E \quad (4.3a)$$

$$\sigma > \sigma_Y \quad \varepsilon = K\sigma^m; \quad K, m \text{ jsou konstanty} \quad (4.3b)$$



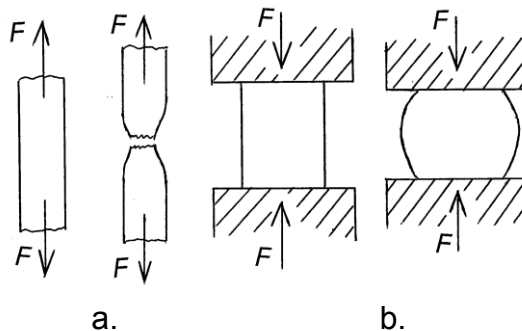
Obr. 4.3. Idealizované pracovní diagramy. a – bilineární funkce, $\operatorname{tg} \alpha = E$, $\operatorname{tg} \alpha' = E'$, b – mocninná funkce, c – ideální pružnoplastický materiál bez zpevnění.

3) Ideální pružnoplastický materiál bez zpevnění (obr. 4.3c).

$$\sigma \leq \sigma_Y \quad \varepsilon = \sigma/E \quad (4.4a)$$

$$\varepsilon > \varepsilon_Y \quad \sigma = \sigma_Y \quad \varepsilon_Y \text{ je prodloužení pro } \sigma = \sigma_Y \quad (4.4b)$$

Uvedené vztahy a diagramy platí pouze pro malá přetvoření. Při běžné tahové zkoušce se napětí obvykle počítá jako zatížení dělené jmenovitou plochou průřezu, $\sigma = F / S$, a příslušné **diagramy** se nazývají **konvenční**. Skutečnost, že při zatížení osovým tahem nebo tlakem se kromě délky vzorku mění i velikost jeho průřezu, se zanedbává. To je přípustné pro přetvoření nepřekračující několik málo procent. Při větších deformacích již nejsou změny průřezu zanedbatelné a skutečné napětí se začíná výrazněji lišit od jmenovitého. Závislost mezi skutečným napětím a přetvořením při tahové zkoušce měkké konstrukční oceli je naznačena na obr. 4.1c čárkovaně. Rozdíly narůstají zejména při napětích, blízcích se k mezi pevnosti, kdy se u vzorku začíná tvořit krček v místě budoucího přetržení (obr. 4.4a).



Obr. 4.4. Velké deformace tvárných materiálů při zatížení: a – tahem, b - tlakem

Při zatížení tlakem je situace opačná: plocha průřezu se zvětšuje (obr. 4.4b) a skutečné tlakové napětí je nižší než jmenovité. Velmi tvárný materiál by snesl prakticky neomezené zatížení jednoosým tlakem; například tenké hliníkové fólie Alobal se vyrábějí válcováním z masivnějších polotovarů.

U některých materiálů, například u konstrukční oceli s nízkým obsahem uhlíku, je mez kluzu zřetelně rozeznatelná prodlevou v pracovním diagramu (obr. 4.1c). Tato mez se v materiálových normách [7] označuje R_e . V případě, že křivka napětí – přetvoření je hladká (obr. 4.1b), je mez kluzu definována jako takové napětí, které způsobí trvalé poměrné prodloužení 0,2% neboli 0,002. Tato hodnota, označovaná jako $R_{p,0,2}$, byla zvolena z praktických důvodů. Dá se z diagramu tahové zkoušky zjistit bez extrémních nároků na měřicí techniku, a zpravidla neznemožňuje použití součásti. Mez pevnosti se značí R_m ; zde ji značíme σ_p .

Poznámka. V normách pro kovové konstrukce se mez kluzu označuje f_Y a mez pevnosti f_u .

K aproximacím pracovních diagramů je nutno říci několik slov. První dvě (obr. 4.3a,b) jsou snadno pochopitelné, neboť odpovídají pracovnímu diagramu pro kovy bez znatelné meze kluzu (obr. 4.1b). Aproximace podle obr. 4.3c, tj. ideální pružnoplastický materiál bez zpevnění, se zdá být nereálná. Přijatelně však odpovídá levé části pracovního diagramu materiálu s výraznou prodlevou na mezi kluzu, jako je například nízkouhlíková konstrukční ocel (obr. 4.1c). Nesmíme zapomenout, že i když u součásti budou dovoleny plastické deformace, připouštějí se zpravidla jen ve velmi malém rozsahu, do několika procent; to znamená, než začne křivka σ – ε opět stoupat. Z hlediska kontroly bezpečnosti platí, že vyhoví-li součást z pevnostního hlediska za předpokladu pružnoplastického materiálu bez zpevnění, tím spíše vyhoví součást z reálného materiálu, neboť u něj při plastickém deformování dochází k určitému zpevnování, a mez pevnosti je vyšší než mez kluzu.

Norma pro kovové konstrukce [7] připouští plastické deformace, ale pouze při splnění následujících podmínek:

- 1) mez pevnosti musí být alespoň o 20% vyšší než mez kluzu, tj. $f_u \geq 1,2 f_Y$,
- 2) materiál musí mít tažnost A5 alespoň 15%.

První podmínka je zde proto, že veličiny f_u a f_Y byly zjištěny s určitým rozptylem, a ani zatížení není vždy známo zcela přesně. Druhá podmínka chce zajistit, že se

materiál v určitém místě nezačne trhat kvůli většímu plastickému přetvoření. Kvůli vyšší bezpečnosti a s ohledem na nejistoty při návrhu navíc zmíněná norma připouští vznik jenom takového počtu plastických kloubů (viz dále), že se původně staticky neurčitá konstrukce stane staticky určitou. Vyšší zatížení již norma nedovoluje.

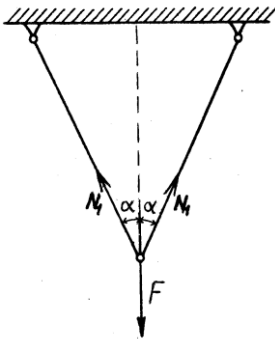
V případech, které se nemusí řídit normami, anebo u součástí, které budou tvářeny za studena, se může připustit větší přetvoření a větší trvalé deformace. Tomu ale musí odpovídat i příslušné materiálové vlastnosti, zejména vyšší tažnost.

Nyní si všimneme některých typických jevů při pružnoplastickém deformování. Pro snazší porozumění budou ilustrovány na nejjednodušších úlohách.

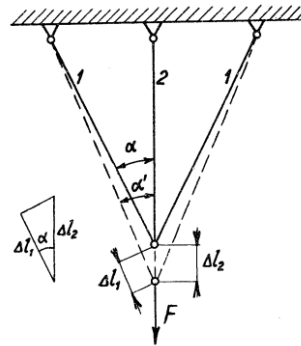
4.2 Soustava prutů zatížených tahem

Na obr. 4.5 jsou **dvě tyče**, zatížené tahovou silou F . Použijeme metodu myšleného řezu, a z rovnice rovnováhy sil do svíslého směru dostaneme po úpravě síly v tyčích:

$$N_1 = \frac{F}{2 \cos \alpha} \quad (4.5)$$



Obr. 4.5. Soustava dvou prutů.



Obr. 4.6. Soustava tří prutů.

Pro svislé posunutí spojovacího čepu δ platí (viz též Δl_2 na obr. 4.6):

$$\delta = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} = \frac{F l_1}{2ES \cos^2 \alpha} \quad (4.6)$$

V obou tyčích, které mají stejný průřez, působí stejné napětí:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S} . \quad (4.7)$$

Toto napětí dosáhne meze kluzu při zatížení

$$F_Y = \sigma_Y (2S \cos \alpha) = F_m . \quad (4.8)$$

Předpokládáme-li, že tyče jsou z ideálního pružnoplastického materiálu bez zpevnění, může materiál od dosažení meze kluzu v nich, a tedy od zatížení F_Y , plasticky téci bez omezení. Protože plastické deformování probíhá při konstantním napětí, bude i objem tyčí při plastickém tečení konstantní. S prodlužováním tyčí se proto zmenšuje jejich průřez, takže v něm stoupá skutečné napětí $\sigma_{skut} = N_1/S_{skut}$. Proces se tak stává nestabilní a po chvíli dojde k přetržení tyčí. Zatížení, při kterém bylo dosaženo meze kluzu, je tedy **mezní zatížení**, které se může označit F_m .

Nyní se podíváme na **soustavu tří prutů** podle obr. 4.6. Krajní tyče mají délku l_1 , prostřední tyč l_2 . Tato úloha je staticky neurčitá a její řešení je o něco složitější; je nutno využít deformační podmínku, že všechny tyče spojené čepem se budou deformovat jako jeden celek. Síly v nich jsou tedy navzájem vázány. Po řadě kroků dostaneme síly v prutech při pružném deformování [1, 2, 8]:

$$N_1 = F \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} , \quad (4.9)$$

$$N_2 = F \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha} . \quad (4.10)$$

Mají-li pruty stejný průřez S , budou napětí v nich

$$\sigma_1 = N_1/S , \quad \sigma_2 = N_2/S . \quad (4.11)$$

Napětí v prostředním prutu 2 je vyšší (s výjimkou případu $\alpha = 0$). Tento prut se začne plasticky deformovat, jakmile v něm napětí dosáhne meze kluzu. To je při celkovém zatížení soustavy

$$F_Y = \sigma_Y S (1 + 2 \cos^3 \alpha) . \quad (4.12)$$

Od tohoto okamžiku zůstává napětí v prutu 2 rovno mezi kluzu (předpokládáme materiál bez zpevnění) a působí v něm síla

$$N_2 = \sigma_Y S . \quad (4.13)$$

Úloha se stala staticky určitou a její řešení je jednodušší. Situace je stejná, jako u soustavy dvou prutů podle obr. 4.5, ale zatížených silou $F - N_2$. V krajních prutech je dosud napětí nižší než mez kluzu, takže soustava unese i vyšší sílu. Další zvýšení zatížení je ale přenášeno pouze krajními pruty, ve kterých působí síla

$$N_1 = \frac{F - N_2}{2 \cos \alpha} = \frac{F - \sigma_Y S}{2 \cos \alpha} . \quad (4.14)$$

Jakmile je také v nich dosažena mez kluzu, začnou bez omezení plasticky téci, a celá soustava se zhroutí. Odpovídající mezní zatížení je

$$F_m = \sigma_Y S (1 + 2 \cos \alpha) . \quad (4.15)$$

Pro $\alpha < 90^\circ$ je toto zatížení vyšší než F_Y ; soustavu lze tedy přetížit. Podívejme se, kolikrát je mezní zatížení F_m vyšší než zatížení F_Y , při kterém došlo v prutu 2 k plastickému tečení. Z poměru výrazů (4.15) a (4.12) dostaneme po úpravě:

$$\frac{F_m}{F_Y} = \frac{1 + 2 \cos \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \geq 1 . \quad (4.16)$$

Tento poměr ukazuje, kolikrát by bylo možno zkoumanou tříprutovou soustavu přetížit od okamžiku, kdy napětí v nejméně namáhaném prutu dosáhlo meze kluzu, až do zhroutení. Pro představu uvedeme tento poměr pro několik hodnot úhlu α :

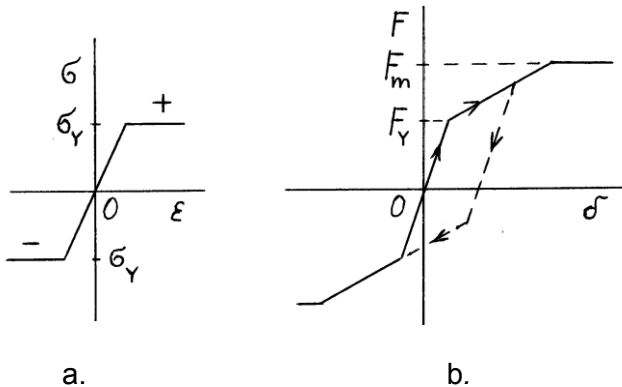
α	0°	30°	45°	60°	75°
F_m/F_Y	1	1,19	1,41	1,60	1,47

Vidíme, že při využití plastických možností materiálu, můžeme soustavu o dost přetížit. Anebo naopak můžeme pro určité zatížení dimenzovat pruty méně, a ušetřit tak materiál. Deformace při dosažení mezního stavu jsou (s výjimkou velkých úhlů α) jen o málo větší než při zatížení odpovídajícím počátku plastického tečení.

4.3 Stanovení deformací v pružnoplastickém stavu

Dokud není dosaženo mezního stavu, můžeme stanovit deformace tělesa prostřednictvím té jeho části, která se deformuje pouze elasticky (s přihlédnutím k vazbám mezi jednotlivými členy). Obrázek 4.7b ukazuje posouvání spojovacího čepu v závislosti na síle F . Je to **pracovní diagram tělesa**, na rozdíl od pracovního diagramu materiálu (obr. 4.7a). Diagram 4.7b má tři úseky. První, pro zatížení od

nuly do F_Y , odpovídá situaci, kdy se všechny pruty deformují pružně; posunutí čepu je možno počítat jako prodloužení prutu 2. Ve druhém úseku, pro zatížení $F_Y < F \leq F_m$, narůstají deformace rychleji, neboť prut 2 již není schopen přenášet větší sílu než $\sigma_Y S$. Deformace by se počítaly z prodloužení prutu č. 1 odpovídající síle N_1 podle vztahu (4.14). Jakmile zatížení dosáhne mezní hodnoty F_m , narůstají deformace bez omezení (třetí úsek lomené čáry na obr. 4.7b).



Obr. 4.7. Prutová soustava podle obr. 4.6. a – pracovní diagram materiálu, b – pracovní diagram součásti.

V pružnoplastickém stavu neexistuje přímá úměrnost mezi zatížením tělesa a deformacemi, takže nelze používat princip superpozice. Deformace je nutno vždy počítat pro konkrétní zatížení!

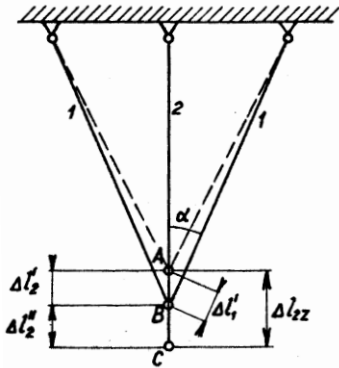
4.4 Situace po odlehčení

Dokud při zatížení nedosáhlo napětí nikde mez kluzu, jsou všechny deformace pružné, a po odlehčení zcela vymizí (obr. 4.6). Jestliže ale síla překročila hodnotu F_Y , prut 2 se již deformuje plasticky, a kdyby byl volný, zůstal by po odlehčení o něco delší. Pruty 1 by se naopak chtěly zkrátit na původní délku. Všechny jsou ale spojeny čepem. Trvale prodloužený prut 2 brání prutům 1 ve zkrácení na původní délku, takže v nich vyvolává trvalé tahové napětí. Naopak pruty 1 vyvolávají v prutu 2 trvalé napětí tlakové. Deformace jsou znázorněny na obr. 4.8. Odlehčování probíhá po přímce, která je rovnoběžná s počáteční částí pracovního diagramu součásti na obr. 4.7b. Obecně platí:

Zbytkové síly, deformace a napětí v tělese po odlehčení lze určit jako rozdíl skutečných hodnot v pružnoplastickém stavu, a hodnot stanovených pro stejné zatížení za předpokladu, že si těleso během zatěžování uchovalo pružné vlastnosti.

Také platí:

Po odlehčení bude v prutu (resp. v oblasti), kde došlo nejdříve k plastickému tečení, působit zbytkové napětí opačného znaménka.



Obr. 4.8. Tři pruty po odlehčení.

U naší soustavy budou zbytkové síly následující:

$$N_{1,res} = N_{1,ep} - N_{1,fikt,el}, \quad N_{2,res} = N_{2,ep} - N_{2,fikt,el}. \quad (4.17)$$

Index *ep* značí sílu v elastickoplastickém stavu při zatížení, index *fikt,el* označuje fiktivní elastické síly, které by dané zatížení vyvolalo, kdyby materiál měl například mnohem vyšší mez kluzu.

Po vyjádření jednotlivých veličin prostřednictvím vztahů (4.17) a (4.9, 4.10) dostaneme

$$N_{2,res} = \sigma_Y S - F \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha}, \quad (4.18a)$$

$$N_{1,res} = \left(F \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha} - \sigma_Y S \right) \frac{1}{2 \cos \alpha}. \quad (4.18b)$$

Zbytkové síly $N_{1,res}$ a $N_{2,res}$ jsou navzájem v rovnováze, protože nepůsobí žádné vnější síly. Reziduální napětí dostaneme vydělením zbytkových sil průřezem S .

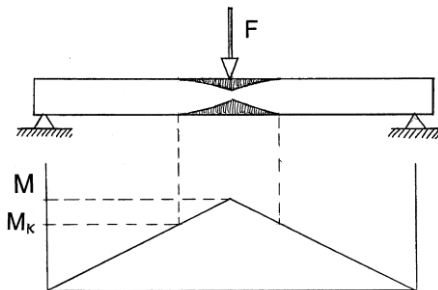
Při zatížení byl ve všech prutech tah. V našem případě bude tedy zbytkové napětí v prutu 2 tlakové a v prutech 1 tahové. Je to zřejmé i z rovnice rovnováhy sil:

$$2 N_{1,\text{res}} + N_{2,\text{res}} = 0, \quad \text{neboli} \quad N_{2,\text{res}} = -2 N_{1,\text{res}}. \quad (4.19)$$

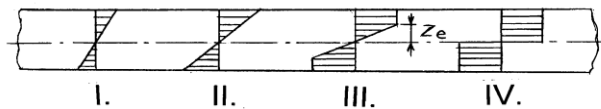
V tělese zůstala trvale zbytková napětí. Při novém zatížení se tato napětí a deformace sčítají s elastickými deformacemi a napětími od tohoto zatížení, a to až do dosažení maximální hodnoty zatížení z předchozího zatěžovacího cyklu. To znamená, že předchozím vyvoláním plastických deformací se zvýšilo zatížení, do kterého se těleso deformuje pružně (obr. 4.7). Ale pozor, u součástí z materiálů, které mají stejně vysokou mez kluzu v tahu i tlaku, se zplastizováním a vyvoláním zbytkových napětí může naopak snížit mez, při které dojde k plastickému deformování při zatížení opačného smyslu! Při opakovaném zatěžování tahem a tlakem by pak mohlo docházet v každém zatěžovacím cyklu k plastickému tečení a disipaci energie, a po určité době k nukleaci únavové trhliny.

4.5 Pružnoplastický ohyb

Nejprve ukážeme, jak se vyvíjí rozložení napětí při rostoucím zatížení. Na obr. 4.9 je nosník na dvou podporách, zatížený uprostřed příčnou silou. Obr. 4.10 ukazuje, jak se postupně mění rozložení napětí v nejvíce namáhaném průřezu uprostřed rozpětí. Pro jednoduchost se omezíme na obdélníkový průřez a ideální pružnoplastický materiál bez zpevnění (obr. 4.3c), se stejnou hodnotou meze kluzu σ_Y v tahu i tlaku. Je to idealizace, ale pro získání všeobecné představy je užitečná.



Obr. 4.9. *Elastickoplastický ohyb. Plasticky deformovaná oblast a rozložení momentů. M - ohybový moment, M_K - moment, při kterém napětí v krajních vláknech dosáhnou mez kluzu.*



Obr. 4.10. *Postupný vývoj rozložení napětí v obdélníkovém průřezu ohýbaného nosníku. a – pružný ohyb, b – pružný ohyb, maximální napětí dosáhlo meze kluzu, c – pružnoplastický ohyb, d – pružnoplastický ohyb, průřez byl zcela zplastizován.*

Zpočátku (obr. 4.10 I.) se materiál deformuje pouze pružně a napětí v průřezu rostou přímo úměrně se vzdáleností z od neutrální osy. V jedné polovině průřezu působí napětí tahová a ve druhé polovině napětí tlaková, a platí pro ně

$$\sigma(z) = \frac{M}{J} z. \quad (4.20)$$

M je ohybový moment v daném místě a J je moment setrvačnosti průřezu v ohybu. Pro obdélníkový průřez je $J = bh^3/12$; h je výška průřezu ve směru zatížení a b je jeho šířka. Podobné rozložení napětí existuje až do okamžiku, kdy maximální napětí na povrchu dosáhne meze kluzu σ_Y (obr. 4.10 II.). Odpovídající moment a zatížení v naznačeném případě je

$$M_Y = \sigma_Y W_0 = \sigma_Y \frac{bh^2}{6}; \quad F_Y = \frac{4M_Y}{l}, \quad (4.21)$$

W_0 je modul průřezu v ohybu a l je vzdálenost podpor. Při dalším zvyšování zatížení se charakter rozložení napětí mění. Tam, kde bylo dosaženo meze kluzu, již napětí dále neroste (předpokládáme materiál bez zpevnění, obr. 4.3 c). Přírůstek momentu nad M_Y tedy bude přenášen pouze materiálem v oblasti, kde je napětí dosud nižší než σ_Y . Deformace proto budou narůstat rychleji. Poblíž neutrální osy je elastické jádro s lineárním růstem napětí se vzdáleností od osy (obr. 4.10 III.). Ve větší vzdálenosti než z_e je materiál již plně zplastizován a napětí zde má konstantní hodnotu rovnou mezi kluzu σ_Y . Přechod mezi elastickým jádrem a plastickou oblastí je ve vzdálenosti od neutrální osy [1, 2, 5]:

$$z_e = \sqrt{3 \left(\frac{h^2}{4} - \frac{M_{el-pl}}{\sigma_Y b} \right)}; \quad (4.22)$$

M_{el-pl} je elasticko-plastický moment, větší než M_Y . S rostoucím zatížením se dále zvětšují tloušťky zplastizovaných oblastí a klesá tloušťka elastického jádra. To nakonec vymizí při mezní velikosti ohybového momentu

$$M_m = \sigma_Y \frac{bh^2}{4}; \quad (4.23)$$

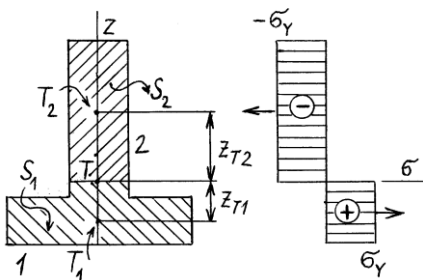
Nyní je průřez již zcela zplastizován (Obr. 4.10 IV.). Mezní moment je u obdélníkového průřezu o 50% vyšší než moment M_Y , při kterém bylo poprvé

dosaženo meze kluzu. Opět vidíme, že při využití plastických schopností materiálu může součást unést o dost více. (Anebo může být dimenzována o něco méně.) Prohnutí prutu v okamžiku dosažení mezního momentu ještě není veliké. U materiálu bez zpevnění by ale ohybový moment M_m mohl vést k neomezenému pootáčení obou ramen nosníku a ke zhroucení konstrukce. (U reálných materiálů k určitému zpevnění dochází.) Protože deformace jsou soustředěny v oblasti maximálního momentu, říkáme, že zde vznikne **plastický kloub** (obr. 4.9).

Podobná situace je i u jiných tvarů průřezu. Mezní pružnoplastický moment můžeme vyjádřit přímo, budeme-li uvažovat mezní rozložení napětí podobné jako na obr. 4.10 IV. Situace pro obecný tvar průřezu je nakreslena na obr. 4.11. Mezní moment dostaneme integrací přes celý průřez S . Přihlédneme-li, že při úplném zplastizování průřezu bude v každé jeho polovině napětí konstantní, rovné mezi kluzu, můžeme jej vypočítat jako

$$M_m = \int_{(S)} z \sigma(z) dS = \sigma_Y [z_{T1} S_1 + z_{T2} S_2] = \sigma_Y z_{T1T2} (S/2) \quad (4.24)$$

kde S_1 a S_2 jsou plochy jednotlivých polovin průřezu, a z_{T1} , z_{T2} jsou vzdálenosti jejich těžišť od neutrální osy celého průřezu; S je celková plocha průřezu a z_{T1T2} je vzdálenost těžišť jeho polovin. Neutrální osa půlí plochu plně zplastizovaného







Obr. 4.11. Plně zplastizovaný průřez:
a – geometrie, b – rozložení napětí.

průřezu. U nesymetrických profilů ale nemusí – na rozdíl od pružného ohybu – vždy procházet jeho těžištěm. Zjednodušeně lze mezní moment vyjádřit ve tvaru

$$M_m = \sigma_Y W_{pl} , \quad (4.25)$$

kde W_{pl} je tzv. plastický modul průřezu. Výpočetní vztahy pro některé tvary průřezu lze najít v tabulce 4.1 na následující stránce. V tabulce jsou také hodnoty poměru mezního momentu M_m a momentu M_Y , při kterém začnou v nosníku začínat první plastické deformace. Tento poměr udává, o kolik by bylo možno nosník ještě přetížít do dosažení mezního stavu.

TABULKA 4.1. Moduly průřezu v ohybu různých profilů.

PRŮŘEZ	W_{elast}	W_{plast}	$M_{o,m}/M_{oY} = W_{pl}/W_{elast}$
	$1/6 bh^2$	$1/4 bh^2$	$3/2 = 1,5$
	$\pi d^3/32$	$d^3/6$	$16/(3\pi) = 1,7$
	$\sqrt{2} a^3/12$	$\sqrt{2} a^3/6$	2
			$\approx 1,15$

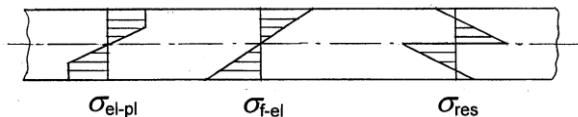
Vidíme, že více lze přetížít (proti začátku plastického tečení) profily, které mají více materiálu poblíž neutrální osy. Naproti tomu válcovaný I-profil, který má tenkou stojinu, má po zplastizování přírub již jen malou rezervu únosnosti.

Poznámka. Profily, které mají velkou přetížitelnost po dosažení začátku plastického tečení, jsou často takové, u kterých toto tečení začíná relativně brzy.

Jestliže během zatěžování tělesa došlo k plastickému tečení, zůstanou v něm po odlehčení **trvalé deformace**. Elastická složka deformací vymizí. Pokud bylo napětí v průřezu rozloženo nerovnoměrně, jako například při ohybu, budou v materiálu po odlehčení trvale působit i **zbytková napětí**. Velikost těchto napětí v určitém místě dostaneme, jestliže od skutečného napětí v pružnoplastickém stavu odečteme (fiktivní) napětí, které by zde působilo při stejném zatížení, pokud by se těleso deformovalo pouze pružně (tj. jako kdyby mělo mnohem vyšší mez kluzu):

$$\sigma_{res} = \sigma_{el-pl} - \sigma_{fikt-el} \quad (4.26)$$

Obr. 4.12 ukazuje rozložení zbytkových napětí v průřezu po vyvolání plastických deformací s rozložením napětí podle obr. 4.10 III. Opět platí:



Obr. 4.12. Elastickoplastický ohyb. Stanovení zbytkových napětí
 σ_{el-pl} – napětí v pružnoplastickém stavu, σ_{f-el} – fiktivní elastická napětí
 vyvolaná zatížením odpovídajícím σ_{el-pl} . $\sigma_{res} = \sigma_{el-pl} - \sigma_{f-el}$ – zbytková napětí.

V místech, kde při zatížení došlo nejdříve ke vzniku plastických deformací, budou zbytková napětí po odlehčení mít opačné znaménko než při zatížení.

Při plastickém tečení se pohlcuje mnohem více energie než při deformování elastickém. Proto například u materiálů pro součásti, které mají zmírnit náraz svým plastickým deformováním, požadujeme, aby bez porušení snesly velké trvalé přetvoření, tj. aby měly vysokou tažnost. Ta je zde důležitější než vysoká pevnost. U kovových prvků pro absorbování energie při rázech se často využívá ohybu [5], a je proto nutné, aby snesly bez lomu co největší ohnutí.

Některé další rysy plastického deformování a mezního stavu si ukážeme na tlustostěnné válcové tlakové nádobě.

4.6 Pružnoplastický stav tlustostěnné tlakové válcové nádoby

Ve stěně válcové tlustostěnné tlakové nádoby (obr. 4.13), zatížené vnitřním přetlakem p_1 , působí napětí obvodové (σ_t) a radiální (σ_r). Je-li nádoba uzavřená, působí ještě napětí σ_a v osové směru. Dokud je zatížení pružné, platí pro obvodové a radiální napětí [1, 8]

$$\sigma_t(r) = A + \frac{B}{r^2}; \quad \sigma_r(r) = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_z(r) = 2A - \sigma_r(r), \quad (4.27a)$$

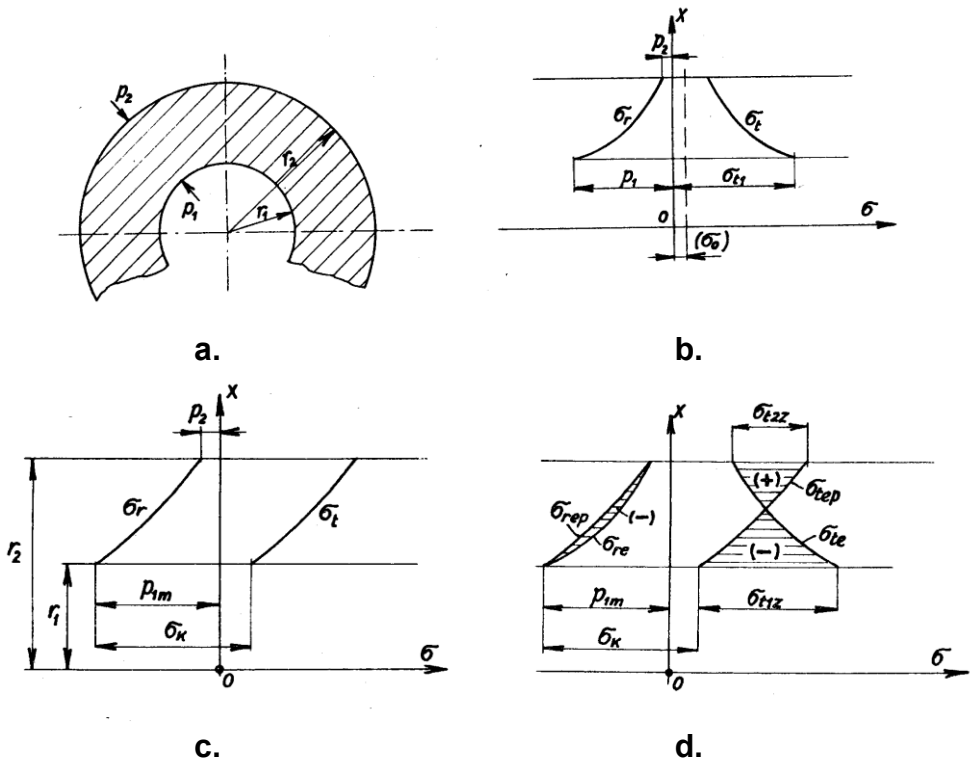
$$A = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} = \sigma_a; \quad B = p_a \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}; \quad (4.27b)$$

a je vnitřní poloměr a b vnější. Konstanta A je vyjádřena stejným vztahem jako osové napětí v uzavřené nádobě. Rozložení napětí je znázorněno na obr. 4.13b.

Nádoba z křehkého materiálu se poruší, jestliže maximální tahové napětí, tj. obvodové napětí na vnitřním povrchu, dosáhne meze pevnosti materiálu. U nádoby z houževnatého materiálu začne plastické tečení, jestliže ekvivalentní napětí zde dosáhne meze kluzu. Této situace si všimneme blíže. Pro jednoduchost budeme předpokládat ideální pružnoplastický materiál bez zpevnění a podmínku tečení podle Trescy, tj. s ekvivalentním napětím

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t(a) - \sigma_r(a) = \sigma_Y = \text{konst.} \quad (4.28)$$

Nemá-li k plastickému tečení dojít, musí být ekvivalentní napětí nižší než mez kluzu. Ze vzorců (4.27) – (4.28) lze odvodit vztah pro potřebnou tloušťku stěny,



Obr. 4.13. *Thlustostěnná válcová nádoba zatížená tlakem na vnitřní i vnější povrch. a – geometrie, b – napětí v pružném stavu, c – napětí při plně zplastizované stěně, d – napětí po odlehčení. p_1, p_2 – tlak na vnitřní a vnější povrch, σ_r – radiální napětí, σ_t – obvodové napětí, e – elastický, ep – elasticko-plastický, z – zbytkový.*

resp. pro vnější poloměr b stěny nádoby vzhledem k vnitřnímu poloměru a :

$$b = a \sqrt{1 / \left(1 - \frac{2p_a}{\sigma_Y / k} \right)} ; \quad (4.29)$$

$k (\geq 1)$ je požadovaná míra bezpečnosti; pro jednoduchost budeme uvažovat $k = 1$. Naopak tlak, při kterém začne plasticky téci materiál stěny o poloměrech a, b , je

$$p_{a,Y} = \frac{\sigma_Y}{2} \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] . \quad (4.30)$$

S rostoucím tlakem p_a tedy logicky potřebná tloušťka stěny narůstá. Ale jak se výraz $2p_a/\sigma_Y$ blíží k jednotce, jmenovatel v (4.29) se blíží k nule a potřebný vnější poloměr b se blíží k nekonečnu. Toho by bylo dosaženo pro $2p_a/\sigma_Y = 1$. To znamená, že pro $p_a > \sigma_Y/2$ nastane plastické tečení při jakékoliv tloušťce stěny!

Zpočátku k němu dojde pouze v tenké vrstvě u vnitřního povrchu. Nic zvláštního se však neděje, protože ji obklopuje daleko větší tloušťka materiálu, který se dosud deformuje pružně. S rostoucím přetlakem v nádobě ale tloušťka zplastizované vrstvy roste, a s ohledem na podmínku plastického tečení (4.28) se mění i rozložení napětí. Ve zplastizované vrstvě jsou rozložena podle logaritmické funkce:

$$\sigma_r(r) = \sigma_Y \ln \frac{r}{a} - p_a; \quad \sigma_t(r) = \sigma_r(r) + \sigma_Y \cdot \quad (4.31)$$

Jestliže přetlak v nádobě dosáhne mezní hodnoty

$$p_{a,m} = \sigma_Y \ln \frac{b}{a} \quad , \quad (4.32)$$

je zplastizovaná celá stěna. Rozložení radiálního i obvodového napětí je znázorněno na obr. 4.13c. Plastické tečení (v případě materiálu bez zpevnění) pak bude při tomto tlaku pokračovat až k roztržení stěny nádoby; $p_{a,m}$ je tedy skutečný mezní tlak.

Nyní se podíváme, jaké by bylo možné přetížení od počátku plastického tečení až k dosažení mezního stavu. Odpovídající poměr $p_{a,m}/p_{a,Y}$ dostaneme jako podíl rovnic (4.32) a (4.30):

$$k_{m,Y} = \frac{p_{a,m}}{p_{a,Y}} = \frac{2 \ln \frac{b}{a}}{1 - (a/b)^2} \quad . \quad (4.33)$$

Vidíme, že pro materiál bez zpevnění nezávisí přetížitelnost $k_{m,Y}$ na hodnotě meze kluzu. Pro názornou představu zde uvedeme, jak závisí na poměru vnějšího a vnitřního poloměru:

b/a	1,1	1,2	1,5	2	3	10	100
$k_{m,Y}$	1,098	1,19	1,46	1,85	2,47	4,65	9,21

Je vidět, že zejména pro tlustostěnné nádoby neznamená počátek plastického tečení ještě žádné nebezpečí dosažení mezního stavu.

Je-li tlak p_a vyšší než $p_{a,Y}$ a nižší než mezní tlak $p_{a,m}$, je stěna **částečně zplastizovaná**. Od poloměru a až k poloměru c je materiál plně zplastizován, a napětí jsou rozložena podle vztahů (4.31) a obr. 4.13c. Od poloměru c až k vnějšímu poloměru b je materiál deformován pružně (obr. 4.13b), s napětími podle vztahů (4.27). Poloměr c rozhraní mezi oběma oblastmi dostaneme řešením rovnice

$$p_a = \sigma_Y \left\{ \ln \frac{c}{a} + \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{c}{b} \right)^2 \right] \right\}, \quad (4.34)$$

získané z výrazů (4.27) a (4.32), ve kterých byly poloměry b , a nahrazeny poloměrem c .

Zbytková napětí po odlehčení, která lze vypočítat podle vztahu (4.26), jsou znázorněna na obr. 4.13d. Podobně jako v předchozích případech, i u tlustostěnné tlakové nádoby, která byla částečně zplastizovaná vnitřním přetlakem, bude po odlehčení trvale působit ve vrstvě u vnitřního povrchu tlakové obvodové napětí. Tento proces je někdy využíván pro zvýšení únavové odolnosti tlakových zařízení zatěžovaných cyklicky, jako jsou například hydraulické válce nebo dělové hlavě. Další praktický způsob využití plasticity ukážeme v oddílu 4.8.

4.7 Kritérium plastického tečení při víceosé napjatosti.

Při plastických deformacích za obecné víceosé napjatosti je vhodné pracovat s intenzitou napětí a intenzitou přetvoření. **Intenzita napětí** byla definována dříve:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \quad (4.36)$$

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (4.37)$$

Intenzita přetvoření je definována podobně:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}; \quad (4.38)$$

Při plastickém deformování je intenzita přetvoření obecně funkcí intenzity napětí,

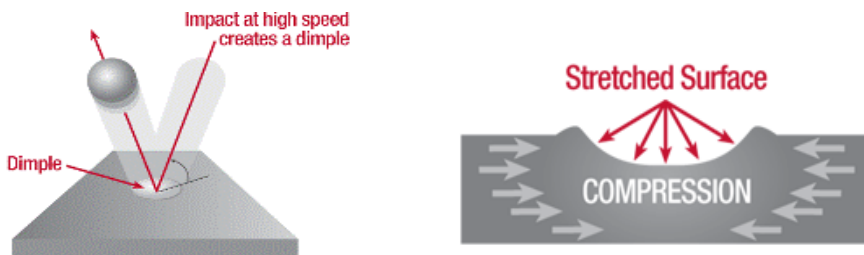
$$\varepsilon_i = f(\sigma_i). \quad (4.39)$$

Pro rozvinuté plastické deformace existují různé teorie. Bližší informace lze najít např. v [1 – 4].

4.8 Zvyšování únavové odolnosti kovových součástí

Růst únavových trhlin lze zastavit nebo zpomalit vytvořením trvalého tlakového předpětí v povrchové vrstvě. Nejběžnější metodou u tvárných materiálů je lokální plastické deformování například kuličkováním nebo válečkováním. Při těchto procesech je do povrchu zpevňované součásti vtlačován bod po bodu tvrdý nástroj malého průměru s oblým povrchem. Jedním procesem je tzv. kuličkování, kdy je na povrch vrhán proud tvrdých kuliček (proudem vzduchu nebo lopatkami otryskávacího zařízení, nebo po něm přejíždí přitlačovaný váleček o malém průměru, anebo na povrch naráží soustava tvrdých kolíků nebo jehel, uváděná do kmitavého pohybu elektrickým úderníkem, popřípadě ultrazvukem.

Princip vytvoření tlakového předpětí je následující. Při vtlačování kuličky nebo podobného tělíska do zpevňované součásti vznikají v její povrchové vrstvě vysoká kontaktní napětí a materiál je zde plasticky deformován. Tloušťka vrstvy plasticky deformovaného materiálu na elastickém jádře se zmenšuje a její šířka zde se zvětšuje – materiál teče v radiálních směrech (obr. 4.14). Materiál vně této vrstvy se jejímu trvalému rozšiřování přizpůsobuje elastickým roztahováním. Jakmile ale kulička odskočí a tlak na povrch pomine, snaží se pružně deformovaný materiál smrštít zpět na původní rozměry. Stlačuje tedy centrální plasticky rozšířenou část kontaktu, ve které tak vznikne trvalé (zbytkové) tlakové napětí. Tento proces probíhá všude, kam dopadly kuličky. Tímto způsobem se postupně vytvoří tlakové předpětí v celé povrchové vrstvě.



Obr. 4.14. Zvyšování únavové odolnosti houževnatých materiálů kuličkováním. Vlevo - schéma procesu, vpravo - vznik tlakového předpětí v povrchové vrstvě.

U součástí s vrubem se někdy zvyšuje únavová odolnost tak, že se součást řízeně přetíží tak, že v oblasti vrubu dojde k plastickému deformování [9]. Po odlehčení vznikne v tomto místě trvalé tlakové předpětí.

Literatura ke kapitole 4.

1. Kolektiv: Pružnost a pevnost II. Skriptum ČVUT, Fakulta strojní, Praha, 1985. 214 s.
2. Pešina, E.: Základy užité teorie plasticity. SNTL, Praha, 1966. 188 s.
3. Kuliš, Z.: Plasticita a creep I. ČVUT, Praha, 1986.
4. Hill, R.: The mathematical theory of plasticity. Clarendon Press, Oxford, 1950. (Ruský překlad: Matematičeskaja teorija plastičnosti. Moskva, GITTL, 1956.)
5. Menčík, J.: Rázy a vibrace. Univerzita Pardubice, Pardubice, 2018. 132 s. ISBN 978-80-7560-147-6. Volně dostupné na webu: <https://hdl.handle.net/10195/70531>, nebo zadat název knihy do vyhledavače Google.
6. Veles, P.: Mechanické vlastnosti a skúšanie kovov. ALFA, Bratislava, 1985. 408 s.
7. ČSN 73 1401. Navrhování ocelových konstrukcí. Český normalizační institut, 1998. 134 s.
8. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 375 s.
9. Fuchs, H. O., Stephens, R. I.: Metal Fatigue in Engineering. J. Wiley and Sons, New York, 1980.

5. Teplotní napětí

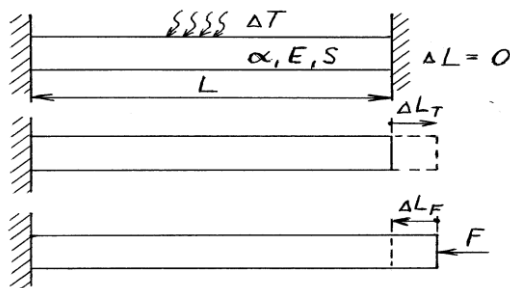
5.1 Základní vztahy

Nemůže-li těleso při změně teploty volně měnit své rozměry, vzniknou v něm teplotní napětí. Tato napětí a odpovídající síly nebo deformace mohou zhoršit nebo znemožnit provoz určitého zařízení, či dokonce vést k jeho poškození či zničení. Zde vysvětlíme jejich základní rysy na tyči z elastického materiálu (obr. 5.1).

Dojde-li k ohřevu volné tyče z teploty T_0 na T , změní se její délka z L_0 na L . Pro přírůstek délky, $\Delta L = L - L_0$, platí

$$\Delta L = \alpha L \Delta T, \quad (5.1)$$

kde $\Delta T = T - T_0$, a α je délkový součinitel teplotní roztažnosti (K^{-1}), který udává relativní zvětšení délky při zvýšení teploty o 1 K. Zde se omezíme na tak malé změny teplot, že budeme moci považovat součinitele teplotní roztažnosti za konstantu. Také změny průřezu budou zanedbatelné, takže výpočty sil nebo napětí bude možno provádět pro jeho původní rozměry.



Obr. 5.1. Teplotní napětí – princip stanovení

Poznámka. Je výhodné počítat jakýkoliv přírůstek jako rozdíl hodnoty okamžité a počáteční. Například rozložení teplot v tělese může být složité a na první pohled nemůžeme říci, jestli napětí v daném místě bude tahové (tj. kladné) nebo tlakové (záporné). Dodržení znaménkové konvence usnadní odpověď; bude jasná z konkrétních numerických hodnot. Vyjde-li výsledek kladný, víme, že působící napětí bude tahové (a naopak).

Jsou-li konce tyče upevněny v tuhé konstrukci, nemůže se při změně teploty její délka změnit (tzn. $\Delta L = 0$), a v tyči vznikne napětí. Jeho velikost dostaneme následujícím myšlenkovým experimentem, provedeným ve dvou krocích [1]. V prvním kroku uvolníme jeden konec tyče a tyč ohřejeme o ΔT . Tím se její délka zvětší o ΔL podle vztahu (5.1), ale v tyči nepůsobí žádné síly. Ve druhém kroku přiložíme k volnému konci tyče tlakovou sílu F , kterou budeme postupně zvyšovat. Tím se tyč opět zkracuje, až v určitém okamžiku bude volné prodloužení ΔL eliminováno. A právě odpovídající síla bude působit v ohřáté tyči s upevněnými konci. Můžeme tedy pro celkovou změnu délky napsat

$$\Delta L = \Delta L_T + \Delta L_F = 0 . \quad (5.2)$$

Indexy u jednotlivých složek ukazují, jedná-li se o přírůstek délky od teploty (T) nebo od síly (F). S přihlédnutím, že přírůstek délky tyče od síly F je obecně $\Delta L_F = FL/(ES)$, kde E je modul pružnosti materiálu tyče v tahu a S její průřez, dostaneme po rozepsání

$$\Delta L = \alpha L \Delta T + FL/(ES) = 0 , \quad (5.3)$$

a následně

$$F = -\alpha \Delta T E S . \quad (5.4)$$

Jestliže došlo ke zvýšení teploty tyče, je ΔT kladné. Pro běžné materiály, které se teplem roztahují, je také α kladné. Síla F vyvolá v tyči normálové napětí o velikosti

$$\sigma = -\alpha \Delta T E . \quad (5.5)$$

Znaménko mínus říká, že při zvýšení teploty ($\Delta T > 0$) vznikne v součásti tlakové napětí a tlaková síla.

Vztah (5.5) je mimořádně důležitý, neboť ukazuje hlavní veličiny, které mají vliv na velikost teplotního napětí, které vzniká při změně teploty v součásti bez možnosti teplotních dilatací:

1. změna teploty (ΔT),
2. teplotní roztažnost materiálu (α),
3. tuhost materiálu (E).

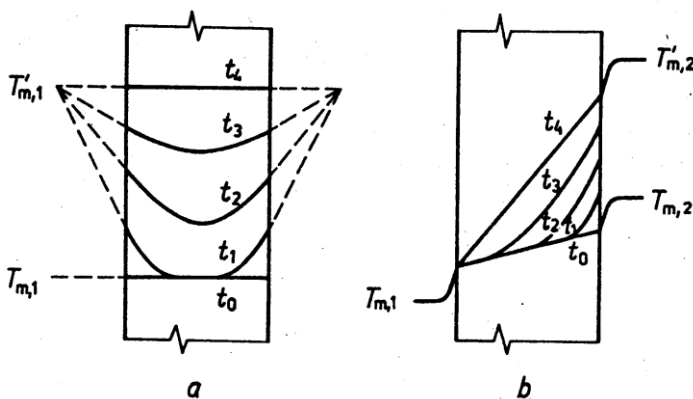
Chceme-li například teplotní napětí snížit, můžeme použít materiál s menší teplotní

roztlačností (α) nebo s nižším modulem pružnosti E (tj. poddajnější), anebo zmenšit teplotní rozdíl ΔT , například tepelnou izolací součásti v případě, že výměna tepla mezi ní a okolím trvá omezenou dobu. Jiným příkladem je skleněné nádobí nebo varné desky elektrických ploten. Při jejich používání lze očekávat prudké změny teploty, a proto se vyrábějí ze speciálního skla nebo sklokeramiky s extrémně nízkým součinitelem teplotní roztlačnosti.

Ze vztahu (5.5) můžeme také zjistit potřebnou hodnotu součinitele teplotní roztlačnosti, modulu pružnosti anebo přípustnou změnu teploty, nemá-li dojít k destrukci součásti.

Celková síla, která vznikne v součásti při znemožnění teplotních dilatací, je dána vztahem (5.4), který se liší od napětí (5.5) plochou průřezu S . Tato síla bude tím větší, čím větší je plocha průřezu tyče. Důsledky velké síly mohou být závažné. Například při snížení teploty bude síla v tyči tahová a překoná-li pevnost spojů, může dojít k jejímu odtržení od konstrukce nebo k jinému poškození; vysoké tahové napětí může způsobit přetržení tyče.

Dosud jsme uvažovali rovnoměrné rozložení teplot, a tedy i napětí v tělese. Dojde-li ke změně teploty okolí, začne se teplota tělesa měnit postupně, od povrchu směrem do hloubky. Situace je znázorněna na obr. 5.2. V prvých okamžicích je ovlivněna pouze tenká povrchová vrstva. Materiál v ní se chce roztáhnout nebo smrštít, podle toho, jestli je těleso ohříváno nebo ochlazováno. Rozměry vnitřku, kde je dosud původní teplota, jsou zatím beze změny a brání změnám rozměrů povrchové vrstvy. To znamená, že při ohřevu bude v povrchové vrstvě působit



Obr. 5.2. Vývoj teplot v desce ohřívané: a – z obou stran, b – z jedné strany.

tlakové napětí ve směrech rovnoběžných s povrchem. Naopak při ochlazování se na povrchu objeví tahové napětí. To může například způsobit až vznik prasklin v zubní sklovině, jestliže po horkém čaji přijde zub do styku s ledovou tekutinou.

Kvantitativní představu získáme na příkladu náhlé změny teploty povrchu desky, a to při tak malé tloušťce tepelně ovlivněné vrstvy, že se rozměry desky ve směru působících napětí prakticky nezmění. Napětí v povrchové vrstvě v hloubce z pod povrchem bude

$$\sigma(z) = -\alpha \Delta T(z) E / (1 - \mu) , \quad (5.6)$$

kde $\Delta T(z)$ je rozdíl mezi okamžitou teplotou v hloubce z a původní teplotou desky. Proti výrazu (5.5) je zde navíc ve jmenovateli člen $(1 - \mu)$, neboť v desce je teď izotropní rovinná napjatost, kdy napětí v určité hloubce mají stejnou hodnotu ve všech směrech rovnoběžných s povrchem.

Výslednice tlakových napětí v povrchové vrstvě musí být v rovnováze s výslednicí tahových napětí uvnitř tělesa. Dokud je tloušťka povrchové vrstvy zanedbatelná ve srovnání s tloušťkou vnitřku, jsou i napětí uvnitř zanedbatelná. Jak se tloušťka ovlivněné oblasti zvětšuje, roste i síla vyvozená tlakovým napětím v ní, a tedy i reakční síla tahová pod ní. Postupně se též mění střední teplota desky. Obecně musí pro rovnováhu sil platit

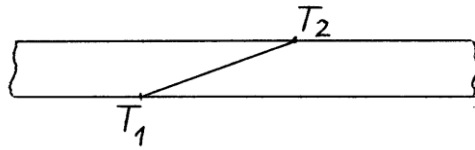
$$\int_{(h)} \sigma(z) dz = 0 , \quad (5.7)$$

kde h je tloušťka desky.

Jsou-li podmínky ohřevu nebo ochlazování na každém povrchu jiné, vytvoří se v desce nesymetrické rozložení teplot. To může vést k prohnutí desky a někdy i ke vzniku napětí. Nechť je tenká deska ohřívána z jedné strany, a to tak, že v ní vznikne lineární rozložení teplot napříč tloušťkou (obr. 5.3). Jestliže deska není nijak upevněna a má volné okraje, budou i roztažení materiálu v různých hloubkách rozložena podobně jako teploty, a deska se prohne do tvaru části kulové plochy o poloměru křivosti [2]

$$R = h / (\alpha \Delta T) , \quad (5.8)$$

kde h je tloušťka desky, α je součinitel teplotní roztažnosti a ΔT je rozdíl teplot obou povrchů; $\Delta T = T_1 - T_2$. Žádná napětí v ní nevzniknou. (Vztah (5.8) platí za předpokladu, že vzniklý průhyb je malý.)



Obr. 5.3. Lineární rozložení teplot napříč stěnou.

Je-li deska upevněna tak, že se nemůže prohýbat, objeví se v ní teplotní napětí. Ta budou rozložena napříč tloušťkou lineárně, podobně jako teploty a podobně jako při ohybu. Můžeme tedy o nich hovořit jako o ohybových napětích. Nejvyšší napětí působí na povrchu, a mají velikost

$$\sigma_{\max} = \pm \alpha \Delta T E / 2(1 - \mu); \quad (5.9)$$

Kladné znaménko, tj. tahové napětí, přísluší té polovině tloušťky, kde je teplota nižší než střední teplota $T_s = (T_1 + T_2)/2$. V opačné polovině působí napětí tlaková. Ve střední rovině je napětí rovno nule.

Tyto a další situace jsou podrobněji probírány v knihách [3 – 8].

Příklad.

Stanovte velikost napětí na povrchu skleněné desky v prvním okamžiku, kdy se její povrch ochladil náhle z teploty 100°C na 10°C. Součinitel teplotní roztažnosti $\alpha = 8,5 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $E = 72 \text{ GPa}$, $\mu = 0,2$.

Dosazením zadaných hodnot do vztahu (5.6) dostaneme tahové napětí

$$\sigma(0) = 8,5 \times 10^{-6} \times (100 - 10) \times 72000 / (1 - 0,2) = 68,85 \approx 69 \text{ MPa}.$$

4.2 Postupy zvyšování pevnosti tepelným zpracováním

Teplotní napětí mohou vést až k poškození tělesa, ale někdy mohou být i užitečná, například při zpevňování skla. Nedostatkem skla je nízká pevnost v tahu. Tento nedostatek lze zmírnit, jestliže na povrchu vytvoříme trvalé tlakové předpětí. O jeho hodnotu se zvýší tzv. technická pevnost skla. Toto předpětí lze získat vhodným tepelným zpracováním, tzv. tvrzením. (Jiný případ je zpevňování výměnou iontů, kterého si všimneme později.) Sklo je amorfní látka, která nemá pevnou teplotu tuhnutí, ale při ochlazování z vysokých teplot jeho viskozita postupně narůstá až na hodnoty, kdy se chová jako pevná látka. **Tepelné tvrzení skla** [4, 7, 8] spočívá v tom, že se skleněný předmět ohřeje na teplotu, při které

sklo začíná měknout, ponechá se na ní, až se teploty v celém objemu vyrovnají, a potom se rychle ochlazuje například proudem vzduchu. Při ochlazování se vytvoří spád teplot mezi chladnějším povrchem a teplejším vnitřkem (obr. 5.4). Současně dochází ke smršťování skla, více na povrchu a méně uvnitř. Dokud je sklo měkké, vyrovnávají se tyto deformace viskózním tečením a sklo zůstává bez napětí. Při přechodu přes tzv. transformační teplotu T_g jednotlivé vrstvy tuhnou a v tělese se fixuje uspořádání odpovídající danému rozložení teplot. Pokračuje-li ochlazování konstantní rychlostí, zůstává těleso bez napětí až do okamžiku, kdy teplota jeho povrchu klesne na teplotu okolí. Vnitřní, teplejší vrstvy dále chladnou a mají snahu se smršťovat. V tom jim ale brání vychladlé vrstvy vnější, takže v tělese vznikají napětí, na povrchu tlaková a uvnitř tahová. Protože sklo je již ztuhlé, nemohou se tato napětí vyrovnat a zůstávají v tělese jako trvalá.

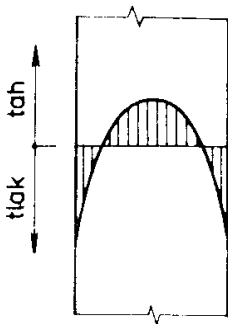
Rozložení napětí v tvrzeném skle odpovídá rozložení teplot přibližně v okamžiku přechodu přes transformační teplotu. Jestliže například byla skleněná deska tloušťky h ochlazována s nepříliš velkou intenzitou symetricky z obou stran, budou teploty v ní mít parabolický průběh podle obr. 5.4, o velikosti

$$T(x, t) = T_0(t) (1 - x^2/h^2) \quad (5.10)$$

kde T_0 je teplota v čase t ve střední rovině, a x je vzdálenost od ní. Po vychladnutí budou mít trvalá napětí rovnoběžná s povrchem velikost

$$\sigma(x) = \frac{\alpha E}{1 - \mu} T_g k \left(1 - 12 \frac{x^2}{h^2} \right), \quad (5.11)$$

kde k je parametr, který charakterizuje intenzitu ochlazování. Z tohoto vztahu vyplývá, že maximální tlakové napětí bude působit na povrchu ($x = h/2$) a bude mít



Obr. 5.4. Rozložení napětí v tvrzeném skle.

velikost

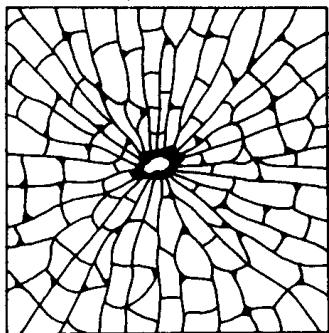
$$\sigma(h/2) = -2 \frac{\alpha E}{1 - \mu} T_g k \cdot \quad (5.12)$$

Toto napětí je v absolutní hodnotě dvakrát vyšší než tahové napětí uprostřed desky ($x = 0$), a tloušťka tlakové vrstvy je zhruba rovna jedné pětině tloušťky desky.

Vztahy (5.10) – (5.12) platí pro místa vzdálená od okrajů desky. Při uvažování vlivu okrajů je nutno užít numerické řešení, resp. vhodný počítačový program.

Zpevňování vytvořením tlakového předpětí v povrchové vrstvě má také své meze. Čím větší je tlakové předpětí na povrchu a čím větší je tloušťka tlakové vrstvičky, tím větší je celková tlaková síla v ní, která musí být v rovnováze s tahovou silou uvnitř. Tloušťka vnitřní části tedy musí být dostatečná na to, aby vyrovnala tlakovou sílu. To mimo jiné znamená, že zpevňování tvrzením nelze použít pro příliš tenká skla, protože zpravidla také existuje požadavek na určitou minimální tloušťku tlakové vrstvičky, aby nedošlo příliš snadno k jejímu proražení.

Přítomnost teplotních napětí také znamená, že v tělese je akumulována potenciální energie. Tvrzená skla se užívají mj. u dopravních prostředků (okna železničních vagonů, boční okénka automobilů). Dojde-li u takového skla například úderem kamínku s ostrými hranami k proražení tlakové vrstvičky až do oblasti, kde působí trvale tahové napětí, začnou se od místa poškození vnitřkem tabule samovolně šířit trhliny všemi směry. Jsou-li teplotní napětí vysoká, tyto trhliny se větví; uvolňovaná energie se mění na lomovou energii. Čím vyšší bylo vnitřní napětí, tím vyšší akumulovaná (a při lomu uvolňovaná) energie tomu odpovídá, takže vzniká větší množství menších kousků, na které se potom tabule samovolně rozpadne. Typický vzhled poškozené tabule je na obr. 5.5. Díky vhodnému rozložení napětí



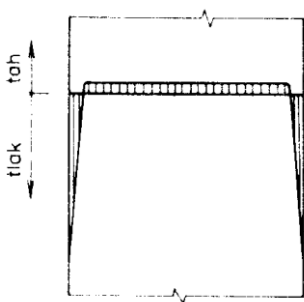
Obr. 5.5. Lom tvrzené skleněné tabule proražené ostrým předmětem [4].

v tvrzeném skle nemají jednotlivé úlomky ostré hrany a nejsou tak nebezpečné jako běžné střepy.

Tepelně tvrzená skla se dříve užívala u automobilů na všechna okna. Protože ale hustá síť trhlin znemožňuje výhled, anebo se poškozená tabule snadno vysype, dělají se dnes čelní skla vozidel z vrstveného skla. Obvykle se jedná o dvě netvrzené skleněné tabule spojené mezivrstvou polyvinylbutyralu (PVB). V tomto případě například letící kamínek vyrazí kousek skla, anebo praskne tabule na straně, kde působí tahové napětí, ale poškození nepronikne přes vrstvu PVB dále (viz též Kap. 11). Každý z nás někdy viděl takto poškozené sklo, například u autobusu.

Zpevňování skla se provádí se i **výměnou iontů**. [4, 8]. Při ní se v tenké povrchové vrstvičce (několik μm) vytvoří tlakové předpětí tak, že se zpevňovaný předmět ponoří na určitou dobu do žhavé lázně roztavených solí. Ionty příslušné soli difundují do skla a zůstanou zde trvale zabudovány. Protože mají větší poloměr než původní ionty skelné sítě, vyvolají v ní trvalé tlakové předpětí (obr. 5.6). Celý proces probíhá pod transformační teplotou skla, takže nedochází k uvolňování napětí viskózním tečením. V tomto případě je tlakové předpětí na povrchu velmi vysoké (několik set MPa), které je v rovnováze s velmi nízkým tahovým napětím uvnitř předmětu. Určitou výhodou je, že při porušení této vrstvičky nedojde k destrukci skleněného předmětu jako v případě tepelného tvrzení.

Teplotní napětí také vznikají při svařování kovů plamenem nebo obloukem. V oblasti svaru jsou teploty velmi vysoké a materiál se příslušně roztahuje. Roztavený anebo silně změkklý materiál se přizpůsobí okolním rozměrům a zůstává bez napětí. Ta se v něm začínou objevovat teprve v důsledku tuhnutí během chladnutí a zůstávají pak v tělese trvale. Pro jejich zmírnění se někdy provádí tzv. žíhání pro odstranění vnitřních pnutí.

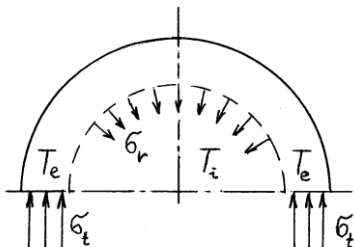


Obr. 5.6. Rozložení napětí ve skleněné desce zpevněné iontovou výměnou.

Jiným příkladem vzniku trvalých napětí v ocelových součástech je nitridování, povrchové kalení nebo cementování s následujícím kalením. Při posledním procesu vzniká martenzit v povrchové vrstvě bohaté na uhlík. Ten má větší měrný objem než původní perlit, který zůstal v nezakaleném jádře průřezu. Výsledkem je, že ve velmi tvrdé povrchové vrstvě vznikne navíc ještě příznivé tlakové předpětí.

Teplotní napětí se také mohou objevit při změně teploty v kompozitních materiálech nebo součástech, mají-li jejich složky různé součinitele teplotní roztažnosti. Význam znalosti teplotní roztažnosti budeme ilustrovat na zajímavém sporu řešeném v minulosti. U vzduchotěsných důlních lamp byl skleněný kryt pevně spojen s kovovou armaturou lepením epoxidovou pryskyřicí, a toto uspořádání dobře fungovalo. Po určité době se výrobce skla rozhodl, že zmenší sortiment vyráběných skel, a bude vyrábět pouze sklo, které má vyšší „tepelnou odolnost“ (přesněji vyšší odolnost vůči náhlým změnám teploty). Výrobce lamp si neuvědomil si, že vyšší tepelná odolnost je díky nižší teplotní roztažnosti nového skla ve srovnání se sklem původním, a s navrhovanou změnou typu skla souhlasil. A lampy začaly praskat, protože napětí, které vznikalo při lepení nového skla s armaturou, bylo vyšší než jeho pevnost. V tomto případě velikost sil mezi sklem a armaturou závisela na rozdílu mezi vyšší teplotou začátku vytvrzování lepidla a teplotou okolí, a na rozdílu teplotních roztažností armatury a skla. A tento rozdíl se při použití skla s nižší roztažností zvětšil. (Poznámka. S ohledem na složitý tvar spojených součástí je pro přesné stanovení napětí nutná počítačová analýza.)

Všimněme si ještě jednoho rysu ochlazování nebo ohřevu výrazně zaobleného povrchu. Například při ohřevu dlouhého válce nebo koule chce teplejší povrchová vrstva zvětšit svůj poloměr. Chladnější vnitřek jí v tom brání. V povrchové vrstvě proto vznikne tlakové napětí v obvodovém směru, popřípadě i v osové směru u válce (obr. 5.7). Navíc se ale mezi touto vrstvou a dosud chladným vnitřkem objeví tahové napětí v radiálním směru. (Při ochlazování by zde vzniklo radiální napětí tlakové a v povrchové vrstvě by působilo napětí tahové.) Pro získání jednoduché



Obr. 5.7. Vznik teplotních napětí při ohřevu masivního hřídele. T_i – teplota vnitřku, T_e – teplota povrchové vrstvy, σ_t – obvodové napětí, σ_r – radiální napětí mezi ohřátou vrstvou a vnitřkem.

představy můžeme předpokládat, že povrchová vrstvička je tenká a má tloušťku h , která je velmi malá ve srovnání s poloměrem křivosti R rozhraní mezi vrstvou a vnitřkem, a že její teplota (uvažovaná v celé tloušťce konstantní, rovná průměrné hodnotě) se liší od teploty vnitřku (kterou uvažujeme také konstantní) o ΔT .

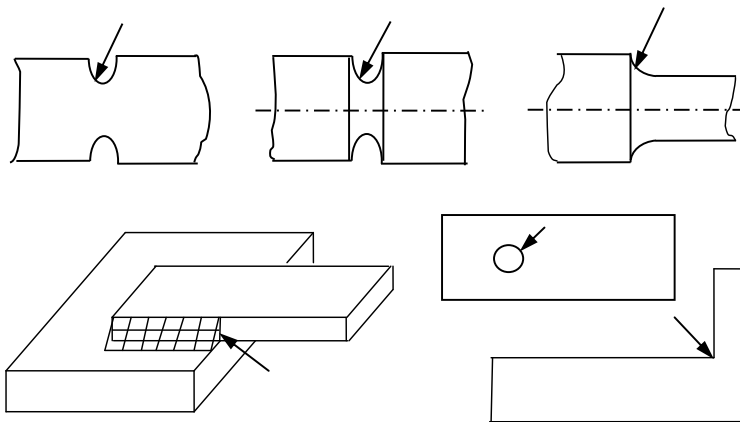
Literatura ke kapitole 5.

1. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 375 s.
2. Timošenko, S. P.: Soprotivlenije materialov II. Nauka, Moskva, 1965. 480 s. (Strength of materials, Part II. D. van Nostrand Company, inc., Princeton, New Jersey, 1956.)
3. Timoshenko, S. P., Goodier, J. N.: Teorija uprugosti. Nauka, Moskva, 1975. 576 s. (Theory of elasticity. 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1970.)
4. Menčík, J.: Pevnost a lom skla a keramiky. SNTL, Praha, 1990. 392 s.
5. Menčík, J.: Výpočty strojních součástí s povrchovými úpravami na pevnost a životnost. (Cyklus Stavba strojů, č. DT01-211-91) DT ČSVTS, Praha, 1991. 120 s.
6. Menčík, J.: Mechanics of Components with Treated or Coated Surfaces. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
7. Schill, F.: Chlazení skla a kontrola pnutí. SNTL, Praha, 1968. 194 s.
8. Novotný, V.: Zpevňování skla. (Hutní sklářská příručka). SNTL, Praha, 1972.

6. Koncentrace napětí

6.1 Úvod

Porušení součásti často vyjde z místa s náhlou změnou průřezu nebo tvaru, jako je například otvor, vrub nebo trhlina (obr. 6.1). Tato místa jsou zdrojem zvýšeného napětí, a proto se nazývají **koncentrátory napětí**. Přenos sil v zatíženém tělese z atomu na atom si můžeme představit pomocí siločar, analogických k proudnicím v tekoucí kapalině. Hustota siločar je úměrná napětí. Tam, kde je průřez konstantní nebo se mění zvolna, jsou siločary rozloženy v průřezu rovnoměrně, a stejně je rozloženo i napětí. V místě s náhlou změnou velikosti průřezu nebo tvaru, obecně ve vrubu, dochází k narušení plynulosti silového toku a k lokálnímu zhuštění siločar a zvýšení napětí. V průřezu vzniká složitá víceosá napjatost; napětí je maximální v kořeni vrubu na povrchu a směrem do hloubky klesá (obr. 6.2); u ostřejšího vrubu rychleji.

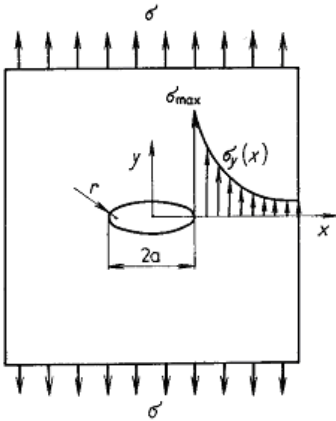


Obr. 6.1. Příklady vrubů v součástech. Šipky ukazují nebezpečná místa.

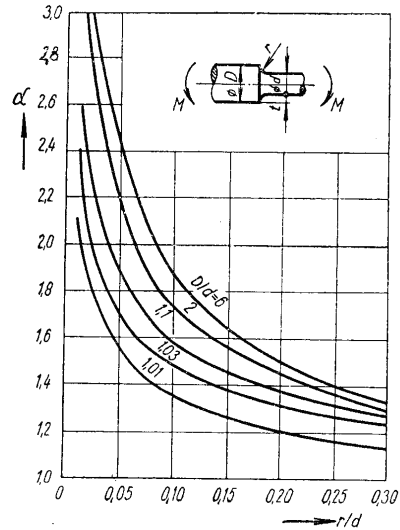
Analýza napětí ve vrubech je náročná. V dnešní době umožňují vhodné počítačové programy (např. metoda konečných prvků) získat podrobné rozložení napětí i v tělesech složitého tvaru včetně vrubů. V minulosti ale byla analýza možná jen pro jednoduché tvary, a proto se posuzování konstrukce omezovalo na zjištění maximálního napětí σ_{\max} v kořeni vrubu. To se vypočítá jednoduše pomocí vztahu

$$\sigma_{\max} = \alpha \sigma_{\text{nom}} \quad , \quad (6.1)$$

kde α je **součinitel koncentrace napětí** a σ_{nom} je jmenovité napětí v oblasti vrubu. Hodnoty tvarových činitelů α byly stanoveny pro technicky důležité tvary vrubů a způsoby zatížení, a lze je najít v různých příručkách, např. [1 – 4]; ukázka je na obr. 6.3. I tento přístup je užitečný, protože rychle poskytuje jednoduchou a názornou představu, důležitou pro praktické aplikace.



Obr. 6.2. Deska s otvorem a rozložení napětí u jednoho vrcholu.



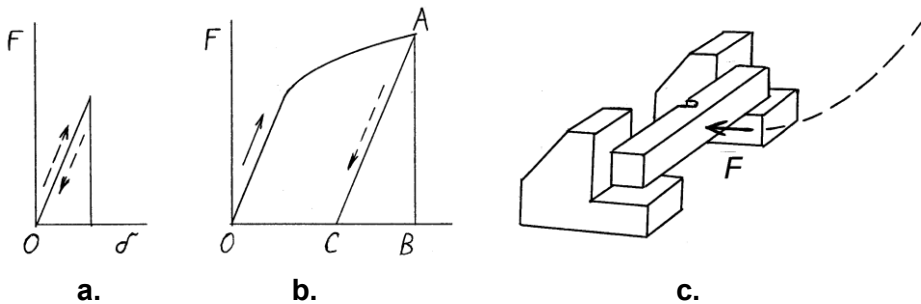
Obr. 6.3. Součinitel koncentrace napětí α pro osazený hřídel namáhaný ohybem.

Například součást z křehkého materiálu se poruší, jestliže maximální napětí v určitém místě dosáhne meze pevnosti σ_p . Ze vztahu (6.1) vyplývá, že u křehké součásti s vrubem dojde k porušení, jestliže jmenovité napětí dosáhne hodnoty

$$\sigma_{\text{nom}} = \sigma_p / \alpha. \quad (6.2)$$

Prakticky to znamená, že **vrub** sníží technickou pevnost α -krát! U součástí z tvárných materiálů při pomalém jednorázovém zatížení nejsou vruby tak nebezpečné, protože jakmile maximální napětí dosáhne někde mez kluzu materiálu, dochází zde k plastickému tečení, napětí v těchto místech již neroste tak rychle a rostoucí zatížení pomáhají přenášet oblasti, ve kterých je napětí dosud nižší a může tedy narůstat, jak o tom bylo pojednáno v kapitole 4. Přesto znamená vrub značné nebezpečí zejména při rázovém zatížení (viz dále). V případě střídavého zatěžování únavová trhlinka také zpravidla vyjde z koncentrátoru napětí; snížení meze únavy je však menší, než udává vztah (6.2).

Nemá-li se těleso porušit při rázovém zatížení, musí být schopno pohltit energii rázu. Jestliže se deformuje pružně, je spotřeba energie malá (obr. 6.4a). Tam, kde



Obr. 6.4. Deformační práce. **a** – pružné deformování, **b** – deformace pružnoplastické. $OABO$ – práce vynaložená během zatěžování, CAB – energie uvolněná při odlehčení. **c** - Zkouška vrubové houževnatosti kyvadlovým kladivem (Charpy).

napětí překročí mez kluzu, materiál se deformuje plasticky a spotřebovává se více energie (obr. 6.4b). U součásti s vrubem je v důsledku nehomogenního rozložení napětí v oblasti vrubu ale plastické tečení omezeno pouze na malý objem materiálu v těchto místech. Ve větších vzdálenostech jsou napětí nižší než mez kluzu a materiál se deformuje jenom pružně. Celková spotřeba energie například při nárazu je proto menší, než by byla u podobného tělesa bez vrubu, s napjatostí homogenní, kde jsou příznivější podmínky pro plastické tečení ve větším objemu. (Porovnejme na obr. 6.4b plochu odpovídající elastickému deformování, tj. do dosažení σ_Y , s plochou celého diagramu včetně plastického přetváření.) V tělese jednoduchého tvaru se energie, předaná při nárazu, rozloží do velkého objemu a odpovídající napětí budou poměrně nízká, zatímco v tělese s vrubem je stejné množství energie soustředěno v mnohem menším objemu, takže zde vyvolá intenzivnější plastické tečení, až popřípadě vyčerpání přetvárné schopnosti materiálu a následný lom. Vliv vrubu lze ilustrovat na příkladu rázového zatížení trámečku bez vrubu a s vrubem, jaký se užívá při zkouškách vrubové houževnatosti (obr. 6.4c). Je-li vzorek hladký, o tloušťce rovné minimální tloušťce vzorku s vrubem, padající kladivo jej ohne, zatímco vzorek s vrubem je přeražen s rysy křehkého lomu. A přitom vzorek s vrubem byl celkově masivnější – až na tu oblast s vrubem. Je zřejmé, že samotné přidání materiálu nemusí znamenat zvýšení bezpečnosti součásti, pokud materiál nebyl přidán na správném místě. (Viz též v kapitole 14 stať o účinku žeber.)

Dále si všimneme podrobněji případu koncentrace napětí u otvorů v součásti.

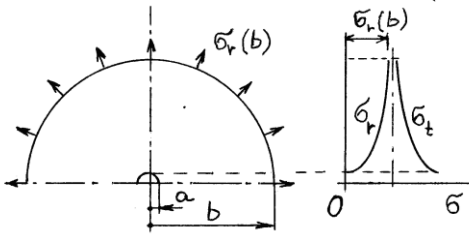
6.2 Napětí v okolí otvorů

Hlavní rysy napjatosti ukážeme na několika typických případech.

1) První případ je malý kruhový otvor o poloměru a v ose kruhové desky o poloměru $b \gg a$ (obr. 6.5). Vnější obvod desky je zatížen rovnoměrně rozloženým radiálním tahovým napětím $\sigma_r(b) = \sigma_{rB}$. Ve vzdálenosti r od osy působí obvodové napětí σ_t a radiální napětí σ_r , pro která platí [3 – 6]

$$\sigma_t(r) = \sigma_{rB} \left(1 + (a/r)^2 \right), \quad \sigma_r(r) = \sigma_{rB} \left(1 - (a/r)^2 \right). \quad (6.3a,b)$$

Na povrchu otvoru ($r = a$) nepůsobí žádné radiální napětí, $\sigma_r(a) = 0$, a obvodové napětí zde má velikost $\sigma_t(a) = 2\sigma_{rB}$. Je tedy dvakrát vyšší než napětí na zatíženém vnějším okraji, takže součinitel koncentrace napětí $\alpha = 2$. Pokud by v desce nebyl žádný otvor, působilo by v ní všude a ve všech směrech napětí σ_{rB} . Přítomnost otvoru tedy znamená lokální zvýšení napětí v těchto místech na dvojnásobek.



Obr. 6.5. Napětí v okolí kruhového otvoru v desce při zatížení izotropním tahem.

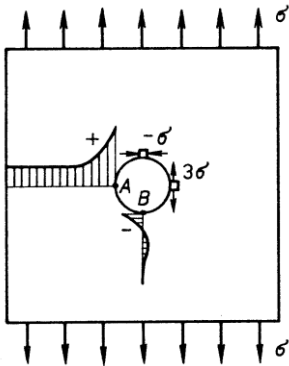
Stejně zvýšení napětí bude i v okolí malého otvoru ve velké čtvercové desce, zatížené na všech okrajích stejně velkým tahovým napětím σ_{rB} . Také v této desce je napjatost dvojosá izotropní, podobně jako u desky kruhové.

2) Ve druhém případě uvažujeme malý kruhový otvor o poloměru a ve velké čtvercové desce zatížené na okrajích jednoosým tahem σ_0 (obr. 6.6). Zde pro obvodové napětí platí [3, 6]

$$\sigma_t(r, \varphi) = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi; \quad (6.4)$$

φ je úhel mezi směrem tahového napětí a bodem na poloměru r , ve kterém určujeme napětí. Nejvyšší hodnoty má obvodové napětí na povrchu otvoru, kde se mění s úhlem φ podle vztahu

$$\sigma(\varphi) = \sigma_0 (1 + 2 \cos 2\varphi). \quad (6.5)$$

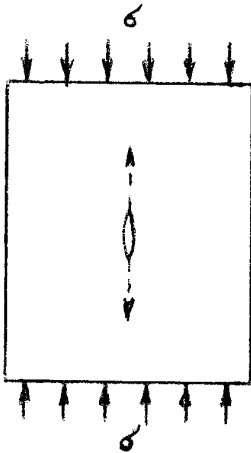


Obr. 6.6. Napětí v oblasti kruhového otvoru ve velké desce zatížené tahem ve svislém směru. Na obvodě otvoru působí v bodech 1 maximální tahové napětí 3σ ; v bodech 2 působí tlakové napětí o velikosti $-\sigma$.

V bodech A působí maximální tahové napětí o velikosti $\sigma_t(A) = 3\sigma_0$, takže součinitel koncentrace napětí je $\alpha = 3$. Odsud se plynule mění až k tlakovému napětí v bodě B o hodnotě $-\sigma_0$. To má několik zajímavých důsledků. Pokud takto zatíženou desku zatížíme na okrajích ještě napětím σ_0 v kolmém směru, dostaneme izotropní napjatost s napětím σ_0 ve všech směrech. Na povrchu otvoru pak bude všude v obvodovém směru působit tahové napětí $2\sigma_0$, podobně, jak jsme ukázali v předchozím odstavci. Například pro svislý směr platí $3\sigma_0 + (-\sigma_0) = 2\sigma_0$, a platí to i pro jakýkoliv další směr v rovině desky.

3) Třetí případ představuje zatížení desky čistým smykem. Takové zatížení se vyskytuje například v součástech namáhaných krutem. Jak je zřejmé z Mohrovy kružnice (obr. 1.5d), můžeme si tuto napjatost představit také jako složenou z tahového napětí σ_0 působícího pod úhlem 45° , a k němu kolmého tlakového napětí o stejné velikosti, tedy $-\sigma_0$ (obr. 1.5d). Tahové zatížení vyvolá na povrchu otvoru v bodě A tahové napětí $3\sigma_0$, a tlakové zatížení v kolmém směru vyvolá v tomto bodě také tahové napětí, nyní σ_0 . Výsledné napětí je tedy tahové o hodnotě $4\sigma_0$, takže součinitel koncentrace napětí na otvoru je nyní $\alpha = 4$. Otvor v dutém hřídeli přenášejícím krouticí moment je proto nebezpečnější než například v tyči namáhané tahem nebo v přírubě nosníku namáhaného ohybem.

4) Zajímavá situace je na obr. 6.7. Trhlina vyběhající z otvoru v naznačeném místě může růst při zatížení tyče tlakovou silou, a to ve směru zatížení, což vypadá na první pohled paradoxně. Je to dáno tím, že tato trhlina se nachází v oblasti tahového napětí působícího kolmo k její rovině (viz bod B na obr. 6.6). Pokud je deska široká, trhlina se zastaví, jakmile se dostane do oblasti, kde tahové napětí,



Obr. 6.7. Šíření trhliny ve směru působícího tlakového zatížení

způsobené přítomností otvoru, je již nízké. Naopak relativně dlouhá trhlina vyběhající z otvoru v nepříliš širokém pásu by mohla růst i dále, kdyby došlo k boulení obou polovičních páسů po jejich stranách, a tedy k jejímu rozevírání.

5) Na obr. 6.2 je eliptický otvor ve velké desce z elastického materiálu, zatížené kolmo k dlouhé ose elipsy [3]. Maximální napětí ve vrcholech delších poloos, je

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{nom}} \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right); \quad (6.6)$$

σ_{nom} je jmenovité napětí v desce, a je délka delší poloosy elipsy, a ρ je poloměr křivosti vrcholu elipsy v tomto místě. Maximální napětí je tím větší, čím je elipsa užší. Pro hodně velké poměry a/ρ přejde vztah (6.6) na

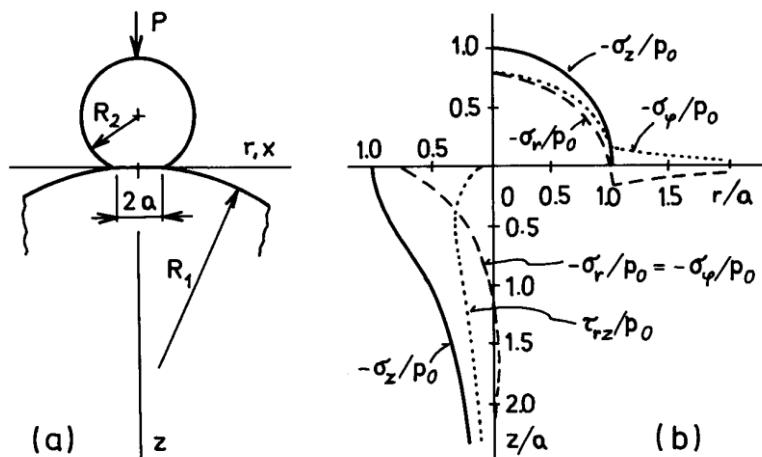
$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{nom}} 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}}. \quad (6.7)$$

Pro ρ blížící se k nule se eliptický otvor blíží k trhlině a maximální napětí σ_{\max} roste nade všechny meze. Tohoto případu si ještě všimneme v kapitole o lomové mechanice.

Kromě otvorů existuje mnoho dalších tvarů koncentrátorů napětí. Každá náhlá změna tvaru nebo velikosti průřezu působí jako vrub. Obecně platí, že zvýšení napětí ve vrubu je tím větší, čím větší je jeho hloubka (nebo čím větší je změna průměru hřídele nebo tloušťky součásti), a čím menší je poloměr zaoblení jeho kořene nebo přechodu rozměrů. Výraznou roli ale hraje i tvar vrubu. Ukazuje se, že i malá změna tvaru může znamenat velké snížení maximálního napětí. Těmto otázkám se věnujeme více v kapitole 14 o tvarové optimalizaci.

6.3 Napjatost při koncentrovaném kontaktu

Lokální vysoká napětí také někdy působí při vzájemném dotyku dvou těles. Situaci budeme ilustrovat na případě, kdy jedno nebo obě tělesa mají zaoblené povrchy. V místě styku se vytvoří malá kontaktní ploška, kterou se přenáší silové působení z jednoho tělesa na druhé a tlak zde často dosahuje vysokých hodnot. Napjatost v těchto místech je složitá; napětí působí ve třech směrech, a se vzdáleností rychle klesají. Při nižších zatíženích se obě tělesa deformují pouze pružně. Napětí a deformace v tomto případě lze určovat podle teorie, kterou vypracoval Heinrich Hertz a další. Zde se omezíme na kontakt dvou koulí, přitlačovaných k sobě normálovou silou F (obr. 6.8). Počáteční styk je v jednom bodě. Se zvyšováním síly se obě tělesa deformují a vzniká zde kruhová kontaktní ploška o poloměru a , která se při nárůstu zatížení postupně zvětšuje. Proto je závislost mezi zatěžující silou a napětími nebo deformacemi i při elastickém kontaktu nelineární.



Obr. 6.8. Kontakt dvou koulí. **a** – geometrie, **b** – rozložení kontaktních napětí: obrázek nad vodorovnou osou: napětí v kontaktní plošce, obrázek pod osou: napětí pod povrchem v ose kontaktu. Podle [7].

Rozložení tlaku v kontaktní plošce je parabolické (hořejší část obrázku 6.8b), s maximální hodnotou p_0 uprostřed [6 – 9]:

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a^2} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{6PE_e^2}{R_e^2}} \quad (6.8)$$

kde ekvivalentní křivost $1/R_e$ styku těles (převrácená hodnota poloměru křivosti) je rovna součtu jejich křivosti:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} ; \quad (6.9)$$

R_1 a R_2 jsou poloměry křivosti obou povrchů v místě kontaktu. R_j dosazujeme jako kladné, jedná-li se o vypouklý povrch, a jako záporné u vydutého povrchu. U tělesa s rovným povrchem dosazujeme za křivost $1/R_j$ nulu. E_e je ekvivalentní modul pružnosti obou materiálů, který se vypočítá ze vztahu

$$\frac{1}{E_e} = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} . \quad (6.10)$$

V tomto případě se sečítaly převrácené hodnoty modulů, tj. poddajnosti, podobně jako u dvou pružin v sérii. Poissonova čísla μ_1 , μ_2 jsou tady proto, že jsou spolu vázány deformace v navzájem kolmých směrech.

Střed y obou těles se sblíží o hodnotu

$$w = \sqrt[3]{\frac{9P^2}{16RE_e^2}} = CF^{2/3} ; \quad (6.11)$$

C je konstanta, vyjadřující kontaktní poddajnost. Vztah (6.11) je nelineární, takže nelze používat princip superpozice; vždy je nutno úlohu řešit pro konkrétní výsledné zatížení.

Poloměr kontaktní plošky je

$$a = \sqrt[3]{\frac{3PR_e}{4E_e}} . \quad (6.12)$$

Rozložení kontaktních napětí je znázorněno na obr. 6.8b. V okraji kontaktní plošky na povrchu působí tahové radiální napětí, tj. kolmé k jejímu okraji,

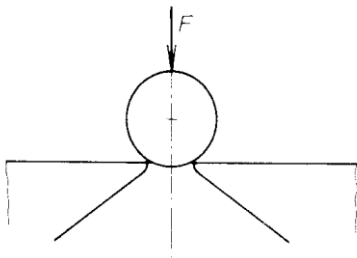
$$\sigma_{r,\max} = \frac{1 - 2\mu}{3} p_0 . \quad (6.13)$$

V oblasti kontaktu působí i smykové napětí. Na ose v hloubce $a/2$ nabývá maximální hodnoty; pro $\mu = 0,3$ to je

$$\tau_{\max} \approx 0.31 p_0 . \quad (6.14)$$

Podobné rysy má napjatost i při jiných tvarech dotýkajících se povrchů. Vztahy podobného typu pro kontaktní tlak, napětí a deformace lze používat i při styku válců nebo dalších těles, a nemusí se jednat o tělesa celá, například koule. Stačí, když povrchy v okolí kontaktu aproximujeme částí kulové nebo válcové plochy, anebo – u složitějších tvarů se zakřiveními ve dvou směrech – pomocí půlelipsoidů; příslušné vztahy lze najít např. v [6, 8, 9].

Vysoká napětí v místě kontaktu mohou vést k porušení. Jestliže v křehkém materiálu dosáhne tahové radiální napětí na okraji kontaktní plošky meze pevnosti, vznikne zde malá prstencovitá trhlinka. Jak stoupá tlak na kontaktní plošku, je materiál pod ní tlačěn ve směru síly P a okolní materiál tomu brání. Mezi materiálem vně kontaktu a uvnitř kontaktu (tj. pod zatěžující silou) tak působí smyková napětí, a to i na okraji trhliny, která se postupně rozšíří do tvaru kuželové plochy (obr. 6.9; odpovídající tahové napětí, které trhlinku rozevívá, svírá s osou v každém bodě úhel 45°). Naopak v případě tvárné látky začne materiál nejprve plasticky téci pod povrchem na ose, a to v hloubce $a/2$, jakmile zde maximální smykové napětí dosáhne hodnoty $\sigma_Y/2$. Zplastizovaná oblast se postupně zvětšuje a při několikanásobně vyšším zatížení pronikne až k povrchu [7].



Obr. 6.9. Vznik kuželové trhliny při koncentrovaném kontaktu (tzv. Hertzův kuželový lom).

Pod povrchem houževnatého materiálu se také může vytvořit únavová trhlinka při opakovaném kontaktu, například u valivých kovových ložisek. Takováto trhlinka postupně roste, až po určité době vyjde na povrch, a dojde zde k odloupenutí malé částice materiálu. Tato postupná degradace povrchu se označuje jako pitting.

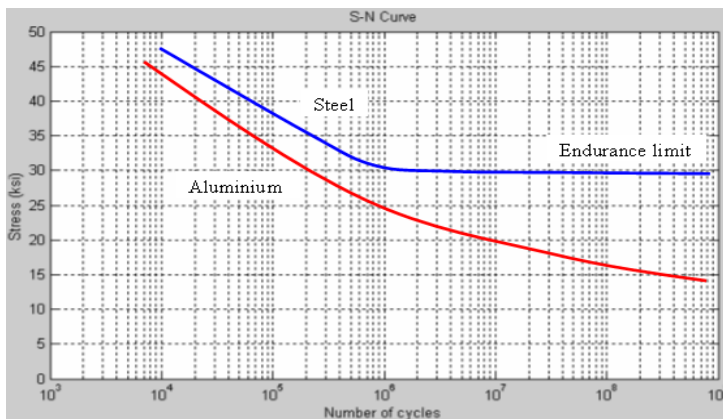
Literatura ke kapitole 6.

1. Höschl, C. a kol.: Tabulky pro konstruktéry. 2.vyd. SNTL, Praha, 1961. 23 s. + volné přílohy (156).

2. Černoch, S.: Strojně technická příručka. 12. vydání, díl 1, kapitola 5.11. SNTL, Praha, 1968. 1183 s.
3. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 375 s.
4. Peterson, R. E.: Stress Concentration Factors. J. Wiley and Sons, New York, 1974.
5. Kolektiv: Pružnost a pevnost II. Skriptum ČVUT, Fakulta strojní, Praha, 1985. 214 s.
6. Timoshenko, S. P., Goodier, J. N.: Teorija uprugosti. Nauka, Moskva, 1975. 576 s. (Theory of elasticity. 3rd Ed., McGraw-Hill, New York, 1970.)
7. Menčík, J.: Pevnost a lom skla a keramiky. SNTL, Praha, 1990. 392 s.
8. Němec, J., Dvořák, J., Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1989. 600 s.
9. Birger, I. A., Panovko, Y. G.: Pročnosť, ustojčivost', kolebanija. Tom 2. Mašiniostrojenije, Moskva, 1968.

7. Odezva při střídavém zatěžování - únava

U kovových součástí zatěžovaných cyklicky nebo periodicky dochází někdy po určité době k porušení únavou. Tento jev se začal projevovat ve větší míře s rozvojem parních strojů, železnic a další dopravní techniky, ale i různých strojů s rotujícími součástmi; vyskytuje se též u stavebních a dalších konstrukcí. Na obr. 7.1 je schematicky znázorněna závislost mezi amplitudou napětí a počtem cyklů do poruchy, tzv. Wöhlerova nebo $S-N$ křivka. S klesající amplitudou σ_a počet cyklů do lomu roste; je-li σ_a nižší než tzv. **mez únavy** σ_c (endurance limit na obr. 7.1), součást vydrží neomezený počet zatěžovacích cyklů. Situace je ale složitější, a například u hliníkových slitin mez únavy ani neexistuje. Roli také hraje charakteristické zatížení.

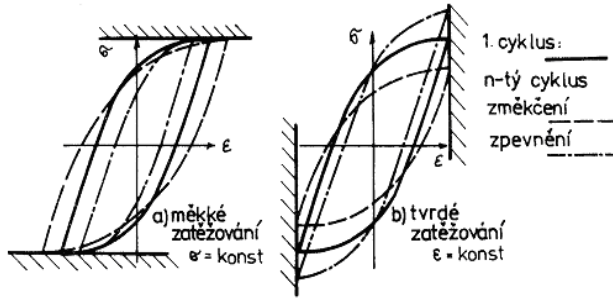


Obr. 7.1. Wöhlerova křivka [1]. Stress – napětí; 1 ksi = 6,89 MPa.

Porušení únavou má obecně čtyři etapy: 1) Změna mechanických vlastností, 2) vznik trhliny, 3) Pomalý růst trhliny až do dosažení kritické velikosti, a 4) Rychlá fáze lomu. Zde si všimneme změny vlastností; růst trhlín je probíráán v kapitole 8.

7.1 Změna mechanických vlastností

Již při velmi nízkých napětích (řádově MPa) dochází v materiálu k pohybu dislokací; na diagramu tahové zkoušky to ale ještě není ani znát. Při střídavém zatěžování se tvoří nové dislokace, některé se navzájem blokují, a některé naopak mizí. Navenek se to projevuje postupnou změnou vlastností (Obr. 7.2); hovoříme o

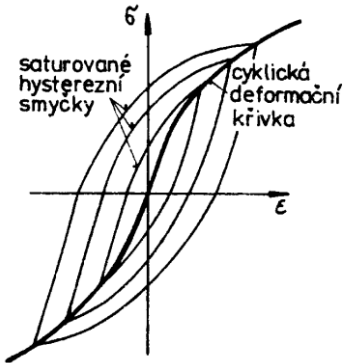


Obr. 7.2. Příklady cyklického změkčování a zpevnování [2].

tzv. cyklickém zpevnování nebo změkčování. První případ nastává například u ocelí žíhaných, s malým počtem dislokací, kdy se tvoří nové; změkčování naopak nastává u ocelí o vysoké pevnosti. Po několika desítkách až stech zatěžovacích cyklů se již vlastnosti nemění; hysterezní smyčka je saturovaná. Spojením krajních hodnot těchto smyček pro různé rozkmity napětí nebo deformace dostaneme tzv. cyklickou deformační křivku (obr. 7.3). Ta se obvykle popisuje vztahem

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{a,el} + \varepsilon_{a,pl} = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K'} \right)^{1/n'} ; \quad (7.1)$$

K' a n' jsou konstanty, které se zjišťují experimentálně.

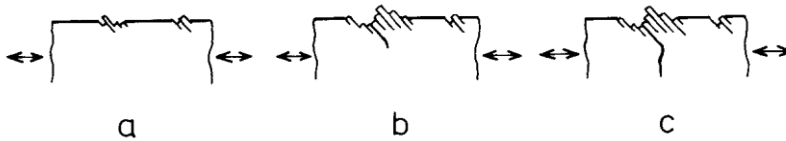


Obr. 7.3. Cyklická deformační křivka [2].

7.2 Vznik a růst únavových trhlin

Únavový lom zpravidla vyjde z nějakého koncentrátoru napětí. Ale i bez něj může při střídavém zatěžování dojít k nukleaci únavové trhliny v kovovém materiálu, je-li amplituda napětí vyšší než jeho mez únavy [2 – 8]. U polykrystalických kovů dochází k mikroplastickým deformacím a pokluzům v šikmých rovinách, kde působí

nejvyšší smykové napětí. Nejsnáze to probíhá v povrchové vrstvě, protože zde je jejich sklouzávání omezoáno méně než uvnitř tělesa (obr. 7.4). Při opakovaném zatěžování tu vznikají dislokace a mění se reliéf povrchu. Dislokace se postupně hromadí, čímž se narušuje souvislost materiálu, až od určitého okamžiku se toto místo jeví jako malá trhlinka. Ta nejprve roste ve směru největšího smykového napětí,



Obr. 7.4. *Vznik a růst únavové trhliny. a – pokluzu v povrchové vrstvě účinkem smykových napětí, b – vznik únavové trhliny ve směru maximálního smykového napětí, c – pootáčení trhliny do směru kolmého k nejvyššímu tahovému napětí.*

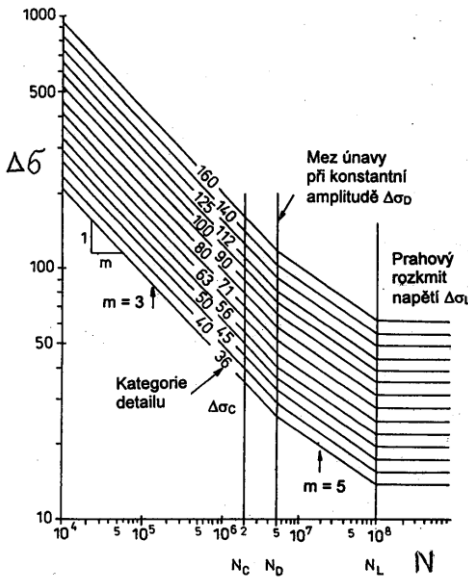
např. pod úhlem 45° k ose tyče zatížené osovou silou. (Podobně vzniká únavová trhlinka i na povrchu jakéhokoliv vrubu.) Po chvíli ale začne převažovat vliv makronapětí a únavová trhlinka se postupně stáčí do směru kolmého k nejvyššímu tahovému napětí (obr. 7.4c). Ovšem takováto trhlinka může dále růst pouze tehdy, jestliže alespoň po část zatěžovacího cyklu působí v její rovině tahové napětí. Naopak, dostane-li se do oblasti tlakového napětí, může se zastavit. Toho se využívá pro zvyšování únavové odolnosti, jak bylo ukázáno v kapitole 4.8.

7.3 Doba do porušení únavou

Při relativně nízkých napětích (a velmi vysokých počtech cyklů do porušení) hovoříme o vysokocyklové únavě. Ta je dobře charakterizována prostřednictvím amplitudy napětí. Existuje řada výrazů pro závislost počtu cyklů do poruchy N_f ; viz např. [2 – 8]. Nejjednodušší je Wöhlerova křivka (Obr. 7.1):

$$N_f = A \sigma_a^{-m}, \quad (7.2)$$

kde A , m jsou konstanty, zjišťované měřením, a σ_a je amplituda napětí. Ve zlogaritmovaném tvaru této funkci odpovídá přímka ($\log N_f = \log A - m \log \sigma_a$). Při vyšších amplitudách a nižších počtech cyklů již rovnice (7.2) není dostatečně přesná. Proto například v normě [9] pro kovové konstrukce se používá lomená přímka (obr. 7.5). Souvisí to mj. s tím, že doba do poruchy únavou má dvě hlavní etapy: doba do vzniku trhliny, a doba pomalého růstu trhliny, a pro každou platí jiný exponent. Při ještě vyšších zatíženích již Hookeův zákon přesně neplatí, a pro

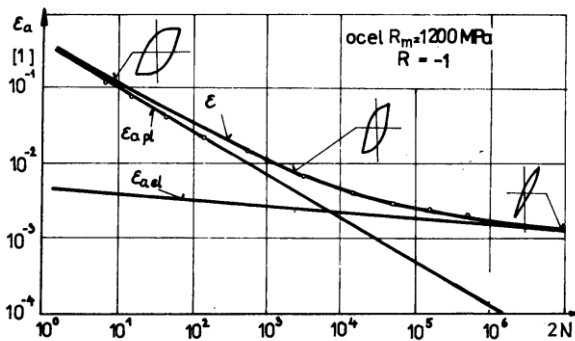


Obr. 7.5. Únavové křivky pro ocelové díly podle normy ČSN 731401 [9]. Exponent nízkocyklové únavy $m = 3$, exponent únavy vysokocyklové $m = 5$. Kategorie (číslo) detailu – viz normu.

stanovení doby do poruchy je vhodnější amplituda nebo rozkmit přetvoření. Hovoříme zde o nízkocyklové únavě. Pro vysokocyklovou i nízkocyklovou únavu je pak možno použít univerzální únavovou křivku (obr. 7.6):

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_f'}{E} (2N)^b + \varepsilon_f' (2N)^c \quad (7.3)$$

Má dvě asymptoty, které odpovídají elastické a plastické složce deformace ve vztahu (7.1). První složka, převládající u vysokocyklové únavy, je vlastně Wöhlerova křivka (7.2), vydělená modulem pružnosti. Druhá složka, tzv. Mansonova-Coffinova, vyjadřuje závislost počtu cyklů do poruchy na plastické



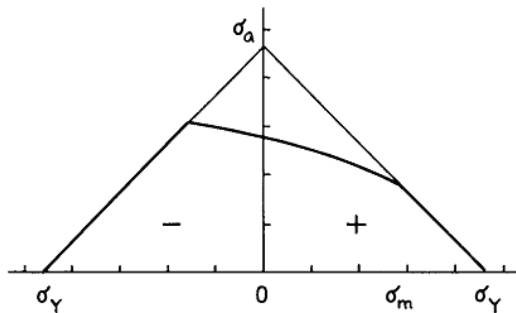
Obr. 7.6. Univerzální křivka pro nízko- a vysokocyklovou únavu [2].

složce amplitudy (ε_{apl}). Tomu odpovídají i názvy jednotlivých konstant: σ_f' je tzv. součinitel únavové pevnosti, b je exponent únavové pevnosti, ε_f' je součinitel únavové tažnosti, a c je exponent únavové tažnosti. Jejich hodnoty bývají uvedeny v materiálových listech. Vlevo od průsečíku obou asymptot hovoříme o únavě nízkocyklové, vpravo o únavě vysokocyklové.

Poznámka. Výraz $2N$ v rovnici (7.3) vyjadřuje počet půlcyklů. U nepravidelného, či náhodného zatěžování jsou půlcykly vhodnější, podobně jako rozkmit napětí $\Delta\sigma$ místo amplitudy ($\Delta\sigma = 2\sigma_a$), který se ze záznamu $\sigma(t)$ zjišťuje snadno jako rozdíl mezi lokálním maximem a minimem.

7.4 Činitele ovlivňující únavovou životnost

Kromě amplitudy nebo rozkmitu hraje roli střední hodnota napětí v zatěžovacím cyklu, dále drsnost povrchu, velikost součásti a přítomnost vrubů. Vliv střední hodnoty napětí je znázorněn mezní čarou v Haighově diagramu (Obr. 7.7, tlustě); používá se i Smithův diagram; viz např. [2 – 6]. Tahové napětí mez únavy snižuje, tlakové ji zvyšuje. Nepříznivý vliv tahového napětí je pochopitelný, uvědomíme-li si, že část únavového procesu probíhá jako pomalý růst trhliny, a že tahové napětí trhlínu rozevívá. Naopak tlakové napětí trhlínu brzdí a dokonce ji může zastavit; připomeňme zvyšování únavové odolnosti kuličkováním povrchu. Stopy opracování,



Obr. 7.7. Haighův diagram. σ_a – amplituda, σ_m – střední hodnota napětí v zatěžovacím cyklu, σ_Y – mez kluzu, + tah, – tlak. Je-li pracovní bod (σ_m, σ_a) pod mezní čarou, k porušení nedojde.

ale i jakékoliv jiné nerovnosti povrchu působí jako menší nebo větší vruby. Velikost součásti se projevuje dvěma způsoby. Větší součást má větší povrch, takže je zde větší pravděpodobnost výskytu nějaké větší vady, která se může stát

zárodkem únavové trhliny. U větších součástí namáhaných ohybem nebo krutem je gradient napětí od povrchu do středu menší, takže je větší i tloušťka vrstvy s vyšším napětím, kde by se mohla uplatnit nějaká vada. Vliv vrubu je charakterizován prostřednictvím tzv. vrubového činitele β , který se počítá ze součinitele koncentrace napětí α . Nejjednodušší vztah pro **mez únavy** σ_c^* konkrétního místa je

$$\sigma_c^* = -\sigma_c \frac{\eta_p v}{\beta}, \quad (7.4)$$

kde σ_c je základní mez únavy materiálu, η_p je součinitel jakosti povrchu a v je koeficient zohledňující velikost součásti [2 – 6]. Podobným způsobem se snižuje i časovaná pevnost, odpovídající určitému počtu cyklů, které má součást vydržet. Existuje i řada dalších postupů pro výpočet meze únavy součástí, resp. konkrétního místa; viz např. [4 – 8].

Určitý problém u ocelových konstrukcí představují zbytková napětí po svařování. U velkých konstrukcí je nelze odstranit žiháním. Norma pro posuzování ocelových konstrukcí [9] proto užívá jiný přístup. Pro různé konstrukční detaily uvádí únavové křivky (obr. 7.5), které byly získány měřením na vzorcích zhotovených podobným způsobem, a obsahují tedy i zmíněná zbytková napětí.

7.5 Kumulace poškození

Únavové křivky vyjadřují vztah mezi charakteristickým zatížením a počtem cyklů do poruchy při stále stejném způsobu zatěžování. Ve skutečnosti se často v průběhu provozu mění amplituda napětí. Posuzování na časovanou pevnost není nutné, je-li i největší amplituda menší než mez únavy. Je-li větší, je nutno pro konkrétní zatěžovací režim stanovit počet cyklů do poruchy, anebo naopak součást dimenzovat tak, aby vydržela požadovaný počet cyklů. V tomto případě se užívá vhodná hypotéza kumulace poškození. Nejjednodušší je tzv. Palmgrenova-Minerova hypotéza lineární kumulace poškození, která předpokládá, že každý zatěžovací cyklus odčerpá určitou část života součásti. Při posuzování se užívá takzvané poškození D (přesněji relativní poškození), definované jako poměr prodělaných N cyklů k počtu cyklů N_f při stejném způsobu zatěžování, který by znamenal poruchu: $D = N/N_f$. Výsledné poškození při složitém způsobu zatěžování se počítá jako součet poškození od jednotlivých způsobů zatěžování:

$$D = \sum_j N_j / N_{f,j} \quad (7.5)$$

Porušení lze očekávat, jestliže $D = 1$. Známe-li například poškození D_1 vyvolané během jedné pracovní směny, potom součást by měla vydržet $N_f = 1/D_1$ směn. Nesmíme ale zapomenout na to, že počet cyklů do únavové poruchy zpravidla značně kolísá, takže porušení může nastat i při hodnotách D lišících se od 1.

Únava materiálů je příčinou velmi závažných poruch, a bylo vypracováno hodně postupů pro její posuzování, mj. při náhodném zatěžování, a existují i různé počítačové programy. K dalšímu studiu lze doporučit například [4 – 8, 10 – 13].

Literatura ke kapitole 7.

1. Wikipedia, heslo Fatigue limit, 20. 4. 2019.
2. Růžička, M., Hanke, M., Rost, M.: Dynamická pevnost a životnost, ČVUT, Praha, 1987. 212 s.
3. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 375 s.
4. Höschl, C.: Únava materiálu při periodickém zatěžování. Dům techniky ČSVTS, Praha, 1981. 125 s. Volně na <http://www.it.cas.cz/cs/hoschl/skripta>.
5. Kolektiv: Pružnost a pevnost II. ČVUT Praha, SNTL, Praha, 1985. 214 s.
6. Růžička, M., Havlíček, V.: Výpočet strojních částí na únavu za normálních a zvýšených teplot I. Dům techniky ČSVTS, Praha, 1988. 88 s.
7. Fuchs, H. O., Stephens, R. I.: Metal Fatigue in Engineering. J. Wiley and Sons, New York, 1980.
8. Holzmann, M., Klesnil, M.: Křehký a únavový lom materiálů a konstrukcí. VUT Brno, SNTL Praha, 1972. 207 s.
9. ČSN 73 1401. Navrhování ocelových konstrukcí. Český normalizační institut, 1994, 1998. 134 s.
10. Höschl, C.: Únava materiálu při náhodném zatěžování. Dům techniky ČSVTS, Praha, 1982. 87 s. Volně dostupné na <http://www.it.cas.cz/cs/hoschl/skripta>.
11. Růžička, M., Havlíček, V.: Výpočet strojních částí na únavu za normálních a zvýšených teplot II. Dům techniky ČSVTS, Praha, 1989. 84 s.
12. Růžička, M., Hanke, M.: Výpočet strojních částí na únavu za normálních a zvýšených teplot III. Dům techniky ČSVTS, Praha, 1990. 114 s.
13. Vlk, M.: Dynamická pevnost a životnost. VUT, Brno, 1992. 223 s.

8. Základy lomové mechaniky

8.1 Situace v tělesech s trhlinami, základy lomové mechaniky

Obrázek 8.1 ukazuje trhliny v asfaltovém chodníku, vyběhající z rohů kovového uzávěru kanalizace. Tento uzávěr brání volným dilatacím asfaltu při denních změnách teploty. V asfaltu tak vznikají napětí, nejvyšší u rohů uzávěru. Při ohřevu se asfalt chtěl roztahovat. Nemohl, ale protože byl díky vyšší teplotě měkčí, vznikající tlaková teplotní napětí v něm zrelaxovala. Při klesání teploty vznikají naopak napětí tahová díky snaze asfaltu smršťovat se. V chladném zkřehlém asfaltu pak tato napětí vyvolala vznik trhlin. Jejich vrcholy působily navíc jako silné koncentrátoři napětí, takže při periodických změnách teploty tyto trhliny dále pomalu rostly, i když již byly od rohů uzávěru daleko.

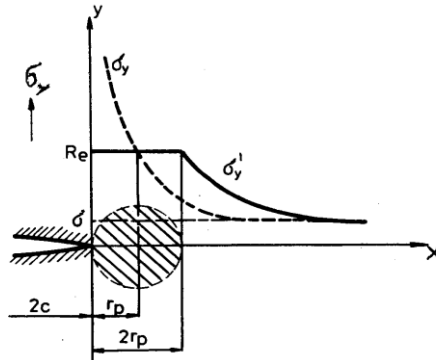


Obr. 8.1. Trhliny v asfaltovém chodníku u rohů kovového krytu, vzniklé účinkem teplotních napětí.

U těles, kde se vyskytuje jedna nebo více trhlin, je situace z hlediska porušení horší než v případě vrubů, popsáných v předchozí kapitole. Může jít o trhliny vzniklé během výroby nebo během provozu, například v důsledku únavy při opakovaném namáhání. U tělesa s trhlinou dojde snáze ke křehkému lomu, zejména při rázovém zatížení. Trhlina představuje díky ostrému kořeni velmi silný koncentrátor napětí, který výrazně omezuje plastické deformování, a tedy i pohlcování energie v příslušné oblasti. Podle teoretické analýzy platí pro napětí před vrcholem ostré trhliny v pružném tělese

$$\sigma(r) = \sigma_{nom} C \sqrt{\frac{a}{r}} ; \quad (8.1)$$

σ_{nom} je jmenovité napětí, C je konstanta, a je délka nebo jiný charakteristický rozměr trhliny a r je vzdálenost před kořenem trhliny (obr. 8.2).



Obr. 8.2. Rozložení napětí a plastická zóna před vrcholem trhliny. σ_y – napětí kolmé k rovině trhliny, σ_y' – průběh napětí korigovaný na přítomnost plastické zóny o poloměru r_p (vyšrafováno), $2c$ – délka trhliny, Re – mez kluzu materiálu.

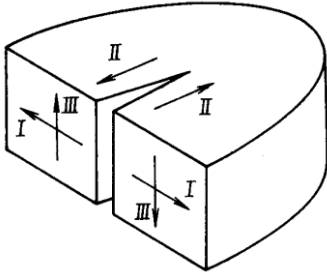
Toto řešení ale dává v kořeni trhliny ($r \rightarrow 0$) nekonečně vysoké napětí, což není možné. Tento rozpor působil při zkoumání podmínek lomu zpočátku velké problémy. Později byly navrženy dva přístupy, které tento problém překonaly [1 – 4]. První z nich, formulovaný Irwinem a Orowanem, pracuje s pojmem **faktor intenzity napětí** K . Ten charakterizuje souhrnně vliv jmenovitého napětí a velikosti trhliny podle vztahu

$$K_i = \sigma_{nom} Y \sqrt{a} ; \quad (8.2)$$

Y je geometrický činitel, který zahrnuje vliv tvaru a polohy trhliny, její relativní velikost vzhledem k velikosti průřezu v daném místě a charakter rozložení napětí (tah, ohyb apod.). Rozměr je $\text{Pa}\cdot\text{m}^{1/2}$, popř. $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$. (Pozor při přechodu z m na mm; $\sqrt{1000} = 31,6!$) Index i u faktoru intenzity napětí (I, II nebo III) označuje způsob rozevírání trhliny (obr. 8.3). Všimněme si, že vztah (8.2) je podobný vztahu (8.1) pro napětí v jednotkové vzdálenosti před vrcholem trhliny, tj. pro $r = 1$.

Trhлина začne rychle růst, dosáhne-li faktor intenzity napětí kritické hodnoty, tj.

$$K \geq K_C . \quad (8.3)$$



Obr. 8.3. Základní způsoby rozevírání trhliny.

Nejdůležitější je prosté rozevírání trhliny (způsob I). Odpovídající kritická hodnota pro tento případ se označuje K_{IC} a nazývá se **lomová houževnatost**. Ta se měří na standardních vzorcích. Vhodný vzorek s trhlinou, pro který je známa závislost mezi délkou trhliny a , zatěžující silou F a hodnotou faktoru intenzity napětí, $K_I = f(F, a)$, se zatěžuje plynule rostoucí silou až do okamžiku, kdy trhlina začne rychle růst. Pro odpovídající zatížení a délku trhliny se stanoví příslušná hodnota K_I , která vlastně představuje lomovou houževnatost K_{IC} . To, jestli můžeme u jiného tělesa s trhlinou očekávat rychlý lom, zjistíme, jestliže hodnotu faktoru intenzity napětí K_I pro toto těleso s konkrétní trhlinou a zatížením porovnáme s lomovou houževnatostí K_{IC} pro stejný materiál. Tímto způsobem se obešla nutnost znát přesně skutečnou velikost nejvyššího napětí v kořeni trhliny.

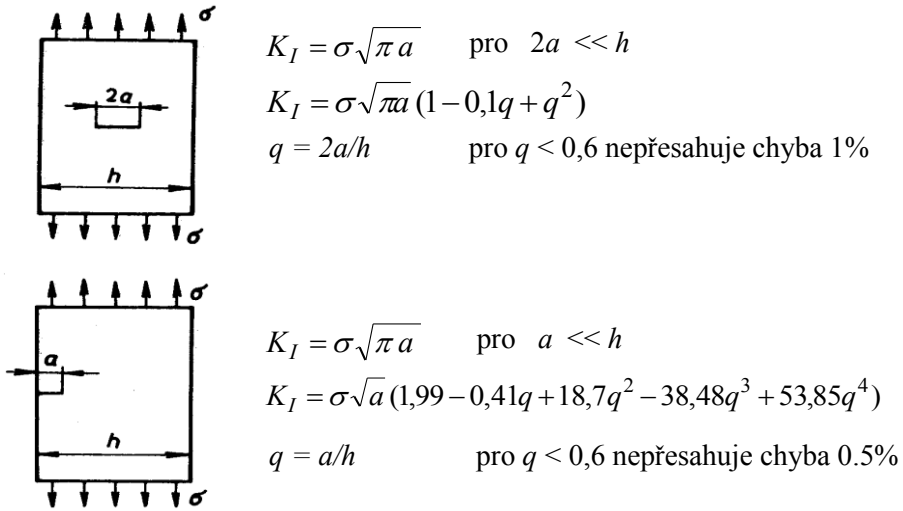
Vzorce nebo grafy pro stanovení faktoru intenzity napětí lze najít v různých příručkách nebo atlasech [5, 6, 3], popřípadě získat pomocí vhodného počítačového modelu. Na obr. 8.4 je ukázka pro dva případy. Příklad vzorku pro měření lomové houževnatosti je na obr. 8.5.

Součást s trhlinou se poruší, jestliže faktor intenzity napětí v určitém místě dosáhne kritické hodnoty (a nedojde-li včas k jeho poklesu pod K_{IC}). Ze vztahů (8.2) a (8.3) vyplývá, že u součásti s trhlinou dojde k porušení, jestliže jmenovité napětí dosáhne kritické hodnoty

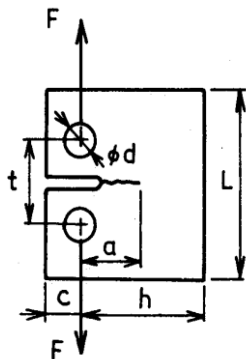
$$\sigma_{cr} \geq \frac{K_C}{Y\sqrt{l_{cr}}} \quad (8.4)$$

Naopak je možno pro určité jmenovité (pracovní) napětí σ_{nom} stanovit kritickou délku trhliny,

$$l_{cr} = \left(\frac{K_C}{Y\sigma_{nom}} \right)^2, \quad (8.5)$$



Obr. 8.4. Faktor intenzity napětí pro desku s trhlinou uprostřed a na okraji [3 - 6].



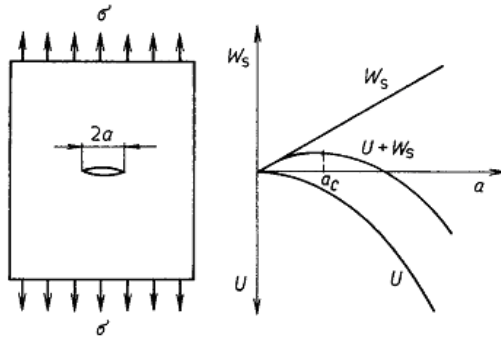
Obr. 8.5. Vzorek CT (Compact Tension) pro měření lomové houževnatosti. Blíže viz [3].

$$K_I = \frac{Fa^{1/2}}{bh} (29,6 - 185,5q + 655,7q^2 - 1017q^3 + 638,9q^4)$$

$$q = a/h$$

a ověřit nebo zajistit, že se ve výrobku mohou vyskytnout nanejvýš trhliny menší než l_{cr} . Protože tvarový činitel Y delších trhlín závisí také na jejich velikosti, je někdy nutno najít kritickou délku iteračním postupem.

Druhý přístup k posuzování chování tělesa s trhlinou, který navrhl A. A. Griffith, vychází z energetických principů. V zatíženém tělese s trhlinou je akumulována energie pružných napětí. Dochází-li k růstu trhliny, tato energie se uvolňuje. Na druhou stranu, růst trhliny vyžaduje energii, jež se spotřebovává zejména na plastické deformování materiálu v oblasti vysokých napětí před kořenem trhliny. Situace je znázorněna na obr. 8.6. Energie, spotřebovávaná na vznik nových lomových ploch, roste přímo úměrně s délkou trhliny. Uvolňovaná energie roste úměrně se čtvercem této délky; můžeme si zjednodušeně představit, že vznikem



Obr. 8.6. Deska s trhlinou - energetická bilance [1].

U – energie pružných napětí uvolňovaná růstem trhliny,

W_s – energie spotřebovávaná růstem, a_c – kritická délka

trhliny se uvolní energie napjatosti z kruhové oblasti o stejném průměru, jako má trhlina ($U \propto \pi a^2$). Zpočátku proto převažuje energie spotřebovávaná na růst trhliny, ale od určitého okamžiku začne naopak převládat energie tímto růstem uvolňovaná, a lomový proces se stává nestabilním. Pro popis tohoto procesu byla zavedena tzv. **rychlost uvolňování energie G** jako energie uvolněná při zvětšení plochy trhliny o jednotku plochy (J/m^2), a **měrná lomová energie Γ** , vyjadřující, kolik energie je zapotřebí na vytvoření lomové plochy jednotkové velikosti (J/m^2). Podmínka rychlého šíření trhliny je

$$G \geq \Gamma, \quad \text{resp. } G \geq G_C, \quad (8.6)$$

kde G_C znamená kritickou hodnotu rychlosti uvolňování energie.

Oba přístupy jsou při posuzování porušení s křehkým charakterem lomu ekvivalentní. Například pro prosté rozevírání trhliny platí

$$G_I = K_I^2 / [E/(1 - \mu^2)] . \quad (8.7)$$

Pro jiné způsoby rozevírání trhliny jsou vztahy podobné. V tabulce 8.1 jsou uvedeny hodnoty lomové houževnatosti a měrné lomové energie pro některé materiály. Poznámka. Pro výrazně tvárné materiály se užívají jiné přístupy [1].

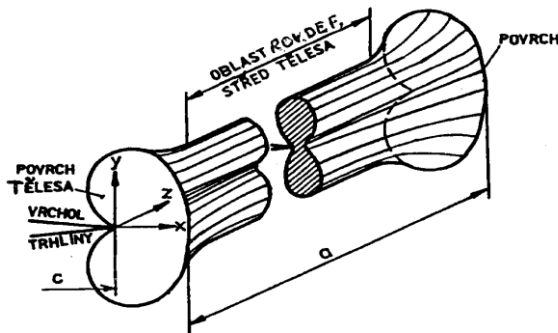
Při posuzování možnosti porušení vycházíme obvykle z faktoru intenzity napětí. Je však užitečné pohlížet na proces porušení vždycky i z energetického hlediska. Například při rázu je do tělesa dodáno určité množství energie. A jenom tehdy, je-li toto množství větší než hodnota $\Gamma \times S$, kde Γ je měrná lomová energie a S je plocha

zbývající části průřezu v místě s trhlinou, můžeme očekávat úplný lom. Podobným způsobem lze také předpovědět, o kolik se účinkem nárazu zvětší existující trhlina a k jaké degradaci pevnosti tělesa přitom dojde.

Tabulka 8.1. Lomová houževnatost K_{IC} a měrná lomová energie Γ_C některých materiálů [3, 4]. r.b. – reaction bonded, h.p. – hot pressed (žárově lisované)

Materiál	K_{IC} (MPa.m ^{1/2})	Γ_C (J/m ²)
ocel	30 – 140	4000 – 85000
šedá litina	10 – 25	860 – 5400
keramika r.b.	1,5 – 3,5	2 – 50
keramika h.p.	2,5 – 5,0	12 – 80
sklokeramika	1,8 – 4,5	30 – 210
sklo	0,6 – 1,0	6 – 10
epox. pryskyřice	0,5 – 2,0	50 – 200

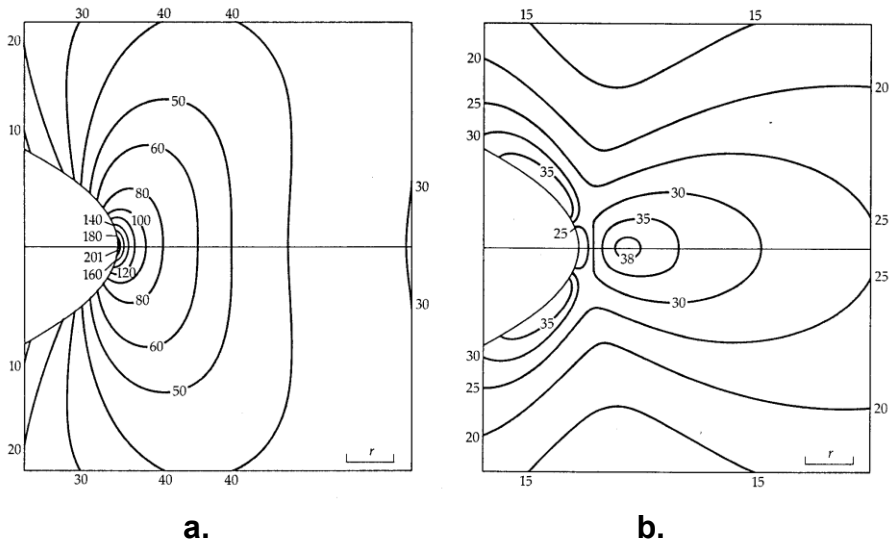
Pro zjišťování lomové houževnatosti běžných materiálů existují normy. V nich jsou zpravidla předepsány rozměry vzorků. U kovových materiálů je velmi důležitá například tloušťka vzorku. To souvisí s tvárností kovů. V blízkosti vrcholu trhliny dochází účinkem vysokých napětí k plastickému tečení. Hranici mezi elasticky a plasticky deformovanou oblastí lze stanovit s užitím hypotézy hustoty energie na změnu tvaru, nebo podle hypotézy maximálního smykového napětí [1]. Oba způsoby dávají podobné výsledky. Obrázek 8.7 ukazuje tvar plastické zóny před vrcholem trhliny v desce. Na bočním povrchu je napjatost rovinná; napětí působí pouze v rovině povrchu, který je bez jakýchkoliv sil působících k němu kolmo. U tenké povrchové vrstvy může proto docházet i ke změně její tloušťky, kdežto uvnitř vzorku se jedná o stav rovinné deformace, kde se tloušťka nemůže změnit, a působí zde proto i tahové napětí rovnoběžné s čelní frontou trhliny, tj. kolmé k rovině desky. Vidíme, že zplastizovaná oblast na bocích vzorku, kde díky rovinné napjatosti jsou příznivější podmínky pro plastické tečení, je větší než uvnitř v místech vzdálených od povrchu. Větší zde tedy bude i spotřeba energie při růstu trhliny. Proto u vzorku tenkého, kde převládající část tloušťky je ve stavu rovinné napjatosti, se při lomu spotřebovává více energie než u vzorku tlustého, kde u kořene trhliny převládá stav rovinné deformace, s menším rozměrem plastické zóny. Tenký vzorek se tedy začne rychle trhat při vyšším jmenovitém napětí, než tlustý. Vzorek pro měření lomové houževnatosti by proto měl mít



Obr. 8.7. *Plastická zóna před vrcholem trhliny. Na povrchu je rovinná napjatost, menší zóna uvnitř odpovídá stavu rovinné deformace [11].*

alespoň určitou minimální tloušťku, zajišťující, že v oblasti trhliny bude převládat rovinná deformace, dávající nižší, tj. konzervativní hodnotu lomové houževnatosti. Odpovídající tloušťky jsou uvedeny například v normách pro kovové konstrukce [7]. Kdyby se při návrhu součásti s větší tloušťkou vycházelo z (vyšší) lomové houževnatosti naměřené na vzorcích tenkých, součást by mohla „nečekaně“ prasknout dříve. U součástí s tenkými stěnami lze zjistit kritickou hodnotu faktoru intenzity napětí vhodným testem nebo výpočtem metodou konečných prvků za předpokladu elasticko-plastického materiálu.

Všimněme si nyní ještě jednoho zajímavého rysu rozložení napětí před trhlinou. Pozornost je zpravidla zaměřena na napětí působící kolmo k rovině trhliny. Toto napětí silně narůstá s klesající vzdáleností od vrcholu trhliny, a tam, kde dosáhne meze kluzu, začne materiál plasticky téci (obr. 8.2, obr. 8.7). Tím se omezí růst napětí, která by při použití čistě elastické teorie a Hookeova zákona měla narůstat ve vrcholu až do nekonečna. (Ve skutečnosti budou omezena plastickým tečením nebo jiným procesem.) Rozložení elastických napětí před trhlinou je ale složitější. Kromě napětí kolmého k rovině trhliny existuje v určité malé vzdálenosti před jejím kořenem i malá oblast, kde působí tahové napětí ve směru jejího šíření (obr. 8.8). Cook a Gordon [8, 9] ukázali, že za určitých podmínek může toto napětí být využito k zastavování hlavní trhliny, nakreslené na obrázku vodorovně. Stačí, aby před ní byla nižší pevnost materiálu ve směru šíření trhliny. Tento Cookův-Gordonův mechanismus se někdy využívá ke zvyšování odolnosti vůči růstu trhlín v kompozitních materiálech. Rostoucí trhlina může odbočit, jakmile dorazí na málo pevné rozhraní s jinou fází. Takto může například odbočovat a mnohonásobně se



Obr. 8.8. Pole napětí před eliptickou trhlinou [8, 9]. **a** – napětí působící kolmo k rovině trhliny, **b** – napětí ve směru trhliny. Všimněte si v případě **b** oblasti poměrně vysokého tahového napětí v malé vzdálenosti před trhlinou.

větvit trhlina, šířící se v polymerní matrici kolmo k výtuzným vláknům; někdy to můžeme vidět i na lomu mladší větve stromu nebo keře. Tím se výrazně zvyšuje pohlcování energie v místě lomu. Podobným způsobem, odkloněním na rozhraní, lze také zabránit, aby trhlina v ochranném povlaku nebo vrstvě začala pronikat do masivní součásti (viz též kapitola 10). Cenou za to pak ale někdy je následující postupná delaminace této vrstvy a degradace obnaženého povrchu součásti, vystaveného škodlivému působení okolního prostředí.

8.2 Růst únavových trhlin

Vznik únavových trhlin v kovových materiálech při střídavém zatěžování byl popsán v předchozí kapitole. Nyní si všimneme jejich růstu. Rychlost pomalého šíření únavových trhlin při střídavém nebo periodickém zatěžování závisí na rozkmitu faktoru intenzity napětí

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min} , \quad (8.8)$$

kde K_{\max} a K_{\min} je maximální a minimální hodnota K-faktoru v zatěžovacím cyklu. Roli hraje i střední hodnota napětí. Závislost rychlosti na ΔK je schematicky

znázorněna na obr. 8.9a. Trhlina začíná růst, jestliže rozkmit ΔK překročí určitou prahovou hodnotu ΔK_{th} daného materiálu (oblast I). S rostoucím rozkmitem její rychlost stoupá a nakonec přejde do rychlé fáze (oblast III). Pro předpovídání doby do poruchy součásti s trhlinou je nejdůležitější oblast II. V ní se rychlost šíření trhliny často aproximuje výrazem

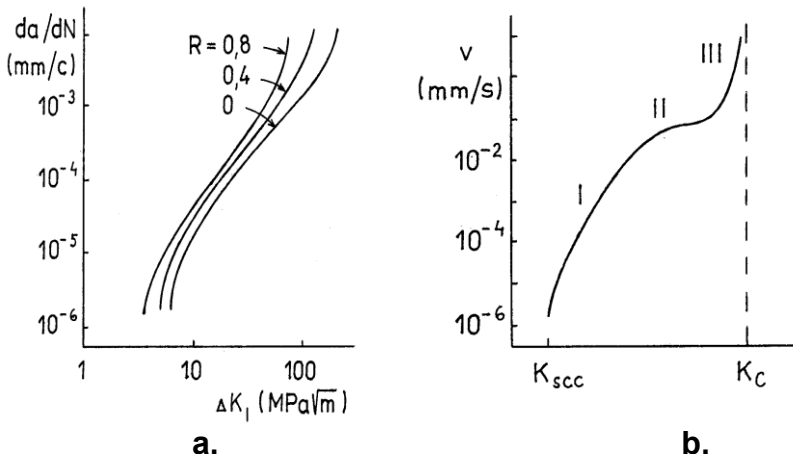
$$v = da/dN = A\Delta K_I^n; \quad (8.9)$$

da/dN je přírůstek délky trhliny na jeden zatěžovací cyklus, a A , n jsou konstanty pro daný materiál. (V logaritmických souřadnicích na obr. 8.10a vypadá mocnná funkce (8.9) jako přímka.) Přihlédneme-li, jak je definován faktor intenzity napětí, dostaneme ze vztahu (8.9) po řadě úprav počet cyklů N pro zvětšení trhliny z počáteční délky a_i do délky a při zatěžování střídavým napětím o rozkmitu $\Delta\sigma$.

$$N = \int_{a_i}^a \frac{da}{A\Delta K_I^n} = \int_{a_i}^a \frac{da}{A(\Delta\sigma)^n Y^n a^{n/2}} \quad (8.10)$$

Dosadíme-li za horní mez a délku trhliny a_{cr} , odpovídající okamžiku, kdy maximální hodnota faktoru intenzity napětí v zatěžovacím cyklu dosáhne kritické hodnoty K_{IC} , viz l_{cr} ve vztahu (8.5), dostaneme počet cyklů do lomu.

Poznámka. všimněme si, že nepřímá mocnná úměrnost mezi rozkmitem napětí a počtem cyklů do lomu ($N \propto \Delta\sigma^{-n}$) je podobná, jako u Wöhlerovy křivky.



Obr. 8.9. Rychlost růstu únavových trhlin v závislosti na faktoru intenzity napětí: **a** – v houževnatých materiálech, **b** – v křehkých materiálech (schematicky).

Skutečnost, že únavová trhlina neroste, je-li rozkmit K -faktoru menší než prahová hodnota ΔK_{th} , má velký praktický důsledek: růst existující trhliny v součásti můžeme zastavit, snížíme-li zatížení tak, aby ΔK kleslo pod ΔK_{th} .

V keramických materiálech bývají trhliny a podobné vady malých rozměrů přítomny již z výroby. Tyto trhliny někdy rostou velmi pomalu i při konstantním napětí, a to korozí napjatého materiálu v kořeni trhliny okolním prostředím (tzv. stress corrosion cracking); hovoří se pak o statické únavě. Rychlost trhliny $v = da/dt$ závisí v tomto případě přímo na faktoru intenzity napětí. Průběh $v(K)$ je znázorněn schematicky na obr. 8.9b. Trhlina začne velmi pomalu růst, je-li hodnota faktoru intenzity napětí vyšší než prahová hodnota K_{sc} . S rostoucím K_I se její růst zrychluje, a pro $K_I \geq K_{IC}$ přechází do velmi rychlé fáze.

Úsek I (s výjimkou oblasti blízko K_{sc}) se často aproximuje mocninnou funkcí

$$v = da/dt = A' K_I^{n'} ; \quad (8.11)$$

konstanty A' a n' (jiné než A , n v rovnici 8.9) se zjišťují experimentálně pro daný materiál a okolní prostředí. Podobně jako v předchozím případě dostaneme dobu pro zvětšení trhliny z počáteční délky a_i do a :

$$t = \int_{a_i}^a \frac{da}{A' K_I^{n'}} = \int_{a_i}^a \frac{da}{A' \sigma^{n'} Y^{n'} a^{n'/2}} , \quad (8.12)$$

a popřípadě dobu do lomu odpovídající dosažení kritické délky trhliny a_{cr} .

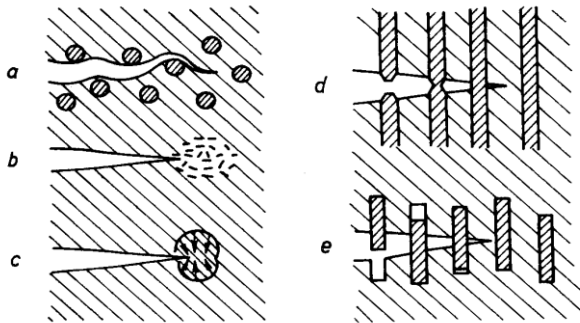
8.3 Zvyšování odolnosti proti šíření trhlin

Obecné cesty ke zvyšování odolnosti materiálů proti šíření trhlin jsou znázorněny obr. 8.10. Účinné je například zvětšování spotřeby energie v oblasti trhliny. Spotřebovávaná energie je úměrná součinu měrné lomové energie Γ (J/m^2) a lomové plochy S ,

$$W = \Gamma \times S . \quad (8.13)$$

U křehkých materiálů se zvýšení spotřeby energie docílí například prodloužením skutečné dráhy trhliny (a lomové plochy) dispergováním tvrdých částic v matici kompozitního materiálu (obr. 8.10a). Trhlina je musí obcházet, čímž se lomová dráha a plocha zvětšuje. U speciálních druhů keramiky dochází k rozpraskávání materiálu před vrcholem trhliny (obr. 8.10b). Tím zde vznikají četné lomové

plochy, které pohlcují energii. Zvláštní způsob je použit u částečně stabilizované zirkoničité keramiky ZrO_2 (PSZ). Velmi vysoké napětí před vrcholem trhliny zde vyvolává fázové transformace. Při nich vzniká monoklinická fáze, která má větší objem než původní fáze tetragonální. Před šířící se trhlinou se tak neustále vytvářejí oblasti tlakového napětí, které její růst brzdí (obr. 8.10c). Dlouhá pevná vlákna ve vláknových kompozitech (obr. 8.10d) zvyšují pevnost. Naproti tomu u kompozitů vyztužených krátkými vlákny dochází při lomu k vytahování těchto vláken z matrice (obr. 8.10e). K tomu je nutno překonávat třecí síly mezi vlákny a matricí a vynakládat odpovídající práci.



Obr. 8.10. Zvyšování odolnosti proti šíření trhlin (vysvětlení je v textu).

Při šíření trhliny v houževnatých kovových materiálech je hlavním mechanismem spotřeby energie plastické deformování v oblasti trhliny. Pro tahové napětí ve vzdálenosti r před vrcholem trhliny (obr. 8.2) v pružném materiálu platí vztah (8.1). Ve vzdálenosti r_{pl} dosáhne napětí mez kluzu σ_Y a materiál tam začíná plasticky téci. Tuto vzdálenost odhadneme jako takovou, které v (8.1) odpovídá napětí σ_Y . Po úpravě dostaneme poloměr plastické zóny

$$r_{pl} = \left(\frac{\sigma_{nom}}{\sigma_Y} \right)^2 a \quad (8.14)$$

Plastická zóna bude tím větší, čím nižší je mez kluzu materiálu. Chceme-li tedy, aby se při lomu pohltilo více energie, je vhodnější spíše nižší mez kluzu.

Odolnost proti šíření únavových trhlin v kovových materiálech lze také zvýšit vyvoláním tlakového předpětí v povrchové vrstvě lokálním plastickým přetvářením např. kuličkováním nebo válečkováním, popsáním v kapitole 4.8.

Literatura ke kapitole 8.

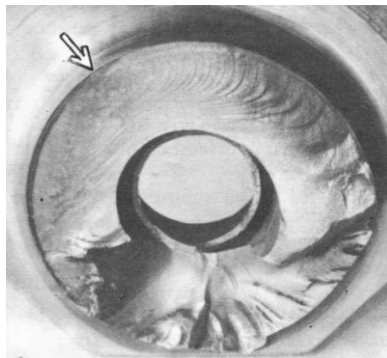
1. Broek, J. D.: *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. 4th Ed. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
2. Fuchs, H. O., Stephens, R. I.: *Metal Fatigue in Engineering*. J. Wiley and Sons, New York, 1980.
3. Menčík, J.: *Pevnost a lom skla a keramiky*. SNTL, Praha, 1990. 392 s.
4. Menčík, J.: *Mechanics of Components with Treated or Coated Surfaces*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
5. Murakami, Y. (editor): *Stress Intensity Factors Handbook 1, 2, 3*. Pergamon Press, Oxford - New York, 1978 - 1992.
6. Rooke, D. P., Cartwright, D. J.: *Compendium of Stress Intensity Factors*. HM Stationery Office, London, 1976.
7. ČSN 73 1401. *Navrhování ocelových konstrukcí*. Český normalizační institut, 1998. 134 s.
8. Gordon, J. E.: *The New Science of Strong Materials*. Penguin Books Ltd., Harmondsworth, England, 1968. 269 s.
9. Gordon, J. E.: *The Science of Structures and Materials*. Times Books, New York, 1988. 217 p. (*Strukturen unter Stress*. Spektrum der Wissenschaft, Heidelberg, 1989. 216 s.)
10. Klesnil, M., Lukáš, P.: *Únava kovových materiálů při mechanickém namáhání*. Academia, Praha, 1975. 222 s. (také: *Fatigue of Metallic Materials*. Academia, Prague, 1992.)
11. Holzmann, M., Klesnil, M.: *Křehký a únavový lom materiálů a konstrukcí*. VUT Brno, SNTL Praha, 1972. 207 s.
12. Veles, P.: *Mechanické vlastnosti a skúšanie kovov*. ALFA, Bratislava, 1985. 408 s.

9. Analýza lomů

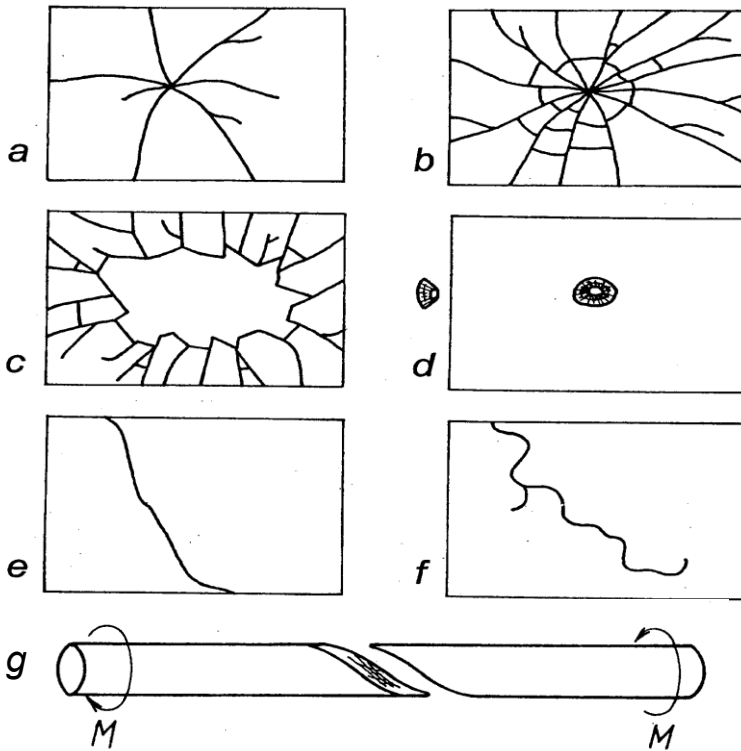
Obecné znalosti o napjatosti a chování trhlin jsou velmi užitečné při analýze poruch. Ta má tři zdroje: vzhled porušeného tělesa, historie poruchy, a informace o zatížení, materiálových vlastnostech a podmínkách provozu. Podrobněji je o analýze lomů pohovořeno v knize [1], o analýze poruch obecně pak v [2] a [3 – 6]. Zde uvedeme několik poznámek.

Pozorování vzhledu porušeného tělesa může ukázat, odkud lom vyšel (obr. 9.1, 9.2), a popřípadě odhalit vnitřní příčinu poruchy, například materiálovou vadu. Lomová mechanika pak pomáhá při určení velikosti napětí a sil působících v kritickém místě v okamžiku lomu. Vzhled lomového povrchu a trajektorie trhliny informují o průběhu lomového procesu, o charakteristickém způsobu porušení (křehký lom, únavový lom apod.) a o druzích působících napětí (například smyková napětí vedoucí k torznímu lomu, Obr. 9.2g). Některé detaily jsou viditelné pouhým okem, jiné vyžadují elektronový mikroskop. Vždy je užitečné pořídít fotografickou dokumentaci nebo alespoň podrobný popis porušeného objektu.

Obecně platí, že v makroměřítku má trhlina tendenci se šířit kolmo k nejvyššímu takovému napětí. Ovšem konečné porušení jednotlivých zrn v polykrystalických tvárných materiálech nastává smykem. V mikroskopickém měřítku je proto lomová plocha tvořena velkým množstvím různých šikmých plošek, odpovídajících směrům



Obr. 9.1. Únavový lom hřídele. Šipka ukazuje východiště porušení. Z něj se únavová trhlina šířila zpočátku velmi pomalu (hladké linie) směrem k hrubé části průřezu, typické pro konečnou rychlou etapu lomu.



Obr. 9.2. Příklady lomových trajektorií. a - f: trhliny ve skleněných tabulích (podle [1]): a - síla působící kolmo k tabuli, b - jako a, ale intenzivnější zatížení, c - výbuch v místnosti, d - průstřel, e - lom, způsobený zkroucením tabule, f - teplotní napětí, g - lom tyče z křehkého materiálu kroucením.

nejvyšších smykových napětí v jednotlivých zrnech. Určitou roli ale hraje i schopnost konkrétního materiálu odolávat různě napětím normálovým a smykovým. Na obr. 9.3 je vzorek relativně křehké hliníkové slitiny, porušený při zkoušce tahem. Vidíme, že při pohledu jedním směrem je lomová plocha kolmá k ose tyče, tedy kolmá k nejvyššímu normálovému napětí, a při pohledu ve druhém směru je skloněná k ose tyče pod úhlem 45° , což je směr maximálního smykového napětí v daném případě.

Další příklad účinků teplotních napětí byl ukázán na obrázku 8.1. Trhliny v chodníku u rohů kovového uzávěru vznikly v důsledku zabránění volným dilatacím asfaltu při denních změnách teploty.



Obr. 9.3. Vzorek tahové zkoušky hliníkové slitiny. Šířka 11 mm, tloušťka 3 mm.

Východiskem pro lomovou analýzu je celkový **vzhled lomového obrazce**. Analýzu usnadní následující pravidla:

1) Většinou existuje pouze jedno ohnisko lomu. Rozumí se tím místo, odkud vyšlo porušení tělesa. Lom vychází z místa, kde faktor intenzity napětí dosáhne nejdříve kritické hodnoty. Z relace $K_I = \sigma Y \sqrt{a}$ je možno pro známou velikost vady stanovit napětí (a tedy i zatížení) v okamžiku lomu,

$$\sigma = \frac{K_{IC}}{Y\sqrt{a}}, \quad (9.1)$$

anebo naopak ke známému napětí σ v místě východiska lomu vypočítat velikost a kritické vady:

$$a = \left(\frac{K_{IC}}{\sigma Y} \right)^2. \quad (9.2)$$

Tento přístup se používá při hledání kritických vad v keramických i kovových materiálech [1] i jinde.

2) Porušení téměř vždy vyjde z povrchu. Výjimkou je případ materiálové vady uvnitř tělesa, anebo nukleace trhliny pod povrchem při kontaktním zatížení.

3) Trhlina má snahu šířit se ve směru kolmém k maximálnímu tahovému napětí. Výjimkou je počáteční krátká část únavové trhliny v součástech z houževnatých materiálů při střídavém zatěžování, kde se směr šíření shoduje se směrem maximálního smykového napětí. Později se ale stáčí do směru kolmého k tahovému napětí (obr. 7.4).

4) K větvení trhliny dochází v křehkých materiálech, jako je například sklo, jestliže faktor intenzity napětí dosáhl jisté kritické hodnoty pro větvení [7]. Všeobecně se uplatňuje relace mezi rychlostí uvolňování energie a velikostí lomové plochy. Například tvrzené sklo se při porušení rozpadne na velké množství drobných kousků (Obr. 5.5), tím menších, čím vyšší bylo vnitřní napětí, a tedy i akumulovaná energie. Velkému množství kousků odpovídá větší celková velikost lomové plochy, a tedy větší celková spotřebovaná energie. V případě únavové trhliny v kovech zase při přechodu jejího šíření do rychlé fáze dochází k výraznému hrubnutí lomové plochy; to znamená tvorbu plochy s větším povrchem.

Zajímavým případem je prostřelená skleněná tabule (Obr. 9.2d). Na počátku dotyku tabule se střelou vznikne na okraji kruhové kontaktní plošky účinkem tahových radiálních napětí malá prstencovitá trhlina. Protože na centrální část zatížené oblasti působí tlaková síla, a oblast vně naopak vzdoruje jejímu účinku, působí v kořeni trhliny smyková napětí. Jejich účinek je podobný, jako kdyby ve směru pootočeném o 45° působilo tahové napětí (obr. 9.2d). Trhlina proto začne růst ve směru k němu kolmém, tedy pod úhlem 45° ke směru pohybu střely. Vzniká tak zde kuželová trhlina, rozšiřující se od místa prvního nárazu (obr. 6.9), a následně z tabule vyletí kousek skla i se střelou.

Obrázek 9.4 ukazuje prasklou zeď. Šikmý směr trhliny svědčí o přítomnosti smykových napětí – zřejmě kvůli nižší únosnosti základů pod levou částí zdi.



Obr. 9.4. Trhlina ve zdi staré budovy.

Analýza konkrétní poruchy vychází z jejího časového průběhu a ze situace před ní, a z informací o historii provozu a podmínkách užití objektu. Tato část analýzy se opírá o záznamy z provozu (časový průběh tlaků, teplot, dalších zatížení působících na objekt, informace o okolním prostředí a personálu). Zdrojem jsou záznamy měřicích přístrojů, provozní deníky a záznamy z prohlídek.

Často se provádí počítačová analýza napětí působících v součásti a analýza materiálových vlastností, včetně mechanických zkoušek vzorků odebraných z kritických míst (tahové nebo únavové zkoušky, zkoušky vrubové nebo lomové houževnatosti, atd.).

Analýza poruch může vést k opatřením pro zabránění podobným poruchám podobných součástí. Velmi dobře známé jsou podrobné (a nákladné) analýzy po leteckých nehodách, ale provádějí se po každé nehodě se závažnými následky. Některá pravidla jsou shrnuta v [2]. Příklady mnoha poruch a jejich analýzy je možno najít v literatuře, například [3 – 6]. Zajímavé jsou také televizní série „Vteřiny před katastrofou“ nebo „Letecké nehody“, přístupné na YouTube.

Literatura ke kapitole 9.

1. Menčík, J.: Pevnost a lom skla a keramiky. SNTL, Praha, 1990. 392 s.
2. Menčík, J.: Concise Reliability for Engineers. Intech, Rijeka, 2016, An open access publication: <http://www.intechopen.com/books/concise-reliability-for-engineers>, ISBN 978-3540629375. 204 p.
3. Neale, B. S., editor: Forensic engineering. The investigation of failures. Thomas Telford Publishing, London, 2001. 219 s.
4. Ratay, R. T., editor: Forensic Structural Engineering Handbook. McGraw-Hill, New York, 2009. 688 s.
5. Wearne, P.: Collapse. When Buildings Fall Down. TV books, New York, 2000. 255 s.
6. Lancaster, J.: Engineering catastrophes. 3rd ed. CRC Press, Woodhead Publishing Ltd., Abington, 2005. 269 s.
7. Kerkhof, K.: Bruchvorgänge in Gläsern. Verlag der DGG, Frankfurt am Main, 1970.

10. Základy mechaniky viskoelastických látek

U mnoha materiálů závisí deformace nejen na velikosti zatížení, ale i na jeho trvání a časovém průběhu. Příkladem jsou plastické hmoty a další polymerní látky, biologické materiály, ale i kovy nebo keramika za vysokých teplot. Obecně v tomto případě můžeme hovořit o látkách viskoelastických. Pro popis jejich odezvy se užívají různé modely, které lze znázornit prostřednictvím kombinace základních prvků elastických a viskózních. Prvky elastické charakterizují okamžitou pružnou odezvu, prvky viskózní charakterizují časově závislé složky deformací. Jak uvidíme, viskoelastické modely lze použít mimo jiné pro popis jevů jako je dopružování, relaxace sil a napětí a creep. Takzvaná **lineární viskoelastická** řeší případy, kdy okamžitý účinek je přímo úměrný napětí. Pro elastické prvky platí Hookeův zákon, pro prvky viskózní platí tzv. Newtonův zákon. Dále si všimneme nejdůležitějších materiálových modelů; blíže viz [1 – 4].

10.1 Ideálně elastický materiál

Schematicky se znázorňuje pružinou (obr. 10.1a). Pro deformace platí Hookeův zákon, který má pro poměrné prodloužení ε ve směru působícího normálového napětí σ tvar:

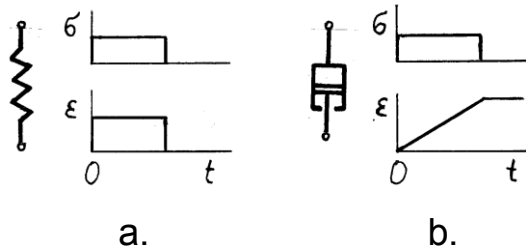
$$\varepsilon = \sigma/E; \quad \sigma = E\varepsilon. \quad (10.1a)$$

E je modul pružnosti v tahu. Pro smykové deformace platí podobné relace:

$$\gamma = \tau/G; \quad \tau = G\gamma; \quad (10.1b)$$

G je modul pružnosti ve smyku. Mezi ním a modulem pružnosti v tahu platí vztah $G = E/[2(1 + \mu)]$. Konstanta μ je součinitel příčné kontrakce (Poissonovo číslo). Jeho hodnota může být v rozmezí 0 až 0,5. Obvykle se pohybuje mezi 0,15 u křehkých materiálů a 0,35 u dobře tvářitelných materiálů kovových; pro ocel je $\mu = 0,3$. Pro nestlačitelné materiály je $\mu = 0,5$; stejná hodnota se používá pro kapaliny.

Takovéto látky se označují jako hookeovské, a jejich odezva na zatížení je okamžitá. Obrázek 10.1a ukazuje časový průběh deformace odpovídající skokovému nárůstu napětí na hodnotu σ v čase 0 a skokovému poklesu na nulu v čase t_1 .



Obr. 10.1. (a) Ideálně elastický prvek, (b) Ideálně viskózní prvek.

10.2 Ideálně viskózní materiál

Tento materiál můžeme schematicky znázornit jako tlumič, kde mezi pístem a válcem protéká viskózní kapalina (obr. 10.1b). Platí Newtonův zákon:

$$\dot{\gamma} = \tau / \eta, \tau = \eta \dot{\gamma}, \text{ popřípadě } \dot{\epsilon} = \sigma / \lambda, \sigma = \lambda \dot{\epsilon}; \quad (10.2a,b)$$

η je tzv. dynamická viskozita (rozměr je Pa.s), $\dot{\gamma}$ je rychlost poměrného zkosu a τ je smykové napětí, λ je dynamická viskozita v tahu (Pa.s), a $\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$ je rychlost poměrného prodloužení. Takovéto látky se označují jako newtonské.

Poznámka. V této kapitole se budeme zabývat viskoelastickým chováním víceméně pevných těles. Proto zde používáme i pojem „viskozita v tahu“. Mezi dynamickou viskozitou v tahu λ a ve smyku η nestlačitelného materiálu platí $\lambda = 3\eta$. V tomto textu budeme pro viskozitu užívat všude symbol η .

Obrázek 10.1b také ukazuje časový průběh napětí (skokový nárůst na hodnotu σ v čase t_0 , výdrž na této hodnotě až do doby t_1 , a skokový pokles na nulu) a odpovídající průběh deformace viskózní látky. Deformace zůstává i po odlehčení.

Pro jednotlivé materiálové modely dále ukážeme vztahy mezi napětími a poměrnými deformacemi, popřípadě jejich rychlostmi. Podobné vztahy budou platit mezi silami a celkovými deformacemi nebo rychlostmi; rozdíly jsou pouze v konstantách charakterizujících geometrii tělesa. Například u elastické tyče zatížené osovou tahovou silou je celkové prodloužení $\delta = [Fl/S]/E = \sigma l/E$, a poměrné prodloužení je $\epsilon = \delta/l = \sigma/E$.

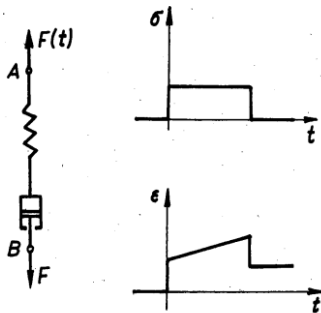
Složitější průběhy odezvy lze modelovat pomocí různých kombinací více prvků. Typické modely mají jména podle svých tvůrců.

10.3 Maxwellovo těleso

Jedná se o pružinu a tlumič v sérii (obr. 10.2). V obou prvcích působí stejná síla, ale jejich deformace se sčítají. Pro napětí a přetvoření platí:

$$\sigma = \sigma_H = \sigma_N, \quad \varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_N; \quad (10.3a, b)$$

index H znamená hookeovský, index N znamená newtonský. Výsledné přetvoření



Obr. 10.2. Maxwellovo těleso. Creep při konstantním zatížení a po odlehčení.

ale v tomto případě nelze počítat přímo, neboť napětí u viskózního prvku je přímo úměrné nikoliv přetvoření, ale jeho rychlosti. Základem pro řešení je proto výraz pro tuto rychlost,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_H + \dot{\varepsilon}_N = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (10.4)$$

Dále ukážeme odezvu Maxwellova tělesa pro dva důležité případy.

1) Creep při $\sigma = \sigma_0 = \text{konst}$

Základní případ creepu při konstantním napětí je znázorněn na obr. 10.2 vpravo. V čase $t = 0$ je hmotný bod zavěšen na Maxwellovo těleso. Působí na ně silou F a vyvolá v něm napětí σ_0 . Pružina se okamžitě natáhne na délku odpovídající napětí σ_0 , a postupně se začne posouvat píst ve válci tlumiče. V čase t_0 bude působení síly náhle ukončeno. Časový průběh síly, resp. napětí je na obrázku znázorněn nahoře, a průběh deformování dole. Nárůst síly je okamžitý, podobně i její pokles na nulu po odlehčení. Deformace následující po okamžitém elastickém prodloužení narůstá přímo úměrně s časem, tím rychleji, čím vyšší je působící síla. Po pomnutí zatížení pomine elastická složka deformace, ale maximální trvalá složka zůstává beze změny. V tomto případě platí $d\sigma/dt = 0$, takže velikost relativního přetvoření bude

$$\varepsilon(t) = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon(t)} d\varepsilon = \int_{t_0}^t \left(0 + \frac{\sigma_0}{\eta} \right) dt = \varepsilon_0 + \frac{1}{\eta} \sigma_0 (t - t_0) , \quad (10.5)$$

což lze také zapsat jako

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} (t - t_0) \right] . \quad (10.6)$$

Tento nárůst prodloužení v čase můžeme obecně vyjádřit jako:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) , \quad (10.7)$$

kde $J(t)$ je tzv. **creepová funkce**, která vyjadřuje časový průběh odezvy na jednotkové zatížení; $J(t) = \varepsilon(t)/\sigma_0$. V tomto případě je definována výrazem v závorce ve vzorci (10.6). Její užitečnost bude více zřejmá u složitějších modelů.

2) Relaxace sil a napětí při $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{konst}$

Situace je znázorněna na obr. 10.3. V čase 0 je volný konec pružiny posunut o δ_0 a upevněn. V prvním okamžiku zareaguje pouze pružina, takže se v tělese objeví síla F_0 a napětí σ_0 . Tlumič na skokový nárůst deformace nezareagoval, ale v důsledku působící síly jím kapalina začne protékat a jeho píst se začne pomalu posouvat. Tím se ale postupně zmenšuje roztažení pružiny a tedy i působící síla. Protože celková deformace zůstává konstantní, platí $d\varepsilon/dt = 0$. Po dosazení do diferenciální rovnice (10.4) dostaneme výraz

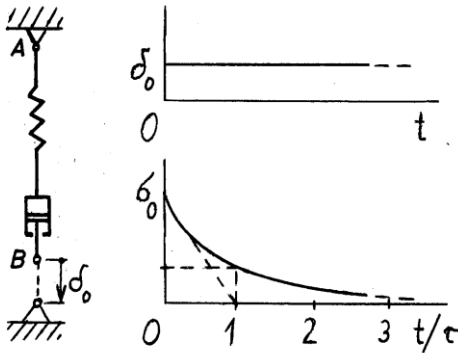
$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma = 0 , \quad (10.8)$$

který po separaci proměnných přejde na tvar

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = - \frac{E}{\eta} dt . \quad (10.9)$$

Integrovaní tohoto výrazu v mezích 0, t , a σ_0 , $\sigma(t)$ dá

$$\ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = - \frac{E}{\eta} (t - t_0) . \quad (10.10)$$



Obr. 10.3. Maxwellovo těleso. Vpravo je průběh relaxace sil a napětí při konstantní (vnučené) deformaci.

Po odlogaritmování dostaneme

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right). \quad (10.11)$$

Podívejme se na tento vztah blíže. Argument u exponenciální funkce musí být bezrozměrový. A skutečně, rozměr poměru E/η je $\text{Nm}^{-2}/\text{Pas} = \text{Pa}/\text{Pas} = 1/\text{s}$, takže součin $t \times E/\eta$ je bezrozměrový. Převrácený výraz η/E má rozměr času a bývá označován jako **relaxační doba** τ . Vztah (10.11) můžeme proto též napsat ve tvaru

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-t/\tau) = \varepsilon_0 E \exp(-t/\tau). \quad (10.12)$$

U Maxwellova tělesa tedy při vnučené deformaci relaxují síly a napětí podle exponenciální funkce (obr. 10.3 vpravo dole). Následující tabulka ukazuje jejich relativní pokles s časem.

Tabulka 10.1. Relaxace napětí u Maxwellova prvku při konstantní deformaci.

t/τ	σ/σ_0	$1 - \sigma/\sigma_0$
0	1	0
1	0,3685	0,6315
2	0,1353	0,8647
3	0,0499	0,9501
4	0,0183	0,9817
5	0,0067	0,9933
6	0,0025	0,9975

Po uplynutí doby, odpovídající relaxačnímu času τ (tj. $t = \tau$), poklesne síla (a napětí) na necelých 37% své původní hodnoty, v čase 2τ poklesne na necelých

14%, v čase 4τ je již nižší než 2% atd. Z praktických důvodů se někdy předpokládá, že po době delší než cca 4 až 5τ již viskoelastické efekty dozněly.

Relaxační doba τ se dá snadno měřit, například z rychlosti poklesu síly. Je proto užitečná pro praktické charakterizování viskoelastických látek, zejména u složitějších modelů, kde pojmy jako modul pružnosti a viskozita ztrácejí smysl, jak uvidíme později.

Pokles napětí v čase, vzorec (10.12), můžeme obecně vyjádřit jako

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 Y(t), \quad (10.13)$$

kde $Y(t)$ je tzv. **relaxační funkce**, která vyjadřuje časový průběh poklesu napětí, odpovídající jednotkovému přetvoření; $Y(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0$.

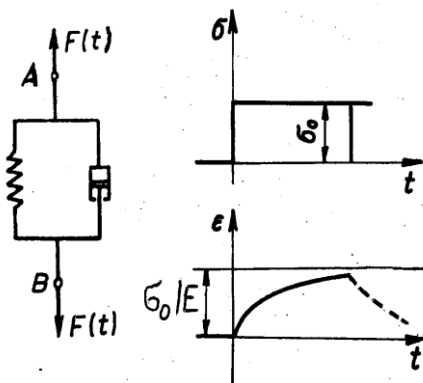
10.4 Kelvinovo – Voigtovo těleso

Jedná se o pružinu a tlumič, spojené paralelně (obr. 10.4). Deformace obou prvků je stejná, a sečítají se síly v nich působící. Pro přetvoření a napětí platí:

$$\varepsilon = \varepsilon_H = \varepsilon_N, \quad \sigma = \sigma_H + \sigma_N, \quad (10.14)$$

Vyjádříme-li napětí v jednotlivých prvcích pomocí vztahů (10.1b) a (10.2b), dostaneme pro celkové napětí

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (10.15)$$



Obr. 10.4. Kelvinovo-Voigtovo těleso. Vpravo dole je průběh deformace při konstantním zatížení (plně) a po odlehčení (čárkovaně).

Nyní si všimneme reakce tohoto tělesa na okamžité zatížení σ_0 v čase $t = 0$, které pak zůstane konstantní až do doby t_1 . Po vydělení rovnice (10.15) dynamickou viskozitou η a změně uspořádání jednotlivých členů obdržíme diferenciální rovnici prvního řádu s konstantním koeficientem a pravou stranou:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E}{\eta} \varepsilon = \frac{1}{\eta} \sigma_0 . \quad (10.16)$$

Její úplné řešení dostaneme jako součet řešení homogenní rovnice (s nulou na pravé straně) a partikulárního integrálu,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{\text{hom}} + \varepsilon_{\text{part}} . \quad (10.17)$$

Řešení homogenní rovnice je $\varepsilon_{\text{hom}} = C \exp(-t/\tau)$, a partikulární integrál je $\varepsilon_{\text{part}} = \sigma_0/E$. Výsledné řešení má obecný tvar

$$\varepsilon(t) = C \exp(-t/\tau) + \frac{\sigma_0}{E} . \quad (10.18)$$

Konstantu C dostaneme z okrajové podmínky. Pro $\varepsilon(t=0) = 0$ vyjde $C = -\sigma_0/E$, takže konečný výraz pro postupný nárůst deformace, resp. přetvoření, je

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \frac{1}{E} \left(1 - e^{-t/\tau} \right) , \quad (10.19)$$

což můžeme zjednodušeně zapsat jako

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) , \quad (10.20)$$

kde

$$J(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \quad (10.21)$$

je creepová funkce pro Kelvinovo-Voigtovo těleso. Konstanta τ ($= \eta/E$) nyní označuje tzv. **retardační dobu**.

Situace je znázorněna na obr. 10.4 vpravo. Po přiložení zatížení začne deformace postupně narůstat a blíží se k limitní hodnotě $\varepsilon_{\text{elim}} = \sigma_0/E$, jako kdyby zde byla pouze pružina. V čase $t = \tau$ činí deformace asi 63% maximální možné deformace (viz Tabulku 10.1; $0,6315 = 1 - 0,3685$).

Pomine-li v čase τ_1 působící síla, natažená pružina se začne smršťovat, takže deformace se zmenšuje (naznačeno na obrázku čárkovaně). Při lineární viskoelasticitě je možno používat princip superpozice, takže výslednou deformaci dostaneme jako součet nárůstu původní deformace a deformování od síly působící v opačném směru od okamžiku t_1 :

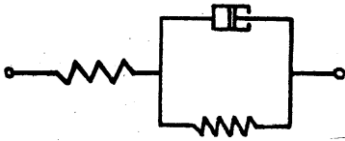
$$\varepsilon(t \geq t_1) = \sigma_0 \frac{1}{E} \left(e^{-(t-t_1)/\tau} - e^{-t/\tau} \right). \quad (10.22)$$

10.5 Standardní lineární těleso

Jedná se o pružinu v sérii s Kelvinovým-Voigtovým tělesem (obr. 10.5). Výsledná deformace je rovna součtu deformací obou těles:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} + \sigma_0 \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-t/\tau_1} \right) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-t/\tau_1} \right) \right], \quad (10.23)$$

kde $t_1 = \eta_1/E_1$.



Obr. 10.5. Standardní lineární těleso.

V okamžiku přiložení zatížení vznikne okamžitě deformace elastického členu o relativní velikosti $\varepsilon_0 = \sigma_0/E_0$, a dále narůstá s klesající rychlostí, což odpovídá viskóznímu členu. Pro velmi dlouhé působení zatížení se deformace blíží ke konečné (limitní) hodnotě $\varepsilon_\infty = \sigma_0(1/E_0 + 1/E_1)$. Tlumič v tomto případě již není účinný a situace je stejná, jako kdyby se jednalo o dvě pružiny E_0, E_1 v sérii.

Časový průběh deformace lze vyjádřit jako $\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t)$, kde creepová funkce $J(t)$ nyní odpovídá výrazu v hranaté závorce. V ní se již význam E jako modulu pružnosti ztrácí.

Dojde-li k odlehčení v čase t^* , okamžitě vymizí elastická deformace $\varepsilon_0 = \sigma_0/E_0$ a následuje pomalé zmenšování posunutí. Výslednou hodnotu deformace v časech $t \geq t^*$ bychom dostali opět použitím principu superpozice, podobně jako u Kelvinova-Voigtova tělesa.

Zobecněné standardní lineární těleso

Toto těleso dostaneme tak, že ke standardnímu lineárnímu tělesu připojíme v sérii jedno nebo více Kelvinových-Voigtových těles. Také celkovou deformaci při konstantním zatížení dostaneme přičtením dalších výrazů odpovídajících těmto tělesům. Dostaneme

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} (1 - e^{-t/\tau_1}) + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-t/\tau_2}) + \dots \right]. \quad (10.24)$$

Pro jednotlivé retardační časy platí $\tau_j = \eta_j/E_j$. Vidíme, že se původní význam pojmů modul pružnosti nebo viskozita již ztrácí. Vztah (10.24) tak můžeme přepsat obecně jako

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[C_0 + C_1 (1 - e^{-t/\tau_1}) + C_2 (1 - e^{-t/\tau_2}) + \dots \right] = \sigma_0 J(t), \quad (10.25)$$

kde konstanty C mají význam poddajností a J je creepová funkce. Vztah (10.25) lze dále zjednodušit, jestliže sloučíme všechny konstantní členy. Dostaneme tak

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[\sum_{j=0}^n C_j + \sum_{j=1}^n C_j e^{-t/\tau_j} \right] = \sigma_0 J(t). \quad (10.26)$$

Výraz v hranaté závorce představuje tzv. Pronyho řadu, která je obecně definovaná jako

$$y = a_0 + a_1 \exp(-t/\tau_1) + a_2 \exp(-t/\tau_2) + a_3 \exp(-t/\tau_3) \dots \quad (10.27)$$

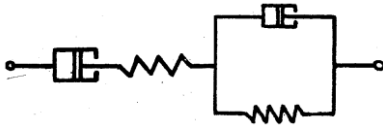
Poznámka. Komerční počítačové programy pro analýzu konstrukcí metodou konečných prvků umožňují práci s Pronyho řadami.

10.6 Burgersovo těleso

Toto těleso vznikne rozšířením standardního lineárního tělesa o viskózní člen, anebo sériovým spojením Maxwellova a Kelvinova-Voigtova tělesa (obr. 10.6). Časový průběh deformování při konstantním zatížení dostaneme, když ke vztahu (10.18) přičteme nárůst deformace odpovídající viskóznímu členu. Dostaneme tak po úpravě

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \frac{t}{\eta} + \sigma_0 \left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-t/\tau_1} \right) \right]. \quad (10.28)$$

Časový průběh deformování při konstantním zatížení je naznačen pro podobný případ na obr. 10.8. Deformace podle tohoto modelu by mohly narůstat bez omezení; jedná se ovšem o hypotetický případ.



Obr. 10.6. Burgersovo těleso.

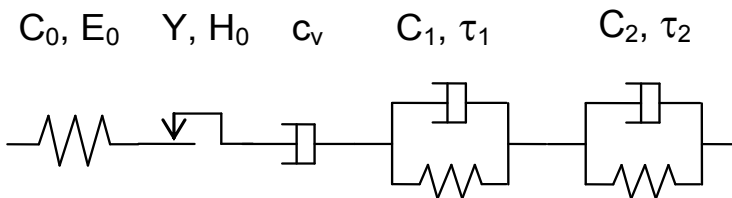
Konstanty ve viskoelastických modelech lze získat z experimentálně zjištěného časového průběhu deformování, jak ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad. Odezva na zatížení viskoelastického materiálu

Viskoelastické vlastnosti plexiskla (PMMA) byly zjišťovány instrumentovanou indentací [5]. Indentor byl po přiložení ke vzorku zatížen určitou silou, která zůstala po dlouhou dobu konstantní, a měřil se časový průběh jeho vnikání do materiálu. Pro aproximaci byla použita regresní funkce

$$y(t) = F K [A_0 + c_v t - \sum B_j \exp(-t/\tau_j)] , \quad (10.29)$$

kteřá představuje zobecněné standardní lineární těleso, ke kterému byl v sérii připojen viskózní prvek a ještě prvek charakterizující nevratné plastické deformace, které mohly vzniknout v důsledku relativně vysokých napětí (obr. 10.7). F je zatížení, K je konstanta charakterizující geometrii indentoru, a A_0 , c_v , B_j a τ_j jsou regresní konstanty, nalezené metodou nejmenších čtverců.

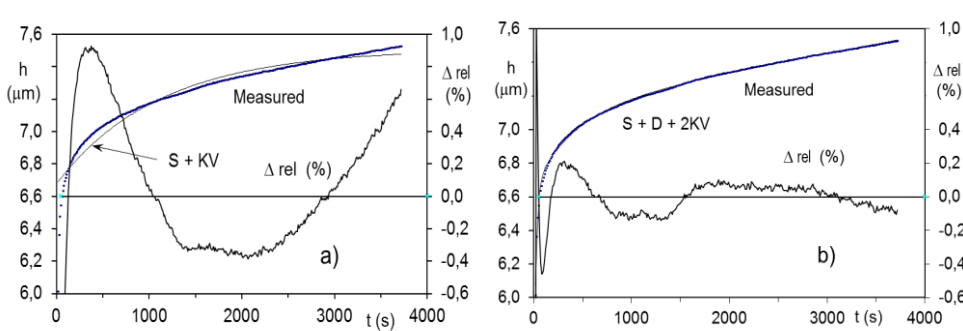


Obr. 10.7. Viskoelasticko-plastický model „pružina + plastický prvek + tlumič + 2 Kelvinova-Voigtova tělesa“. C_0 , C_1 , C_2 , c_v – poddajnosti, E_0 a H_0 – okamžitý modul pružnosti a tvrdost, Y – mez kluzu, τ_1 , τ_2 – retardační časy.

Obr. 10.8 ukazuje dvě aproximace, se třemi a šesti regresními konstantami. Pro lepší představu o vhodnosti regresní funkce a porovnání obou aproximací jsou na obrázcích také zakreslena **relativní (standardizovaná) rezidua**, definovaná jako

$$\Delta_{j,rel} = (y_{j,meas} - y_{j,calc})/y_{j,calc} \quad (10.30)$$

Index meas znamená naměřené a calc vypočtené hodnoty. Výhodou relativních reziduí je, že nezávisí na měřítku y . Rezidua mohou pomoci při rozlišení různých aproximací, obzvláště jestli křivky v původním souřadném systému $y(t)$ vypadají téměř stejně (obr. 10.8b). Vidíme, že aproximace se šesti konstantami je výrazně lepší.



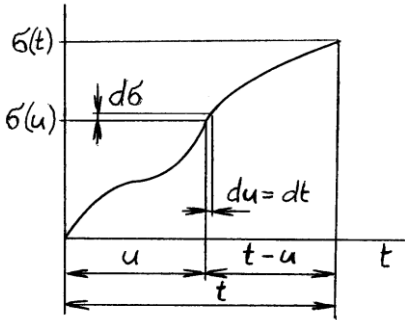
Obr. 10.8. Vnikání indentoru do PMMA při konstantním zatížení [5]: měřené hodnoty (tlustší čáry) a dvě aproximace (tenké čáry). a) model $S+KV$ (3 konstanty), b) model $S+D+2KV$ (6 konstant); S - pružina, D - tlumič, KV - Kelvinovo-Voigtovo těleso. Model $S+D+2KV$ aproximoval naměřené hodnoty velmi dobře; rozdíly jsou viditelné jen prostřednictvím reziduí Δ_{rel} (cik-cak čáry, stupnice vpravo). h – hloubka, t – čas.

10.7 Určování deformací při obecném časovém průběhu zatížení

Dosud jsme ukazovali, jak u různých modelů rostou deformace s časem při konstantním zatížení. Často se ale síla mění. Zde naznačíme postup pro případ, kdy síla narůstá obecným způsobem (obr. 10.9).

Nárůst síly, resp. napětí, si můžeme představit složený z řady velmi malých přírůstků. Předpokládáme lineárně viskoelastický materiál, kdy výsledný účinek několika zatížení je roven součtu účinků od jednotlivých zatížení.

Jestliže se v čase u napětí zvýší o přírůstek $d\sigma$, projevuje se jeho účinek teprve od tohoto okamžiku. Protože do času t bude síla $d\sigma$ působit pouze po dobu $t - u$, bude přírůstek deformace $d\varepsilon$ od zatížení $d\sigma$ (přiloženého v čase u) roven $J(t - u)d\sigma$, kde



Obr. 10.9. Obecný průběh nárůstu zatížení.

J je creepová funkce pro příslušný materiálový model. V čase $u + du$ přibude k dosavadnímu zatížení další přírůstek $d\sigma$, atd. Známe-li časový průběh nárůstu zatížení $\sigma(t)$, můžeme přírůstek $d\sigma$ vyjádřit jako

$$d\sigma(t) = \frac{d\sigma}{dt} dt, \text{ resp. } d\sigma(u) = \frac{d\sigma}{du} du. \quad (10.31)$$

Celkovou deformaci dostaneme sečtením všech nekonečně malých příspěvků za dobu od 0 do t jako tzv. konvoluční integrál:

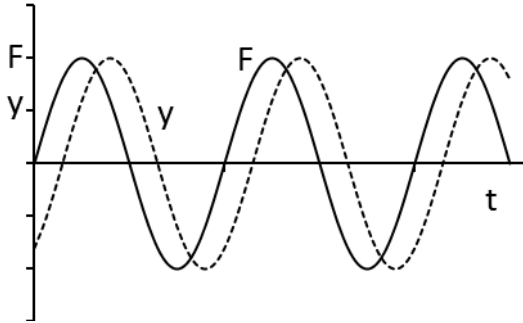
$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-u) \frac{d\sigma}{du} du. \quad (10.32)$$

10.8 Odezva viskoelastických látek na střídavé zatěžování

Omezíme se zde na harmonické zatěžování, kdy pro sílu platí

$$\sigma(t) = A \sin(\omega t); \quad (10.33)$$

A je amplituda a ω je kruhová frekvence harmonického pohybu, vázaná s frekvencí f vztahem $\omega = 2\pi f$. Průběh je znázorněn na obr. 10.10 plnou čarou. Působí-li na těleso z viskoelastického materiálu takováto síla, budou se deformace po utlumení přechodových jevů měnit také harmonicky, se stejnou frekvencí, ale budou proti síle opožděny o δ (viz tečkovanou křivku $y(t)$ na obr. 10.10; hodnota δ je vidět na ose času vlevo). Tento tzv. **fázový posun** δ závisí na typu tělesa a frekvenci. Například pro Maxwellovo těleso (obr.10.2) platí $\text{tg } \delta = 1/(\omega\tau)$, a pro Kelvinovo-Voigtovo těleso (obr. 10.4) platí $\text{tg } \delta = \omega\tau$, kde τ je retardační, resp. relaxační doba.



Obr. 10.10. Buzené kmitání viskoelastického tělesa.

U pružných látek se pro charakterizování tuhosti v tahu používá Youngův modul pružnosti, definovaný jako poměr napětí a přetvoření, $E = \sigma / \varepsilon$. U viskoelastických látek při harmonickém zatěžování mají obě veličiny, σ i ε , harmonický průběh s určitou amplitudou, ale přetvoření je vůči napětí opožděné o úhel δ (obr. 10.10). V tomto případě můžeme definovat více modulů. Takzvaný **komplexní modul pružnosti** je roven poměru amplitudy napětí a přetvoření,

$$E^* = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_a} \quad (10.34)$$

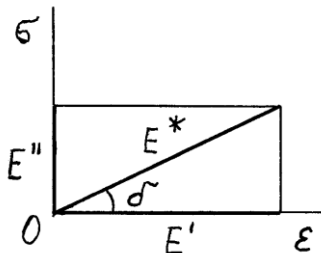
Tento modul má dvě složky. Takzvaný **konzervativní modul** (storage modulus),

$$E' = \frac{\sigma(\varepsilon_{\max})}{\varepsilon_{\max}} = E^* \cos \delta, \quad (10.35)$$

vyjadřuje tu část komplexního modulu, která je ve fázi s přetvořením, a charakterizuje vratnou složku deformací. **Ztrátový modul** (loss modulus),

$$E'' = \frac{\sigma(t=0)}{\varepsilon_{\max}} = E^* \sin \delta, \quad (10.36)$$

vyjadřuje tu část komplexního modulu, která je proti přetvoření posunutá o 90° . Vztah všech složek je zřejmý z obr. 10.11.



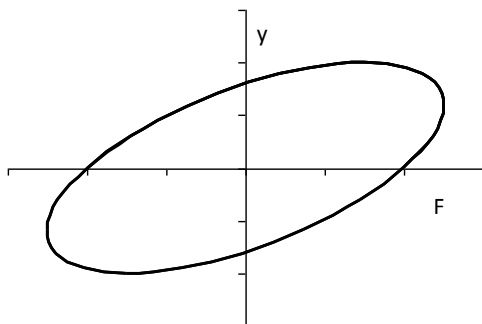
Obr. 10.11. Moduly viskoelastického materiálu.

Zaznamené-li všechny dvojice hodnot napětí a přetvoření v rovině $\sigma - \varepsilon$, dostaneme v průběhu jednoho cyklu uzavřenou elipsu s hlavní osou potočenou vůči ose přetvoření o úhel δ (obr. 10.12). Plocha této hysteretzní smyčky v souřadnicích síla – dráha je úměrná práci zmařené v zatěžovacím cyklu; v souřadnicích napětí – přetvoření je úměrná hustotě energie. Hustota energie akumulovaná v jedné čtvrtině zatěžovacího cyklu je rovna

$$W_s = 1/2 E' \varepsilon_0^2, \quad (10.37)$$

a hustota energie disipované v jedné čtvrtině zatěžovacího cyklu je

$$W_d = 1/4 E'' \varepsilon_0^2. \quad (10.38)$$



Obr. 10.12. Hysteretzní smyčka.

Práce zmařená v zatěžovacím cyklu se mění v teplo. U dlouhodobě pracujících součástí je nutno s tímto teplem počítat a popřípadě zajistit jeho odvod, aby nedošlo k postupné změně vlastností nebo k poškození součástí.

Literatura ke kapitole 10.

1. Tschoegl, N. W.: The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior: An Introduction. Springer Verlag, Berlin, 1989. 769 s.
2. Haddad, Y.M.: Viscoelasticity of Engineering Materials. Chapman & Hall, London, 1995. 378 s.
3. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 375 s.
4. Roylance, D.: Mechanics of materials. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. 315 s. Dostupné na webu (Google) po zadání názvu knihy do vyhledavače. (27.1.2019)
5. Menčík, J., He, L.H., Němeček, J.: Characterization of viscoelastic-plastic properties of solid polymers by instrumented indentation. Polymer Testing, 30, 2010, s. 101-109.

11. Mechanika součástí s povrchovými úpravami

11.1 Úvod

Citlivým místem z hlediska pevnosti a únavové odolnosti je povrch součástí. Ten je vystaven nepříznivému působení okolního prostředí, na povrchu zpravidla působí nejvyšší napětí, a jsou zde také nepříznivější podmínky pro vznik a růst trhlin. Vnější zatížení se na součást obvykle přenáší povrchem a bývá zdrojem mechanického poškození; je-li koncentrované, může zde vyvolat lokální plastické deformace v materiálu houževnatém nebo trhlinu v materiálu křehkém. Na nezatíženém povrchu je vždy rovinná napjatost, což je výhodné pro plastické deformování. Také při střídavém zatěžování kovových součástí vznikají extruze a intruze a poté zárodky únavových trhlin spíše na povrchu (obr. 7.4) než uvnitř tělesa, kde si různě orientovaná krystalická zrna navzájem brání ve skluzu. I únavová trhlina v kořeni vrubu vzniká na jeho povrchu.

Na povrchu jsou také příznivější podmínky pro růst trhlin. Situace v tělesech s trhlínami byla podrobněji popsána v kapitole 8; zde proto jenom připomeneme nejdůležitější pojmy. Pro chování trhliny je rozhodující pole napětí před jejím čelem, charakterizované faktorem intenzity napětí

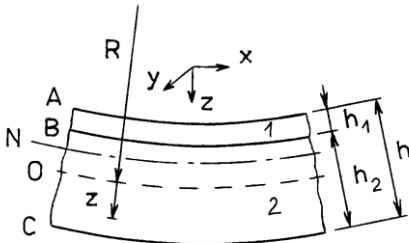
$$K_i = \sigma_n Y \sqrt{a} , \quad (11.1)$$

kde σ_n je jmenovité napětí v daném místě, a je délka nebo jiný charakteristický rozměr trhliny, a Y je tvarový činitel, který závisí na tvaru a velikosti trhliny a tělesa a na rozložení napětí. Index i (I, II, III) vyjadřuje způsob rozevírání trhliny. K rychlému růstu trhliny dojde, jestliže faktor intenzity napětí dosáhne nebo překročí kritickou hodnotu K_C . Ale i při nižším zatížení může trhlina pomalu růst při únavových procesech, pokud faktor intenzity napětí (nebo jeho rozkmit) překročí prahovou hodnotu K_{sc} nebo ΔK_{th} . Na faktoru intenzity závisí také rychlost růstu trhliny. Pro běžné tvary trhlin je faktor intenzity napětí pro povrchovou trhlínu zhruba o šedesát procent vyšší než pro stejně velkou trhlínu pod povrchem [1, 2]. To naopak také znamená, že při určitém napětí poroste i o dost menší povrchová trhlina než trhlina vnitřní.

Druhý přístup k posuzování chování těles s trhlinou je založen na energetické bilanci: trhlina roste, jestliže se tímto růstem uvolňuje z napjatého tělesa více energie, než se jí spotřebovává na tvorbu lomových ploch. Charakteristickou veličinou je tzv. rychlost uvolňování energie G ($\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$) a měrná lomová energie Γ ($\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$), a podmínka šíření trhliny má nyní tvar $G \geq \Gamma$. Oba přístupy (s faktorem intenzity napětí nebo s rychlostí uvolňování energie) jsou ekvivalentní.

Účinným prostředkem pro zvýšení odolnosti vůči porušení nebo únavě jsou různé povrchové úpravy. V kapitole 4.8 jsme zmínili zpevňování kovových součástí vytvořením tlakového předpětí v povrchové vrstvě lokálním plastickým deformováním. Zde si všimneme situace v tělesech s pevnými povlaky. Příkladem povlaků z materiálu odlišného, než je substrát, jsou smalty, tenké vrstvy vytvořené galvanicky, napařováním (proces PVD nebo CVD) nebo plazmatickým nástřikem, anebo tlustší kovová vrstva pevně spojená s kovovým substrátem naplátováním výbuchem nebo naválcováním, popřípadě vytvořená navařením. Ve všech těchto případech existuje určitý rozdíl vlastností povlaku a substrátu a poměrně ostré rozhraní, na němž se tyto vlastnosti rychle mění.

Nejprve ukážeme charakteristické rysy rozložení napětí v součástech s povrchovou vrstvou z jiného materiálu (obr. 11.1). Uvedeme vztahy pro napětí způsobená změnou teploty, tahovým zatížením anebo při kontaktu. Omezíme se na hlavní body; v podrobnostech odkazujeme čtenáře na [1, 2].



Obr. 11.1. Dvouvrstvá deska – geometrie.
N – neutrální osa.

11.2 Napětí způsobená rozdíly teplotních roztažností

Tato napětí vznikají vždy, když pracovní teplota součásti je jiná než teplota vytváření povrchové vrstvy. Příkladem jsou smaltované výrobky. Při chlazení po výpalu se vrstva s větší teplotní roztažností snaží smršťovat více, vrstva s menší roztažností tomu brání. To má za následek vznik napětí. Při dostatečně vysokých teplotách tato napětí relaxují, od určité teploty T_0 však zůstávají v tělese jako trvalá.

V místech vzdálených od okrajů vznikne dvojosá izotropní napjatost a platí $\sigma_x(z) = \sigma_y(z)$, $\varepsilon_x(z) = \varepsilon_y(z)$. Označíme-li veličiny odpovídající povrchové vrstvě indexem 1 a substrátu indexem 2, a jsou-li vlastnosti v celém objemu příslušné vrstvy konstantní, můžeme napsat následující obecné výrazy pro napětí:

$$\sigma_1(z) = E_1' \{ \alpha(y) + \alpha_1 [T_0 - T(z)] \} \quad , \quad (11.2a)$$

$$\sigma_2(z) = E_2' \{ \alpha(y) + \alpha_2 [T_0 - T(z)] \} \quad , \quad (11.2b)$$

kde

$$E_1' = E_1 / (1 - \mu_1) \quad , \quad E_2' = E_2 / (1 - \mu_2) \quad (11.3)$$

jsou efektivní moduly pružnosti odpovídající dvojosé napjatosti; μ je Poissonovo číslo.

Nyní mohou nastat dva případy podle toho, může-li se deska působením vnitřních napětí prohnut, či nikoliv.

Volné prohnutí není možné

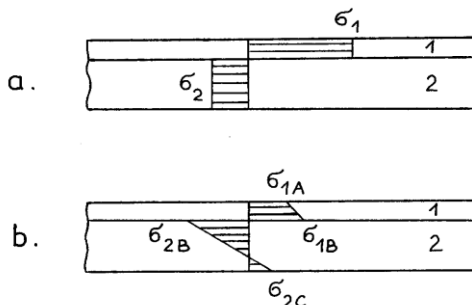
Poměrné prodloužení i napětí je všude stejné a pro povlak platí

$$\sigma_1 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(T_0 - T)}{\frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'} \frac{h_1}{h_2}} \quad , \quad (11.4)$$

kde h_1 , h_2 je tloušťka povlaku a substrátu. Napětí v substrátu dostaneme z podmínky, že výsledná síla v celém průřezu je nulová:

$$\sigma_2 = -\sigma_1 \frac{h_1}{h_2} \quad . \quad (11.5)$$

Rozložení napětí je znázorněno na obr. 11.2a.



Obr. 11.2. Napětí v dvouvrstvé desce vyvolaná rozdílem teplot a teplotních roztažností vrstev [1, 2]. **a** – deska bez možnosti prohnutí, **b** – deska s volným prohnutím.

Vztahy (11.4) a (11.5) platí i pro desky s povrchovými vrstvami po obou stranách. Za h_1 je potom nutno dosadit součet tloušťek obou povrchových vrstev.

Volné prohnutí je možné

Účinkem vnitřních napětí se deska prohne do tvaru části kulové plochy. Tím se výrazně změní rozložení i velikost jednotlivých napětí (obr. 11.2b). Ta se mění napříč tloušťkou lineárně, a na povrchu jednotlivých vrstev (body A, C na povrchu desky a bod B na styku obou vrstev) mají hodnoty [1, 2]:

$$\sigma_{1,A,B} = \sigma_{1\max} \frac{[1+1/(e'h^3)] \mp 3(1+1/h')}{(1+1/h')^2 \{3+(1+e'h^3)[1+1/(e'h^3)]/(1+h')^2\}}, \quad (11.6a)$$

$$\sigma_{2,B,C} = \sigma_{1\max} \frac{-h'[1+1/(e'h^3)] \mp 3(1+1/h')/(e'h')}{(1+1/h')^2 \{3+(1+e'h^3)[1+1/(e'h^3)]/(1+h')^2\}}, \quad (11.6b)$$

kde $\varepsilon' = E_1'/E_2'$ a $h' = h_1/h_2$. Hořejší znaménko (–) v čitateli výrazu (11.6a) odpovídá povrchu A na obrázku 10.1 a spodní znaménko (+) odpovídá styčné ploše B. V čitateli (11.6b) odpovídá hořejší znaménko (–) v čitateli styčné ploše B, a spodní znaménko (+) odpovídá povrchu C. Vliv tloušťky vrstvy je až do poměru tloušťek $h_1/h_2 = 0,01$ zanedbatelný, pak začíná výrazněji růst [1, 2]. Vliv možnosti volného průhybu ukážeme na příkladu podle [2].

Příklad 1. Určete napětí v desce o rozměrech 100×100 mm a tloušťce $h_2 = 4,0$ mm, na které je vrstva tloušťky $h_1 = 1,0$ mm. Materiálové konstanty jsou: $E_1 = E_2 = 75$ GPa, $\mu_1 = \mu_2 = 0,25$, $\alpha_1 = 6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_2 = 8 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $T_0 - T = 500$ K.

Nemůže-li se deska prohnut, bude v povlaku působit podle vztahu (11.4) napětí $\sigma_1 = -80$ MPa; v desce bude $\sigma_2 = 20$ MPa. Jestliže volnému průhybu nic nebrání, bude na povrchu povlaku působit napětí $\sigma_{1A} = -32$ MPa, ve styčné ploše bude $\sigma_{1B} = -51$ MPa, $\sigma_{2B} = 49$ MPa, a na povrchu desky 2 bude $\sigma_{2C} = -28$ MPa. To jsou značné rozdíly. Maximální volný průhyb uprostřed desky je $y_{\max} = 0,24$ mm, což je hodnota s těžší pozorovatelná pouhým okem.

Poznámka. Při zanedbatelné tloušťce povlaku ($h_1 \ll h_2$) přejde vztah (11.4) na tvar

$$\sigma_1 = E'(\alpha_1 - \alpha_2)(T_0 - T). \quad (11.7)$$

Odpovídající napětí v povlaku by bylo $\sigma_{1\max} = -100$ MPa. V masivním substrátu by napětí σ_2 bylo přibližně rovno nule.

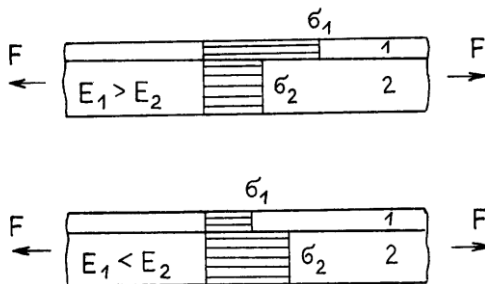
Uvedená teorie platí i v případě, kdy **vnitřní pnutí** bylo **vyvoláno jiným mechanismem**, například fázovou transformací v povrchové vrstvě, doprovázenou změnou objemu. Stačí nahradit v příslušných vztazích vztah $(\alpha_1 - \alpha_2)(T_0 - T)$ výrazem $(\Delta V/V)/3$, kde $\Delta V/V$ je poměrná změna objemu odpovídající fázové transformaci.

11.3 Napětí způsobená membránovými silami

Základní rysy ukážeme na dvouvrstvé desce zatížené silami působícími v rovině desky ve směru x (obr. 11.3). Napětí v jednotlivých vrstvách se určí z rovnováhy sil a z podmínky, že se obě vrstvy deformují jako jeden celek. Číslo 1 označuje povlak, číslo 2 substrát. Situace je jednoduchá, je-li **Poissonovo číslo** (součinitel příčné kontrakce) povlaku i substrátu **stejné**, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Ve směru y žádné napětí nevznikne a pro směr x bude platit

$$\sigma_{1x} = F'_x \frac{E_1}{E_1 h_1 + E_2 h_2}, \quad \sigma_{2x} = \sigma_{1x} \frac{E_2}{E_1} = F'_x \frac{E_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2}, \quad (11.8a, b)$$

kde F'_x je síla vztažená na jednotku šířky desky. Jsou-li **Poissonova čísla rozdílná**,



Obr. 11.3. Napětí v dvouvrstvé desce vyvolaná membránovou silou [1, 2].

je situace složitější. Volná příčná deformace každé vrstvy je jiná. Protože ale jejich výsledná deformace musí být stejná, objeví se v nich (v místech vzdálených od okrajů) také napětí ve směru y . Pro napětí v relativně tenkém povlaku ve směru zatěžující síly (x) a ve směru nezatíženém (y) platí přibližně [1, 2]:

$$\sigma_{1x} = F_x \frac{E_1}{E_1 h_1 + \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_1\nu_2} E_2 h_2} ; \quad \sigma_{1y} = \sigma_{1x} \frac{\nu_1 - \nu_2}{1 - \nu_1 \nu_2} . \quad (11.9)$$

Napětí σ_{2x} , σ_{2y} v základní desce dostaneme, jestliže ve vztazích (11.8) a (11.9) zaměníme indexy 1 a 2.

Napětí σ_{1x} a σ_{2x} , vyvolaná silou F_x , mají vždy stejné znaménko a jsou ve stejném poměru jako jejich moduly pružnosti E_1 a E_2 . Napětí v příčném směru mají opačná znaménka a jsou v obráceném poměru než tloušťky vrstev. Největší napětí v povrchové vrstvě bude působit, je-li její tloušťka mnohem menší než tloušťka substrátu.

Napětí v tyči s povlakem zatížené osovou silou

Situace v tyči je podobná předchozímu případu. Osová síla vyvolá v tyči i v povlaku napětí v osovém směru, a způsobí i zmenšení jejich příčných rozměrů. Při rozdílných Poissonových číslech obou složek se v povlaku objeví napětí v obvodovém směru, a také napětí kolmé k jejich styčné ploše. Objeví se i odpovídající napětí v substrátu. Odpovídající vztahy zde uvedeme pro tyč o průměru $D = 2R$, na níž je vytvořen poměrně tenký povlak. Materiál tyče má modul pružnosti E_2 a Poissonovo číslo μ_2 , odpovídající konstanty povlaku jsou E_1 a μ_1 .

Osová síla F způsobí v tyči (index 2) a povlaku (index 1) osově napětí

$$\sigma_{2a} = \frac{F}{\pi R^2}, \quad \sigma_{1a} = \sigma_{2a} \frac{E_1}{E_2} \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{1 - \mu_1^2}. \quad (11.10a,b)$$

V povlaku bude působit v obvodovém směru napětí

$$\sigma_{1\varphi} = \frac{E_1}{E_2} \frac{\mu_1 - \mu_2}{1 - \mu_1^2} \sigma_{2a}. \quad (11.11)$$

Poznámka. Vyjádříme-li osově napětí v tyči prostřednictvím osověho napětí v povlaku, dostaneme po úpravě pro obvodové napětí v povlaku výraz (11.11).

Příklad 2. Ve skelné glazuře na ocelové tyči zatížené osovou silou působí tahové napětí σ_{1x} . Jak velké napětí $\sigma_{1\varphi}$ bude působit v povlaku v obvodovém směru? Poissonova čísla skla a oceli jsou $\mu_1 = 0,2$ a $\mu_2 = 0,3$.

Při relativně tenkém povlaku bude podle vztahu (11.9) platit

$$\sigma_{1\varphi} = \frac{0,2 - 0,3}{1 - 0,2 \cdot 0,3} \sigma_{1x} = -0,106 \sigma_{1x}.$$

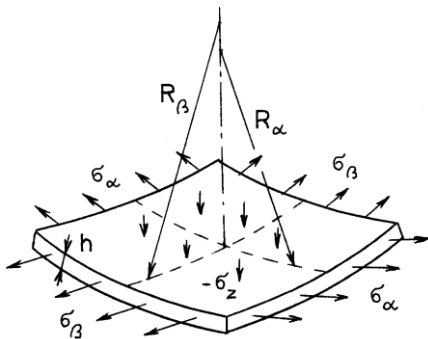
Znaménko mínus plyne z toho, že příčná deformace oceli je větší než u skla. To ale znamená, že při zatížení tyče tlakovou osovou silou se v povlaku v obvodovém směru nečekaně objeví tahové napětí, které někdy může vést až k jeho popraskání!

11.4 Napětí v povlacích na zakřivených plochách

U povlaků na zakřivených plochách u zatížených součástí se objeví radiální napětí kolmá ke styčné ploše se substrátem (obr. 11.4). Je-li povlak relativně tenký, lze radiální napětí mezi ním a substrátem stanovit ze vztahu [1, 2]

$$\sigma_r = -h \left(\frac{\sigma_\alpha}{R_\alpha} + \frac{\sigma_\beta}{R_\beta} \right), \quad (11.12)$$

kde h je tloušťka povlaku, σ_α , σ_β jsou tečná napětí v povlaku ve dvou navzájem kolmých směrech (α , β), a R_α , R_β jsou poloměry křivosti styčné plochy. Poloměr dosazujeme jako kladný, je-li povlak v příslušném směru vypuklý, a jako záporný u povlaku vydutého. Působí-li například v povlaku na vypuklé ploše v tečném směru tlakové napětí, objeví se ve styčné ploše radiální tahové napětí, které se bude snažit povlak od substrátu odtrhnout. Rovnice (11.12) také říká, že vznikne-li mezi povlakem a substrátem z určitých důvodů napětí radiální (např. brání-li substrát volnému smrštění povlaku při ochlazení), objeví se v povlaku tečné napětí.



Obr. 11.4. Napětí v tenkém povlaku na zakřivené ploše. σ_z je radiální napětí.

Laplaceova rovnice (11.12) předpokládá, že napětí jsou v povlaku rozložena rovnoměrně; pokud se mění s hloubkou, např. při nerovnoměrném rozložení teplot, dosazujeme do ní jejich střední hodnoty. Radiální napětí budou tím vyšší, čím je povlak tlustší vzhledem k poloměru křivosti. Tato napětí působí nejen ve styčné ploše, ale také v povlaku a substrátu, takže mohou mít vliv i na šíření trhlin v blízkosti rozhraní.

11.5 Poměry u okraje povlaku

Napjatost v místech, kde povlak náhle končí, je složitější. Zjednodušenou analýzu ukážeme pro plochou tyč zatíženou tahovou silou. Na volném okraji povlaku žádné napětí nepůsobí a veškeré zatížení přenáší substrát. Vpravo od tohoto okraje přenáší osovou sílu substrát i povlak. Ta část zatížení, kterou ponese povlak, se do něj musí přenést ze substrátu prostřednictvím smykových napětí. Mezi smykovým napětím na rozhraní τ a středním napětím v povlaku σ_1 a v substrátu σ_2 platí při jednotkové šířce tyče

$$d\sigma_1(x)h_1 = \tau(x) dx, \quad d\sigma_2(x) h_2 = -\tau(x) dx, \quad (11.13)$$

kde x je vzdálenost od volného okraje povlaku; h_1 a h_2 jsou tloušťky povlaku a substrátu (obr. 11.5 vlevo). Působením napětí se body střední plochy povlaku a substrátu o souřadnici x posunou o $u_1(x)$ a $u_2(x)$. Odpovídající střední poměrná prodloužení budou

$$\varepsilon_1(x) = du_1/dx, \quad \varepsilon_2(x) = du_2/dx. \quad (11.14)$$

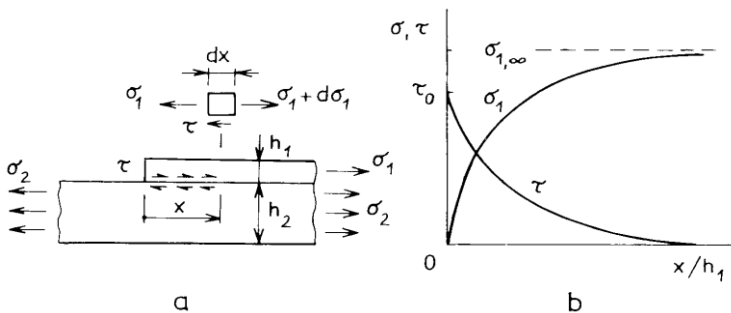
Za předpokladu platnosti Hookeova zákona a stejných Poissonových čísel budou průměrná napětí

$$\sigma_1(x) = E_1 \varepsilon_1(x) = E_1 du_1/dx, \quad \sigma_2(x) = E_2 du_2/dx. \quad (11.15)$$

O smykovém napětí na rozhraní budeme předpokládat, že je přímo úměrné vzájemnému posunutí obou vrstev,

$$\tau = k_\tau (u_1 - u_2), \quad (11.16)$$

kde k_τ je konstanta, charakterizující smykovou tuhost spoje. Vyjádříme-li napětí v (11.13) pomocí posuvů (11.14) a (11.16), obdržíme soustavu dvou diferenciálních



Obr. 11.5. Vývoj napětí v povlaku a na rozhraní od volného okraje povlaku [2].

rovníc druhého řádu. Jejím vyřešením dostaneme následující vztahy pro napětí v povlaku:

$$\sigma_1(x) = \sigma_{1,\infty} (1 - e^{-\lambda x}), \quad \tau(x) = \sigma_{1,\infty} h_1 \lambda e^{-\lambda x} = \tau_0 e^{-\lambda x}, \quad (11.17)$$

kde

$$\lambda = \sqrt{k_\tau [(E_1 h_1)^{-1} + (E_2 h_2)^{-1}]} \quad ; \quad (11.18)$$

$\sigma_{1,\infty}$ je napětí v povlaku ve velké vzdálenosti od okraje, a τ_0 je smykové napětí na okraji povlaku ($x = 0$). Vztahy (11.17) a (11.18) také platí pro napětí způsobená rozdíly teplotních roztažností.

Rozložení napětí je ukázáno na obr. 11.5 vpravo. Vidíme, že membránové napětí v povlaku narůstá plynule od nuly na volném okraji k asymptotické hodnotě $\sigma_{1,\infty}$, zatímco smykové napětí klesá z maximální hodnoty τ_0 k nule. Tyto změny jsou rychlejší pro vyšší hodnoty λ , tj. pro vyšší smykovou tuhost a menší tahovou tuhost obou vrstev. Pokud je povlak přímo na substrátu, lze užít přibližný výraz [2]:

$$\lambda = 1 / (h_1 \sqrt{1 + (E_1 / E_2)}) \quad , \quad (11.19)$$

ze kterého vyplývá, že pro běžné materiálové kombinace je vliv volného okraje omezen na troj- až pětinašobek tloušťky povlaku.

Toto bylo řešení pro případ čistě pružných deformací. Bude-li substrát z pružnoplastického materiálu s nízkou mezí kluzu bez zpevnění, bude smykové napětí mezi ním a povlakem konstantní, rovno mezi kluzu ve smyku. Situace je podobná jako při vytahování vlákna z matrice ve vláknovém kompozitu (Kap. 12.3.)

Existují i podrobnější řešení; některá z nich jsou uvedena například v [2], kde jsou citovány i další práce.

11.6 Pružnoplastické deformování

Jakmile napětí v tělese z tvárného materiálu dosáhne meze kluzu, dochází zde k plastickému tečení. Při dalším růstu zatížení se rozložení napětí v tělese mění. Ve zplastizované oblasti zůstává napětí buď konstantní, nebo narůstá jen pomalu. Celkové deformace rostou rychleji. Po odlehčení zůstává součást trvale deformována a působí v ní zbytková napětí, která se sčítají s napětími od pracovního zatížení.

Pro získání základní představy o napjatosti v pružnoplastickém stavu se omezíme

na dvouvrstvou desku bez možnosti volného průhybu. Materiál každé vrstvy bude ideálně pružnoplastický bez zpevnění, se stejnou mezí v kluzu v tahu i v tlaku (obr. 11.6a). Jako zatížení budeme uvažovat tah ve směru osy x .

Zpočátku se obě vrstvy deformují pouze pružně (deformace jsou stejné). Pro sílu F platí úsek OA na obr. 11.6b, a pro napětí σ_1 a σ_2 platí úseky OA_1 a OO_2' a vztahy (11.7a,b). Vyšší napětí působí ve vrstvě s vyšším modulem pružnosti. S rostoucím zatížením napětí v obou vrstvách stoupá, a to až do okamžiku, kdy napětí v jedné z vrstev dosáhne meze kluzu. Nemusí to být vrstva, která má nižší napětí plastického tečení, ale ta, u níž mezi kluzu odpovídá menší poměrné přetvoření ε_Y . Dále budeme předpokládat, že dříve dojde k plastickému tečení ve vrstvě 1; vztahy pro opačný případ bychom dostali záměnou indexů 1 a 2.

Mez kluzu ve vrstvě 1 je dosažena při poměrném prodloužení

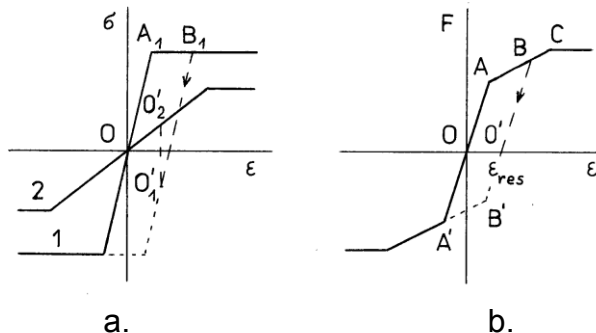
$$\varepsilon = \varepsilon_{1Y} = \sigma_{1Y} / E, \quad (11.20)$$

kterému odpovídá síla

$$F' = \sigma_{1Y} h_1 \left(1 + \frac{E_2' h_2}{E_1' h_1} \right). \quad (11.21)$$

Roste-li zatížení dále, zůstává napětí v první vrstvě konstantní (předpokládáme materiál bez zpevnění), $\sigma_1 = \sigma_{1Y}$. Druhá vrstva se dosud deformuje pružně a pro napětí v ní platí $\sigma_2 = E_2 \varepsilon$. Závislost $F(\varepsilon)$ je nyní na obr. 11.6b představována úsekem AC. Deformace narůstá rychleji. Pro napětí ve vrstvě 2 platí

$$\sigma_2 = (F - \sigma_{1Y} h_1) / h_2. \quad (11.22)$$



Obr. 11.6. Pružnoplastické deformování dvouvrstvé desky. **a** – pracovní diagramy materiálu pro vrstvu 1 a 2, **b** – celková membránová síla.

Tímto způsobem se bude těleso deformovat až do dosažení meze kluzu ve vrstvě 2 (bod C na obr. 11.6b). Odpovídající zatížení je

$$F'' = \sigma_{1Y} h_1 + \sigma_{2Y} h_2 . \quad (11.23)$$

Od tohoto okamžiku by deformace mohly narůstat neomezeně i při konstantním zatížení (vodorovný úsek na obr. 11.6b). Ve skutečnosti se zpravidla projeví zpevnění materiálu.

Podívejme se nyní, co se stane při **odlehčení**. Pokud při zatížení platilo $F < F'$ (tj. nebyl překročen bod A), deformovaly se obě vrstvy pouze pružně, a po odlehčení se deska vrátí do původního stavu. Jestliže ale u jedné, popř. obou vrstev došlo k plastickému deformování, zůstane celá deska o určitý kousek delší a budou v ní působit zbytková napětí. Situace je znázorněna na obr. 11.6. Pro zatěžování platí lomená čára OAB pro sílu F , popřípadě OA_1B_1 a OA_2B_2 pro napětí ve vrstvě 1 a 2. Odlehčování probíhá pružně po čáře BO' rovnoběžné s počátečním úsekem diagramu $F(\varepsilon)$, resp. $\sigma(\varepsilon)$. Bod O' odpovídá stavu, kdy nepůsobí žádná vnější síla. Zbytková napětí můžeme určit tak, že od napětí v zatíženém stavu odečteme napětí, která by vznikla, kdyby si těleso uchovalo pružné vlastnosti v celém průběhu zatěžování.

Zbytkové napětí ve vrstvě 1 tedy s přihlédnutím ke vztahu (11.21) bude

$$\sigma_{1,res} = \sigma_{1,Y} - \frac{F}{h_1} \left/ \left(1 + \frac{E_2' h_2}{E_1' h_1} \right) \right. . \quad (11.24)$$

Protože platí $\varepsilon > \varepsilon_Y$, je zřejmé, že zbytkové napětí bude mít opačné znaménko než při zatížení.

Stejným způsobem bychom mohli určit zbytkové napětí ve vrstvě 2. Dostaneme je však snáze z rovnice rovnováhy sil, a platí

$$\sigma_{2,res} = -\sigma_{1,res} \frac{h_1}{h_2} . \quad (11.25)$$

Smysl tohoto napětí je stejný jako při zatížení. V uvažovaném případě je zbytkové napětí rozloženo v obou vrstvách rovnoměrně, a větší absolutní hodnotu má vždy v tenčí vrstvě. Pokud se deska může účinkem reziduálních napětí prohnout, změní se jejich velikost a charakter podobně, jak bylo popsáno dříve.

Trvalé prodloužení desky po odlehčení z bodu B je na obr. 11.6b označeno jako O' .

Maximální velikosti mohou zbytková napětí nabýt, jestliže předchozí zatížení dosáhlo mezní hodnoty C na obr. 11.6b. V takovém případě bude

$$\sigma_{1, res, max} = \sigma_{1, Y} - \left(1 - \frac{\varepsilon_{2Y}}{\varepsilon_{1Y}}\right) / (1 + \varepsilon' h') \cdot \quad (11.26)$$

Chování dvouvrstvé desky s vlastním pnutím při novém zatížení je také zřejmé z obr. 11.6b. Nezatíženému stavu odpovídá bod O'. Zatížíme-li součást tahem, deformuje se pružně podle čáry O'B. Celkové napětí ve vrstvě 1 je nižší o hodnotu $\sigma_{1, res}$, a ve vrstvě 2 je naopak o $\sigma_{2, res}$ vyšší než u desky bez vlastních pnutí. Po odlehčení se deska vrátí do stavu označeného bodem O'. To platí, dokud zatěžovací síla nepřekročí hodnotu $F(B)$. Při jejím překročení se zvětší rozsah plastických deformací, a změní se i hodnoty zbytkových napětí po odlehčení.

Zatížíme-li naopak desku tlakem, dosáhne napětí ve vrstvě 1 meze kluzu již při menším celkovém zatížení než u desky bez vlastních pnutí (bod B' na obr. 11.6b). Dojde-li k plastickému tečení, původní zbytková napětí se po odlehčení zmenší. Předchozí zatížení se vznikem plastických deformací a zbytkových napětí tedy zvýšilo odolnost součásti proti zatížení stejného smyslu, avšak snížilo její odolnost proti zatížení opačného smyslu.

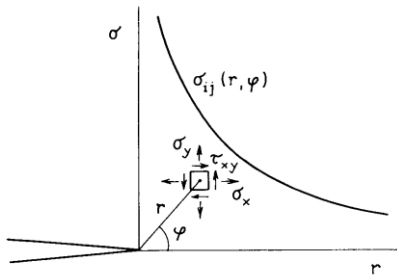
U čtených součástí se vyskytuje zatěžování střídavým tahem i tlakem. Pokud je dvouvrstvá deska bez vlastních pnutí, a zatěžující síla se mění nanejvýš od $F(A)$ do $F(A')$, probíhá deformování pružně. Jestliže bylo v součásti vyvoláno předpětí, například přetížením do bodu B, bude se deska při následujícím střídavém zatěžování deformovat zcela pružně jen tehdy, bude-li se zatěžující síla měnit v intervalu $\langle F(B'); F(B) \rangle$. Pokud bude maximální nebo minimální síla ležet vně tohoto intervalu, avšak její celkový rozkmit nebude větší než $2F(A)$, dojde k jednorázové plastické deformaci, po které se již ale bude součást deformovat elasticky. (Říkáme, že se konstrukce přizpůsobila.) Bude-li rozkmit síly větší než $2F(A)$, například maximální tahová síla bude $F(B)$, a maximální tlaková síla bude $F(A')$, bude trvale docházet ke střídavému plastickému deformování vrstvy 1. Příslušný zatěžovací cyklus je znázorněn na obr. 11.6b čarou BB'A'AB. Plocha ohraničená touto smyčkou je úměrná práci zmařené při plastickém deformování v jednom cyklu. Po vyčerpání únavové odolnosti materiálu opakovaným deformováním může v některém místě vzniknout únavová trhлина.

11.7 Lomová mechanika rozhraní

Popis napěťového pole pro trhlinu v těsné blízkosti rozhraní je v případě bimateriálu složitější. Obecný výraz pro napětí před vrcholem trhliny (obr. 11.7) je

$$\sigma_{ij}(r, \varphi) \sim \sigma_n(L/r)^s f_{ij}(\varphi), \quad (11.27)$$

kde $\sigma_{ij}(r, \varphi)$ označuje složku napětí ve vzdálenosti r před vrcholem trhliny (φ je úhel mezi směrem trhliny a vyšetřovaným bodem), σ_n je jmenovité napětí v oblasti trhliny, L je délka trhliny nebo jiný charakteristický rozměr, s je konstanta, a f_{ij} je určitá funkce úhlu φ . Zatímco u trhliny v homogenním materiálu je exponent singularity napětí roven $s = 0,5$, u kombinace materiálů s odlišnými elastickými vlastnostmi a jejich skokovou změnou na rozhraní má s jiné hodnoty. Přesto lze dělat některé závěry i při zanedbání rozdílné hodnoty exponentu.



11.7. Napětí před trhlinou.

K popisu elastických vlastností izotropního materiálu jsou zapotřebí dvě konstanty: modul pružnosti a Poissonovo číslo μ . Dvěma materiálům tedy obecně přísluší čtyři konstanty. Jsou-li však tyto materiály pevně spojeny, takže tvoří bimateriál, stačí pro popis vlastností v blízkosti rozhraní opět pouze dvě konstanty, tzv. Dundursovy parametry α a β :

$$\alpha = \frac{k(\kappa_1 + 1) - (\kappa_1 + 1)}{k(\kappa_1 + 1) + (\kappa_1 + 1)}, \quad \beta = \frac{k(\kappa_1 - 1) - (\kappa_1 - 1)}{k(\kappa_1 + 1) + (\kappa_1 + 1)}, \quad (11.28)$$

kde $k = G_2/G_1$ je poměr modulů pružnosti ve smyku obou materiálů, a $\kappa_i = 3 - 4\mu_i$ při rovinné deformaci a $(3 - \mu_i)/(1 + \mu_i)$ při rovinné napjatosti, kde index 1 nebo 2 odpovídá prvému nebo druhému materiálu. Parametr α charakterizuje především rozdíl mezi moduly pružnosti obou materiálů; parametr β odráží ve zvýšené míře vliv rozdílu Poissonových čísel [2, 3].

Dalším parametrem je efektivní modul pružnosti bimateriálu, definovaný podobně jako v kontaktní úloze:

$$\frac{1}{E_e} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right). \quad (11.29)$$

V tabulce 1 jsou Dundursovy parametry pro vybrané kombinace materiálů.

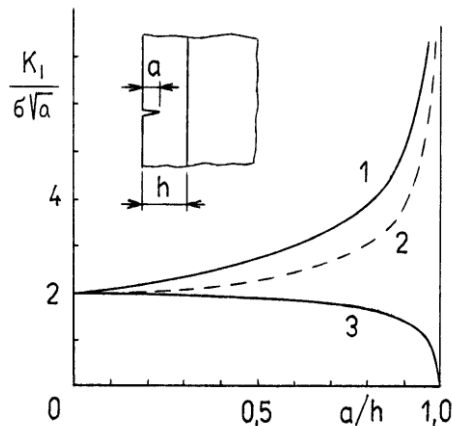
Tabulka 11.1. Dundursovy parametry α , β , a efektivní modul pružnosti E_{ef} pro některé materiálové kombinace [2, 3].

Kombinace	α	β	E_{ef}
ocel – ZrO ₂	0,632	0,123	86,2
ocel – Ni	0,004	0,013	233,2
ocel – Ti	0,257	0,024	173,8
ocel – sklo	0,517	0,186	113,1
ocel – epoxy	0,963	0,232	8,7
sklo – epoxy	0,888	0,210	8,3

Trhlina blížící se k rozhraní

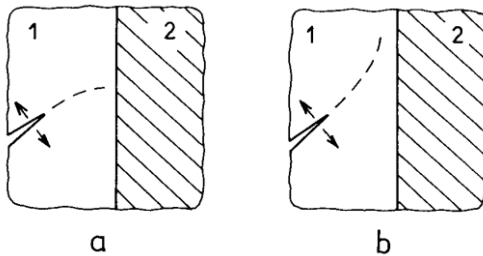
Situace pro trhlinu v povlaku blížící se k substrátu v tělese zatíženém tahem ve směru rozhraní je znázorněna na obr. 11.8. Blízkost druhého materiálu o jiné tuhosti má vliv na velikost faktoru intenzity napětí. Ten stoupá, přibližuje-li se trhlina k materiálu o nižším modulu pružnosti, a klesá, blíží-li se k materiálu tužšímu. V prvním případě se čelo trhliny snadno dostane až k rozhraní obou vrstev. Ve druhém případě by se trhlina měla před rozhraním zastavit. S ohledem na různé nehomogenity a materiálové vady ale i zde může někdy dorůst až k rozhraní.

Není-li trhlina k rozhraní kolmá, bude se v jeho blízkosti stáčet podle obr. 11.9.



Obr. 11.8. Faktor intenzity napětí pro trhlinu v povlaku blížící se k rozhraní se substrátem. Podle [4]. **1.** kombinace hliník-epoxy ($E_{Al} > E_{epoxy}$), **2.** ocel – hliník ($E_{ocel} > E_{Al}$), **3.** hliník – ocel ($E_{Al} < E_{ocel}$).

Trhlina v tužším povlaku na poddajnějším substrátu se stáčí do směru kolmého k rozhraní (obr. 11.9a). Naopak trhlina v poddajnějším povlaku, blíží se k tužšímu substrátu, má tendenci se odklánět do směru rovnoběžného s rozhraním (obr. 11.9b). To má pak vliv i na její chování na rozhraní.



Obr. 11.9. Šikmá trhlina blíží se k rozhraní. a: $E_1 > E_2$, b: $E_1 < E_2$.

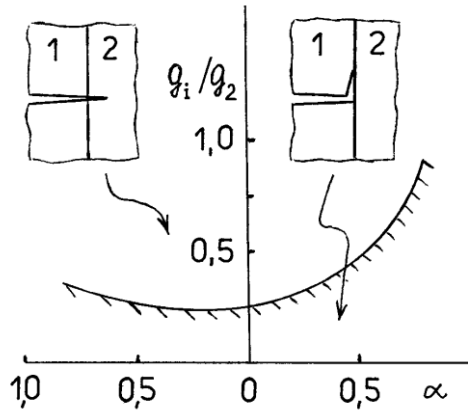
Chování trhliny na rozhraní

U trhliny, jejíž vrchol je na rozhraní dvou materiálů, je důležitou otázkou, zda se zde zastaví, nebo bude pokračovat do substrátu ve svém původním směru, anebo odbočí podél rozhraní (obr. 11.10). Řešení této problematiky bylo komplikováno skutečností, že na styku dvou vrstev se skokovou změnou vlastností se mění hodnota exponentu singularity napětí ve vrcholu trhliny. Zjednodušeně lze ale říci, že trhlina bude mít snahu růst v původním směru nebo odbočit podle toho, jestli poměr rychlostí uvolňování energie v původním směru a při odbočení bude větší nebo menší než poměr měrných lomových energií v odpovídajících směrech. Jinými slovy, trhlina se bude šířit v tom směru, kterému bude odpovídat větší přebytek uvolňované energie nad spotřebovávanou.

Jedná-li se o trhlinu kolmou k rozhraní a rozevíranou tahovým napětím rovnoběžným s rozhraním, můžeme podmínku jejího odbočení zapsat takto:

$$\frac{G_i}{G_2} > \frac{\Gamma_i}{\Gamma_2} . \quad (11.30)$$

Pokud není tato podmínka splněna, trhlina neodbočí, ale spíše pronikne do materiálu 2. G vyjadřuje rychlost uvolňování energie, Γ vyjadřuje měrnou lomovou energii, a index i nebo 2 značí, jedná-li se o šíření trhliny podél rozhraní nebo o její proniknutí do materiálu 2. V nejjednodušším případě, kdy materiály 1 a 2 mají stejné elastické konstanty, dojde k odbočení trhliny a následnému oddělování obou vrstev při $\Gamma_i/\Gamma_2 < 1/4$, tedy je-li měrná lomová energie rozhraní menší než 25% měrné lomové energie vrstvy 2 (např. substrátu). Naopak to také znamená, že když



Obr. 11.10. Poměr rychlostí uvolňování energie pro trhlinu odbočující (G_1) a pronikající do substrátu (G_2) pro různé hodnoty Dundursova parametru α [2 – 4].

měrná lomová energie rozhraní Γ_i není menší než čtvrtina měrné lomové energie materiálu 2, trhlinu nemůže odbočit.

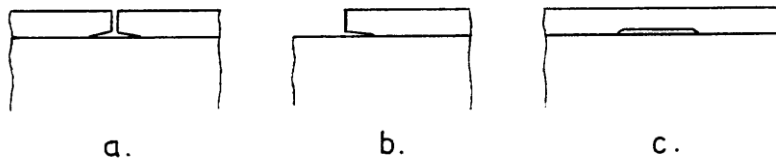
Při rozdílných elastických vlastnostech materiálu 1 a 2 je řešení složitější, neboť se liší charakter napětového pole u trhliny na rozhraní a v homogenním prostředí. Tuto úlohu řešili He a Hutchinson [3]. Na obr. 11.10 je znázorněn poměr G_1/G_2 v závislosti na Dundursově parametru α při $\beta = 0$. Vliv parametru β je poměrně malý. Obrázek poskytuje obecnou představu o chování trhliny dotýkající se rozhraní. Jestliže se poměr specifických lomových energií Γ_1/Γ_2 pro určitý bimateriál s Dundursovým parametrem α nachází nad křivkou G_1/G_2 , může trhlinu proniknout do materiálu 2. Pokud bude ležet pod touto křivkou, trhlinu odbočí. Je vidět, že při $\Gamma_1/\Gamma_2 < 1/4$ dojde k odbočení trhliny při jakékoliv materiálové kombinaci, a že podmínky pro delaminaci jsou všeobecně příznivější, nachází-li se trhlinu v poddajnějším materiálu, tj. při $E_1 < E_2$.

Nezbytnou podmínkou pro odbočení trhliny je, aby rychlost uvolňování energie G_1 byla větší než měrná lomová energie rozhraní Γ_i . Naopak podmínkou pro proniknutí trhliny do materiálu 2 je, aby platilo $G_2 > \Gamma_2$.

Trhlinu ležící v rozhraní; delaminace

U trhliny v rozhraní (obr. 11.11) se vyskytuje zpravidla současně normálové i smykové napětí. Uvažujme případ, kdy v neporušeném povlaku působí ve směru

rovnoběžném s rozhraním tlakové napětí (tj. normálové), záměrně vyvolané při výrobě. Dojde-li někde k odprýsknutí části povlaku, bude zde jeho okraj volný, bez napětí (Obr. 11.11b). Působí-li v povlaku tahové napětí, uvolní se při jeho pouhém prasknutí. Relativně rychlý pokles síly u okraje se projeví mimo jiné přítomností smykových napětí v rozhraní. Napjatost v oblasti vrcholu trhliny tedy bude současně charakterizována dvěma složkami faktoru intenzity napětí, K_I a K_{II} . Přítomnost smykových napětí má za následek, že trhlina v rozhraní bude chtít odbočit do materiálu 1 nebo 2, podle smyslu těchto napětí. Jestli k tomu dojde, závisí na intenzitě napětí pro příslušné směry, a také na spotřebě energie pro pokračování růstu trhliny v rozhraní nebo při odbočení.



Obr. 11.11. Trhlina v rozhraní mezi povlakem a substrátem.

Mají-li oba materiály stejné elastické konstanty, stačí pracovat s modulem (amplitudou) faktoru intenzity napětí $|K|$ a fázovým úhlem ψ :

$$|K| = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}, \quad \psi = \arctan(K_{II} / K_I). \quad (11.31)$$

Chování trhliny lze také posuzovat podle rychlosti uvolňování energie G , což je skalár. Podobně i měrná lomová energie Γ je skalár. Hodnoty těchto veličin ovšem obecně závisí na fázovém úhlu ψ . Trhlina se bude šířit ve směru ψ^* , ve kterém je největší přebytek uvolňované energie $G(\psi)$ proti spotřebovávané energii $\Gamma(\psi)$.

V případě rozdílných materiálů 1 a 2 je exponent s ve vztahu (10.27) komplexní číslo. V důsledku toho – podle teoretického řešení, založeného na lineární lomové mechanice – jednotlivé složky napětí (normálová a smyková) v okolí vrcholu trhliny oscilují. Jejich vzájemný poměr se s přibližováním k vrcholu mění tak, jako kdyby výsledný vektor napětí rotoval stále vyšší rychlostí. Podobně oscilují i teoretické hodnoty posunutí, a v blízkosti kořene by dokonce mělo docházet k vzájemnému pronikání boků trhliny, což není možné. Příslušná oblast je ale extrémně malá, srovnatelná se vzdáleností atomů nebo ještě menší, kde teoretické modely, založené na představě kontinua, již stejně nejsou adekvátní. Kromě toho

ve skutečnosti se vlastnosti na rozhraní nikdy nemění zcela skokem; vždycky existuje určitá přechodová vrstvička, ve které se vlastnosti mění víceméně plynule. Navíc, jakmile napětí dosáhne jisté kritické velikosti, dochází v materiálu k nevratnému deformování a Hookeův zákon již neplatí. Při praktickém posuzování chování trhlin v rozhraní lze proto přijmout s určitou opatrností obecné závěry plynoucí z lineární lomové mechaniky, včetně faktorů intenzity napětí K_I , K_{II} . K této problematice viz blíže [2, 3].

Šíření trhliny na rozhraní od okraje povlaku

Zde si všimneme možnosti šíření delaminace vycházející z relativně dlouhé trhliny pod povlakem, ve kterém působí tahové napětí σ_0 (obr. 11.12). Faktor intenzity napětí pro povrchovou trhlínu hloubky h je

$$K_I = 1,12 \sigma_0 \sqrt{(\pi h)} = 1,99 \sigma_0 \sqrt{h} . \quad (11.32)$$

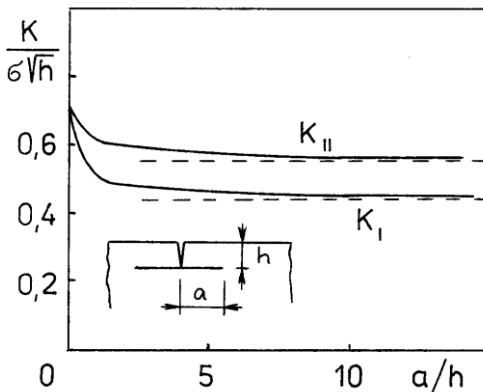
Tomuto faktoru odpovídají faktory intenzity napětí působících v rozhraní [2, 3]:

$$K_{I,0} = K_{II,0} = 0,702 \sigma_0 \sqrt{h} . \quad (11.33)$$

Odpovídající rychlost uvolňování energie je

$$G_0' = 0,99 \frac{1-\mu^2}{E} \sigma_0^2 h . \quad (11.34)$$

Je-li G_0' větší než měrná lomová energie rozhraní Γ_i při fázovém úhlu ($\psi = \arctg(K_{II}/K_I) = 40^\circ$, vznikne na rozhraní trhlina schopná dalšího růstu. (Index 0 u K a G značí, že se zatím jedná o trhlínu nulové délky.)



Obr. 11.12. Faktory intenzity napětí pro šíření trhliny na rozhraní od okraje povlaku [10].

S rostoucí délkou delaminační trhliny faktory intenzity napětí pro ni klesají (obr. 11.12) a blíží se k asymptotickým hodnotám (pro „nekonečně dlouhou“ trhlínu):

$$K_{I,\infty}' = 0,434 \sigma_0 \sqrt{h} \quad , \quad K_{II,\infty}' = 0,558 \sigma_0 \sqrt{h} \quad , \quad (11.35)$$

Odpovídající rychlost uvolňování energie je

$$G_\infty = \frac{1-\mu^2}{E} (K_{I,\infty}'^2 + K_{II,\infty}'^2) = 0,5 \frac{1-\mu^2}{E} \sigma_0^2 h \quad . \quad (11.36)$$

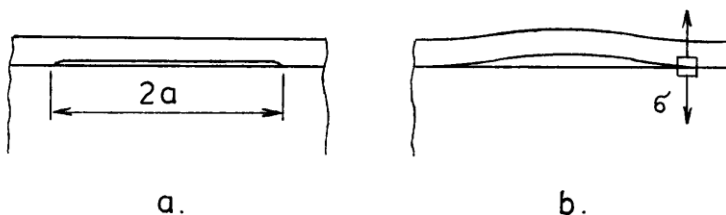
Nachází-li se měrná lomová energie rozhraní Γ_i mezi hodnotami Γ_0' a Γ_∞' , začne trhlína růst, ale brzy se zastaví. Je-li však $\Gamma_i < \Gamma_\infty$, může se šířit bez omezení a dojde k výraznému odlupování povlaku.

Šíření delaminace z míst vzdálených od okrajů – horká skvrna

Všimneme si případu, kdy v určitém místě vzdáleném od okrajů není povlak pevně spojen se substrátem. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že nespojená oblast má tvar kruhu o průměru $2a$. V povlaku často působí dvojosé tlakové napětí σ_0 . Může se jednat o vlastní pnutí nebo o napětí vyvolané vyšší teplotou povlaku při ohřevu součásti. Dokud je toto napětí nízké, zůstává povlak nad delaminací rovný a nic se neděje. Jakmile však σ_0 překročí určitou kritickou hodnotu, volná část povlaku se vyboulí (obr. 11.13). Kromě rovnoměrně rozloženého napětí v ní teď působí i napětí ohybová, a na jejím okraji se objeví vysoká špička napětí. Kritické napětí pro vyboulení povlaku je dáno obecným vztahem [8, 9]

$$\sigma_C = k \frac{E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \quad . \quad (11.37)$$

Za určitých podmínek se začne delaminovaná oblast zvětšovat. Při tom se bude uvolňovat ze stlačeného povlaku energie, která může krýt její spotřebu při vzniku



Obr. 11.13. Delaminace v místech vzdálených od okrajů.

a – geometrie, b – situace po vyboulení povlaku.

nových lomových ploch. Jedná-li se o místo, které je ohříváno, v místě delaminace je zhoršen odvod tepla do součásti a teplota povlaku stoupne a tlakové napětí v něm se zvýší. Tím je podporováno odlupování povlaku a může dojít k jeho praskání.

Více k boulení povlaků nad delaminací a k lomové mechanice pro tyto případy lze najít např. v [1, 2, 8, 9]. Zde uvedeme jenom jeden vztah. Při růstu delaminace kruhového tvaru se s rostoucím poloměrem a rychlost uvolňování energie blíží k asymptotické hodnotě pro velké hodnoty a :

$$G_{\infty} = (1 - \beta) h \sigma_0^2 (1 - \mu) / E . \quad (11.38)$$

Je-li tato hodnota nižší než měrná lomová energie rozhraní, nemůže se účinkem napětí σ_0 šířit žádná delaminace, bez ohledu na rozměry. Při navrhování povlaků by proto hodnoty h , σ_0 a E měly být vždy v takové relaci, aby platilo $G_i > G_{\infty}$.

Růst trhliny v povrchové vrstvě do šířky

Jakmile povrchová trhlina v povlaku dorostla k rozhraní se substrátem, může zde odbočit podél rozhraní (delaminace), zastavit se, nebo proniknout do substrátu. Je-li substrát dostatečně houževnatý, čelo trhliny se zde zastaví a otupí (obr. 11.14b). Další šíření trhliny probíhá směrem do stran (obr. 11.14c). Jestliže hnací silou růstu trhliny je tahové napětí v povlaku σ_0 , je rychlost uvolňování energie při růstu do hloubky v okamžiku dosažení substrátu [3]

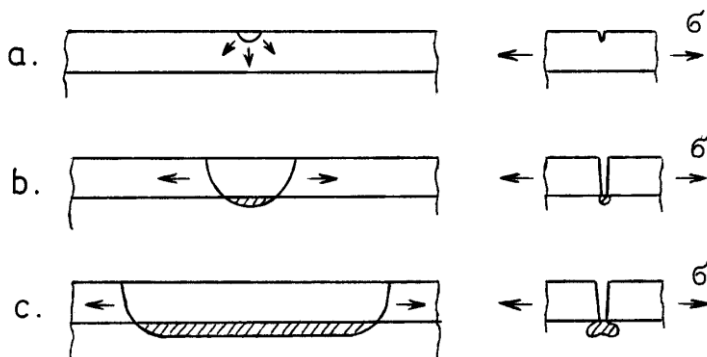
$$G(h) = 3,94 \frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_0^2 h . \quad (11.39)$$

Rychlost uvolňování energie růstem této trhliny do stran je

$$G_1 = 1,97 \frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_0^2 h . \quad (11.40)$$

Tato hodnota je poloviční než rychlost uvolňování energie (11.39) odpovídající růstu trhliny do hloubky. To znamená, že trhlina, která účinkem působících napětí pronikla povlakem až k rozhraní, ale nemůže vniknout do substrátu, se bude vždycky šířit do stran. Ze vztahu (11.40) dále plyne, že pro trhliny vzniklé například lokálními poškozeními (a prostupující celým povlakem) existuje určitá kritická tloušťka povlaku, od které se budou samovolně šířit do stran. Tato tloušťka

je tím menší, čím větší je vlastní pnutí v povlaku a čím menší je jeho měrná lomová energie Γ_1 .

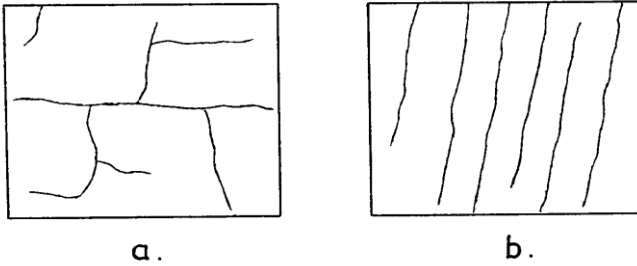


Obr. 11.14. Šíření povrchové trhliny v povlaku na houževnatém substrátu. *a* – počátek růstu, *b* – trhlina dorostla k substrátu, *c* – trhlina se šíří do stran. Dle [2].

V křehkém povlaku na houževnatém materiálu se někdy vytvoří celá síť prasklin. To je umožněno tím, že jednotlivé trhliny se zastavují na hranici se substrátem, takže při zvyšování zatížení mohou vznikat trhliny další. Systém trhlín odpovídá charakteru působících napětí. Při dvojosé izotropní napjatosti, jaká vzniká např. při náhlé změně teploty, bývá síť trhlín nepravidelná, trhliny mají různý směr (obr. 11.15a). Naopak při jednoosé napjatosti, například v tělese zatíženém tahem, se vytvoří řada trhlín kolmých ke směru maximálního tahového napětí (obr. 11.15b). Hustota trhlín souvisí s velikostí napětí. Protože se ale síly ze substrátu přenášejí do povlaku prostřednictvím smykových napětí, hraje významnou roli také pevnost adheze povlaku k substrátu, popřípadě mez kluzu substrátu, podobně jako při přenosu sil mezi vláknem a matricí v kompozitních materiálech; viz kapitolu 12 a práce tam citované.

11.8 Zjišťování mechanických vlastností povlaků

U povlaků a různých povrchových vrstev se nejčastěji zjišťuje modul pružnosti, pevnost, tvrdost a odolnost proti otěru, vnitřní pnutí a parametry lomové mechaniky, včetně adhezní pevnosti. Zde se omezíme jen na několik poznámek; více informací lze najít např. v [3].



Obr. 11.15. Síť trhlin v povlaku, způsobená: a – teplotním napětím, b – jednoosým tahem

Youngův modul

Obvykle se zjišťuje z průhybu vzorku nebo indentací. Při zkoušce ohybem se často použije vzorek (s povlakem) obdélníkového průřezu, jehož jeden konec je vetknutý a druhý je zatížen příčnou silou; současně je měřen průhyb v tomto místě. Vzorek může být také položen na dvou podporách a zatěžován uprostřed. Je-li povlak vytvořen z obou stran, lze užít vztah [2]

$$E_1 = \left(S_b - \frac{E_2 b h_2^3}{12} \right) \frac{12}{b(h^3 - h_2^3)} ; \quad S_b = \frac{Pl^3}{48w} ; \quad (11.41a,b)$$

S_b je ohybová tuhost vzorku s povlaky, b je jeho šířka a $h = 2h_1 + h_2$ je celková tloušťka (h_1 je tloušťka jednoho povlaku, h_2 je tloušťka substrátu), P je síla, l je vzdálenost podpor, w je průhyb uprostřed. (U širokého vzorku je nutno tuhost S_b vynásobit výrazem $(1 - \mu^2)$). U vzorků s povlakem na jednom povrchu je řešení složitější, protože jeho neutrální osa není uprostřed.

Ke zjišťování Youngova modulu indentací se užívají tzv. nanoindentory, které měří současně zatížení indentoru a jeho dráhu. Je nutno přihlížet k tomu, že dráha indentoru je ovlivněna tuhostí povlaku i substrátu. Měření odezvy se provádí pro více hloubek (popř. kontinuálně) a naměřené hodnoty se proloží vhodnou funkcí. Právý modul pružnosti povlaku pak odpovídá nulové hloubce zaboření indentoru. Více viz [3, 7].

Tvrдость

Při měření tvrdosti povlaku vlačováním indentoru se opět musí přihlížet k vlastnostem substrátu. Užívají se různé aproximační modely, podle toho, jedná-li

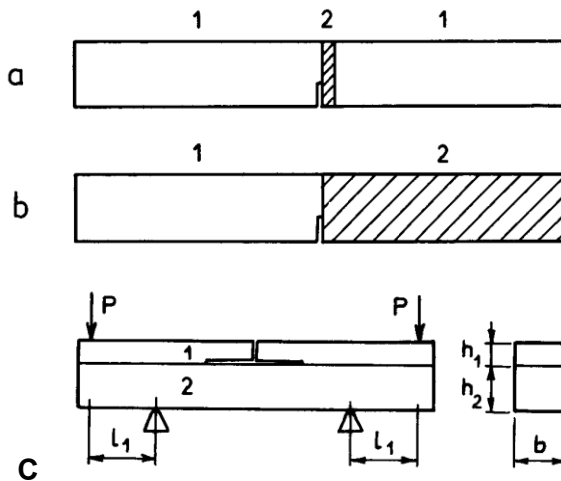
se o tvrdý povlak na tvrdém substrátu, tvrdý povlak na tvárném substrátu, nebo poddajný povlak na tvrdém substrátu. Blíže viz např. [3] a literaturu tam citovanou.

Reziduální napětí

Zbytková napětí v povrchových vrstvách se zjišťují různými metodami [3]. Destruktivní metody spočívají v tom, že se postupně odbrušováním nebo odleptáváním odstraňují tenké vrstvy z povlaku nebo vzorku a měří se jeho průhyb. Polodestruktivní metody měří délky trhlin vytvořených vpichem indentoru. Nedestruktivní metody s rentgenovou difrakcí využívají toho, že mechanické napětí mění vzdálenosti atomů v krystalové mřížce. Také se užívají metody založené na fotoelasticimetrii.

Lomová houževnatost

Důležitá je znalost lomové houževnatosti nebo měrné lomové energie povlaku i rozhraní, popřípadě substrátu. Zjišťuje se na sendvičových nebo bimateriálových vzorcích, namáhaných ohybem (obr. 11.16a, b), dále na vzorcích DBCB (double bimaterial cantilever beam) nebo na dvouvrstvých ohýbaných vzorcích UCSB (University of California Santa Barbara, obr. 11.16c).



Obr. 11.16. Vzorky pro měření parametrů lomové mechaniky povlaků a rozhraní. a – sendvičový vzorek, b – bimateriálový vzorek, c – vzorek UCSB.

Adhezní pevnost povlaků se zjišťuje různými zkouškami adheze, popřípadě indentačními zkouškami. Blíže viz [2].

Literatura ke kapitole 11.

1. Menčík, J.: Výpočty strojních součástí s povrchovými úpravami na pevnost a životnost. (Cyklus Stavba strojů, č. DT01-211-91) DT ČSVTS, Praha, 1991. 120 s.
2. Menčík, J.: Mechanics of Components with Treated or Coated Surfaces. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996. 360 s.
3. Hutchinson, J. W., Suo, Z.: Mixed mode cracking in layered materials. In: Advances in Applied Mechanics, 29, Academic Press, New York, 1991. s. 63 – 191.
4. Beuth, J.: Cracking of thin bonded films in residual tension. Int. J. Solids Structures, **29** (1992) No. 13, 1657 – 1675.
5. He, M. Y., Hutchinson, J. W.: Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials. Int. J. Solids Structures, **25** (1989) No. 9, 1053 – 1076.
6. Dundurs, J.: Discussion to the paper: Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. J. Appl. Mech. (Trans ASME, Ser. E) **36**, No. 3, 650 – 652.
7. Menčík, J. et al.: Determination of elastic modulus of thin layers using nanoindentation. J. Mater. Res., **12** (1997) No. 9, pp. 2475 – 2484.
8. Evans, A. G., Hutchinson, J. W.: On the mechanics of delamination and spalling in compressed films. Int. J. Solids Structures, **20** (1984) No. 5, s. 455 – 466.
9. Menčík, J.: Mechanics of delamination of thin films under thermal and residual compressive stresses. Ceramics - Silikáty, **36** (1992) No. 2, s. 93 – 100.
10. Thouless, M. D., Cao, H. C., Mataga, P. A.: Delamination from surface cracks in composite materials. J. Mater. Sci., **24** (1989) No. 4, s. 1406 – 1412.

12. Základy mechaniky kompozitních materiálů

12.1 Úvod

Za kompozitní materiály obvykle označujeme takové, které sestávají ze dvou nebo více složek odlišných vlastností, přičemž výsledná vlastnost se od nich značně liší, a není ani jejich prostým průměrem. Zpravidla jsou výsledné vlastnosti výrazně lepší. Jako příklady můžeme jmenovat sklolamináty, rybářské pruty nebo části letadel zpevňované uhlíkovými vlákny, železobeton, vyztužený ocelovými pruty, ale i beton obyčejný, který představuje kompozit částicový (s částicemi písku a šterku v matrici cementové nebo polymerní). Také dřevo je v podstatě přírodní kompozitní materiál. O kompozitních materiálech všeobecně se lze více dočíst například v [1 – 5]; zde jenom stručně shrneme jejich charakteristické rysy.

Základním typem jsou kompozity dvousložkové. Jednou složkou je tzv. **matrice**, ve které jsou rozptýleny vhodné **částice** nebo **vlákna**. Materiálem matrice je například polymerní pryskyřice, ale může to být i kov, sklo, keramický materiál, sádra nebo beton. **Částicové kompozity** obsahují v matrici tělíška, u kterých žádný rozměr nepřevládá. Přidávají se do kompozitu zpravidla z jiných důvodů, než je zvýšení pevnosti; tu naopak někdy zhoršují. Užívají se pro snížení ceny, pro zlepšení tepelných či elektrických vlastností, nebo odolnosti proti opotřebení. Mohou také přispět ke zvýšení tuhosti.

Vláknové kompozity obsahují vlákna skleněná, polymerní (např. kevlarová), uhlíková nebo kovová, v někdy i přírodní. Cílem je zpravidla dosažení lepších mechanických vlastností, zejména pevnosti nebo tuhosti, a to při nižší hmotnosti. Někdy usilujeme i o vyšší houževnatost a popřípadě o nekatastrofický (tj. pomalý) průběh lomu a schopnost absorbovat při něm energii.

V této kapitole se budeme věnovat vláknovým kompozitům. Jejich vlastnosti závisí na vlastnostech matrice i vláken, na jejich podílech, ale i na geometrii a vzájemném uspořádání a vlastnostech spojení. Zde uvedeme základní vztahy. Další podrobnosti lze najít v literatuře, například [6 – 11].

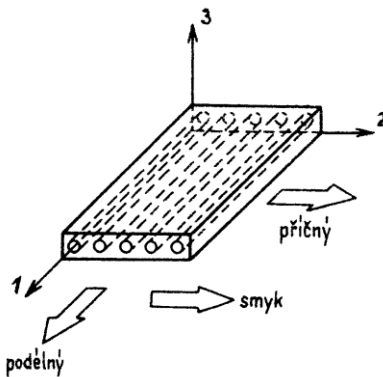
Vláknové kompozity mohou být s **dlouhými** nebo **krátkými vlákny**. Dlouhá vlákna jsou taková, která mají délku mnohonásobně větší než průměr a „nekončí uvnitř součásti“. Vlastnosti kompozitů s dlouhými vlákny jsou anizotropní. Délka

krátkých vláken je rovna pouze několikanásobku průměru a je mnohem menší než rozměr součásti v jejich směru. Krátká vlákna jsou často orientována v součásti náhodně, a výsledné vlastnosti jsou pak spíše izotropní.

12.2 Kompozity s dlouhými vlákny

Základní mechanické vlastnosti, pevnost a tuhost, ukážeme na příkladu kompozitu s vlákny uspořádanými rovnoběžně ve směru působícího zatížení (Obr. 12.1). Předpokládáme, že vlákna jsou pevně spojena s matricí. Při nižších zatíženích se obě složky deformují pružně. Pro charakterizování odezvy jsou důležité jejich moduly pružnosti (E_f a E_m) a relativní podíl každé složky (V_f a V_m). Index f přísluší vláknům, index m matrici. Výsledná vlastnost kompozitu má index c. Poměr objemových podílů V_f a V_m je stejný jako poměr průřezových ploch S_f a S_m . Platí

$$V_f + V_m = 1, \quad V_m = 1 - V_f. \quad (12.1a, b)$$



Obr. 12.1. Kompozit s dlouhými uspořádanými vlákny. Podélný a příčný směr [6].

Podélná pevnost a tuhost kompozitu

Působí-li síla F ve směru vláken, je její část F_f přenášena vlákny a část F_m matricí, a platí

$$F_f = \sigma_f S_f = E_f \varepsilon S_f, \quad F_m = \sigma_m S_m = E_m \varepsilon S_m; \quad (12.2)$$

E_f nebo E_m označuje modul pružnosti v tahu příslušné složky a ε je poměrné prodloužení. Celková síla je

$$F_c = F_f + F_m. \quad (12.3)$$

Prostřednictvím napětí to můžeme zapsat jako

$$F_c = \sigma_c S_c = \sigma_f S_f + \sigma_m S_m . \quad (12.4)$$

Po vydělení celkovým průřezem a s přihlédnutím, že $S_f = V_f$ a $S_m = V_m$, dostaneme průměrné napětí v kompozitu

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m . \quad (12.5)$$

Poměrné prodloužení obou složek je při jejich pevném spojení stejné,

$$\varepsilon_c = \varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon . \quad (12.6)$$

Index pro ně tedy není nutný a napětí v nich můžeme vyjádřit jako

$$\sigma_f = E_f \varepsilon , \quad \sigma_m = E_m \varepsilon , \quad (12.7)$$

Tato napětí jsou ve stejném poměru jako moduly pružnosti,

$$\sigma_f / \sigma_m = E_f / E_m , \text{ popř. } \sigma_f / \sigma_c = E_f / E_c ; \quad (12.8)$$

vyšší napětí působí ve složce, která má vyšší modul pružnosti. Vydělíme-li rovnici (12.5) poměrným prodloužením, dostaneme modul pružnosti kompozitu:

$$E_c = E_f V_f + E_m V_m = E_f V_f + E_m (1 - V_f) . \quad (12.9)$$

Obvykle se změny vlastností kompozitu vyjadřují jako funkce podílu vláken. To je naznačeno v pravé části výrazu (12.9).

Pokud kompozit sestává z více (n) složek, platí pro výsledné napětí a modul pružnosti

$$\sigma_c = \sum_{i=1}^n \sigma_i V_i , \quad E_c = \sum_{i=1}^n E_i V_i . \quad (12.10 \text{ a,b})$$

Pro názornější představu zde uvedeme dva příklady podle [6].

Příklad 1. Vypočtete podíl zatížení přenášeného vlákny ve dvou kompozitech vyztužených skleněnými vlákny v epoxidové matici, z nichž jeden obsahuje 10% objemového podílu vláken a druhý 50%. Modul pružnosti vláken je $E_f = 72$ GPa, modul matrice $E_m = 3,6$ GPa (platí $E_f/E_m = 72/3,6 = 20$).

Poměr síly přenášené vlákny k celkové síle v kompozitu je

$$\frac{F_f}{F_c} = \frac{\sigma_f V_f}{\sigma_f V_f + \sigma_m V_m} = \frac{1}{1 + \frac{E_m V_m}{E_f V_f}} . \quad (12.11)$$

V případě 10% vláken je $V_m/V_f = 0,9/0,1 = 9$, takže $F_f/F_c = 0,690 = 69\%$. Při 50% vláken je $V_m/V_f = 1$, a $F_f/F_c = 0,95$; vlákna tedy přenášejí 95% celkového zatížení.

Příklad 2. Jak se změní podíl síly přenášené vlákny, budou-li vlákna uhlíková o modulu pružnosti $E_f = 432$ GPa?

Platí $E_f/E_m = 432/3,6 = 120$, takže pro 10% vláken je $F_f/F_c = 0,930$, tj. 93%. Pro 50% vláken bude $F_f/F_c = 0,992$, tj. 99%.

Vidíme, že vlákna s vysokým modulem přenášejí podstatnou část zatížení, i když jejich podíl je poměrně malý.

Nyní ukážeme, jak se **podélná pevnost kompozitu** mění s rostoucím podílem vláken.

a) Vlákna i matrice mají stejnou pevnost i tažnost, $\sigma_{f,u} = \sigma_{m,u}$ (index u značí mezní hodnotu příslušné veličiny). Pro jednoduchost neuvažujeme rozptyl vlastností.

Kompozit se rozruší při kritickém napětí:

$$\sigma_{c,u} = \sigma_{f,u} V_f + \sigma_{m,u} V_u = \sigma_{f,u} V_f + \sigma_{m,u} (1 - V_f) . \quad (12.12)$$

b) Vlákna mají vyšší pevnost, ale matrice je houževnatější a poruší se až při větším přetvoření. Příkladem je kompozit s uhlíkovými vlákny v polymerní matrici. Dokud se vlákna neporuší, je napětí v kompozitu

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f) . \quad (12.13)$$

Vlákna se poruší při deformaci $\varepsilon_{f,u}$. Jakmile poměrné prodloužení kompozitu dosáhne této hodnoty, vlákna se přetrhnou. (Opět neuvažujeme rozptyl vlastností). Potom už zatížení může přenášet pouze matrice, která se poruší při napětí $\sigma_{m,u}$. Protože po přetržených vláknech zůstaly v matrici „díry“, je nosný průřez menší než celkový průřez kompozitu, takže mez pevnosti kompozitu bude nižší:

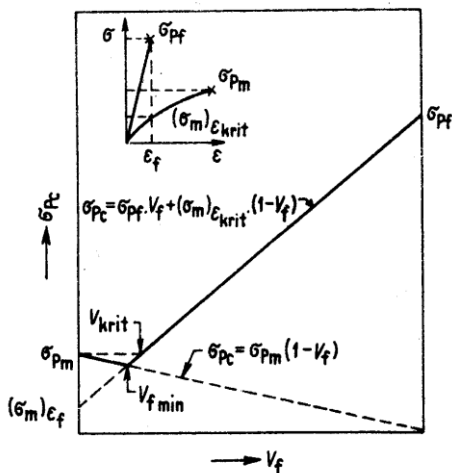
$$\sigma_{c,u} = \sigma_{m,u} (1 - V_f) . \quad (12.14)$$

S rostoucím podílem vláken tedy únosnost kompozitu klesá! Naštěstí tato relace platí jen pro velmi nízké podíly vláken, a jak uvidíme dále, již při obsahu vláken od několika procent výše bude výsledná pevnost kompozitu vyšší (obr. 12.2). Objemový podíl vláken, při němž je pevnost kompozitu minimální, je

$$V_{f,\min} = \frac{\sigma_{m,u} - \sigma_{m,ef,cr}}{\sigma_{f,u} + \sigma_{m,u} - \sigma_{m,ef,cr}}, \quad (12.15)$$

kde $\sigma_m(\varepsilon_{f,cr})$ je napětí v matrici, odpovídající kritické deformaci vláken. Například pro epoxidovou pryskyřici vyztuženou uhlíkovými vlákny ($\sigma_{m,u} = 0,07$ GPa, $\sigma_{f,u} = 3,2$ GPa, $E_m = 3,1$ GPa, $\varepsilon_{f,u} = 0,014$) je $\sigma_m(\varepsilon_{f,cr}) = 0,0434$ GPa. Po dosazení těchto hodnot do vztahu (12.15) dostaneme $V_{f,\min} = 0,0088 \approx 0,9\%$. To znamená, že již více než jedno procento vláken bude mít zpevňující účinek. Situace je znázorněna na obr. 12.2. Ale pozor, při podílu vláken $V_{f,\min}$ je výsledná pevnost kompozitu nižší než původní pevnost samotné matrice bez vláken! Má-li použití vláken skutečně zvýšit pevnost kompozitu, musí být výsledná pevnost vyšší než $\sigma_{m,u}$ a podíl vláken musí být vyšší než kritická hodnota (V_{krit} na obr. 12.2).

$$V_{f,cr} = \frac{\sigma_{m,u} - \sigma_{m,ef,cr}}{\sigma_{f,u} - \sigma_{m,ef,cr}}, \quad (11.16)$$



Obr. 12.2. Pevnost vláknového kompozitu jako funkce podílu vláken V_f [6].

Příčná tuhost a pevnost kompozitu

V předchozím modelu byla vlákna řazena v matrici paralelně. Deformace všech složek byla stejná a síly v nich se sečítaly. Působí-li zatížení ve směru kolmém k vláknům (obr. 12.1), jedná se o uspořádání sériové, kdy naopak síla ve všech složkách bude stejná a sečítají se deformace, a tedy i poddajnosti. Přibližnou hodnotu modulu pružnosti lze získat ze vztahu

$$\frac{1}{E_{c,T}} = \frac{V_f}{E_{f,T}} + \frac{V_m}{E_m} = \frac{V_f}{E_{f,T}} + \frac{(1-V_f)}{E_m}; \quad (12.17)$$

index T označuje příčný (transverzální) směr. Při více složkách platí

$$\frac{1}{E_{c,T}} = \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{E_{i,T}}. \quad (12.18)$$

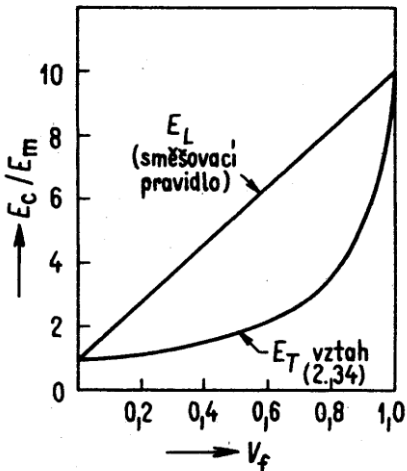
Skutečnost bývá složitější, neboť uvedený model odpovídá spíše případu, kdy jsou za sebou uspořádány ploché vrstvy. Vlákná mají ve skutečnosti kruhový průřez a nejsou uspořádána zcela pravidelně. Určitou roli mohou hrát i rozdílné hodnoty Poissonových čísel jednotlivých složek; zde jsme pro jednoduchost předpokládali jejich rovnost, $\mu_f = \mu_m$.

Obrázek 12.3 ukazuje, jak se mění poměr podélného (L), popř. příčného (T) modulu pružnosti kompozitu a modulu pružnosti matrice, v závislosti na objemovém podílu vláken V_f . Obrázek odpovídá případu, kdy modul pružnosti vláken je desetinásobkem modulu matrice [6].

K porušení kompozitu zatíženého kolmo k vláknům dojde, jestliže napětí překročí příčnou pevnost jakékoliv složky ($\sigma_{f,u,T}$; $\sigma_{m,u,T}$). Pro pevnost v příčném směru pak platí

$$\sigma_{c,u,T} = \min(\sigma_{f,u,T}; \sigma_{m,u,T}). \quad (12.19)$$

Dlouhá uspořádaná vlákna jsou vhodná všude, kde směry napětí v součásti jsou známy a nemění se anebo se mění jen zvolna, takže ukládání vláken při vytváření



Obr. 12.3. Poměr modulu pružnosti kompozitu (E_c) a matrice (E_m) v podélném (E_L) a příčném (E_T) směru v závislosti na objemovém podílu vláken V_f [6].

kompozitu je jednoduché. Tam, kde směry napětí nejsou známé, anebo se rychle mění od místa k místu, mohou být výhodnější izotropní vlastnosti, a tedy kompozity s krátkými vlákny, o kterých pojednáme později. U kompozitu s dlouhými vlákny je vrstva s rovnoběžnými vlákny ortotropní. Anizotropie se odstraní spojením více vrstev různě orientovaných.

Jsou-li známy směry sil a napětí působících v součásti z kompozitu, je možno optimalizovat orientaci vláken a vytvořit tak váhově efektivnější strukturu. Jako příklad uvedeme laminovanou válcovou tlakovou nádobu [7, 8].

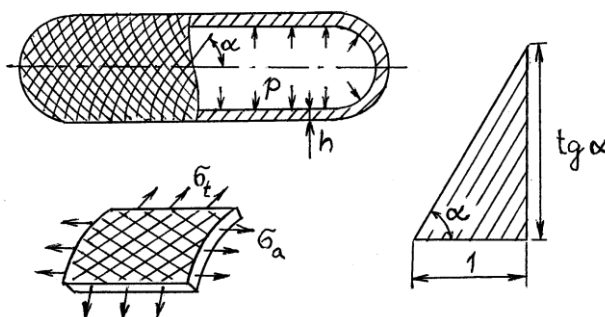
Příklad 3.

Určete optimální směr vláken u válcové laminátové tlakové nádoby vyrobené přesným navíjením.

Řešení. Ve stěně působí napětí obvodové σ_t , a napětí osové σ_a . Je-li v nádobě přetlak p , jsou tato napětí

$$\sigma_t = p \frac{R}{h}, \quad \sigma_a = p \frac{R}{2h}, \quad (12.20)$$

kde R je poloměr nádoby a h je tloušťka stěny. Obvodové napětí je tedy dvakrát vyšší než napětí osové. Pokud je nádoba vyrobena z izotropního materiálu, musí být dimenzována podle nejvyššího napětí, tj. obvodového. Jestliže ji ale zhotovíme metodou přesného navíjení vláken (tzv. filament winding), vyjde při jejich vhodné orientaci lehčí. Situace je znázorněna na obr. 12.4. Vlákna svírají s osou nádoby úhel α . Ve vláknech působí ve směru α síla $F_f n$, kde F_f je síla v jednom vlákně a n je počet vláken připadajících na vyšetřovanou (trojúhelníkovou) část pláště [7, 8].



Obr. 12.4. Tlaková válcová nádoba z vláknového kompozitu zhotovená přesným navíjením. σ_t , σ_a – obvodové a osové napětí, α – optimální úhel sklonu vláken.

V obvodovém směru (na obrázku vpravo ve svislém směru) působí následující složka této síly, která je v rovnováze s obvodovou silou od přetlaku v nádobě:

$$nF_f \sin \alpha = \frac{pR}{h} \times 1 \times h \quad (12.21)$$

Složka síly v osovém směru (tj. ve vodorovném směru na obr. 12.4) je v rovnováze s výslednicí osového napětí,

$$nF_f \cos \alpha = \frac{pR}{2h} \times \operatorname{tg} \alpha \times h \quad (12.22)$$

Výraz $1 \times h$ v pravé části rovnice (12.21) představuje plochu části stěny nádoby, která odpovídá vodorovné odvěsně trojúhelníka (obr. 12.4), a ve které působí obvodové napětí. Podobně $\operatorname{tg} \alpha \times h$ v (12.22) představuje plochu odpovídající svislé odvěsně, kde působí osové napětí.

Po vydělení rovnice (12.21) rovnicí (12.22) a přehození některých členů dostaneme po úpravě

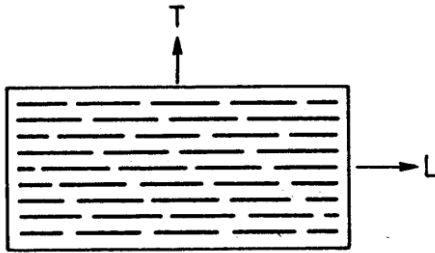
$$\operatorname{tg}^2 \alpha = 2, \text{ odkud vyplývá } \alpha = 54,7^\circ \quad (12.23)$$

To je základní úhel sklonu vláken u vinutých tlakových nádob, který zajišťuje, že pevnost v obvodovém směru bude dvakrát vyšší než ve směru osovém. Bude-li nádoba vícevrstvá, budou vlákna v další vrstvě mít opačný sklon ($\alpha = -54,7^\circ$), atd.

12.3 Kompozity s krátkými vlákny

Jestliže se směry napětí v součásti mění od místa k místu relativně rychle (anebo jsou různé při různých zatěžovacích stavech), popřípadě nejsou známy, jsou výhodnější kompozity s krátkými vlákny. V tomto případě, při náhodné orientaci vláken v různých místech, jsou výsledné vlastnosti spíše izotropní. U některých výrobních technologií, jako je například vstřikování, se vlákna při toku formou sama uspořádávají ve směru toku, což může být výhodné z hlediska namáhání hotové součásti.

Část kompozitu s usměrněnými krátkými vlákny je nakreslena na obr. 12.5. Zatímco u kompozitů s dlouhými vlákny jsou vlákna podél celé součásti a všude v nich působí síla F_f , v případě krátkých vláken existují místa, kde síla ve směru vláken je přenášena pouze maticí. Proto je zde důležitá otázka přenosu síly



Obr. 12.5. Kompozit s uspořádanými krátkými vlákny (schematicky).
L - podélný směr, *T* - příčný směr.

z matrice do vláken a naopak. Situace pro jedno vlákno je znázorněna na obr. 12.6. Mezi vláknem a matricí působí smykové napětí τ . Je-li zatížení nízké, jsou deformace pružné, platí Hookeův zákon, a smykové napětí na rozhraní je rozloženo nerovnoměrně; nejvyšší je v místě konců vlákna [6 – 9]. Tento charakter rozložení trvá až do okamžiku, kdy maximální hodnota napětí dosáhne buď adhezni pevnosti nebo meze kluzu ve smyku matrice z pružnoplastického materiálu, podle toho, která z obou hodnot je nižší. Podle zjednodušeného modelu budeme předpokládat, že při posouvání vlákna vůči matrici je toto mezní smykové napětí konstantní, rovno adhezni pevnosti τ_a . Pro rovnici rovnováhy sil působících na úsek vlákna o nekonečně malé délce dx v tomto případě platí

$$(\pi r^2)\sigma_f + (2\pi r dx)\tau_a = (\pi r^2)(\sigma_f + d\sigma_f), \quad (12.24)$$

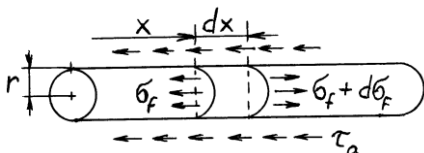
odkud vyplývá

$$\frac{d\sigma_f}{dx} = \frac{2\tau_a}{r}. \quad (12.25)$$

Integrujeme-li tento výraz od konce vlákna ($x = 0$), kde se do jeho čela přenáší z matrice napětí $\sigma_{f,0}$, až do místa x , kde ve vlákně působí napětí $\sigma_f(x)$, dostaneme

$$\sigma_f(x) = \sigma_{f,0} + 2\tau_a(x/r). \quad (12.26)$$

Vidíme, že napětí ve vlákně narůstá lineárně se vzdáleností od čela. Síla přenášená čelem je malá ve srovnání se silou přenášenou dlouhým válcovým povrchem, a zpravidla se zanedbává.



Obr. 12.6. Síly působící na vlákno v matrici.

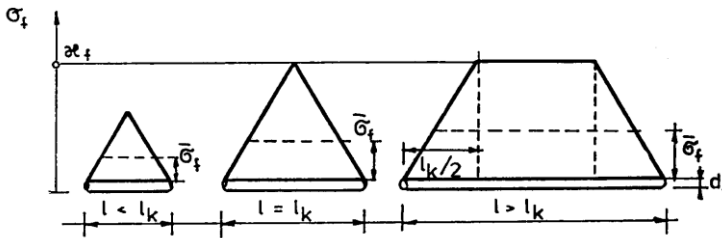
V případě naznačeném na obr. 12.6 se matrice snaží vlákno natahovat, a síly, které se z ní do něj přenášejí zleva i zprava, mají v každé polovině opačné znaménko. Napětí ve vlákne narůstá od každého konce, a maximální hodnotu má uprostřed vlákna. Působí-li v kompozitu napětí σ_c , může napětí ve vlákne mít nanejvýš hodnotu stejnou jako u kompozitu s dlouhými vlákny, tj.

$$\sigma_{f,\max} = \sigma_c (E_f/E_c); \quad (12.27)$$

viz vztah (12.8). Tohoto napětí je dosaženo při tzv. **přenosové délce zatížení**

$$l_t = \frac{d}{2} \frac{\sigma_{f,\max}}{\tau_a} = \frac{d}{2} \frac{\sigma_c}{\tau_a} \frac{E_f}{E_c}, \quad (12.28)$$

kde $d (= 2r)$ je průměr vlákna. Je-li vlákno delší než l_t , napětí v něm již nestoupá (Obr. 12.7), a zůstává na hodnotě (12.27).



Obr. 12.7. Přenos síly mezi vláknem a matricí při konstantním smykovém napětí na rozhraní. d_f – průměr vlákna, σ_f – napětí ve vlákně, l_k – kritická délka vlákna [6].

Délka vlákna poblíž konců, kde je napětí nižší, se nazývá **neefektivní délka**. Přenos zatížení je tím účinnější, čím je tato délka kratší.

Podívejme se nyní na případ, kdy jeden konec vlákna je v matrici a druhý konec vyčnívá ven a za něj ho vytahujeme. Pokud je v matrici relativně krátká část vlákna, lze při překonání adhezni pevnosti τ_a vlákno vytáhnout. Bude-li ale délka vlákna v matrici hodně velká, spíše je přetrhne. **Kritická délka vlákna** l_k je taková, u které existuje stejná pravděpodobnost, že se vlákno přetrhne anebo bude vytaženo z matrice. Z rovnováhy smykové síly na rozhraní, rovné $\pi d l_k \tau_a$, a tahové síly ve vlákně při dosažení jeho pevnosti ($S_f \sigma_{f,U}$) dostaneme

$$l_{cr} = \frac{d}{4} \frac{\sigma_{f,U}}{\tau_a}. \quad (12.29)$$

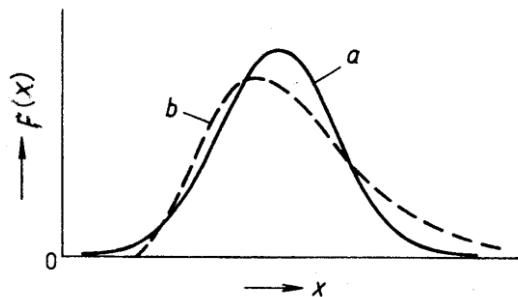
Poznámka. Důvodem použití krátkých vláken je někdy snaha zvýšit spotřebu energie při lomu jejich vytahováním z matrice, kdy práci konají třecí síly na rozhraní mezi vláknem a matricí.

12.4 Rozptyl vlastností vláken

V předchozích úvahách jsme předpokládali, že všechna vlákna v kompozitu mají stejnou pevnost $\sigma_{f,U}$. Ve skutečnosti jsou pevnosti jednotlivých vláken různé a obvykle kolísají v širokém rozmezí. Rozložení pevností lze dobře popsat pomocí Weibullova rozdělení pravděpodobnosti (Obr. 12.8) s distribuční funkcí

$$F(\sigma_{f,U}) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma_{f,U} - c}{a} \right)^b \right]. \quad (12.30)$$

V tomto výrazu je a tzv. parametr měřítka, b je parametr tvaru rozdělení, a c je tzv. prahová hodnota, což je nejnižší hodnota, která by se mohla vyskytnout. Protože pevnost nemůže být záporná, předpokládá se někdy $c = 0$, čímž se rozdělení zjednoduší na dvouparametrické. (Určování parametrů je popsáno např. v [13].)



Obr. 12.8. Rozdělení hodnot náhodné veličiny x (např. pevnosti): a) normální, b) Weibullovo.

V kompozitu jsou vlákna obklopena matricí, takže i když nějaké vlákno praskne, zatížení může být z oblasti jeho konce přeneseno smykem do matrice, a za porušeným místem zpět do druhé části vlákna. To znamená, že i vlákno porušené v jednom místě může ještě dále přenášet plné zatížení s výjimkou oblastí jeho konců, kde v něm napětí narůstá od nuly na maximální hodnotu $\sigma_{f,max}$. Vlákna v kompozitu tedy unesou více a jsou lépe využita než kdyby byla jenom jako volný svazek jednotlivých vláken. Blíže k těmto otázkám viz [6, 9].

Důsledky rozptylu pevnostních vlastností materiálů

Je vhodné uvést zde několik poznámek k rozptylu pevností nejen vláken, ale i jakýchkoliv materiálů. Každý konstruktér by si měl uvědomit dvě věci. Veličiny jako pevnost, mez kluzu i mez únavy kolísají. V materiálových listech bývá uvedeno rozpětí, popř. minimální hodnota příslušné vlastnosti. Ovšem z principu není možné zjistit přesně minimální pevnost určitého materiálu. Přesně zjistíme pevnost konkrétního vzorku tím, že jej přetřhneme nebo zlomíme. Ale pak jej již nemůžeme použít. Proto se vždy zkouší několik vzorků a naměřené hodnoty se statisticky zpracují. Jako minimální hodnota se pak zpravidla uvádí taková hodnota, že existuje 5% pravděpodobnost výskytu ještě slabšího kusu. Nejistota při dimenzování se zmírňuje prostřednictvím dovoleného napětí, které se dostane tak, že se hodnota meze pevnosti nebo kluzu vydělí součinitelem bezpečnosti. Ten se volí tím vyšší, čím méně je znalostí o materiálu, součásti, zatížení a provozu.

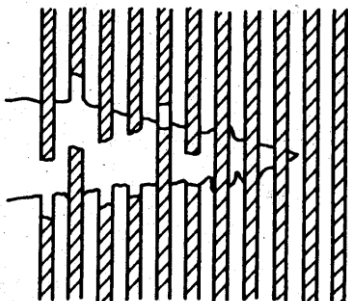
Druhý důsledek rozptylu pevnostních vlastností je vliv velikosti zatížené oblasti na pevnost. Porušení vyjde vždy z nejslabšího místa (materiálový vměstek, prasklé krystalické zrno apod.) A čím větší je zatížená oblast, tím větší pravděpodobnost existuje, že se tam vyskytne větší defekt, a tedy nižší pevnost. V řadě případů přibližně platí následující relace mezi pevností a objemem tělesa:

$$\sigma_p = C V^{-m} \quad (12.31)$$

kde C a m jsou konstanty. Pokud lze pevnosti popsat Weibullovým rozdělením (12.30), souvisí konstanta m s parametrem tvaru rozdělení b jako $m = 1/b$. O těchto otázkách se lze dočíst více například v [14], kde jsou citovány i další práce.

12.5 Porušení kompozitů

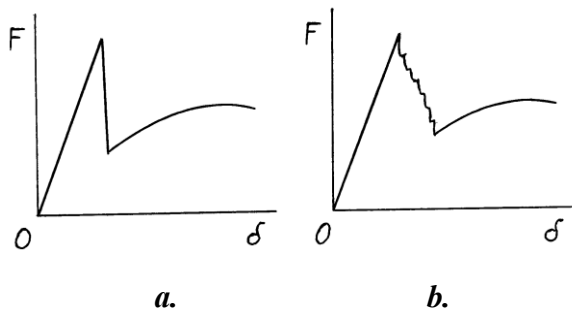
Vláknové kompozity s uspořádanými vlákny se mohou porušit různými způsoby. Působí-li tahové zatížení ve směru vláken, bude se trhлина šířit matricí kolmo k tomuto směru (obr. 12.9). Krátká vlákna, jejichž délka je kratší než l_k , budou přitom postupně vytahována z matrice. Dlouhá vlákna se budou postupně trhat.



Obr. 12.9. Typické způsoby porušování vláknového kompozitu: trhání vláken a vytahování z matrice, a trhání matrice.

Roli přitom hraje nejen pevnost a tažnost vláken, ale i vlastnosti matrice, je-li křehká nebo tvárná, a dále vlastnosti vláken, jsou-li křehká nebo naopak mají vysokou tažnost. Také se uplatňuje adheze mezi vlákny a matricí a jaké jsou poměry modulů pružnosti obou složek a poměry teplotních roztažností. V nejjednodušším případě vlákna postupně praskají, když k nim trhlina dorazí, popřípadě když projde až za vlákno. Někdy ale trhlina na rozhraní s vláknem má snahu odbočit, popřípadě vlákno obkroužit. Je to zejména tehdy, má-li vlákno vyšší modul pružnosti než matrice, a pevnost rozhraní je nízká.

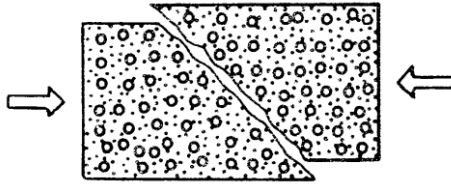
Postupné přetrhávání vláken je zřetelné i v pracovním diagramu tahové zkoušky kompozitu (obr. 12.10). Někdy se může křehká matrice roztrhat na více částí.



Obr. 12.10. Diagram tahové zkoušky kompozitu (schematicky):
a) s jediným vláknem v matrici, b) s mnoha vlákny.

Vliv na charakter porušování mají i rozdíly teplotních roztažností a zbytková napětí, která vznikají v důsledku změn teploty při výrobě. Mají-li vlákna větší teplotní roztažnost než matrice, smršťují se během chladnutí po vytvrzování více. Mezi vláknem a matricí působí v radiálním směru tahové napětí, takže se vlákna mohou od matrice odtrhávat. Naopak mají-li menší roztažnost, jsou po vychladnutí stlačována, a v matrici kolem nich působí tahové napětí v obvodovém směru, což může způsobit její praskání.

Porušení může nastat i při zatížení tlakem. Působí-li toto zatížení kolmo k vláknům, může dojít k porušení matrice účinkem smykových napětí (Obr. 12.11). Lomová plocha je skloněná, protože maximální smykové napětí svírá se směrem tlakového napětí úhel 45° . Působí-li tlaková síla ve směru vláken, může za určitých podmínek dojít k jejich mikrovybočování. Při něm mohou být sousední vlákna ve fázi, anebo naopak v protifázi. U štíhlého kompozitního dílu může také dojít k jeho



Obr. 12.11. Zatížení kompozitu kolmo k vláknům (porušení matrice účinkem smykových napětí).

vybočení jako celku. O porušování kompozitních materiálů se lze více dočíst například v [6, 9].

12.6 Elastická odezva při víceosé napjatosti ortotropních materiálů

U izotropního tělesa s napětími působícími v rovině x, y platí pro pružné deformace Hookeův zákon ve tvaru

$$\varepsilon_x = E^{-1}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = E^{-1}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \quad \varepsilon_z = -E^{-1}(\sigma_y + \mu\sigma_x), \quad (12.32)$$

kde ε je poměrné prodloužení a σ je napětí v jednotlivých směrech. (Ve směru z , kolmém k rovině x, y , žádné napětí nepůsobí; účinkem σ_x a σ_y se ale v něm bude měnit tloušťka.) Elastické konstanty jsou tři: modul pružnosti v tahu E , modul pružnosti ve smyku G a součinitel příčné kontrakce μ (Poissonovo číslo). Tyto konstanty jsou spolu vázány vztahem

$$E = 2(1 + \mu) G, \quad (12.33)$$

takže pro analýzu napětí stačí znalost jakýchkoliv dvou konstant, nejčastěji E a μ . Pro složitější výpočty je při víceosé napjatosti výhodné používat maticový zápis. V něm má Hookeův zákon (12.32) například pro hlavní směry 1 a 2 tvar

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\mu/E & 0 \\ -\mu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau \end{Bmatrix}, \quad \text{resp. } [\varepsilon] = [S][\sigma]; \quad (12.34)$$

$[\varepsilon]$ je matice (vektor) přetvoření, $[S]$ je čtvercová matice poddajnosti a $[\sigma]$ je matice napětí.

Dlouhovláknové kompozity jsou **ortotropní**, a k popisu jejich pružné odezvy je zapotřebí pět konstant: modul pružnosti E_1 ve směru vláken a E_2 ve směru kolmém

k vláknům, modul pružnosti ve smyku G_{12} , a dvě Poissonova čísla, μ_{12} a μ_{21} . První z nich, μ_{12} , je hlavní Poissonovo číslo, které vyjadřuje poměr poměrného zkrácení ve směru 2 vyvolaného poměrným prodloužením ve směru 1. Naopak μ_{21} udává poměrné zkrácení ve směru 1 způsobené poměrným prodloužením ve směru 2.

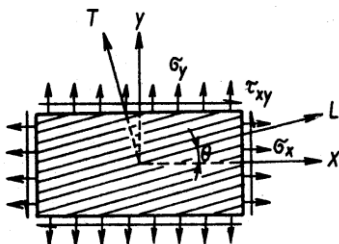
Vztah mezi přetvořením a napětím u tohoto kompozitu je [7, 8]

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\mu_{21}/E_2 & 0 \\ -\mu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}. \quad (12.35)$$

Protože směr 2, kolmý k vláknům, má obvykle mnohem menší tuhost než směr 1, je zřejmé, že určité přetvoření ve směru 1 vyvolá mnohem větší přetvoření ve směru 2, než by stejně velké přetvoření ve směru 2 vyvolalo ve směru 1. Proto je obvykle $\mu_{12} > \mu_{21}$. Ve výrazu (12.35) jsou pouze čtyři z konstant (E_1 , E_2 , G_{12} , μ_{12} a μ_{21}) nezávislé, a matice poddajností je symetrická; platí $\mu_{21}/E_2 = \mu_{12}/E_1$.

Jednotlivé prvky v matici poddajnosti charakterizují vztahy mezi napětími a přetvořeními v jednotlivých směrech. Nuly v rovnici (12.35) odpovídají případu, kdy nejsou žádné vazby mezi normálovými a smykovými složkami. To je tehdy, shodují-li se souřadné osy s hlavními směry materiálu, což je zde směr vláken a směr k nim kolmý. Jsou-li osy orientovány do jiných směrů (Obr. 12.12), matice poddajnosti se změní. Například působí-li tahové zatížení pod určitým úhlem k vláknům, objeví se mezi vlákny i smyková napětí, protože se vlákna budou chtít uspořádat do směru zatížení. Vzniká tedy vazba mezi normálovým napětím a smykovým přetvořením, která u izotropních materiálů neexistuje.

Vztahy pro transformaci elastických konstant do jiných směrů lze najít např. v [6].

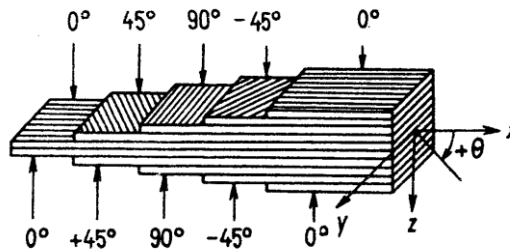


Obr. 12.12. Ortotropní vrstva (lamina). Hlavní osy (totožné se směry vláken) jsou vůči souřadnému systému $x - y$ pootočeny o úhel Θ .

12.7 Vícevrstvé kompozity (lamináty)

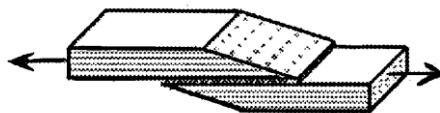
Vztahy pro výpočet tuhosti a pevnosti kompozitu s uspořádanými vlákny, uvedené dříve, platily pro jednu vrstvu neboli laminu (obr. 12.12). Pro získání vhodných vlastností ve více směrech se zpravidla kombinuje více vrstev a celek se označuje jako laminát. Pro jednodušší vytváření vícevrstevých laminátů se používají tzv. prepregy. **Prepreg** je samostatná vrstva, kde v matrici z částečně zpolymerované pryskyřice jsou uložena jednosměrně uspořádaná vlákna. Několik vhodně orientovaných prepregů se položí na sebe a za tepla se slisují, přičemž dojde k jejich konečnému zpolymerování.

Existují různé orientace lamin. Nejjednodušší uspořádání je s navzájem kolnými vlákny, což se označuje jako $[0^\circ/90^\circ]$. Menší anizotropie se docílí při ukládání vláken pod úhlem 45° , např. $[0/45/90/-45/0]$; čísla označují orientaci jednotlivých vrstev (obr. 12.13). Používají se i orientace pod úhlem 60° a další.



Obr. 12.13. Vícevrstvý laminát – příklad s uspořádáním vrstev $[0/45/90/-45/0]$.

Slabším místem laminátů jsou okraje, kde při skokové změně vlastností na přechodu z jedné vrstvy do druhé vzniká vysoká koncentrace napětí. Ta někdy vede k delaminaci, tj. k porušování spojení vrstev. Choulostivým místem jsou také spoje různých dílů. Jakákoliv náhlá změna průřezu znamená zvýšené napětí. Výhodnější jsou spoje s plynulým přechodem tvaru (Obr. 12.14), a popřípadě zvýšenou poddajností, například použitím pryskyřice s nižším modulem pružnosti. Blíže viz např. [11].



Obr. 12.14. Příklad snížení koncentrace napětí tvarovým řešením spoje.

Literatura ke kapitole 12.

1. Bareš, R. A.: Kompozitní materiály. SNTL, Praha, 1988. 328 s.
2. Daďourek, K.: Kompozitní materiály – druhy a jejich užití. Technická univerzita v Liberci, Fakulta strojní, Liberec, 2007, 55 s. ISBN 978-80-7372-279-1.
3. Bodnárová, L.: Kompozitní materiály ve stavebnictví. VUT v Brně, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2002. 122 s. ISBN 80-214-2266-1.
4. Táborský, L., Šebo, P.: Konštrukčné materiály spevnené vláknami. ALFA Bratislava + SNTL Praha, 1982. 208 s.
5. Mráz, P., Talácko, J.: Konstrukce strojů s kompozitními materiály. Nakladatelství ČVUT, Praha, 2006. 226 s.
6. Agarwal, B. D., Broutman, L. J.: Vláknové kompozity. SNTL, Praha, 1987. 296 s. Překlad z angličtiny (Analysis and Performance of Fiber Composites. John Wiley & Sons, 1980).
7. Roylance, D.: Mechanics of materials. John Wiley & Sons, Inc., 1996. 315 s. Dostupné na webu přes Google po zadání názvu knihy.
8. Roylance, D.: Introduction to Elasticity. MIT, Cambridge, MA 02139, Dept. of Materials Sciences and Engineering. January, 21, 2000. Volně dostupné na webu přes Google po zadání názvu knihy.
9. Daďourek, K.: Kompozitní materiály – modely a vlastnosti. Technická univerzita v Liberci, Fakulta strojní, Liberec, 2005, 113 s. ISBN 80-7083-972-4.
10. Laš, V.: Mechanika kompozitních materiálů. Západočeská univerzita, Fakulta aplikovaných věd, Plzeň, 2004. 156 s., ISBN 80-7043-273-X
11. Kokcharov, I.: Structural Integrity Analysis, Chapter 9: Composites. 29 str. Dostupné (3.12.2018) na: http://www.kokch.kts.ru/me/t9/SIA_9_Composites.pdf
12. Kokcharov, I., Burov, A.: Structural Integrity Analysis. Amazon Digital Services LLC, 2013. 438 s.
13. Menčík, J.: Úvod do experimentální analýzy. Univerzita Pardubice, Pardubice, 2018. 142 s. Volně dostupné na webu; stačí zadat název do vyhledavače Google nebo <http://hdl.handle.net/10195/66960>.
14. Menčík, J.: Pevnost a lom skla a keramiky. SNTL, Praha, 1990. 392 s.

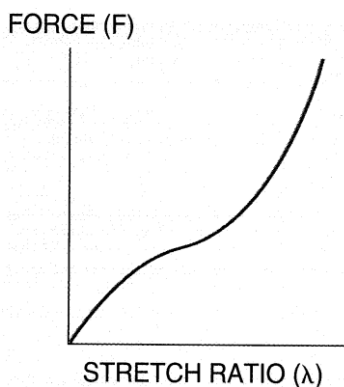
13. Mechanika elastomerních materiálů a velmi poddajných těles

V této kapitole si všimneme některých zákonitostí deformování elastomerních materiálů, kam patří například pryže a některé polymery. Stručně zmíníme i deformování textilních materiálů a membrán. Pro všechny tyto případy jsou typické velké deformace a přetvoření, nelineární vztahy mezi napětím a přetvořením, a často časová závislost odezvy.

13.1 Struktura a vlastnosti elastomerních materiálů

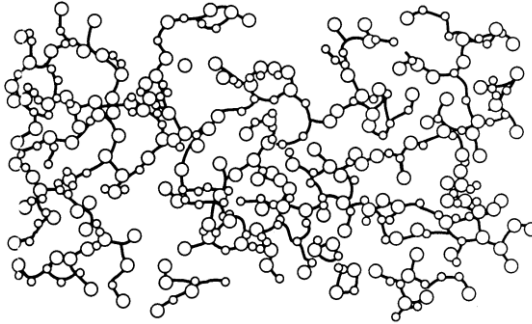
Elastomerní, resp. hyperelastické materiály, mají tyto charakteristické rysy: nízký modul pružnosti v tahu ($E = 1 - 10$ MPa) a nelineární pracovní diagram (obr. 13.1), vysoký součinitel příčné kontrakce ($\mu > 0,49$), velké přetvoření do porušení (někdy až několik set procent), schopnost dočasně absorbovat velké množství energie, viskoelastické chování (zpožděné pružné deformování, relaxace napětí, disipace energie při střídavém zatěžování) a únava při statickém i dynamickém zatěžování.

Schopnost velkých deformací elastomerních materiálů se vysvětluje jejich mikrostrukturou. Jedná se o trojrozměrnou síť velmi dlouhých řetězců molekul, které jsou klikaté (připomínají klubko špaget) a propojené navzájem na mnoha



Obr. 13.1. Nelineární diagram pryže
„Síla F – Poměr protažení λ “ [1].

místech příčnými vazbami (obr. 13.2). Vazby v řetězcích jsou poměrně pevné, ale příčné vazby jsou slabé (podobně jako u špaget). Při zatížení tak dochází spíše k rovnání řetězců a posouvání po sobě než k jejich natahování.



Obr. 13.2. Typický vzhled polymerních řetězců [1].

Charakterizování velkých přetvoření a napětí

Při zatížení pryže a dalších poddajných materiálů dochází k jejich velkým přetvořením. V takovém případě tzv. smluvní poměrné prodloužení, definované konvenčním způsobem jako $\varepsilon = \Delta l / l_0$, není dost výstižné. Vhodnější je tzv. **poměr protažení** (nebo krátce **protážení**, v anglické literatuře stretch ratio nebo stretch):

$$\lambda = l/l_0 = (1 + \Delta l/l_0) = 1 + \varepsilon. \quad (13.1)$$

Poznámka. Poměr protažení souvisí s tzv. skutečným poměrným prodloužením φ vztahem

$$\varphi = \ln(l/l_0). \quad (13.2)$$

Zde však budeme dále pracovat s protažením λ [1, 2]. To lze definovat ve třech navzájem kolmých směrech. Hodnoty v konkrétním případě závisí na orientaci souřadného systému. Třem hlavním směrům odpovídají **hlavní protažení** λ_1 , λ_2 , λ_3 . Existují také určité funkce poměrů protažení, které na orientaci souřadného systému nezávisí. Tyto tzv. **invarianty protažení** jsou následující:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad (13.3a)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2, \quad (13.3b)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \quad (13.3c)$$

Pro nestlačitelný materiál platí $I_3 = 1$.

Protože velkému relativnímu prodloužení odpovídá i velké poměrné zúžení, je v takových případech vhodnější místo konvenčního napětí $\sigma = F/S_0$, obvyklého v mechanice tužších materiálů, užívat **skutečné (pravé) napětí**,

$$\sigma_{\text{skut}} = F / S_{\text{skut}} . \quad (13.4)$$

Podobně místo konvenčního pracovního diagram $\sigma - \varepsilon$ podle je u elastomerních materiálů vhodnější používat diagram $\sigma_{\text{skut}} - \lambda$, popřípadě $F - \lambda$ (Obr. 13.1).

Pro charakterizování napjatosti je kromě napětí vhodná také **hustota energie napjatosti** A ; příslušné vztahy ukážeme dále. Kromě jiného platí, že jejím derivováním podle přetvoření dostaneme napětí.

13.2 Modely odezvy elastomerních materiálů

Při malých přetvořeních je dostačující Hookeův zákon, popřípadě nějaký viskoelastický model. Pro popis odezvy hyperelastických elastomerních materiálů na zatížení při velkém přetvoření byla navržena řada funkcí. Ty zpravidla vycházejí z hustoty energie napjatosti definované prostřednictvím invariantů přetvoření. Zde uvedeme dva nejjednodušší modely [1, 2]:

Neo-Hookeovský model:

$$A = C_{10} (I_1 - 3) , \quad (13.5)$$

kde C_{10} je konstanta. Tento model vykazuje dobrou shodu s experimentálními daty až do přetvoření 40% při jednoosém tahu a do 90% při prostém smyku.

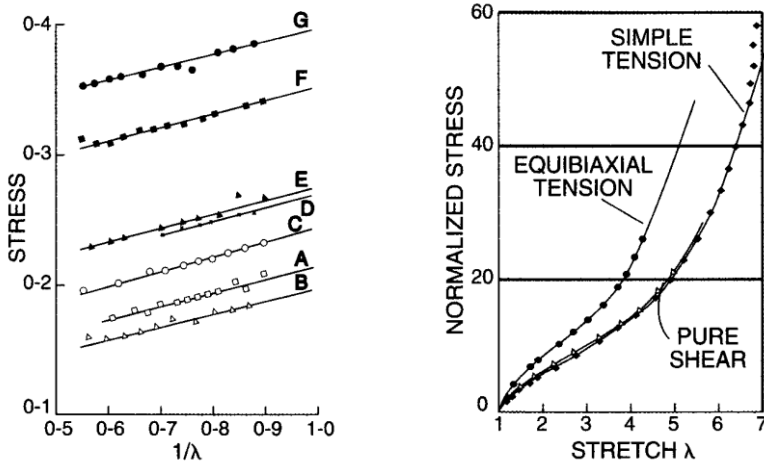
Mooney-Rivlinův model:

$$A = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) . \quad (13.6)$$

Tento model vykazuje dobrou shodu s tahovými zkouškami až do přetvoření 100%. Není však příliš vhodný pro popis stlačování nebo tuhnutí materiálu při velkých přetvořeních.

Kromě uvedených modelů existují i další (Ogden, Yeoh aj.), které jsou blíže popsány v [1, 2]. Některé modely byly implementovány do programů MKP.

Konstanty ve výpočetních modelech se získávají různými zkouškami speciálních těles, zatížených jednoosým tahem, dvoosým tahem a smykem (Obr.13.3).



Obr. 13.3. Diagramy tahových zkoušek pro stanovení Mooneyových – Rivlinových konstant vulkanizované pryže [1, 7]. Simple tension - jednoosý tah, equibiaxial tension - izotropní dvojosý tah, pure shear - čistý smyk. Stretch λ - protažení.

Pryž a další elastomery jsou téměř nestlačitelné. Při analytickém řešení jednoduchých úloh se u nich někdy předpokládá dokonalá nestlačitelnost, jíž odpovídá Poissonovo číslo $\mu = 0,5$. Při numerických postupech (MKP) ale ideální nestlačitelnost činí potíže se stabilitou řešení, a proto se zde zpravidla pracuje s hodnotou μ o něco nižší, například $\mu = 0,49$.

Jedna teorie deformování elastomerů vychází z **entropie**, jakožto míry uspořádání, a z pravděpodobnosti dosažení určitého stavu. Narovnaný polymerní řetězec je velice málo pravděpodobný, zatímco různé neuspořádané stavy jsou mnohem pravděpodobnější. Jestliže upevníme jeden konec pomyslného segmentu elastomeru a vyjádříme pravděpodobnost výskytu druhého konce v určité vzdálenosti od něj například prostřednictvím trojrozměrného Gaussova rozdělení, a potom ve druhé větě termodynamické vyjádříme přírůstek vnitřní energie, dostaneme po řadě úprav [1, 2] následující vztah pro hustotu energie napjatosti v ideálním elastomeru, odpovídající protažením $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$:

$$A = -T \Delta S = \frac{1}{2} NkT (\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3) ; \quad (13.7)$$

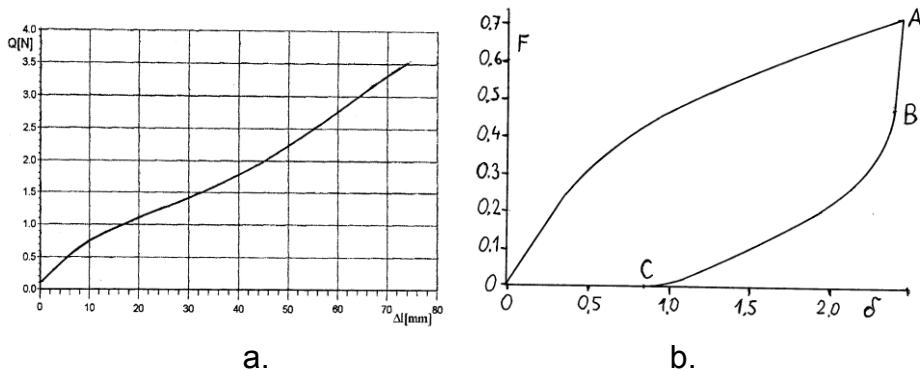
T je absolutní teplota, N je počet segmentů řetězců na jednotku objemu, k je Boltzmannova konstanta ($k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K), a ΔS je změna entropie jednoho

segmentu. Tvar výrazu (13.7) je totožný s tvarem vztahu (13.5) pro hustotu energie napjatosti Neo-Hookeovského modelu.

13.3 Textilní vlákna a konstrukce

Chování vláken, nití a lan, a konstrukcí z nich je ovlivněno tím, že mají určitou tuhost v tahu i v ohybu. U textilních materiálů hraje dále roli vzájemné uspořádání a provázání nití, jejich vzájemné tření a hustota na jednotku plochy textilie.

Mechanické vlastnosti vláken i textilních výrobků se zjišťují tahovými zkouškami. Na obr. 13.4a je pracovní diagram příže, na obr. 13.4b je pracovní diagram plošné textilie typu pletenina, v obou případech v souřadnicích síla – prodloužení. Pracovní diagramy se aproximují vhodnými funkcemi a reologickými modely, jejichž parametry charakterizují pružné, popřípadě viskoelastické vlastnosti. Různé viskoelastické modely byly popsány v kapitole 10.



Obr. 13.4. Pracovní diagramy: a - tahová zkouška příže, b - pracovní cyklus „zatížení - odlehčení“ vzorku pleteniny [3].

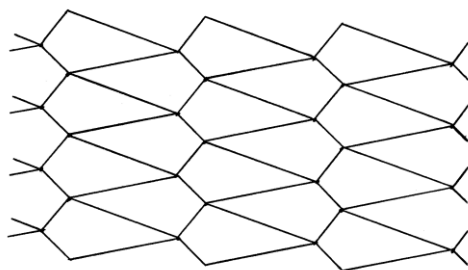
U jednorozměrných textilií se určuje Hookeův zákon a moduly pružnosti pro tah a pro smyk. Ohybové vlastnosti se vyjadřují prostřednictvím ohybové tuhosti EJ , kde E je Youngův modul pružnosti (N/m^2) a J je moment setrvačnosti (kvadratický moment) v ohybu (m^4). Ohybová tuhost má rozměr Nm^2 . Při jejím určování z průhybu textilního vzorku například vlastní tíhou jsou ale deformace větší; podobně i při použití textilních materiálů. Místo jednoduché diferenciální rovnice průhybové čáry, $w'' = -M/EJ$, vhodné pro malé průhyby nosníků z poměrně tuhých materiálů, je nyní nutno používat její úplný tvar pro velké průhyby [4]:

$$\frac{w''}{[1 + (w')^2]^{3/2}} = - \frac{M(x)}{EJ} . \quad (13.8)$$

U vláken a nití se zjišťuje jejich pevnost v tahu P . Ve vláknech, která jsou výrazněji ohnuta, působí navíc napětí od ohnutí, které spolu s vnějším napětím způsobí přetržení při nižším zatížení. Proto se také měří tzv. pevnost ve smyčce P_s , kdy se na jednom vlákně vytvoří smyčka, tou se protáhne druhé vlákno, a na dynamometru se obě vlákna přetrhnou. Podobně se měří i pevnost v uzlu P_u . Oba postupy jsou normovány. Kromě nich se také uvádí relativní pevnost ve smyčce $P_{r,s}$ a v uzlu $P_{r,u}$, v obou případech v procentech:

$$P_{r,s} = \frac{P_r}{P} \times 100; \quad P_{r,u} = \frac{P_u}{P} \times 100 . \quad (13.9)$$

Při modelování chování textilie pro technickou aplikaci je výhodné nahradit ji spojitým tenkým tělesem se stejnými mechanickými vlastnostmi. Na obr. 13.5 je znázorněna část pravidelné vláknenné sítě s naznačenými silami v nitích u jednoho strukturního prvku. Pro danou geometrii lze sestavit rovnice rovnováhy sil v uzlech, a s použitím pracovního diagramu příze stanovit deformace a nalézt tuhosti tohoto útvaru. Jiný přístup vychází z měření deformačních vlastností menšího vzorku uvažované textilie. V obou případech je při návrhu ekvivalentního homogenního tělesa nutno přihlížet k tomu, že se jedná o těleso anizotropní. K této problematice, včetně transformačních rovnic a užití tenzorového počtu, je možno doporučit skripta [3] a publikace v nich citované.



Obr. 13.5. Náhradní model pleteniny [3].

13.4 Membránové konstrukce

Za membránu zde budeme považovat takové tenkostěnné těleso, jehož rozměry ve dvou směrech jsou mnohem větší než jeho tloušťka, a které je schopné přenášet jenom síly působící ve směrech tečných k povrchu. Membrána má zanedbatelnou

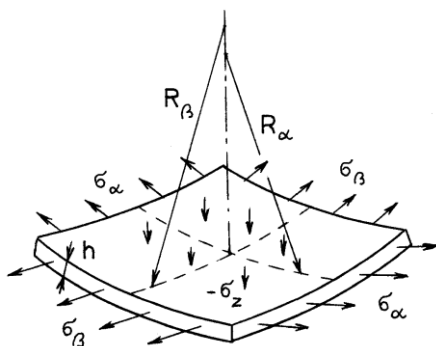
ohybovou tuhost, takže není schopna přenášet ohybové momenty. Příkladem je nafukovací hala nebo balón.

Poznámka. Membránové napětí je rovnoměrně rozložené napříč tloušťkou stěny, takže nejlépe využívá schopnost materiálu přenášet síly. Kvůli úspoře materiálu se proto často snažíme, aby i různé zásobníky nebo nádrže z jiných materiálů, například kovové, měly takový tvar, aby v nich byla především membránová napjatost [4 – 6]. Má-li konstrukce i nezanedbatelnou ohybovou tuhost, takže kromě membránových napětí působí ve stěně i napětí ohybová, je při výpočtech nutno použít ohybovou teorii skořepin; viz např. [4 – 6].

Membránová konstrukce je často zatížena tlakem kapalného nebo plynného média. Tento tlak p vyvolává v membráně síly ve dvou navzájem kolmých směrech, které jsou v daném bodě tečné k vyšetřované ploše. Z rovnováhy sil působících na malý element membrány (Obr. 13.6) ve směru kolmém k tečné rovině vyplývá tzv. Laplaceova rovnice membrány [5, 6]:

$$p = \frac{N_{1\alpha}}{R_\alpha} + \frac{N_{1\beta}}{R_\beta} . \quad (13.10)$$

$N_{1\alpha}$, resp. $N_{1\beta}$ je síla ve směru α , resp. β na jednotku šířky membrány (rozměr N/m) a R_α a R_β jsou poloměry křivosti plochy membrány v příslušných směrech. α , β jsou jakékoliv dva navzájem kolmé směry. Poloměry R_α , R_β se mohou měnit v závislosti na orientaci těchto směrů. Existují dva **hlavní směry**, pro které jsou tyto poloměry extrémní (jeden je maximální, druhý minimální); pak se označují R_1 , R_2 . Vydělíme-li síly $N_{1\alpha}$, $N_{1\beta}$ tloušťkou membrány, dostaneme normálová **membránová napětí**.



Obr. 13.6. Membrána – geometrie a napětí.

Poznámka. Laplaceova rovnice (13.10) platí také pro kapaliny; v tomto případě by místo $N_{1\alpha}$, $N_{1\beta}$ bylo povrchové napětí γ , stejné ve všech směrech. Řídí se jí například i tvar kapek vody, nebo dokonce tvar skleněných perliček, které se zakulacují za vysokých teplot v peci.

Literatura ke kapitole 13.

1. Roylance, D.: Mechanics of materials. John Wiley & Sons, Inc., 1996. 315 s. Dostupné na webu přes Google po zadání názvu knihy.
2. MARC. Nonlinear Finite Element Analysis of Elastomers. MARC Analysis Research Corporation. Palo Alto, CA, 1996. 48 s.
3. Stříž, B.: Mechanika textilií. Část 2. Aplikace mechaniky kontinua. Technická univerzita v Liberci, Fakulta textilní. Liberec, 2003. 83 s.
4. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 375 s.
5. Timošenko, S. P.: Soprotivlenije materialov II. Nauka, Moskva, 1965. 480 s. (Překlad z angl. Strength of materials, Part II. D. van Nostrand Company, inc., Princeton, New Jersey, 1956.
6. Placák, V., Kunc, J.: Výpočet napjatosti skořepin. SNTL, Praha, 1966.
7. Ogden, R. W.: Large deformation isotropic elasticity: On the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. Proc. Roy. Soc. A, 326, 1972. 565 – 584.

14. Optimalizace tvaru a rozměrů součástí a konstrukcí

Součásti, konstrukce a stavby musí být bezpečné a spolehlivé. Jejich zhotovení by mělo být také hospodárné. Zde ukážeme několik přístupů a pravidel pro zlepšení díky optimalizaci tvaru.

14.1 Součásti a konstrukce konstantních napětí

Při klasickém přístupu k dimenzování se kontroluje napětí v nejméně namáhaném místě součásti nebo konstrukce a porovnává se s přípustnou hodnotou. V jiných místech je napětí zpravidla nižší, takže tam není plně využita schopnost materiálu přenášet síly a napětí, a návrh je méně hospodárný. U konstrukcí konstantních napětí se snažíme, aby napětí v každém místě bylo rovno dovolenému napětí. Tento přístup budeme ilustrovat na několika úlohách. Pro snazší pochopení se zaměříme na prosté tvary, kde řešení vede na přehledné analytické výrazy.

14.1.1 Dimenzování a optimalizace průřezu nosníku po délce

Na obr. 14.1 je nosník, jehož jeden konec je vetknutý a druhý je zatížen příčnou silou F . Obrázek ukazuje geometrii a rozložení ohybového momentu po délce. Nejvyšší moment působí ve vetknutí. Bude-li průřez nosníku konstantní, musí být takový, aby napětí v tomto místě nepřekročilo dovolenou hodnotu:

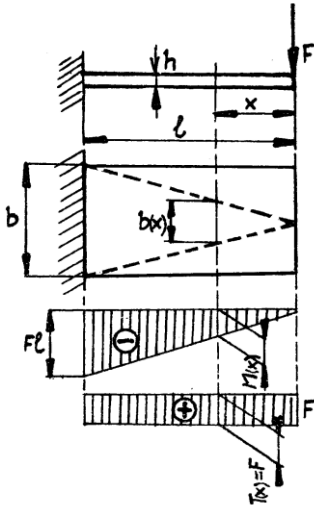
$$\sigma_{\max} = F l / W \leq \sigma_{\text{dov}}, \quad (14.1)$$

kde W je modul průřezu v ohybu. Maximální napětí v řezu ve vzdálenosti x je

$$\sigma_{\max}(x) = M(x) / W = F x / W. \quad (14.2)$$

S výjimkou místa vetknutí jsou napětí všude nižší. Takovýto návrh je méně hospodárný. Maximálního využití materiálu se dosáhne u tzv. **součástí konstantních napětí** (někdy se také říká součást stálé pevnosti). Její průřez není konstantní, ale mění se po délce tak, aby maximální napětí ve všech místech mělo stejnou hodnotu, rovnou dovolenému napětí. Modul průřezu se určuje podle obecného vztahu:

$$W(x) \geq M(x) / \sigma_{\text{dov}}. \quad (14.3)$$



Obr. 14.1. Nosník konstantních napětí. Geometrie a rozložení ohybového momentu a příčné síly.

Znaménko „větší nebo rovno“ je zde užito proto, že s ohledem na různá omezení nelze často dosáhnout přesně vypočtené hodnoty modulu průřezu. Například v nosníku, zatíženém osamělou silou F na konci, působí ohybový moment

$$M(x) = F x , \quad (14.4)$$

Průřezový modul nosníku konstantních napětí by se tedy měl měnit takto:

$$W(x) \geq F x / \sigma_{\text{dov}} , \quad (14.5)$$

Rozměry průřezu se mohou měnit různými způsoby v závislosti na jeho tvaru. Má-li nosník obdélníkový průřez $b \times h$, kde b je šířka a h tloušťka ve směru zatížení, bude $W = bh^2/6$.

Nejjednodušší případ je s konstantní tloušťkou a proměnlivou šířkou. Při konstantní šířce a zadané tloušťce h by potřebná šířka byla

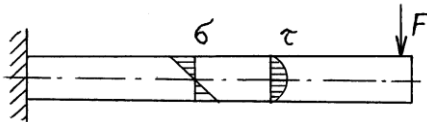
$$b_0 = \frac{6Pl}{\sigma_{\text{dov}} h^2} . \quad (14.6)$$

Pro měnící se optimalizovanou šířkou $b(x)$ musí platit v ideálním případě

$$b(x) = \frac{6Fx}{\sigma_{\text{dov}} h^2} . \quad (14.7)$$

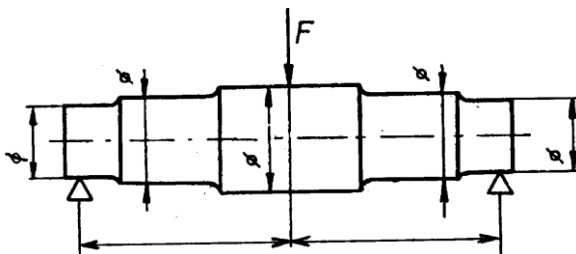
Šířka tedy poroste se vzdáleností od zatíženého konce lineárně; při pohledu shora se jedná o trojúhelník (na obrázku naznačeno čárkovaně). Vidíme, že stejnou službu jako nosník konstantního průřezu může poskytnout nosník konstantních

napětí při poloviční hmotnosti! Situace je ale složitější. Kromě ohybových napětí vyvolává příčná síla v nosníku i smyková napětí, která jsou po celé jeho délce stejná, a to i v blízkosti působíště síly F , kde ohybová napětí jsou velmi malá. Zde by průřez musel být dimenzován také s ohledem na smyková napětí. Vhodnějším kritériem by proto bylo, že konstantní musí být ekvivalentní napětí, uvažující současné působení normálových a smykových napětí. Při návrhu ale bude nutno také přihlídnout, že ohybové napětí je maximální na povrchu, zatímco smykové napětí je maximální na neutrální ose (obr. 14.2). Navíc, tuhost nosníku se zužující se šířkou je menší než u nosníku konstantní šířky b , takže deformace budou větší. Někdy je rozhodujícím hlediskem pro dimenzování spíše přípustná velikost deformací než maximální napětí. Také by bylo nutno řešit otázku přenosu síly F na nosník. Skutečný optimální tvar tedy bude složitější.



Obr. 14.2. Rozložení napětí ohybového (σ) a smykového (τ).

Místo šířky by se mohla měnit také výška průřezu. Podobně by se optimalizoval i průměr hřídele uloženého ve dvou ložiskách (obr. 14.3), podvozek otevřeného nákladního železničního vozu nebo tvar hlavních nosníků mostu. Při spojitě optimalizaci podél součásti mohou být potřebné vztahy v jiných případech složitější, avšak způsob odvození je podobný. S ohledem na nutnost splnit více požadavků současně (a to nejen z hlediska pevnosti) však často nebývá spojitá optimalizace možná, podobně jako u naznačeného hřídele. Někdy je vhodnější použít součásti standardizovaných (odstupňovaných) rozměrů s cílem snížit celkové náklady, sestávající z nákladů na materiál a práci. Obecně ale musí ohybový modul průřezu v libovolném místě splňovat vztah (14.3).



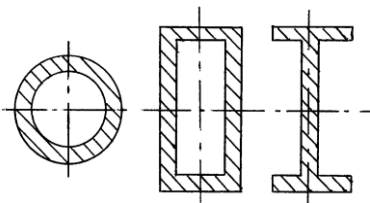
Obr. 14.3 Masivní hřídel.

Poznámka. Konstrukce konstantních napětí skrývají určité nebezpečí. U běžné

konstrukce existuje jenom jedno nebo několik málo míst, kde je napětí nejvyšší, a odkud by mohlo vyjít případné porušení. U součásti konstantních napětí je napětí všude stejné, takže porušení může vyjít odkudkoliv. Kontrola například na únavové trhliny proto musí být prováděna podrobně po celém povrchu.

14.1.2 Dimenzování a optimalizace velikosti a tvaru příčného průřezu nosníku

Dosud jsme hovořili o optimalizaci průřezu nosníku „po délce“. Lze také optimalizovat tvar průřezu. Ohybové napětí je rozloženo napříč výškou tak, že nejvyšší hodnotu má v místech nejvíce vzdálených od neutrální osy, na které je naopak rovno nule (obr. 14.2). Proto existuje snaha, aby u neutrální osy bylo materiálu co nejméně, protože zde téměř nepřispívá k přenosu ohybového momentu, a naopak aby jej bylo co nejvíce ve větší vzdálenosti od osy. Příkladem jsou profily duté nebo I-profilu (obr. 14.4). Existují však omezení. Kdybychom chtěli například optimalizovat rozměry jednoduchého plného obdélníkového průřezu tak, aby měl nejvyšší modul průřezu v ohybu při dané hmotnosti, resp. ploše, vyšlo by nám, že nejvýhodnější bude průřez, který bude mít největší výšku, a tloušťku blížící se k nule. Ovšem takový nosník by při sebemenším zatížení vybočil a zhroutil se. Proto nosníky pro přenášení příčného zatížení (ve směru stojiny) mají obvykle profil I, kdy obě přírubby svou vyšší ohybovou tuhostí v příčném směru brání snadnému vybočení. Podobně trubky určené pro přenos příčných sil nebo krouticího momentu nemohou mít příliš tenkou stěnu, i když by teoreticky byl nejvhodnější co největší průměr při co nejmenší tloušťce stěny. Tady by zase hrozila lokální ztráta stability jejím zvlněním.



Obr. 14.4. Váhově úsporné profily.

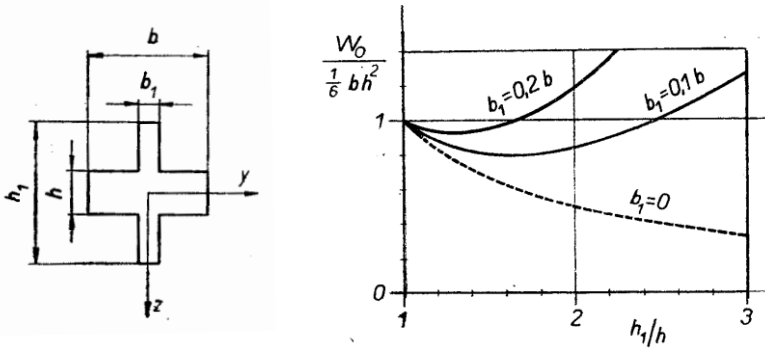
Někdy se únosnost součásti zvyšuje přidáním žeber. I zde je nutná určitá opatrnost, aby se přidáním materiálu na nevhodném místě a v nevhodném rozsahu naopak nezvýšilo napětí, a tedy nesnížila bezpečnost. Budeme to ilustrovat na příkladu nosníku obdélníkového průřezu, který je vyztužen žebrem podle obr. 14.5.

Pro moment setrvačnosti a modul průřezu v ohybu k vodorovné ose platí [1]:

$$J_o = \frac{1}{12}(b-b_1)h^3 + \frac{1}{12}b_1h_1^3, \quad (14.8)$$

$$W_o = \frac{J_o}{h_1/2} = \frac{1}{6h_1} \left[(b-b_1)h^3 + b_1h_1^3 \right]. \quad (14.9)$$

U nosníku bez žebra je $h_1 = h$ a $W_o = bh^2/6$. Poměr modulů průřezu v ohybu nosníku se žebrem a bez žebra je znázorněn pro různé poměry výšek a šířek žebra na obr. 14.5b. Vidíme, že při malých tloušťkách i výškách žebra může být výsledný modul průřezu dokonce nižší než u nosníku nevyztuženého. Ačkoliv jsme přidali materiál, modul průřezu se snížil! Naproti tomu ohybová tuhost, charakterizovaná momentem setrvačnosti, se zvýší při jakémkoliv žebře.



Obr. 14.5. Vliv geometrie žebra na vyztužení [1].

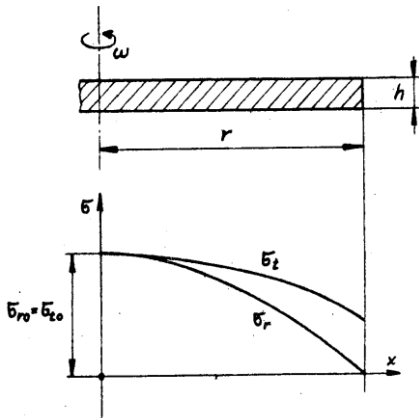
14.1.3 Optimalizace průřezu rotující součásti

Jiným případem, kdy lze najít analyticky, jak by se měl měnit průřez součásti s konstantním napětím, je tenký rotující kotouč (obr. 14.6). V něm působí napětí ve směru obvodovém (σ_t) i radiálním (σ_r). Pokud má kotouč konstantní tloušťku, platí pro ně následující vztahy [1, 2]:

$$\sigma_t(r) = \rho \omega^2 \left(\frac{3+\mu}{8} R^2 - \frac{1+3\mu}{8} r^2 \right), \quad (14.10)$$

$$\sigma_r(r) = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 (R^2 - r^2), \quad (14.11)$$

kde ρ je hustota a μ Poissonovo číslo materiálu kotouče, $\omega = 2\pi f$ je úhlová rychlost, $f = n/60$ je frekvence a n je počet otáček za minutu, R je vnější poloměr



Obr. 14.6. Rotující kotouč. σ_t – obvodové napětí, σ_r – radiální n., σ_{ro} – napětí v ose

kotouče a r je poloměr místa, kde vyšetřujeme napětí. Rozložení napětí je znázorněno na obr. 14.6. Nejvyšší hodnoty jsou v ose kotouče, přičemž platí

$$\sigma_r(0) = \sigma_t(0) = \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 R^2. \quad (14.12)$$

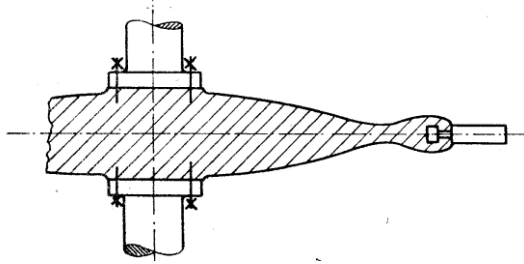
S rostoucím poloměrem obě napětí klesají; radiální napětí až k nule v případě nezátíženého vnějšího obvodu.

Poznámka. Všimněme si, že u tenkého kotouče nezávisí napětí na tloušťce! V osovém směru nepůsobí žádné napětí, neboť povrchy jsou volné a nic nebrání změnám tloušťky. U širokého kotouče (např. turbína s mnoha řadami lopatek) se ale objeví i napětí ve směru osy, protože radiální i obvodové napětí se s r mění, ale změny šířky v osovém směru, způsobované příčnou kontrakcí, musí být všude stejné.

Z obrázku 14.6 je zřejmé, že ve všech místech tenkého kotouče s výjimkou osy jsou napětí nižší. Není zde tedy plně využita únosnost materiálu. Materiál bude lépe využit, uděláme-li tloušťku kotouče klesající s poloměrem tak, aby ekvivalentní napětí v každém místě bylo rovno dovolenému napětí σ_{dov} . Úloha „rotující kotouč konstantních napětí“ je řešena v základních učebnicích pružnosti a pevnosti [1, 2], takže zde uvedeme pouze výsledný vztah pro rozložení tloušťky:

$$t(r) = t_0 \exp\left(-\frac{\rho \omega^2}{2\sigma_{dov}} r^2\right); \quad (14.13)$$

Průběh, znázorněný na obr. 14.7, připomíná Gaussovo rozdělení pravděpodobnosti. t_0 je maximální tloušťka kotouče v ose rotace, která se stanoví zpětně z tloušťky v



Obr. 14.7. Kotouč konstantních napětí: jeden stupeň turbíny s lopatkami [2].

místě přechodu do věnce s lopatkami. Pro toto místo, o poloměru r_{kB} , je známa odstředivá síla F_ω vyvozená lopatkou o určité hmotnosti a s těžištěm na určitém poloměru r_{lB} , a je známa i odpovídající rozteč lopatek L_B . Potřebná tloušťka se dostane např. z podmínky, že maximální ekvivalentní napětí podle Trescovy hypotézy nesmí překročit mez kluzu σ_Y . S ohledem na to, že u tenkého kotouče je hlavní napětí v axiálním směru rovno nule, má ekvivalentní napětí stejnou hodnotu jako obvodové nebo radiální napětí, daná vztahy (14.12). S užitím podmínky $\sigma_{dov} \leq \sigma_{Tresca}$, resp. $\sigma_{dov} = \sigma_Y/s$, dostaneme tloušťku kotouče v místě přechodu do lopatek

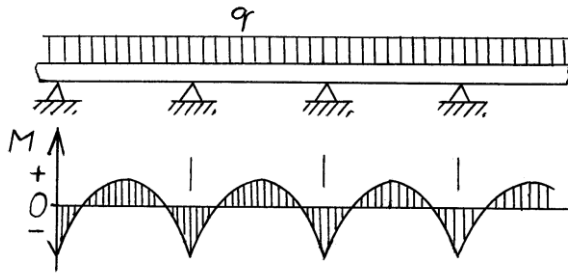
$$t_{VB} = \frac{F_\omega}{L_B \sigma_{dov}} \quad (14.14)$$

Z ní se pak odvodí tloušťky v jiných místech.

Poznámka. Tato úloha zde byla uvedena proto, aby ukázala možnost analytického řešení. Podobné součásti se dnes řeší vhodněji metodou konečných prvků, která může lépe respektovat spojení s hřídelem a upevnění lopatek.

14.2 Optimalizace rozsáhlých konstrukcí

U rozsáhlých konstrukcí, například stavebních, je důležitá znalost celkového rozložení vnitřních sil. Obrázek 13.8 ukazuje dlouhý most jako spojitý nosník na více podporách. Je nakreslen podélný průběh příčných sil a ohybových momentů, způsobených spojitým zatížením. Vidíme, že v určité vzdálenosti od každé podpory je ohybový moment roven nule. Jestliže konstrukce bude vytvořena spojením více částí, je vhodné umísťovat spoje právě do míst nulového momentu, neboť se v nich budou přenášet pouze příčné síly, ale ne ohybové momenty. Podobný přístup se užívá také při spojování vodorovných nosníků u ocelových skeletů mrakodrapů, při podepírání širokého okraje převislé střechy nad vlakovými nástupišti i jinde.

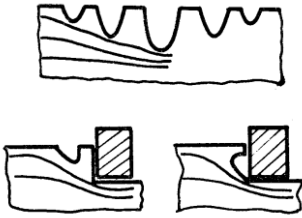


Obr. 14.8. Most jako dlouhý nosník na mnoha podporách a průběh ohybového momentu po délce. V malých vzdálenostech od podpor je moment roven nule.

Poznámka. Při navrhování velkých konstrukcí a staveb je nutno uvažovat všechna zatížení, která se mohou vyskytnout. Co by byly platné přesné metody analýzy napjatosti, kdyby nebyly použity všechny údaje o zatížení. Opomenutí některého zatěžovacího stavu může být fatální. Například začátkem dvacátého století došlo v Kanadě k havárii mostu Québec Bridge přes řeku Svatého Vavřince v průběhu stavby jenom proto, že si projektant neuvědomil, že síly v rozestavěné příhradové konstrukci působí jinak než při provozním zatížení, a pruty, namáhané při montáži nikoliv tahem, ale tlakem, se zborstily [21]. Kolaps konstrukce způsobil tenkrát smrt 75 osob! Takových případů by šlo najít více.

14.3 Optimalizace u složitějších tvarů a zatížení

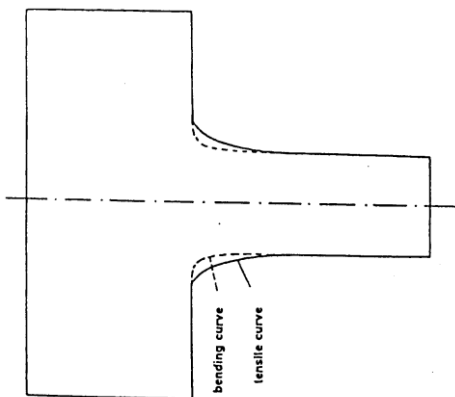
Při složitějších tvarech těles a způsobech zatížení se užívají sofistikovanější způsoby optimalizace tvaru. Nejslabším místem jakékoliv součásti bývají oblasti koncentrace napětí, například při náhlé změně tvaru nebo velikosti průřezu, u otvoru anebo ve vrubu. Obecně platí, že zvýšení napětí ve vrubu je tím větší, čím větší je jeho hloubka (nebo čím větší je změna průměru hřídele), a čím menší je poloměr zaoblení jeho kořene nebo přechodu (Obr. 6.3). Při návrhu tvaru součástí bychom měli usilovat, aby tok sil v ní byl co nejplynulejší. Za tímto účelem se někdy v blízkosti vrubu dělají také odlehčovací vruby (Obr. 14.9). Ale i samotný tvar vrubu je důležitý a malá změna tvaru může znamenat velkou změnu napětí. Při navrhování tvaru vrubů s cílem dosáhnout co nejnižší koncentraci napětí, se lze přiučit od přírody. Z živých organismů mohou přežít jen takové, které mají dostatečnou pevnost pro přenášení nejčastěji se vyskytujících zatížení, a to při nejmenší hmotnosti. Jako příklad uveďme odbočování větví z kmene stromu.



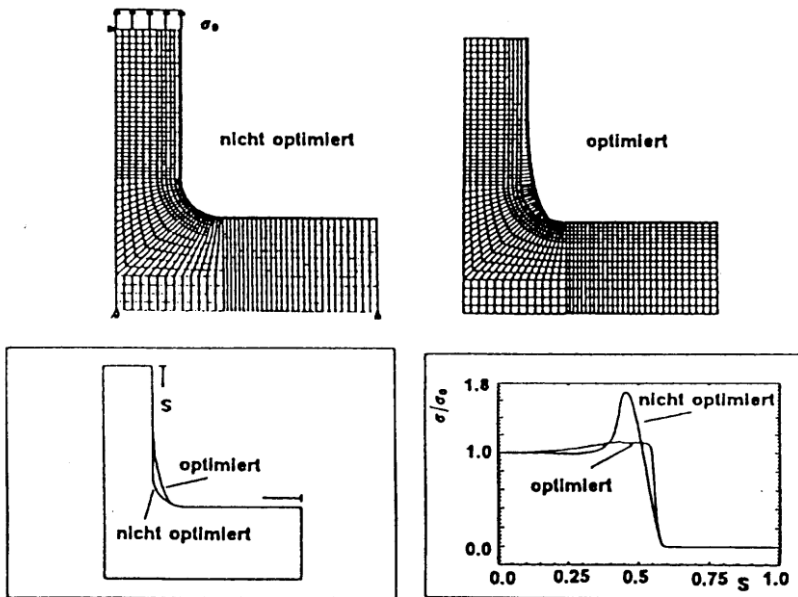
Obr. 14.9. Příklady odlehčovacích vrubů s naznačenými siločarami [2].

Kdyby koncentrace napětí v místě napojení větví byla příliš vysoká, větve by se i při malém zatížení mohly ulámat, a strom by nakonec zahynul. To se ve skutečnosti neděje, a bylo zjištěno, že tvar napojení větví do kmene bývá takový, že v něm téměř žádná koncentrace napětí nevzniká. Strom sám podporuje optimální přibývání dřevní hmoty v kritických místech. Podobný tvar přechodů lze najít také u trnů na různých keřích nebo dokonce u rozvidlených srnčích parohů. Již v roce 1937 uveřejnil R. Baud práci, ve které ukázal na základě experimentů s celuloidovými vzorky, že i malá změna tvaru odbočení může přinést výrazné zlepšení [3]. Pro optimální tvar (bez koncentrace napětí) se používá označení Baudova křivka (obr. 14.10). Porovnání poměrů při běžném napojení a u tvaru optimalizovaného metodou konečných prvků (viz dále) je na obr. 14.11.

Příroda si během dlouhé evoluce vyvinula mechanismy, jak u různých přírodních druhů utvářet tvar, který bude optimální z hlediska mechanického namáhání. Tuto problematiku zkoumal profesor Mattheck z Karlsruhe, který vyvinul dva postupy optimalizace tvaru součástí, založené na způsobech užívaných přírodou [4 – 7]. První postup, tzv. metoda adaptivního růstu, přidává postupně materiál v místech s vyšším namáháním, podobně jako se to děje u stromů. Pro součást, která má být optimalizována, se metodou konečných prvků zjistí rozložení napětí. V místech se

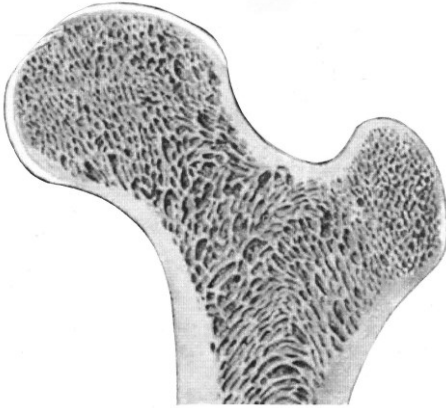


Obr.14.10. Baudovy křivky pro tah (tensile curve) a pro ohyb (bending curve). Převzato z [3].



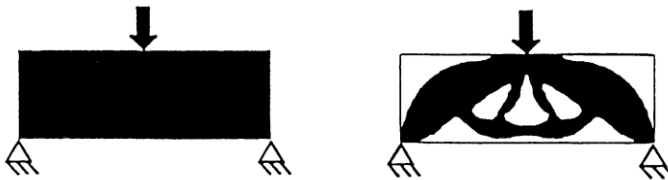
Obr. 14.11. Optimalizace tvaru odbočující části postupným přidáváním materiálu. Dole vlevo: tvar neoptimalizovaný (nicht optimiert) a optimalizovaný (optimiert); dole vpravo porovnání napětí v obou případech [8, 9].

zvýšeným napětím se v dalším kroku zvětší tloušťky prvků v povrchové vrstvě, podobně, jako se při růstu stromu ve více namáhaných místech přirozeně zvětšují tloušťky tzv. kambia, což je měkká vrstva pod kůrou. Tento výpočet MKP se opakuje. Po několika krocích je dosaženo rozložení napětí s podstatně menšími koncentracemi. Blíže viz např. [4 – 8]. Druhá metoda užívá postupné odstraňování materiálu z nezatižených míst („odumírání“). Podobně je uspořádána spongióza v kosti (obr. 14.12), jejíž struktura je taková, aby materiál byl maximálně využit podle zásady konstantního napětí. (Připomeňme i odvápnování kostí kosmonautů při dlouhodobém pobytu v beztlížném stavu – příroda zde svým způsobem odstraňuje materiál, který není zatěžován.) Při tomto způsobu optimalizace s výpočty metodou konečných prvků se v místech s nejnižším napětím v následujícím kroku sníží modul pružnosti příslušných prvků. Postup se několikrát opakuje, až nakonec tam, kde modul pružnosti velmi výrazně klesl, se dané prvky odstraní. Tento optimalizační algoritmus byl v [9] označen jako Soft Kill Option (SKO). Na obr. 14.13 je nosník na dvou podporách, zatížený uprostřed osamělou



Obr. 14.12. Podélný řez kostí, ukazující kloub se spongiózou.

silou, který byl optimalizován touto metodou [8, 9]. V tomto případě se vycházelo z plného polotovaru obdélníkového tvaru a postupně se odebíral materiál z nejméně zatížených míst. Muselo se samozřejmě přihlížet i k tomu, aby nedocházelo k borcení částí namáhaných tlakovými silami. Podobně vypadá i optimalizace v přírodě.



Obr. 14.13. Východí a konečný tvar součásti zatížené příčnou silou. Optimalizace metodou SKO pro dosažení minimální hmotnosti. [8, 9].

Další optimalizační postupy

Existuje mnoho optimalizačních postupů založených na matematice. V podstatě jde o to, najít extrém nějaké účelové funkce (velikost napětí v součásti, hmotnost, náklady apod.), která závisí na řadě veličin a omezení. Jednodušší prakticky použitelné metody jsou popsány v kapitolách 11 – 14 v knize [11] a v kapitole 19 v [16]. Obě knihy jsou dostupné na webu, stačí napsat název do Google. Podrobně jsou optimalizaci věnovány knihy [12 – 15]; poslední jmenovaná je také dostupná na webu. K optimalizaci lze též použít nástroje v Matlabu (Optimization Toolbox) nebo Mathcadu; vysvětlivky jsou v jejich manuálech. Některé úlohy zvládne i Excel. U něj je v menu Data tzv. Řešitel, který má také optimalizační algoritmus a umožňuje přihlížet i k různým omezením jednotlivých veličin.

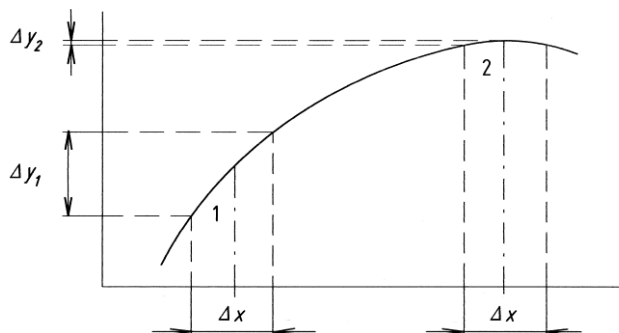
14.4 Stanovení potřebných tolerancí

Při konstrukci součásti, stroje, stavby nebo nějakého zařízení musíme vždy počítat s nejistotami, které se mohou vyskytnout při návrhu, výrobě nebo stavbě, a při provozu. Proto by každý správný konstrukční návrh měl mít tři etapy:

1. návrh koncepce,
2. stanovení parametrů,
3. stanovení tolerancí.

Po navržení koncepce daného uzlu nebo součásti (např. spalovací tříválcový motor se čtyřmi ventily ve válci, šroubovitá pružina apod.) je nutno stanovit všechny důležité rozměry (vrtání válce, zdvih, průměr pružiny a drátu a počet závitů, atd.). Vstupní veličiny ale často kolísají anebo mohou mít hodnoty lišící se od hodnot předpokládaných při návrhu. Dobrý návrh musí zaručit, že výstupní hodnoty budou vždy v přípustných mezích. Toho lze dosáhnout vhodnou volbou jmenovitých hodnot vstupních veličin a předepsáním jejich tolerancí.

Jmenovité hodnoty vstupních veličin spolu tvoří **pracovní bod**. Jeho poloha by měla zajistit nízkou citlivost výstupních parametrů na odchylky vstupních veličin od jejich jmenovitých hodnot [16]. Tomu se říká **robustní návrh** (robust design). Obrázek 14.14 ilustruje tento princip na příkladu s jednou vstupní veličinou x . Pracovní bod 1 je s vysokou citlivostí, a bod 2 s nízkou citlivostí. Vidíme, že změny výstupní veličiny y kolem bodu 2 při určité změně x jsou mnohem menší než kolem bodu 1 – v obou případech při stejných změnách x . To na druhou stranu znamená, že přijatelné kolísání výstupní veličiny lze někdy docílit s menšími nároky



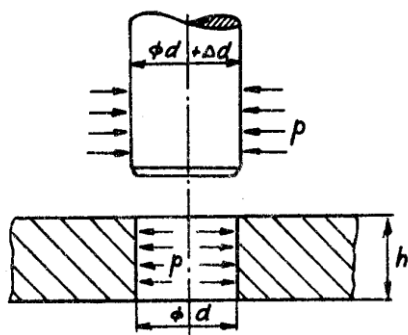
Obr. 14.14. Robustní design. Je vidět vliv polohy pracovního bodu (1, 2) na citlivost výstupu na kolísání vstupní veličiny.

na přesnost vstupních veličin! Spolehlivost tedy závisí nejen na kolísání vstupních hodnot, ale i na poloze pracovního bodu. Pro nalezení optimální polohy existují různé metody. Některé z nich jsou popsány v [17 – 19].

Jakmile byl nalezen pracovní bod, tj. hlavní rozměry a další parametry, je třeba zjistit citlivost výstupu na jejich kolísání. Výsledky se potom použijí pro stanovení rozměrových tolerancí. Postupy jsou popsány například v [16].

Důležitost stanovení odchylek, které se mohou vyskytnout, a jim odpovídajících potřebných tolerancí budeme ilustrovat na dvou příkladech.

Příklad 1. Ocelové kolo má být pevně spojeno s ocelovým hřídelem, aby mohlo přenášet krouticí moment. Spojení bude zajištěno nalisováním, kdy průměr otvoru v kole bude o něco menší než průměr hřídele (obr. 14.15). Stanovte potřebný přesah, tj. o kolik má být větší průměr hřídele než otvoru. Zkontrolujte ekvivalentní napětí na vnitřním obvodu kola a porovnejte s mezí kluzu. Určete sílu potřebnou k nalisování kola na hřídel. Stanovte také, jak se zmenší tlak ve styčné ploše, bude-li skutečný průměr otvoru větší o 0,01 mm než původně stanovená hodnota, a jak by se naopak zvětšila všechna napětí, kdyby průměr kola byl menší o 0,01 mm.



Obr. 14.15. Nalisovaný spoj.

Základní parametry spoje jsou: Vnější průměr kola $D = 2b = 200$ mm, jmenovitý průměr hřídele, stejný jako průměr otvoru v kole, je $d = 2a = 30$ mm. Tloušťka kola $h = 20$ mm. Přenášený moment $M = 200$ Nm. Součinitel tření mezi kolem a hřídelem $f = 0,1$. $E_1 = E_2 = 210000$ MPa, $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$. Mez kluzu $\sigma_Y = 400$ MPa.

Řešení. Při nalisování se otvor v kole zvětší a průměr hřídele zmenší. Mezi nimi pak působí tlak, a díky tření může tento spoj přenášet krouticí moment M . Potřebný tlak p lze vypočítat podle [1] jako:

$$p = \frac{2M}{\pi d^2 h f} \quad (14.15)$$

Odpovídající přesah (tj. rozdíl průměru otvoru a hřídele) je dán vztahem

$$\Delta d = d \times p \left[\frac{1}{E_1} \left(\frac{D^2 + d^2}{D^2 - d^2} + \mu_1 \right) + \frac{1}{E_2} (1 - \mu_2) \right] \quad (14.16)$$

Potřebný přesah bude v řádu setin mm, tedy zanedbatelný ve srovnání s průměrem jmenovitým. Ve vzorci proto můžeme pracovat se jmenovitým průměrem d .

Po dosazení vstupních hodnot do obou vztahů dostaneme, že potřebný tlak je $p = 70,74$ MPa, a odpovídající potřebný přesah $\Delta d = 0,02068$ mm.

Ekvivalentní Trescovo napětí v tenké vrstvě na povrchu otvoru kola je rovno

$$\sigma_{ekv}(a) = \sigma_t(a) - \sigma_r(a) = 2(A - \sigma_r) \quad (14.17)$$

kde $\sigma_r = -p$, a

$$A = p_a \frac{a^2}{b^2 - a^2} \quad (14.18)$$

Po dosazení $p = 70,74$ MPa, $a = 15$ mm, $b = 100$ mm dostaneme $A = 1,6283$ MPa a $\sigma_{ekv} = 144,74$ MPa. Bezpečnost vůči dosažení meze kluzu je

$$k_Y = \sigma_Y / \sigma_{ekv} = 400 / 144,74 = 2,76.$$

Síla potřebná k zalisování hřídele do kola je

$$F = \pi d h f p = \pi \times 30 \times 20 \times 0,1 \times 70,74 = 13334 \text{ N}.$$

Použitý lis by měl mít dostatečnou silovou rezervu proti této hodnotě (viz dále).

Spojení by také šlo docílit i bez použití lisu, jestliže kolo ohřejeme tak, aby se jeho otvor dostatečně zvětšil, a nasuneme je na hřídel. Po ochladnutí vznikne pevné sevření. Z výrazu pro zvětšení průměru otvoru teplem, $\Delta d = d\alpha\Delta T$, dostaneme potřebné zvýšení teploty

$$\Delta T = \Delta d / (d\alpha) = 0,02068 / (30 \times 12 \times 10^{-6}) = 57,4 \text{ K}.$$

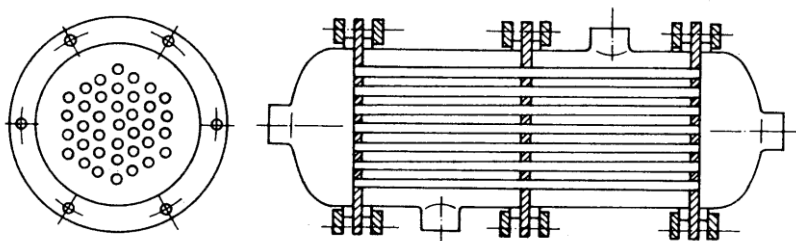
I v tomto případě bychom užili ohřev o něco vyšší, protože mezi ohřátím kola a nasunutím na hřídel uplyne určitá doba, po kterou dochází k chladnutí kola.

Kdyby skutečný průměr otvoru (při nezměněném průměru hřídele) byl např. kvůli výrobní nepřesnosti větší o 0,01 mm, bude přesah menší, roven $\Delta d' = 0,01068$ mm. To je téměř 52% z požadované hodnoty přesahu 0,02068 mm. Tlak ve styčné ploše tedy klesne na 52 % (tj. o 48%), a podobně se sníží i krouticí moment, který by spoj byl schopen přenést. S ohledem na minimální požadovaný moment bude nutno vypočítat odpovídající tolerance průměru hřídele i otvoru. Ty budou v μm . Naopak pokud by přesah byl o 0,01 mm větší, spoj udrží zhruba o 48% vyšší moment, ale napětí v kotouči v oblasti styku se více přiblíží k mezi kluzu. Ekvivalentní napětí bude 214,7 MPa a bezpečnost vůči mezi kluzu bude $k_{\gamma} = 1,86$.

Další příklad podle [20] ukáže, jak je důležité přihlížet ke všem možným odchylkám od ideálního tvaru a jmenovitých rozměrů.

Příklad 2. Je třeba zkontrolovat napětí ve skleněných trubiciích svazkového výměníku tepla podle obr. 13.16. Trubice ze skla Simax[®] mají světlost $d = 14$ mm, tloušťku stěny $h = 1$ mm a délku $l = 2$ mm. Na koncích jsou upevněny v trubkovnicích s možností dilatací v axiálním směru, uprostřed délky procházejí děrovanou přepážkou. Trubicemi proudí kapalina o teplotě $T_{m,1} = 95$ °C a přetlaku 0,1 Mpa, vně proudí voda o teplotě $T_{m,2} = 15$ °C. Součinitel přestupu tepla na vnitřním povrchu trubic je $\kappa_1 = 2000 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$, na vnějším povrchu je $\kappa_2 = 600 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$. Výměník pracuje ve stacionárním režimu a teploty jsou konstantní.

Řešení. V trubicích budou působit napětí vyvozená 1) vnitřním přetlakem a 2) rozdílem teplot vnitřního a vnějšího povrchu. Kromě nich mohou vzniknout i napětí v důsledku tvarových a rozměrových nepřesností trubic. Nebezpečná pro sklo jsou především napětí tahová. Dále probereme jednotlivé složky napětí.



Obr. 14.16. Skleněný výměník tepla. (Podle [20].)

1. Napětí vyvozená vnitřním přetlakem

Vnitřní přetlak p vyvolá v trubici napětí v obvodovém směru

$$\sigma_{p,t} = p \frac{d}{2h}, \quad (14.19)$$

kteřé je rozložené napříč tloušťkou rovnoměrně. Osová napětí při daném uspořádání výměníku v trubici nevzniknou. Po dosazení ($p = 0,1$ Mpa, $d = 14$ mm, $h = 1$ mm) dostaneme $\sigma_{p,t} = 0,70$ Mpa.

2. Teplotní napětí

Protože se jedná o tenkostěnné trubice, budou poměry podobné jako u rovinné stěny, s přibližně lineárním průběhem teplot i napětí. Teplotní napětí budou působit v obvodovém i osovém směru a budou mít v obou směrech stejnou velikost. Maximální tahové napětí bude na vnějším povrchu a bude mít hodnotu [20]:

$$\sigma_{T,a} = \sigma_{T,t} = \frac{E\alpha(T_{m,1} - T_{m,2})}{2(1 - \mu)} \frac{h/\lambda}{1/\kappa_1 + h/\lambda + 1/\kappa_2}. \quad (14.20)$$

Dosadíme-li sem konstanty skla Simax ($E = 63\,000$ MPa, $\mu = 0,18$, $\lambda = 1,16$ Wm⁻¹K⁻¹, $\alpha = 3,2 \times 10^{-6}$ K⁻¹), tloušťku stěny $h = 1,0$ mm a součinitele přestupu tepla $\kappa_1 = 2000$ Wm⁻²K⁻¹ a $\kappa_2 = 600$ Wm⁻²K⁻¹, dostaneme $\sigma_{T,a} = \sigma_{T,t} = 2,80$ MPa. Výsledné maximální tahové napětí bude v dosud uvažovaném ideálním případě působit na vnějším povrchu trubice v obvodovém směru a bude mít velikost

$$\sigma_{\max} = \sigma_{p,t} + \sigma_{T,t} = 2,80 + 0,70 = 3,50 \text{ MPa.}$$

U skutečného výměníku se však prakticky vždy objeví ještě napětí další:

3. Napětí způsobená nepřesností tvaru a rozměrů trubíc

V uvažovaném případě se uplatní následující rozměrové a tvarové odchylky:

- a) kolísání průměru trubice ($\pm 0,5$ mm),
- b) kolísání tloušťky stěny ($\pm 0,2$ mm),
- c) ovalita průřezu ($\pm 0,5$ mm),
- d) podélné prohnutí trubice (2 mm/m délky).

Vlivu jednotlivých odchylek si všimneme blíže.

a) *Vliv kolísání průměru trubice*

Teplotní napětí na průměru prakticky nezávisí, napětí vyvolaná rozdílem tlaků však rostou přímo úměrně s průměrem trubice. Zvětší-li se světlost trubice d z 14,0 na 14,5 mm, vzroste podle (14.19) obvodové napětí na hodnotu $\sigma_{p,t} = 0,725$ MPa.

b) *Vliv kolísání tloušťky stěny*

Tloušťka stěny ovlivňuje oba druhy napětí, přičemž napětí od vnitřního přetlaku s jejím zvětšováním klesají, zatímco napětí teplotní stoupají, neboť se zvětšuje tepelný odpor stěny a rozdíl povrchových teplot. Při zvětšení tloušťky stěny o 0,2 mm na 1,2 mm se jednotlivá napětí změní v souladu se vztahy (14.19) a (14.20) takto:

$$\begin{aligned}\sigma_{T,a} &= \sigma_{T,t} (h = 1,2 \text{ mm}) = 3,18 \text{ MPa,} \\ \sigma_{p,t} (h = 1,2 \text{ mm}) &= 0,58 \text{ MPa ;}\end{aligned}$$

při zmenšení tloušťky na 0,8 mm budou

$$\begin{aligned}\sigma_{T,a} &= \sigma_{T,t} (h = 0,8 \text{ mm}) = 2,37 \text{ MPa,} \\ \sigma_{p,t} (h = 0,8 \text{ mm}) &= 0,88 \text{ MPa.}\end{aligned}$$

Celkově je pro náš případ nebezpečnější zvětšení tloušťky stěny; při jiných poměrech tepelných a tlakových se může změna tloušťky projevit jinak.

c) *Vliv ovality průřezu*

Odchylka průřezu trubice od přesně kruhového tvaru nebude mít žádný vliv na teplotní napětí, může však podstatně ovlivnit napětí vznikající rozdílem tlaků. Při oválném průřezu (Obr. 14.17) se totiž navíc objeví napětí ohybová, protože se průřez trubice snaží účinkem vnitřního přetlaku nabýt kruhový tvar. Maximální tahové napětí vyvolané tímto ohybem bude v našem případě působit v obvodovém směru na vnějším povrchu trubice v místě kratší osy eliptického průřezu, a také na vnitřním povrchu v místech delší osy. Podle [20] je toto napětí přibližně rovno

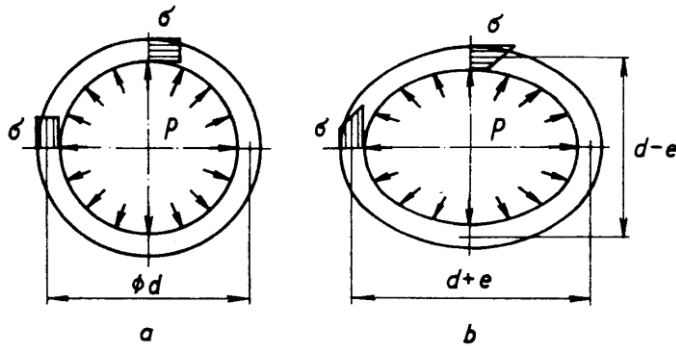
$$\sigma_{e,t} = p \frac{d}{2h} \frac{3e}{h} , \quad (14.20)$$

kde e je maximální odchylka skutečného tvaru průřezu od kruhového (tzn. největší světlý rozměr je $d + e$, nejmenší je $d - e$). Zároveň vzniknou i ohybová napětí v osovém směru, a to o velikosti

$$\sigma_{e,a} = \mu \sigma_{e,t} . \quad (14.22)$$

Dosadíme-li do těchto vztahů $d = 14 \text{ mm}$, $h = 1 \text{ mm}$, $e = 0,5 \text{ mm}$ a $\mu = 0,18$, dostaneme

$$\sigma_{e,t} = 1,305 \text{ MPa}, \quad \sigma_{e,a} = 0,19 \text{ MPa} .$$



Obr. 14.17. Rozložení napětí v trubici s průřezem: a – kruhovým, b – oválným.

Napětí $\sigma_{e,t}$ se bude přičítat k napětí membránovému podle vztahu (14.19). U trubice s oválným průřezem tak maximální napětí vyvolané rozdílem tlaků může být až několikanásobně vyšší než v případě ideálně kruhového průřezu.

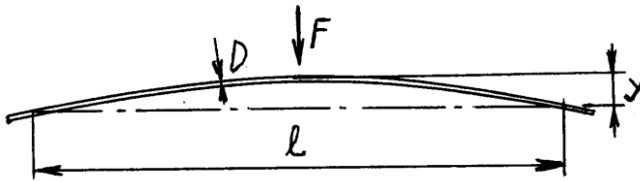
V důsledku kolísání tloušťky stěny trubice se mohou uvedená ohybová napětí pohybovat v následujícím rozmezí:

$$\begin{aligned} \sigma_{e,t} (h = 1,2 \text{ mm}) &= 0,73 \text{ MPa}, & \sigma_{e,a} (h = 1,2 \text{ mm}) &= 0,13 \text{ MPa}, \\ \sigma_{e,t} (h = 0,8 \text{ mm}) &= 1,64 \text{ MPa}, & \sigma_{e,a} (h = 0,8 \text{ mm}) &= 0,30 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

d) Vliv počátečního prohnutí trubice

Přítomnost střední přepážky ve výměníku, jejímiž otvory procházejí trubice jen s malou vůlí, znamená narovnání trubice, prohnutých z výroby (obr. 14.18). Tím se v nich objeví další ohybová napětí, působící v osovém směru. Tato napětí určíme stejně jako u nosníku volně podepřeného na koncích a uprostřed zatíženého osamělou příčnou silou. Podle [1] je průhyb uprostřed $y = Fl^3/(48EJ)$ a maximální tahové napětí na povrchu zde $\sigma = M/W = FlD/(8J)$; F je příčná síla, l – vzdálenost podpěr, J a W je moment setrvačnosti a modul průřezu v ohybu, D je tloušťka nosníku ve směru průhybu. Sloučením obou vztahů dostaneme následující výraz pro maximální tahové (ohybové) napětí, vyvolané eliminací počátečního prohnutí y :

$$\sigma_{y,ax} = 6E \frac{yD}{l^2} . \quad (14.23)$$



Obr. 14.18. Skleněná trubice do výměníku – počáteční prohnutí z výroby.

Po dosazení hodnot z našeho příkladu ($l = 2000$ mm, $y = 2 \times 2 = 4$ mm, $D = d + 2h = 16$ mm) vyjde $\sigma_{y,a} = 6,14$ MPa .

Toto napětí, ze zdánlivě nevinného průhybu, je zdaleka největší ze všech působících napětí. (Všimněme si ještě, že nezávisí na tloušťce stěny, ale pouze na vnějším průměru trubice.)

Nyní ještě určíme celkové napětí, přičemž budeme předpokládat, že se současně může vyskytnout maximální možné prohnutí trubice, maximální odchylka tloušťky stěny a maximální ovalita. (Vliv změny průměru neuvažujeme, mimo jiné proto, že maximální možná odchylka průměru byla v našem případě chápána jako souhrn změny průměru a ovality.) Výsledná napětí v osovém a obvodovém směru jsou v tomto případě dána vztahy

$$\sigma_a = \sigma_{T,a} + \sigma_{e,a} + \sigma_{y,a} \quad (14.24)$$

$$\sigma_t = \sigma_{T,t} + \sigma_{p,t} + \sigma_{e,t} . \quad (14.25)$$

Dosadíme-li sem hodnoty odpovídající všem vyšetřovaným případům, dostaneme, že maximální tahové napětí bude působit na vnějším povrchu trubice v osovém směru, přičemž vůbec největší hodnoty dosáhne při tloušťce stěny 1,2 mm:

$$\sigma_a (h = 1,2 \text{ mm}) = 3,18 + 0,13 + 6,14 = 9,45 \text{ MPa}.$$

Obvodové napětí bude rovno

$$\sigma_t (h = 1,2 \text{ mm}) = 3,18 + 0,58 + 0,73 = 4,49 \text{ MPa}.$$

(Při tloušťce stěny $h = 1,0$ mm bude $\sigma_a = 9,13$ MPa, $\sigma_t = 4,55$ MPa, při $h = 0,8$ mm bude $\sigma_a = 8,81$ MPa, $\sigma_t = 4,89$ MPa.) Vidíme, že maximální napětí může být ve skutečnosti několikrát vyšší než v ideálním případě.

V dalším kroku by v případě potřeby následovalo stanovení tolerancí pro snížení napětí, např. zmenšením prohnutí trubice z výroby, které nejvíce přispívá k parazitním napětím.

Literatura ke kapitole 14.

1. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 375 s.
2. Kolektiv: Pružnost a pevnost II. Skriptum ČVUT, Fakulta strojní, Praha, 1985. 214 s.
3. Baud, R.: Beiträge zur Kenntnis der Spannungsverteilung in prismatischen und keilförmigen Konstruktionselementen mit Querschnittsübergängen. Report 29, Schweiz. Verband für Materialprüfung in der Technik (Bericht 83 der Eidgen. Mat. Prüf.-Anstalt, Zürich, 1934)
4. Mattheck, C.: Design in Nature. Learning from Trees. Springer, Berlin-Heidelberg, 1998, 276 s. ISBN 978-3-642-58747-4. (také Design in der Natur. Rombach Verlag Freiburg, 1992.)
5. Mattheck, C.: Engineering components grow like trees. Materialwissensch. Werkstofftech., **21** (1990), s. 143 - 168.
6. Mattheck, C. - Burkhardt, S.: A new method of structural shape optimization based on biological growth. Int. J. Fatigue, **12** (1990), č. 3, s. 185 - 190.
7. Mattheck, C. - Bethge, K. - Erb, D. - Blömer, W.: Successful shape optimization of a pedicular screw. Medical & Biological Engineering & Computing, July 1992, s. 446 - 448.
8. Menčík, J.: Využití poznatků z biologických struktur pro optimalizaci tvaru mechanicky namáhaných konstrukcí. In: Inženýrská mechanika '99. Svatka 17-20 květen 1999. S. 551 - 556.
9. Baumgartner, A.: Ein Verfahren zur Strukturoptimierung mechanisch belasteter Bauteile auf der Basis des Axioms konstanter Spannung. Dissertation, Universität Karlsruhe, Fakultät für Maschinenbau, 1993.
10. https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Femur#/media/File:Sobo_1909_215.png
11. Menčík, J.: Úvod do experimentální analýzy. Univerzita Pardubice, Pardubice, 2017, 142 str. Dostupné na webu: napsat: <https://dk.upce.cz/handle/10195/66960> nebo zadat název knihy do vyhledavače Google, nebo: <https://dk.upce.cz/bitstream/handle/10195/66960/Uvod%20do%20experimentalni%20analyzy.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
12. MATLAB: <https://www.humusoft.cz/matlab/optimization/>
13. Arora, J.: Introduction to optimum design. 2nd Edition, Elsevier 2004. 728 pp., 3rd Ed. 2011. 896 pp. ISBN: 978-0-12-064155-0.

14. Rao, S. S.: Engineering Optimization: Theory and Practice, Wiley, (2009)
15. Parkinson, A.R., Balling, R., Hedengren, J.D.: [Optimization Methods for Engineering Design](#), Brigham Young University, 2013. Dostupné (27.12.2018) na <http://www.apmonitor.com/me575/index.php/Main/BookChapters>
16. Menčík, J.: Concise Reliability for Engineers. Intech, Rijeka, 2016, An open access publication: <http://www.intechopen.com/books/concise-reliability-for-engineers>, ISBN 978-3540629375. 204 p.
17. Taguchi, G.: Introduction to Quality Engineering: Designing Quality into Products and Processes. Asian Productivity Organisation, Tokyo, 1986. 191 s.
18. Taguchi, G., Chowdhury, S., Wu, Y.: Taguchi's Quality Engineering Handbook. John Wiley & Sons, Hoboken, N.J., 2005. 1696 s.
19. Ross, P. J.: Taguchi Techniques for Quality Engineering. McGraw-Hill, New York, 1996. 329 s.
20. Menčík, J.: Pevnost a lom skla a keramiky. SNTL, Praha, 1990. 392 s.
21. https://en.wikipedia.org/wiki/Quebec_Bridge

15. Užití rozměrové analýzy a teorie podobnosti v mechanice materiálů

Při návrhu různých součástí, strojů a staveb je užitečné používat rozměrovou analýzu a teorii podobnosti, neboť umožňují zjednodušit experimenty i počítačové modelování, zmenšit jejich rozsah, učinit výsledky obecnějšími, a také přebírat výsledky získané u podobných zařízení. V této kapitole, která vychází z prací [1 – 5], jsou ukázány různé druhy podobnosti a příklady bezrozměrových veličin a uvedeny pokyny pro jejich vytváření.

15.1 Rozměrová analýza

Každá fyzikální veličina je popsána číselnou hodnotou a jednotkou. Číselná hodnota říká, kolikrát je vyšetřovaná veličina větší než její jednotka. Příklad délky je 5,3 m, příklad síly je 25 N, příklad času je 15,6 ms. Kromě základních jednotek (metr, kilogram, sekunda...), definovaných v systému SI, se užívají i různé odvozené jednotky a předpony (μ , m, k, M...), které označují řád.

Každá rovnice, která popisuje fyzikální jev, musí být rozměrově homogenní: její levá strana musí mít stejný rozměr jako pravá strana. **Kontrola homogenity rozměrů** by se měla dělat vždy při odvozování a před použitím nového, ještě neověřeného vztahu. Vyšetřujme například vzorec pro výpočet průhybu y pružného nosníku zatíženého příčnou silou F . Je známo, že průhyb bude přímo úměrný F a nepřímo úměrný ohybové tuhosti nosníku, definované jako $E \times J$, kde E je modul pružnosti materiálu a J je moment setrvačnosti průřezu. Průhyb bude také úměrný určité mocnině s délky nosníku L . Představme si nyní, že neznáme exponent s . V takovém případě můžeme napsat základní tvar vzorce:

$$y = C \times F \times L^s / (E \times J); \quad (15.1)$$

C je bezrozměrová konstanta (číslo). Nahradíme-li jednotlivé veličiny ve vztahu (15.1) jejich jednotkami, dostaneme

$$m = 1 \times N \times m^s / (N/m^2 \times m^4).$$

Rozměr pravé strany musí být stejný jako rozměr levé strany, tj. metr. Součin všech členů vpravo, obsahujících m , je $m^s \times m^2 \times m^{-4} = m^{s+2-4} = m^{s-2}$. Tento exponent musí být stejný jako exponent vlevo. Jejich porovnání dá $1 = s - 2$. Z

toho vyplývá $s = 3$, takže $y = C \times F \times L^3 / (EJ)$, což je vztah dobře známý z pružnosti a pevnosti. Podmínka homogenity rozměrů tedy pomohla najít správný tvar vzorce.

Je-li jedna strana rovnice tvořena součtem několika členů, musí mít všechny stejný rozměr. Například svislá dráha y tělesa padajícího v gravitačním poli je obecně

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 . \quad (15.2)$$

t je čas, y_0 a v_0 jsou poloha a rychlost tělesa v čase $t = 0$, a g je tíhové zrychlení. Podmínka rozměrové homogenity říká, že jednotlivé veličiny nemohou existovat ve fyzikální rovnici nezávisle, ale pouze ve skupinách se stejným rozměrem. Vydělíme-li rovnici (15.2) jedním z členů, např. y_0 , změní se na bezrozměrový tvar

$$y/y_0 = 1 + v_0 t/y_0 + \frac{1}{2} g t^2/y_0 \quad (15.3)$$

s normalizovanými veličinami y/y_0 , $v_0 t/y_0$ and $g t^2/y_0$.

Téměř každou fyzikální rovnici lze přetransformovat na bezrozměrový tvar. Použití normovaných veličin má řadu výhod. Fyzikální rovnice, vyjádřené prostřednictvím bezrozměrových veličin jsou obecnější. Relativní posunutí či dráha, y/y_0 , nezávisí jednotlivě na v_0 , t a y_0 , ale na jejich určitých kombinacích, uvedených v rovnici (15.3). Bezrozměrové veličiny tedy umožňují kombinovat výsledky experimentů vykonaných se vzorky o různé počáteční rychlosti a poloze, kdy jedinou podmínkou je jejich správná kombinace. Pro formulování určité závislosti je pak možno využít více dat a širší rozmezí parametrů. Výsledky vyjádřené v bezrozměrové formě jsou také univerzálnější, použitelné pro celou třídu podobných objektů, s podobnou geometrií nebo fyzikálními vlastnostmi. Kromě toho, použití bezrozměrových veličin může ušetřit experimentální práci, protože obvykle platí:

Vztah N veličin, jejichž rozměry lze vyjádřit pomocí D základních rozměrů, je možno nahradit vztahem mezi

$$P = N - D \quad (15.4)$$

bezrozměrovými parametry.

Podle tohoto Buckinghamova pravidla je pro stanovení menšího počtu regresních konstant zapotřebí méně experimentů. Redukce experimentální práce je významná zejména pokud vyšetřovaný vztah obsahuje mnoho veličin a počet proměnných N je blízký počtu základních rozměrů D . To lze ilustrovat na předchozím příkladu padajícího tělesa. Rovnice (15.2) představuje vztah 5 veličin: y , y_0 , v_0 , g , a t ; tj. $N = 5$. Tyto veličiny lze vyjádřit pomocí dvou základních rozměrů: metr a sekunda;

tedy $D = 2$. Podle rovnice (15.4) by počet bezrozměrových parametrů měl být $P = N - D = 5 - 2 = 3$. A skutečně, rovnice (15.3) je vztahem pouze tří bezrozměrových parametrů: y/y_0 , $v_0 t/y_0$ and gt^2/y_0 . Ještě výhodnější bude bezrozměrové vyjádření v následujícím případě. Je-li třeba vyšetřit vliv šesti faktorů, z nichž každý bude na dvou úrovních (nízká a vysoká), potom počet nezbytných pokusů bude $2^6 = 64$. Pokud by počet bezrozměrových parametrů byl pouze 4, počet nutných pokusů klesne na $2^4 = 16$, tj. na jednu čtvrtinu!

Uvedené vývody platí i pro modelování počítačové! I jeho rozsah lze zmenšit, jestliže na začátku provedeme obecnou analýzu a formulujeme, co na čem závisí.

15.2 Podobnost

Použití bezrozměrových veličin je užitečné i při studiu chování reálných objektů pomocí modelů. Stavba velkého zařízení nebo konstrukce bývá provázána mnoha nejistotami, a možné ztráty v důsledku chybného návrhu by byly velmi vysoké. Proto se nejprve zpravidla vytvoří a testuje menší model. Pokud však má adekvátně odpovídat chování skutečného objektu, musí mezi nimi existovat podobnost. Existují různé druhy podobnosti, například:

Geometrická podobnost, tj. shodnost tvaru včetně odpovídajících úhlů a úměrnost odpovídajících rozměrů (tzv. měřítko). Platí následující relace:

$$\text{Rozměr modelu} = \text{Měřítko} \times \text{Rozměr skutečného objektu}$$

Například model budovy v měřítku 1:20 má dvacetkrát menší rozměry než skutečný dům.

Statická podobnost: deformace modelu při konstantním zatížení jsou ve stejném poměru jako odpovídající deformace objektu (díla).

Kinematická podobnost: existuje poměr časové úměrnosti mezi odpovídajícími jevy pro model a pro objekt.

Dynamická podobnost: síly, působící v odpovídajících časech a místech na modelu a objektu jsou ve stejném poměru.

Teorie podobnosti pracuje s takzvanými **podobnostními čísly**. Čtenáři, kteří absolvovali středoškolskou výuku fyziky, znají např. Reynoldsovo číslo (Re), které pomáhá posoudit, jestli proudění kapaliny je laminární nebo turbulentní. Podobnostní čísla jsou bezrozměrová; vlastně každá bezrozměrová veličina může sloužit jako podobnostní číslo.

Bezrozměrové proměnné lze vytvářet různými způsoby. Nejjednodušší je poměr určité veličiny a její charakteristické hodnoty, např. x/x_0 nebo $\Delta x/x_0$ pro vzdálenost nebo posunutí. V pružnosti a pevnosti je dobře známé poměrné prodloužení ($\varepsilon = \Delta L/L$), Poissonovo číslo μ (poměr relativního zkrácení v příčném směru k relativnímu prodloužení ve směru zatížení), nebo koeficient tření f , definovaný jako poměr síly, potřebné k posouvání tělesa po jiném tělese, a normálové síly, která obě tělesa přitlačuje k sobě. Jiným příkladem je bezrozměrová poloha bodu v tělese, například

$$\xi = (x - x_{\min}) / (x_{\max} - x_{\min}) ; \quad (15.5)$$

x_{\max} a x_{\min} představují krajní hodnoty souřadnic. Podobně lze vyjádřit i čas. Bezrozměrová teplota, $\theta = (T - T_{\infty}) / (T_0 - T_{\infty})$, se užívá pro univerzální popis přenosu tepla (T_0 je počáteční teplota a T_{∞} je konečná teplota). Postupy pro vytváření bezrozměrových parametrů lze najít například v [1 – 5].

Bezrozměrové musí být i argumenty v matematických funkcích typu \sin , \cos , \log nebo \exp . V opačném případě by jakákoliv změna jednotek (např. metry místo mm) změnila numerickou hodnotu výsledku. Bezrozměrové jsou také argumenty v rozděleních pravděpodobnosti. Například normální (Gaussovo) rozdělení užívá argument $\{1/2[(x - \mu)/\sigma]^2\}$, kde μ a σ jsou střední hodnota a směrodatná odchylka. Výraz v hranaté závorce ale není nic jiného, než standardizovaná (bezrozměrová) proměnná, která vyjadřuje vzdálenost x od střední hodnoty μ jako násobek směrodatné odchylky σ .

15.3 Další doporučení pro tvorbu bezrozměrových veličin

1) Tvar bezrozměrového parametru někdy neodpovídá našim záměrům nebo experimentálním možnostem. Všeobecně lze vytvářet nové parametry nebo podobnostní čísla jako součin nebo poměr původních bezrozměrových parametrů, či použít jejich převrácenou hodnotu nebo mocninu. Protože původní parametry byly bezrozměrové, jsou i takto vzniklé nové veličiny bezrozměrové. Někdy je vhodné zkusit vytvořit více bezrozměrných parametrů a vybrat z nich nejvhodnější, zejména takové, které mají určitý fyzikální smysl.

2) Vyskytuje-li se v úloze několik veličin se stejným rozměrem, lze vytvářet bezrozměrové parametry přímo jako jejich poměry a snížit tak počet argumentů. Ilustrovat to lze na příkladu průhybu nosníku y s obdélníkovým průřezem ($b \times h$) a

délkou L , zatíženého osamělou silou F . Modul pružnosti materiálu je E . Proměnné a jejich rozměry jsou: $y(\text{m})$, $w(\text{m})$, $h(\text{m})$, $L(\text{m})$, $F(\text{N})$, $E(\text{Nm}^{-2})$. To je 6 proměnných se dvěma rozměry. Počet bezrozměrových parametrů, potřebných pro popis problému, je $P = N - D = 6 - 2 = 4$. Okamžitě můžeme vytvořit tři parametry $\Pi_1 = y/h$, $\Pi_2 = b/h$ a $\Pi_3 = L/h$. Zbývají dvě veličiny (P a E), které musí být obsaženy ve čtvrtém parametru. S přihlédnutím k jejich rozměrům a k podmínce bezrozměrnosti musí být do Π_4 , zahrnuta také jedna geometrická veličina, například h nebo jeho mocnina. Tak dostaneme tento parametr jako $\Pi_4 = P/(Eh^2)$. Vyšetřovaný vztah lze tedy zapsat v následujícím bezrozměrovém tvaru:

$$y/h = f[P/(Eh^2), L/h, b/h]. \quad (15.6)$$

Vidíme, že pro zkoumání relativního průhybu y/h jsou důležité nikoliv jednotlivé veličiny L nebo P , atd., ale jejich poměry.

3) U některých úloh se vždy vyskytují bezrozměrové veličiny. Příklady jsou součinitel tření, Poissonovo číslo μ nebo úhel φ (rad). Tyto veličiny se automaticky stávají argumenty v bezrozměrových vztazích.

4) Vytváříme-li bezrozměrové parametry, snažíme se využít existující znalosti o vyšetřovaném problému nebo podobných úlohách. Víme například, že průhyb pružného nosníku je přímo úměrný zatížení a nepřímo úměrný modulu pružnosti. Někdy známe analytické řešení úlohy pro velmi malé nebo velmi vysoké hodnoty určité proměnné. I silně zjednodušené řešení může pomoci při hledání tvaru argumentů. Někdy je známo, že některé veličiny musí vystupovat v určité kombinaci. Tuto kombinaci pak můžeme uvažovat jako novou proměnnou, čímž se sníží celkový počet proměnných. Vyšetřujeme-li například tření mezi dvěma tělesy, je možno přitlačnou sílu F (N) a kontaktní plochu S (m^2) nahradit kontaktním tlakem $p = F/S$ (N/m^2).

5) Připravujeme-li určitý experiment, je nutné uvažovat všechny veličiny, které by mohly hrát roli. Jinak bychom mohli dostat nesprávné a zavádějící výsledky. Je méně nebezpečné zahrnout veličinu, jejíž důležitost je nejistá, a později se může ukázat, že ji lze pominout, než vynechat veličinu, která se později ukáže jako důležitá. Použití rozměrové analýzy někdy odhalí závažné nedostatky. Například objeví-li se určitý rozměr jenom u jedné veličiny, potom tato veličina z bezrozměrové rovnice vypadne a nebude zahrnuta do žádného bezrozměrového parametru. Je-li však zřejmě nezbytná pro popis vyšetřovaného jevu, je nutné

přidat ještě další veličinu, která bude mít stejný rozměr. Lze to ilustrovat na příkladu vyšetřování intenzity opotřebení brzdové destičky. Veličiny, které hrají roli, jsou: rychlost opotřebení w (m/s), rychlost vzájemného pohybu v (m/s) a tlak v kontaktní ploše p (N/m²). Bezrozměrový parametr lze hledat v obecném tvaru

$$\Pi = w^{x_1} v^{x_2} p^{x_3}. \quad (15.7)$$

Tento výraz lze přepsat prostřednictvím rozměrů jednotlivých veličin m , s , N jako

$$[m]^0 [s]^0 [N]^0 = [m \times s^{-1}]^{x_1} \times [m \times s^{-1}]^{x_2} \times [N \times m^{-2}]^{x_3}. \quad (15.8)$$

Levá strana odpovídá bezrozměrovému vyjádření. Z podmínky rovnosti exponentů u stejného základu (exponent u určité veličiny na levé straně musí být stejný jako exponent u stejné veličiny vpravo) vyplývá $N^0 = N^{x_3}$, takže $x_3 = 0$. Z experimentů je ale známo, že rychlost opotřebení závisí na kontaktním tlaku p , takže x_3 nemůže být rovno 0. Je tedy nutné přidat ještě nějakou další veličinu, která bude mít také rozměr Nm^{-2} . Může to být například tvrdost H (Nm⁻²), která charakterizuje odpor materiálu. Obecný tvar bezrozměrového parametru pak bude

$$\Pi = w^{x_1} v^{x_2} p^{x_3} H^{x_4} \quad (15.9)$$

Z tohoto výrazu můžeme snadno formulovat vhodný vztah bezrozměrových parametrů jako $w/v = f(p/H)$, a provést řadu experimentů pro nalezení vhodného tvaru funkce f .

15.4 Omezení principu podobnosti

Při dimenzování součástí vycházíme z materiálových vlastností, které byly zjištěny experimentálně na standardizovaných anebo speciálně připravených vzorcích. Obecně platí, že testovaný vzorek musí být reprezentativní. To znamená, že vlastnosti zjištěné na něm by měly být stejné jako u součásti, kterou chceme vyrobit. To souvisí i s rozměry. Vzorek může být homogenní nebo nehomogenní, kromě jiného v závislosti na jeho rozměrech. Například beton obsahuje cement, písek, šterk a póry. Zrna písku mají různou velikost, a ještě větší rozdíly existují u velikostí šterku. Chceme-li například posoudit jakost betonu již existující stavby, zpravidla z ní odebereme vzorek, odříznutím nebo pomocí trepanačního vrtáku. Tento vzorek musí být dostatečně velký, aby v něm byly zastoupeny všechny strukturální složky. Jeho průměr nebo tloušťka tedy musí být o dost větší, než například největší očekávaná velikost šterku. Jinak nezískáme modul pružnosti výsledného betonu, ale hodnotu, blížíící se více nebo méně k modulu pružnosti

šterku. Podobná situace je u kovových materiálů s polykrystalickou strukturou. Jednotlivá zrna jsou anizotropní, takže v průřezu zkušební tyčinky pro tahovou zkoušku jich musí být tolik, abychom dostali vlastnost zprůměrovanou, neovlivněnou různou orientací zrn. Jiný příklad: Je dobře známo, že pevnost skleněných vláken je mnohem vyšší než pevnost masivního skla, kromě jiného právě proto, že malý průměr vlákna omezuje maximální velikost vad, které jsou odpovědné za nízkou pevnost.

Tam, kde může dojít k porušení součásti s trhlinou, nás zajímá odolnost materiálu vůči růstu trhlin. Důležitou materiálovou charakteristikou je tzv. lomová houževnatost, což je hodnota faktoru intenzity napětí K_I , při které přechází šíření trhliny do rychlé, nestabilní fáze. Vysoká napětí před vrcholem trhliny způsobují u kovových materiálů plastické tečení v malé oblasti v okolí tohoto vrcholu. A zde se může projevit i rozdíl mezi rovinnou napjatostí na okrajích vzorku a rovinnou deformací v oblasti vzdálené od povrchu. Poloměr oblasti s plastickým tečením je v místech s rovinnou napjatostí mnohem větší než v místech s rovinnou deformací (obr. 8.7). Chceme-li získat hodnotu standardní lomové houževnatosti K_{IC} , musí zkušební vzorek mít určitou minimální tloušťku, která bývá předepsána příslušnou normou. U vzorků menší tloušťky naměříme vyšší hodnoty, a použití těchto hodnot pro konstrukce s větší tloušťkou stěny by mohlo být nebezpečné, neboť trhlina by začala růst o dost dříve, než jsme předpokládali. Při použití hodnot z materiálových listů se proto musíme vždy ujistit o podmínkách pro jejich použití.

Princip podobnosti, umožňující přenos naměřených hodnot ze vzorku na dílo, platí jenom za určitých podmínek, a mimo ně ztrácí svoji platnost. Příkladem je přechod od deformací pružných k plastickým u kovových materiálů. Jsou-li napětí nižší než mez kluzu, platí přímá úměrnost mezi napětími a přetvořeními, a lze užívat princip superpozice, kdy deformace a napětí od několika zatížení působících současně počítáme jako součet deformací nebo napětí od jednotlivých zatížení. Je-li ale někde překročena mez kluzu, je nutno vycházet ze zákonů pružnoplastického deformování. Ty jsou ale nelineární, takže situace musí být řešena pro různá zatížení individuálně. Jiným případem je závislost pevnosti součástí z křehkých materiálů na velikosti zatížené plochy nebo objemu. Křehký lom obvykle začne na nejslabším místě, s nějakou vadou. Menší velikost zatížené oblasti znamená menší pravděpodobnost výskytu větší vady. Menší defekt může sloužit jako východisko poruchy pouze při vyšším napětí. Velmi malé předměty jsou proto pevnější.

Podobně závisí na velikosti i mez únavy kovových součástí. Ve vzorcích pro výpočet meze únavy součásti se obvykle užívá součinitel, který zohledňuje její velikost.

Někdy se ve vyšetřovaném problému mohou současně vyskytnout veličiny, které závisí na různých mocninách jiné veličiny. Například energie, spotřebovávaná při lomu, je úměrná lomové ploše (m^2), zatímco energie napjatosti akumulovaná v tělese je úměrná jeho objemu, a tedy m^3 . Chceme-li například konstruovat zařízení pro tlumení nárazů a zkoumat jeho chování experimentálně na modelu o jiných rozměrech, musíme uvážit, co je hlavním mechanismem disipace energie, resp. jsou-li obě složky energií stejně důležité, a popřípadě jednu z nich zanedbat.

Procesy při rychlém plastickém deformování materiálu někdy závisí na rychlosti přetváření (strain-rate). Chceme-li zkoumat účinky rázového zatížení na modelu, který má menší rozměry (L_m) než skutečný objekt (L_p), nesmíme zapomenout, že pro dosažení stejné rychlosti přetváření by měla být rozdílná i rychlost nárazu v_0 , aby platilo

$$v_{0m}/v_{0p} = L_m/L_p ; \quad (15.10)$$

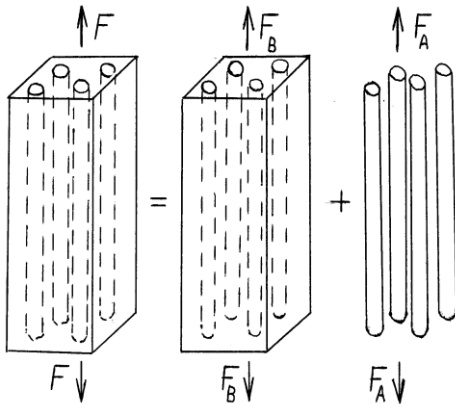
indexy m a p označují model a prototyp.

Je také nutno mít na paměti, že někdy se vyšetřovaná veličina mění se změnami určitého parametru poměrně pomalu, ale při dosažení jeho jisté úrovně se může změnit velmi rychle. Vztah, popisující jisté chování nebo proces, často platí jenom v určitém rozmezí parametrů. Pokud je příslušný proces popsán prostřednictvím bezrozměrových veličin, jsou podmínky pro přechod z jednoho režimu do druhého charakterizovány tzv. **kritickou hodnotou** takovéto veličiny. Známým případem je přechod od laminárního proudění k turbulentnímu při dosažení kritické hodnoty Reynoldsova čísla. Je tedy nutno vždy nejprve uvažovat všechny možné vlivy, a počet faktorů snížit až po důkladné analýze; popřípadě stanovit, pro jaké rozmezí parametrů bude náš model platit.

Příklad.

Vyjádření v bezrozměrovém tvaru umožňuje pochopit základní souvislosti a trendy, a může přispět k hospodárnějšímu návrhu. Budeme to ilustrovat na příkladu železobetonového sloupku zatíženého tahovou silou (obr. 15.1). Tuto sílu přenáší armování (složka a) a beton (složka b), takže platí

$$F = F_a + F_b \quad (15.11)$$



Obr. 15.1. Železobetonový sloupek – schéma působení sil.

Obě složky se budou deformovat jako jeden celek, takže pro změnu původní délky l platí $\Delta l_a = \Delta l_b$. Vyjádříme-li v této rovnici prodloužení podle Hookeova zákona, dostaneme

$$\frac{F_a l}{E_a S_a} = \frac{F_b l}{E_b S_b} . \quad (15.12)$$

S přihlédnutím k rovnici (15.11) obdržíme po řadě úpravě vztah pro relativní velikost síly ve složce a a b :

$$\frac{F_a}{F} = 1 / \left(1 + \frac{E_b S_b}{E_a S_a} \right); \quad \frac{F_b}{F} = 1 / \left(1 + \frac{E_a S_a}{E_b S_b} \right); \quad (15.13)$$

rovnici vpravo jsme dostali z levé rovnice záměnou indexů a , b . Vztahy (15.11) – (15.13) platí nejen pro železobeton, ale pro jakýkoliv dvousložkový díl, včetně vláknových kompozitů.

Vidíme, že relativní velikosti sil v jednotlivých složkách nezávisí na konkrétních hodnotách modulu pružnosti nebo konkrétní velikosti průřezu, ale pouze na poměru modulů pružnosti a na poměru průřezů. Takovéto vyjádření je výhodné zejména při návrhu, kdy ještě neznáme konečné rozměry průřezů a popřípadě můžeme vybírat z různých materiálů. Tuto úlohu lze optimalizovat: jsou známy například kilogramové ceny jednotlivých materiálů, a hledáme takové uspořádání konstrukčního dílu, kterému bude odpovídat nejnižší cena. Skutečné velikosti průřezu se potom stanoví s ohledem na konkrétní zatížení F .

15.5 Příklady bezrozměrových veličin

Materiálové vlastnosti

$E_1/E_2, H_1/H_2$	poměr modulů pružnosti nebo tvrdostí; indexy značí součásti nebo fáze,
$E(x)/E_0, H(x)/H_0$	veličiny viz výše; index 0 značí charakteristickou hodnotu,
$H/Y, E/Y, E/H$	poměr tvrdosti a meze kluzu nebo modulu pružnosti,
$\sigma/\sigma_Y, \sigma/\sigma_u$	poměr napětí k mezi kluzu σ_Y nebo pevnosti σ_u

Geometrie

x/d	x – vzdálenost, d – charakteristický rozměr (kontaktní poloměr, délka vzorku, šířka, výška, tloušťka povlaku, rozměr plastické zóny...),
Δ/L	poměrné posunutí nebo prodloužení, L – základní délka,
$h/R, h/t_c$	poměr vniknutí indentoru k tloušťce zkoumané vrstvy

Síly a napětí

F/F_0	poměr zatížení F a charakteristické síly,
σ/σ_m	poměr napětí σ k jmenovitému či střednímu napětí σ_m .

Čas

t/t_0	t_0 – charakteristický čas (nárůstu zatížení, relaxační čas...).
---------	--------------------------------------------------------------------

Literatura ke kapitole 15.

1. Menčík, J.: Úvod do experimentální analýzy. Univerzita Pardubice, Pardubice, 2017. Volně dostupné na: <http://hdl.handle.net/10195/66960>.
2. Kožešník, J.: Teorie podobnosti a modelování.) Academia, Praha, 1983. 216 s.
3. Zlokarnik, M.: Scale-up in Chemical Engineering. 2nd Edition, Wiley, 2006, 296 p.
4. Szirtes, T.: Applied Dimensional Analysis and Modeling, McGraw-Hill, New York, 1997, 2nd Ed. 2007. 856 p.
5. Cheng, Y.T., Cheng, C.M.: Scaling, dimensional analysis, and indentation measurements, *Mat. Sci. Eng. R44* (2004) 91 – 149.

Rejstřík (číslo v závorce značí kapitolu)

analýza rozměrová	182 (15)
bezrozměrový parametr	183, 185 (15)
bimateriál, Dundursovy parametry	124 (11)
creep	100 (10)
cyklická deformační křivka	75 (7)
cyklické změkčení a zpevnění	75 (7)
činitel vrubový β	79 (7)
číslo podobnosti	184 (15)
deformace pružné (elastické)	18 (1)
deformace velké, průhyb	157 (13)
deformování pružnoplastické	120 (11)
délka vlákna kritická (pro přenos sil)	145 (12)
diagram pracovní materiálu	36 (4), 156 (13)
diagram pracovní tělesa	41 (4)
doba relaxační, retardační	102, 104 (10)
elastomery	153 (13)
energie napjatosti	20 (1)
faktor intenzity napětí	82, 84 (8), 125 (11)
Haighův diagram	78 (7)
hlavní napětí, hlavní směry	12, 16 (1), 159 (13)
homogenita rozměrů	182 (15)
Hookeův zákon	18 (1), 148, 149 (12)
houževnatost lomová	83, 86 (8)
hustota energie napjatosti	21 (1), 155 (13)
hypotézy porušení a plastického deformování	31, 32, 33 (3)
hystereze	111 (10)
intenzita napětí, přetvoření	51 (4)
invariant protažení	154 (13)
kloub plastický	46 (4)
kompozity, mechanika	136 (12)
kompozity ortotropní	149 (12)
kompozity s dlouhými (nebo krátkými) vlákny	137, 138 (12)

kompozity, pevnost	137, 138, 139, 140 (12)
kompozity, porušení	147 (12)
kotouč konstantních napětí	166, 167 (14)
kritérium porušení a plastického tečení	31, 32, 33 (3), 51 (4)
kružnice Mohrova	10, 12, 14, 19 (1)
křivka únavy univerzální	77 (7)
křivka Wöhlerova, $S - N$	74, 77 (7)
křivky Baudovy (bez koncentrace napětí)	169 (14)
kumulace poškození	79 (7)
lamina, lamináty	150 (12)
lom křehký	31 (3)
lom únavový	93 (9)
lomová mechanika	81 (8), 124 (11)
lomy, analýza	93, 95 (9)
Manson – Coffin (křivka)	77 (7)
materiál elastický (hookeovský)	98 (10)
materiál pružnoplastický	37 (4)
materiál viskózní (newtonský)	99 (10)
materiály hyperelastické	153 (13)
materiály kompozitní (vláknové, částicové)	136 (12)
materiály ortotropní	148 (12)
materiály viskoelastické, odezva	107, 107 (10)
matice tuhosti, matice přetvoření	25 (2)
membrána, rovnice Laplaceova	159 (13)
metoda adaptivního růstu	169 (14)
metoda konečných prvků (MKP), software	23, 26 (2)
metoda odumírání (SKO)	170 (14)
metoda Ritzova	24 (2)
metody analytické a numerické	26 (2)
mez kluzu, mez pevnosti	19 (1)
mez únavy	74, 77 (7)
mezní stav	50 (4)
model materiálový: Mooney-Rivlin	155 (13)
model materiálový: neo-hookeovský	155 (13)
modul: komplexní, okamžitý, ztrátový	110 (10)
modul průřezu plastický	46 (4)

modul pružnosti (v tahu, ve smyku)	18 (1)
moment mezní	45 (4)
myšlený řez, metoda	9 (1)
napětí (normálové, smykové)	9 (1)
napětí ekvivalentní (reduované)	31, 32, 33 (2)
napětí hlavní	12, 16 (1)
napětí kontaktní	70 (6)
napětí membránové	116 (11)
napětí před trhlinou	82, 87, 88 (8), 124 (11)
napětí teplotní	54 (5)
napětí v součásti s povlakem	113 – 116 (11)
napětí zbytkové (reziduální)	47 (4)
napětí, koncentrace	64, 65 (6)
napjatost rovinná, trojosá (prostorová)	10, 16 (1)
odolnost vůči šíření trhlin	84 (7)
ohyb pružný a pružnoplastický	44 (4)
optimalizace	161, 164, 167, 168 (14)
Palmgren – Miner (hypotéza)	79 (7)
parametr bezrozměrový	183 (15)
plasticita	35 (4)
plastická zóna před vrcholem trhliny	82, 87, 91 (8)
pletenina (textilie)	157 (13)
podíl vláken v kompozitu	137 (12)
podobnost	184 (15)
Poissonovo číslo	18 (1)
poměrné prodloužení	17 (1)
poškození poměrné D	79 (7)
povlaky, měření mechanických vlastností	134 (11)
práce deformační	2, 21 (1), 66 (6)
pracovní (návrhový) bod	172 (14)
pravidlo Buckinghamovo	183 (15)
princip Lagrangeův	23 (2)
protážení, poměr protážení	154 (13)
přenosová délka zatížení	145 (12)
přetvoření	17, 19 (1)
relaxace napětí, sil	102 (10)

reziduální (zbytkové) síly, napětí, deformace	43 (4)
robustní návrh (robust design)	172 (14)
rovnice membrány (Laplaceova)	118 (11)
rozdělení náhodné veličiny, Weibullovo	146 (12)
rozevírání trhliny	83 (8)
rozptyl vlastností	146, 147 (12)
rychlost uvolňování energie	85 (8)
smyková napětí sdružená	11 (1)
součást konstantních napětí (stálé pevnosti)	161, 162 (14)
součásti bez koncentrace napětí	169, 170 (14)
součinitel bezpečnosti	34 (3)
těleso Burgersovo	106 (10)
těleso Kelvinovo-Voigtovo	103 (10)
těleso Maxwellovo	100 (10)
těleso SLS (Standard Linear Solid)	105, 106 (10)
teorie podobnosti	184 (15)
trhlina, šíření	69 (6)
trhlina únavová, vznik	76 (7)
trhlina v povlaku, šíření	131, 132 (11)
trhlina v rozhraní, šíření	126, 127, 129 (11)
tuhost	24 (2)
tvrzení skla	59 (5)
únavá (vysokocyklová a nízkocyklová)	76, 77 (7)
únavová křivka univerzální, parametry	77, 78 (7)
únavová trhlina, vznik, rychlost šíření	76 (7)
veličina bezrozměrová	191 (15)
viskoelastická	99 (10)
vlákna textilní	157 (13)
vruby	65 (6), 169 (14)
vzorek Compact Tension (CT)	84 (8)
vzorek: sendvičový, UCSB	134 (11)
zatížení mezní	41 (4)
zkos γ	17 (1)
zpevňování	58, 61, 62 (5)

Název: Aplikovaná mechanika materiálů
Autor: prof. Ing. Jaroslav Menčík, CSc.
Vydavatel: Univerzita Pardubice
Do tisku: červen 2019
Stran: 196
Náklad: 30
Vydání: první
Tisk: Polygrafické středisko Univerzity Pardubice

Tato publikace neprošla jazykovou korekturou.

ISBN 978-80-7560-226-8 (tisk)

ISBN 978-80-7560-227-5 (pdf)

Kniha je volně přístupná na <https://hdl.handle.net/10195/72947> nebo po zadání názvu do vyhledavače Google.

ISBN 978-80-7560-226-8



9 788075 602268