

Univerzita Pardubice

Fakulta chemicko-technologická

Základy teorie rázových a detonačních vln

Učební text

HEL Karel



Pardubice 2019



ISBN 978-80-7560-201-5 (pdf)

© Ing. Karel Hel, CSc. 1992, 2019

Obsah	str.
1. RÁZOVÉ VLNY V MECHANICE KONTINUA	5
1.1 Úvod	5
1.1.1 Vymezení pojmu vlny	5
1.1.2 Geometrické a kinematické podmínky kompatibility v čele vlny	8
1.2 Pohybové rovnice	12
1.3 Deformace profilu vlny při jejím šíření	18
1.4 Základní vlastnosti rázových vln	31
1.5 Změny intenzity rázové vlny při jejím šíření	43
1.6 Fokuzace rázových vln	50
1.7 Rázové vlny v pevných látkách	54
1.8 Fázové přechody v rázových vlnách	74
1.9 Fyzikální efekty vznikající při působení rázových vln na kondenzované látky	77
2. ŠÍŘENÍ RÁZOVÝCH VLN V TERMODYNAMICKY NEROVNOVÁŽ- NÝCH PROSTŘEDÍCH	80
2.1 Pohybové rovnice nerovnovážného plynu	80
2.2 Šíření rázových vln v nerovnovážných prostředích	86
2.3 Zvláštnosti šíření rázových vln v plazmě	87
3. VZÁJEMNÉ PŮSOBENÍ RÁZOVÝCH VLN	88
3.1 Vzájemné působení rovinné rázové vlny se slabou vlnou	88
3.1.1 Odraz rovinné akustické vlny od rázové vlny	92
3.1.2 Dopad rovinné rázové vlny na nehomogenní rozhraní plynu	96
3.1.3 Vstříčná interakce rázové a akustické vlny	99

3.1.4 Rázová vlna dohání akustickou vlnu	101
3.1.5 Interakce rázové vlny s akustickou v termodynamicky rovnovážném plynu	103
3.1.6 Prostorová interakce rázové rovinné vlny se slabými vlnami	106
3.2 Jednorozměrné interakce rázových vln	110
3.2.1 Rozpad diskontinuity	110
3.2.2 Vstříčná interakce rázových vln	112
3.2.3 Splynutí dvou rázových vln šířících se v jednom směru	115
3.2.3.1 Rázová trubice	118
3.2.4. Lom rázové vlny na kontaktním povrchu	124
3.2.5 Normální odraz rázové vlny od rovinné stěny	125
3.3 Interakce šikmých rázových vln	130
3.4 Odraz rázové vlny od pevné stěny	133
3.4.1 Odraz rovinné rázové vlny od rovinné stěny	133
3.4.2 Odraz rovinné rázové vlny od hladkého tělesa libovolného tvaru	137
3.4.3 Šikmé rázové vlny a rázová polára	140
3.4.4 Prandtl-Meyerovy toky	147
4. STABILITA RÁZOVÝCH VLN	153
4.1 Stabilita rázových vln v rovnovážném a nerovnovážném plynu	153
4.2 Rázové vlny v prostředí s nehomogenitami	156
4.3 Relativistické rázové vlny	157
5. DETONAČNÍ VLNY	161
5.1 Úvod	161
5.2 Hydrodynamická teorie detonace	162

5.3 Detonace plynů a kondenzovaných trhavin	177
5.4 Projevy reálné detonace ve výbušninách	203
5.5 Detonační vlny vyvolané světlem	222
5.6 Termojaderná detonační vlna	240
5.7 Rázové vlny vyvolané detonací	248
5.8 Generátory detonačních vln	264
6. PŘÍLOHA	282
7. LITERATURA	285

RÁZOVÉ VLNY V MECHANICE KONTINUA

1.1 ÚVOD

1.1.1 Vymezení pojmu vlny

Vlnou v mechanice kontinua ^{nazýváme} vzruch, šířící se prostředím. V plynové dynamice studujeme vlny, které se vyznačují čelem jehož tloušťka je malá. Takové vymezení není zajištěné obecné. A nebo můžeme šíření vln spojovat s pohybem povrchu nespojitosti - čela vlny, která rozděluje vybuzenou část prostředí v pohybu od prostředí v klidu. Jestliže povrch nespojitosti zůstává v relativním klidu vůči prostředí, nazýváme jej kontaktním povrchem, nebo tangenciální nespojitostí. Při šíření takové nespojitosti se mění pouze hustota.

Jde-li v čele vlny o nespojitost, která může být popsána funkcí stavu prostředí, pak hovoříme o nespojitosti nulového řádu. Má-li tato funkce derivaci $(n - 1)$ -tého řádu, pak jde o nespojitost n -tého řádu.

V přírodě existuje několik typů vln:

- a/ vlny zrychlení, kterými se šíří nespojitosti derivací stavových veličin a které mohou představovat:
- kompresní vlny zrychlení, které se vyznačují zvýšeným tlakem. Tyto vlny nejsou obvykle stabilní a přecházejí ve vlny rázové.
- expanzní vlny zrychlení, které se při šíření vyznačují sníženým tlakem, zachovávají charakter vln zrychlení i když se jejich tvar mění.

jednoduché, nebo prosté vlny zrychlení, jsou takové na jejichž jedné straně se nachází oblast stálého toku s konstantními stavovými veličinami.

akustické vlny, jsou vlny, ve kterých změna stavových veličin při průchodu vlnou je velmi malá.

b/ vlny nespojitosti nebo rázové vlny v širším smyslu jsou vlny, kterými se šíří prostředím s nespojitostmi. Rozeznáváme:

Vlny kontaktní nebo tangenciální, kterými se šíří nespojitosti hustoty, ale rychlost prostředí i tlak na obou stranách vlny zůstávají stejné.

vlny rázové v užším smyslu jsou takové, při jejichž průchodu dochází k nespojitému skoku rychlosti a ostatních stavových veličin.

Rázové vlny dělíme na:

kompresní rázové vlny, které jsou ve stlačitelných látkách stabilní a nemění se.

rázové vlny expanzní, které se šíří v ideálních stlačitelných látkách a rychle přecházejí ve vlny zrychlení.

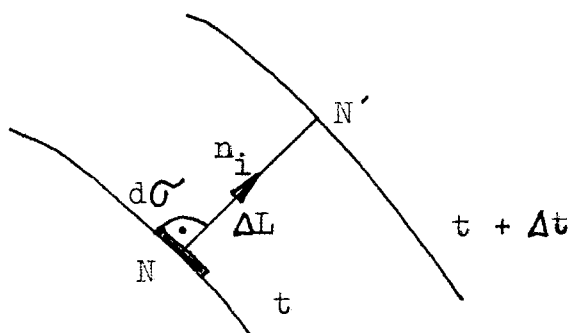
Vyskytují se i v pevných látkách.

Většina skutečných vln je složena z výše definovaných vln. Tak např. výbuchová vlna se skládá z rázové kompresní vlny, následované expanzní vlnou zrychlení a detonační vlna, která probíhá pouze v prostředí, které je schopné po zahřátí kompresní vlnou na jejím čele, následované zvláštním typem expanzní vlny ve které probíhá reakce spojená s uvolněním energie v tzv. reakční zóně a za ní pokračuje expanze expanzní vlnou zrychlení.

V našich uvahách budeme užívat Eulerovy proměnné x^1, x^2, x^3 a Lagrangeovy proměnné a^1, a^2, a^3 , které charakterizují souřadnice částic v prostoru. Horními indexy označíme kontravariantní veličiny a spodními indexy označíme kovariantní veličiny, přičemž $x^i = x_i$.

Označíme klidový stav indexem 1 a vybuzený stav indexem 2. Pomocí ν_1^i / nebo bez indexu ν^i / označíme kontravariantní složky jednotkové normály v metrice prostoru a^1, a^2, a^3 před vlnou.

Zavedeme pojem rychlosti šíření vlny U . Nechť v určitém okamžiku t je splněna rovnost $x^i = a_i$. V prostoru a^1, a^2, a^3 vyznačíme dvě polohy vlny v čase t a v čase $t + \Delta t$ /Obr. 1.1/



Obr. 1.1 Postupné polohy čela vlny v čase t a $t + \Delta t$.

Tyto polohy zaujímají částice v čase t a $t + \Delta t$ při průchodu čela rázové vlny. Na čele vlny jejíž poloha odpovídá času t , označíme bod N a vedeme z něj normálu, která protíná čelo vlny v čase $t + \Delta t$ v bodě N' . Rychlost vlny je rovna

$$U = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta t},$$

kde ΔL je délka úseku NN' . Čáry, které vedou k čelu vlny

jsou ^úprímek línie a jejich diferenciální rovnice je

$$\frac{da^i}{dt} = U v^i,$$

kde $a^i/u^1, u^2, t$ jsou souřadnice čela vlny. u^1 a u^2 jsou křivočaré souřadnice na samotném čele. Vždy je možné vybrat takové proměnné u^1, u^2 tak, aby jejich hodnota zůstala podél líní konstantní.

1.1.2 Geometrické a kinematické podmínky kompatibility v čele vlny

Je-li rychlost šíření vlny spojitá a diferencovatelná funkce podle času a souřadnic na jejím čele, pak veličiny před a za vlnou a jejich derivace vyhovují určitým vztahům tzv. podmínkám kompatibility.

Geometrické podmínky kompatibility vyplývají ze samotného faktu existence hladkého povrchu nespojitosti. Kinematické podmínky kompatibility jsou spojeny s neměnným pohybem čela vlny. Podmínky kompatibility mohou být narušeny pouze v jednotlivých časových okamžicích. Jestliže nejsou tyto podmínky zaručeny, pak se prvotní nespojitost rozpadne na dvě nebo více nespojitostí.

Podmínky kompatibility n -tého řádu nazveme vztahy spojující skokové změny derivací n -tého řádu, na čele vlny.

Odvodíme geometrické podmínky kompatibility prvního řádu. Necht' z je libovolná veličina charakterizující stav prostředí. Derivace této veličiny podél čela vlny v obou směrech je

$$\frac{\partial z_1}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial z_1}{\partial a^i} \cdot \frac{\partial a^i}{\partial u^\alpha}, \quad \frac{\partial z_2}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial z_2}{\partial a^i} \cdot \frac{\partial a^i}{\partial u^\alpha},$$

$$a^i = x^i.$$

Eliminujeme-li z druhé rovnosti první, dostaneme

$$\frac{\partial |z|}{\partial u^\alpha} = \left| \frac{\partial z}{\partial a^i} \right| \frac{\partial a^i}{\partial u^\alpha}, \quad |z| = z_2 - z_1. \quad /1.1/$$

Vynásobíme-li obě části /1.1/ výrazem $g^{\alpha\beta} \partial a^j / \partial a^\beta$, kde $g^{\alpha\beta}$ je složka metrického tenzoru na čele vlny:

$$g^{\alpha\beta} \partial z / \partial u^\alpha \cdot \partial a^j / \partial u^\beta = \left[\partial z / \partial a^i \right] g^{\alpha\beta} \partial a^i / \partial u^\alpha \cdot \partial a^j / \partial u^\beta.$$

Použijeme-li rovnost ^{36, 187}

$$g^{\alpha\beta} \partial a^i / \partial u^\alpha \cdot \partial a^j / \partial u^\beta = \delta_{ij} - v^i v^j, \quad a^i = x^i,$$

kde δ_{ij} je Kröneckervův symbol. S použitím /1.2/

/1.2/ rovnici /1.1/ přepíšeme do tvaru

$$\left| \partial z / \partial a^k \right| = B v_k + g^{\alpha\beta} \partial z / \partial u^\alpha \cdot \partial a^k / \partial u^\beta,$$

$$B = \left| \partial z / \partial a^i \right| v^i. \quad /1.3/$$

Výraz /1.3/ představuje geometrickou podmínku kompatibility

1. řádu. Jestliže je veličina z spojitá při průchodu

čelem vlny, pak se předcházející výraz zjednoduší

$$\left| \partial z / \partial a^k \right| = B v_k.$$

Přejděme nyní ke kinematickým podmínkám kompatibility

Zapišeme derivaci z podle času v obou směrech čela

$$\delta z_1 / \delta t = \partial z_1 / \partial t + U v^i \partial z / \partial a^i,$$

$$\delta z_2 / \delta t = - \partial z_2 / \partial t + U v^i \partial z_2 / \partial a^i.$$

Symbol $\delta / \delta t$ označuje změnu veličiny podél paprsku.

Vyloučíme-li z druhé rovnosti první dostaneme

$$\left| \partial z / \partial t \right| + U \cdot B = \delta [z] / \delta t. \quad /1.4/$$

Rovnost /1.4/ je kinematická podmínka kompatibility

1.řádu. Dále odvodíme kinematickou podmínku kompatibility
2. řádu. Zpočátku uvažujme derivaci podle času projekce
vnější jednotkové normály. Po provedení dostaneme

$$\nu_i \nu^i = g_{ij} \nu^i \nu^j = 0.$$

g_{ij} jsou komponenty metrického tenzoru prostoru $a^1 a^2 a^3$
v klidu před vlnou. Diferencováním podle času máme

$$\nu_i \delta \nu^i / \delta t = - 1/2 \nu^i \nu^j \delta g_{ij} / \delta t.$$

Při $x_1^i = a^i$, $\partial x_1^i / \partial t \neq 0$ je veličina

$$\delta g_{ij} / \delta t = \partial^2 x_1^j / \partial a^i \partial t + \mathcal{L}^2 x^i / \partial a^j \partial t,$$

odkud

$$\nu_i \delta \nu^i / \delta t = - \nu^i \nu^j \partial^2 x_1^j / \partial a^i \partial t = - \partial v_1^n / \partial n,$$

$$\dot{\nu}^i = \partial x^i / \partial t. \quad /1.5/$$

Studujme derivaci

$$\begin{aligned} \delta B / \delta t &= \delta / \delta t (|\partial z / \partial a^i| \nu^i) = \nu^i \delta / \delta t |\partial z / \partial a^i| + \\ &+ |\partial z / \partial a^i| \delta \nu^i / \delta t. \end{aligned} \quad /1.6/$$

První člen v pravé části je roven

$$\begin{aligned} \nu^i \delta / \delta t |\partial z / \partial a^i| &= \nu^i |\partial^2 z / \partial a^i \partial t| + CU, \\ C &= |\partial^2 z / \partial a^i \partial a^j| \nu^i \nu^j. \end{aligned} \quad /1.7/$$

S použitím /1.3/, /1.5/, /1.7/ a předpokladu o spojitosti
z při průchodu čelem vlny dostaneme z /1.6/

$$\dot{\nu}^i |\partial^2 z / \partial a^i \partial t| = - CU + \delta B / \delta t + B \partial v_1^n / \partial n. \quad /1.8/$$

Po záměně $z \rightarrow \partial z / \partial t$ v kinematické podmínce kompatibility

1.řádu

$$\partial^2 z / \partial t^2 = - U \nu^i [\partial^2 z / \partial a^i \partial t] + \delta / \delta t [\partial z / \partial t],$$

S použitím /1.8/ dostaneme kinematickou podmínku kompatibility 2.řádu ve tvaru

$$[\partial^2 z / \partial t^2] = cU^2 - 2U \delta B / \delta t - B(\delta U / \delta t + U \partial v_1^n / \partial n),$$

$$[z] = 0 \quad /1.9/$$

Vztah /1.9/ se používá k odvození dynamických podmínek kompatibility.

1.2 POHYBOVÉ ROVNICE

Při popisu stavu kontinua lze postupovat dvěma způsoby: Eulerovým a Lagrangeovým.

První způsob ^{Eulerův} spočívá v tom, že se zavede systém souřadnic nezávislý na prostředí a sleduje se chování veličin charakterizujících stav prostředí ve fixovaném prostoru v závislosti na čase. Určitá jeho nevýhoda je v tom, že nelze přímo zjistit, jak se v čase t_2 chová veličina, která byla v čase t_1 v daném bodě.

Druhý způsob ^{Lagrangeův} udává v libovolné době t stav fixované veličiny v prostředí. Je názornější než Eulerův popis, ale matematický aparát je složitější.

Eulerovy proměnné budeme označovat x^i , Lagrangeovy proměnné a^i .

Diferenciální rovnice pohybu kontinua zahrnují zákony zachování hmoty, impulsu a energie.

Uvažujeme-li objem V ohraničený uzavřeným povrchem σ , který se přemísťuje spolu s prostředím, zákon zachování hmoty píšeme ve tvaru

$$d/dt \int_V \rho dV = 0.$$

Meze oblasti integrace jsou proměnné, proto derivace integrálu je rovna

$$d/dt \int_V \rho dV = \int_V \partial \rho / \partial t dV + \oint_{\sigma} \rho v_i n_i d\sigma,$$

zde v_i je rychlost prostředí n_i je projekce vnější normály k rozhraní. / Obr. 1.1/

Použijeme-li Gauss - Ostrogradského teorem

$$\oint_{\sigma} \rho v_i n_i d\sigma = \int_V [\partial \rho v_i / \partial x_i] dV,$$

dostaneme

$$\int_V \left\{ \partial \rho / \partial t + \partial \rho v_i / \partial x_i \right\} dV = 0,$$

nebo v diferenciální formě

$$\partial \rho / \partial t + \partial \rho v_i / \partial x_i = 0. \quad /1.10/$$

Zavedeme substantiální derivaci podle času

$$d^*/dt = \partial / \partial t + v_i \partial / \partial x_i,$$

jejímž fyzikálním smyslem je změna veličiny s pohledu pozorovatele vůči relativně nepohyblivému prostředí. Rovnici kontinuity /1.10/ zapisujeme i ve formě

$$1/\rho \cdot d\rho/dt + \partial v_i / \partial x_i = 0.$$

Nechť z je veličina, která charakterizuje stav prostředí. Derivace integrálu odpovídající objemu V a veličině ρz je

$$d/dt \int_V \rho z dV = \int_V \left(\partial \rho z / \partial t + \partial \rho z v_i / \partial x_i \right) dV$$

Transformujeme-li tento výraz s pomocí rovnice kontinuity máme

$$\begin{aligned} \partial \rho z / \partial t + \partial \rho z v_i / \partial x_i &= z \left(\partial \rho / \partial t + \partial \rho v_i / \partial x_i \right) + \\ &+ \rho \left(\partial z / \partial t + v_i \partial z / \partial x_i \right) = \rho dz/dt, \end{aligned}$$

a dále

$$d/dt \int_V \rho z dV = \int_V \rho dz/dt dV.$$

Pro objem V zapíšeme zákon změny impulsu ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \rho F_i dV + \oint_{\sigma} P_{ij} n_j d\sigma, \quad /1.11/$$

kde F_i je objemová hustota hmotových sil, P_{ij} je tenzor napětí povrchových sil.

Transformujeme-li povrchový integrál na objemový a zapíšeme-li /1.11/ v diferenciální formě nalezneme

$$dv_i/dt = \rho F_i + \partial P_{ij} / \partial x_j, \quad /1.12/$$

nebo rozepsáním výrazu pro totální derivaci

$$\partial v_i / \partial t + v_i \partial v_i / \partial x_j = F_i + 1/\rho \partial P_{ij} / \partial x_j.$$

Nyní zapíšeme zákon zachování energie pro kontinuum.

Celková energie je rovna součtu vnitřní a kinetické energie. Změna celkové energie objemu prostředí za jednotku času je rovna velikosti hmotových a povrchových sil za předpokladu, že neexistuje přívod tepla.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho (e + v^2/2) dV = \int_V \rho F_i v_i dV + \oint_{\sigma} P_{ij} n_j v_i d\sigma. \quad /1.13/$$

e je vnitřní energie vztažená na jednotku objemu. V diferenciální formě má zákon zachování energie tvar

$$\rho \frac{d}{dt} (e + v^2/2) = \rho F_i v_i + \partial / \partial x_j (P_{ij} v_i). \quad /1.13/$$

Přejdeme nyní k Lagrangeovým proměnným. Předně uvažujeme objem, který tvoří stejné částice. Zákon zachování hmoty zapíšeme následovně/ V_0 je počáteční objem/:

$$\begin{aligned} \int_V \rho dx^1 dx^2 dx^3 &= \int_V \rho(a^1, a^2, a^3, t) D(x^1, x^2, x^3) / D(a^1, a^2, a^3) \cdot \\ &\cdot da^1 da^2 da^3 = \int_V \rho(a^1, a^2, a^3) da^1 da^2 da^3 = \int_{V_0} \rho_0(a^1, a^2, a^3) \cdot \\ &\cdot da^1 da^2 da^3. \end{aligned}$$

$$\rho(a^1, a^2, a^3, t) D(x^1, x^2, x^3) / D(a^1, a^2, a^3) = \rho_0(a^1, a^2, a^3), \quad /1.10/$$

Změna impulsu je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \partial x^i / \partial t \, dx^1 dx^2 dx^3 &= \frac{d}{dt} \int_V \rho D(x^1, x^2, x^3) / \\ / D(a^1, a^2, a^3) \partial x^i / \partial t \, da^1 da^2 da^3 &= \frac{d}{dt} \int_V \rho_0 \partial x^i / \partial t \, dV_0 = \\ = \int_V \rho_0 F^i dV_0 + \int_V \partial P^{ij} / \partial x^j \cdot \rho_0 / \rho \, dV_0, \end{aligned}$$

nebo v diferenciální formě

$$\partial^2 x^i / \partial t^2 = F^i + 1/\rho \cdot \partial P^{ij} / \partial x^j.$$

S použitím výrazu

$$\partial P^{ij} / \partial x^j = g^{mk} \partial P^{ij} / \partial a^m \cdot \partial x^j / \partial a^k,$$

zapišeme zákon změny impulsu do tvaru

$$\partial^2 x^i / \partial t^2 = F^i + 1/\rho \, g^{mk} \partial P^{ij} / \partial a^m \cdot \partial x^j / \partial a^k. \quad /1.12/$$

Analogicky dostaneme rovnici zákona zachování energie v Lagrangeových proměnných

$$\begin{aligned} \rho \partial / \partial t (e + 1/2 \partial x^i / \partial t \cdot \partial x^i / \partial t) &= \rho F_i \partial x^i / \partial t + \\ + g^{mk} \partial P^{ij} / \partial a^k \cdot v_i \partial x^j / \partial a^m. \end{aligned}$$

Složka tenzoru napětí povrchových sil pro kapaliny nebo plyn se řídí tzv. Newtonovou hypotézou:

$$\begin{aligned} P^{ij} &= \mu (\partial v^i / \partial x^j + \partial v^j / \partial x^i - 1/3 \partial v^k / \partial x^k \delta^{ij}) + \\ &+ (\zeta \partial v^k / \partial x^k - p) \delta^{ij}. \end{aligned}$$

μ je koeficient viskozity, ζ je koeficient objemové viskozity, p je hydrodynamický tlak.

V obecném případě rovnice /1.10/, /1.12/, /1.13/ spolu se stavovou rovnicí představují uzavřený systém pohybových rovnic pro kontinuum.

Většinu reálných kapalin a plynů lze s dobrým přiblížením nahradit ideální ~~kapalinou~~ ^{kapalinou}, která má nenulové tečné složky tenzoru napětí. $P^{ij} \neq 0$ pro $i \neq j$ a $P^{11} = P^{22} = \dots = P^{33} = -p$.

V případě slabých rázů šířících se v homogenním plynu $p = p_0 + p'$; $\rho = \rho_0 + \rho'$, $v^i = v'^i$, $p/p_0 \ll 1$, $\rho'/\rho_0 \ll 1$, $v'^i/c_0 \ll 1$ a považujeme-li plyn za ideální t.j. nevodivý a neviskózní a samotný děj isentropický, nalezneme ze vztahů /1.10/ a /1.12/

$$\partial \rho' / \partial t + \rho_0 \partial v'^i / \partial x^i = 0,$$

$$\rho \partial v'^i / \partial t = - \partial p' / \partial x^i,$$

odkud

$$\partial^2 p' / \partial t^2 = c_0^2 \nabla^2 p' / \partial x^i \partial x^i, \quad c^2 = (p/\rho)_s.$$

c je rychlost šíření slabých vzruchů v plynu /rychlost zvuku/.

Příklad 1.2.1

Vysvětlete význam parciální derivace podle času $\partial/\partial t$,
totální derivace podle času d/dt a substancionální deri-
vace podle času d^*/dt

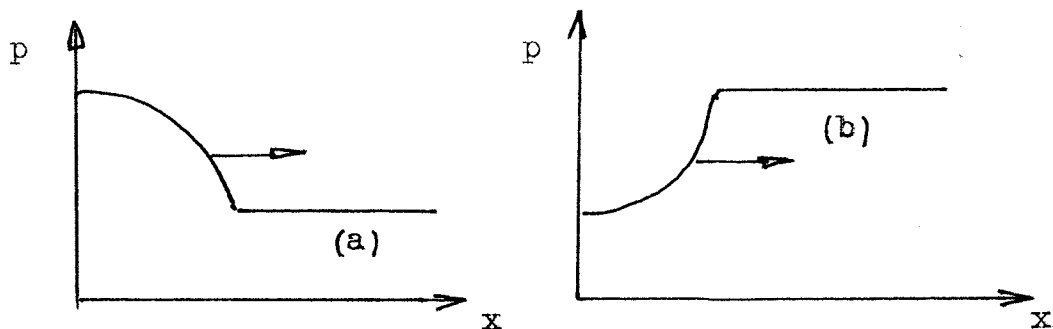
Řešení:

- a/ představme si, že stojíme na mostě a pozorujeme, jak se mění koncentrace ryb pod námi s časem. Tak zjistíme, jak se koncentrace mění s časem v nehybném místě v prostoru. Veličina $\partial c/\partial t$ je parciální derivace podle t při konstantní hodnotě x_i / $i = 1, 2, 3$ /
- b/ představme si, že místo abychom stáli na mostě, nasedneme do motorového člunu a jezdíme po řece různým směrem. Udáváme-li změnu koncentrace ryb s časem, budou udávaná čísla záviset nějak na pohybu člunu. Totální derivace podle času je dána vztahem $dc/dt = \partial c/\partial t + \partial c/\partial x_i \cdot dx_i/dt$, kde dx_i/dt / $i = 1, 2, 3$ / jsou rychlosti člunu.
- c/ představme si, že nasedneme do kanoe, a protože jsme unaveni, necháme se unášet proudem a počítáme ryby. Rychlost pozorovatele je teď stejná jako rychlost proudu v_i . Udáváme-li změnu koncentrace ryb s časem, závisejí jednotlivé údaje na místní rychlosti proudu. Tato derivace je zvláštní druh totální derivace a nazývá se substancionální derivace, nebo někdy /logičtěji/ derivace sledující pohyb. Její vztah k parciální derivaci podle času je $d^*/dt(c) = \partial c/\partial t + v_i \partial c/\partial x_i$, / $i = 1, 2, 3$ /.

1.3 DEFORMACE PROFILU PROSTÉ VLNY PŘI JEJÍM ŠÍŘENÍ

Uvažujme rovinnou vlnu šířící se ve směru kladných hodnot na ose x . Nazvěme ji kompresní vlnou /vlnou stlačení/, je-li $\partial p / \partial x > 0$, a vlnou expanzní /vlnou zředění/, je-li $\partial p / \partial x < 0$ / Obr. 1.2/

Teoretickým studiem jednorozměrného, nestacionárního pohybu ideálního plynu se prvně zabýval Riemann³⁷ a Earnshaw³⁸. Ti ukázali, že profil kompresní vlny se zkracuje při jejím šíření. V určitém čase derivace tlaku podle souřadnic limituje do nekonečna a mezitím tlak přestává být jednoznačnou funkcí souřadnic, což z fyzikálního hlediska ztrácí smysl.



Obr. 1.2 Kompresní vlna (a), expanzní vlna (b)

Jednorozměrný isentropický pohyb plynu je popsán rovnicemi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad c^2 = \left(\frac{p}{\rho}\right)_s.$$

Vynásobíme-li první rovnici veličinou c/ρ , druhou rovnicí vydělíme ρ a přičtením druhé k první dostaneme po integraci

$$\partial/\partial t (v \pm \int c/\rho) d\rho + (v \pm c) \partial/\partial x (v \pm c/\rho) d\rho = 0.$$

Zavedeme-li označení /Riemannovy invarianty 1860/

$$J_+ = v + \int c/\rho d\rho,$$

$$J_- = v - \int c/\rho d\rho.$$

Vyhovují rovnicím

$$\partial J_+/\partial t + (v + c) \partial J_+/\partial x = 0, \quad /1.14/$$

$$\partial J_-/\partial t + (v - c) \partial J_-/\partial x = 0,$$

řešení systému /1.14/ má tvar

$$J_+ = F_1 [x - (v + c)t], \quad J_- = \text{konst}, \quad /1.15/$$

$$J_- = F_2 [x - (v - c)t], \quad J_+ = \text{konst}.$$

Funkce F_1, F_2 jsou libovolné funkce. Jestliže tyto funkce známe, pak s pomocí /1.15/ je možné nalézt rozložení tlaku, hustoty, nebo rychlosti plynu v libovolném čase. Vlny popisované /1.15/ jsou nelineární, neboť argument funkce F_1, F_2 závisí na velikosti podnětu a profil vlny se s jejím šířením postupně deformuje. Nazýváme je prostými vlnami.

Příklad 1.3.1

Napište vztahy platné pro prostou vlnu v polytropickém plynu.

Řešení:

Pro polytropický plyn / $p = \text{konst} \rho^\gamma$ / je $\rho T^{1/(1-\gamma)} = \text{konst}$ a rychlost zvuku je úměrná $T^{1/2}$. / $c = (\partial p/\partial \rho)_s^{1/2}$ /

a/ $c = \text{konst} \cdot \rho^{-1/2},$

b/ $v = \pm \int c/\rho d\rho = \pm 2(c - c_1)/(\gamma - 1),$ nebo

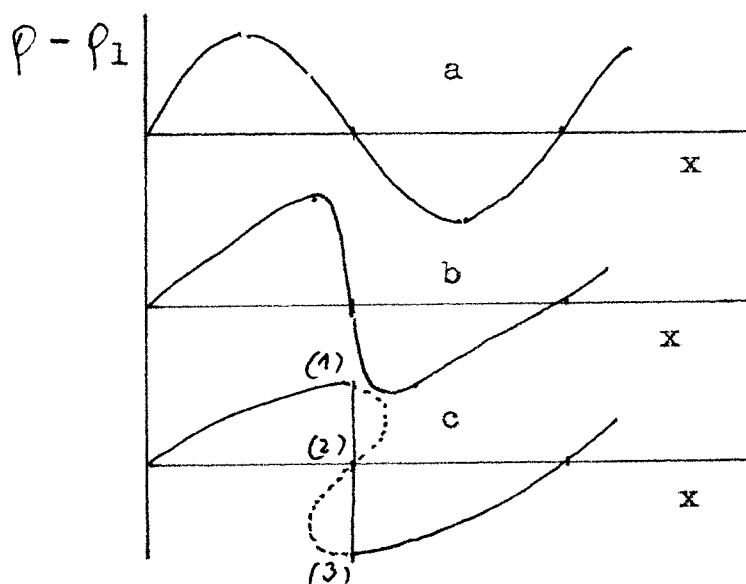
$$\begin{aligned}
 c &= c_1 \pm (\gamma - 1) v / 2, \\
 c/\rho &= \rho_1 \left[1 \pm (\gamma - 1) v / 2 c_1 \right]^{2/(\gamma - 1)}, \\
 d/\rho &= p_1 \left[1 \pm (\gamma - 1) v / 2 c_1 \right]^{2/(\gamma - 1)}, \\
 e/ v &= F \left[x - (\pm c_1 + (\gamma + 1) v / 2) t \right], \\
 f/ x &= t \left[\pm c_1 + (\gamma + 1) v / 2 \right] + F(v), \\
 g/ J_{\pm} &= v_2 \pm 2(c_2 - c_1)/(\gamma - 1).
 \end{aligned}$$

Konstanta integrace v b/ je vybraná tak, aby $c_2 = c_1$ pro $v = 0$, Index 1 odpovídá hodnotě, ve kterém je plyn v klidu. ~~Rychlost~~ v plynu směřuje na opačnou stranu, než je směr šíření vlny; je omezena ve své absolutní hodnotě. Pro vlny šířící se v kladném směru osy x je $-v \leq 2c_1/(\gamma - 1)$. Rychlost s kterou se přemísťují body vlny je rovna $U = v_2 \pm c_2$. Jde o šíření ~~vzruchu~~ plynem rychlostí zvuku a pohybem samotného plynu rychlostí v .

Pro vlnu šířící se v kladném směru osy x je $U = v + c$ a $dU/d\rho > 0$. Rychlost šíření bodu profilu vlny je tím větší, čím větší je hustota. V případě komprese platí $c > c_1$ a v bodech zředění je $c < c_1$.

Nejednoznačnost rychlosti přemísťování bodů profilu vlny vede k jeho změně s časem: body stlačení se ohýbají dopředu a body zředění zůstávají stát. Nakonec se může profil vlny deformovat natolik, že křivka $\rho(x)$ při daném t nebude jednoznačná a určité hodnotě x budou odpovídat tři hodnoty ρ / Obr. 1.3 (c) čárkovaná křivka/ Fyzikálně je takový stav nemožný. Ve skutečnosti v místech nejednoznačnosti vznikají skoky a ρ začíná /vyjma samotných bodů skoku/ být jednoznačnou funkcí. Povrchy skoků vzniká-

jí při prodlužování délky vlny. Po vzniku nespojitosti vlna přestane být prostá. Za přítomnosti nespojitostí dochází k odrazům od povrchů těchto nespojitostí a vlna se přestane pohybovat v jednom směru a zároveň dochází k dissipaci energie, což vede k silnému útlumu vlny.



Obr. 1.3 Deformace profilu prosté vlny při jejím šíření

To plyne i z obr. 1.3. Při vzniku nespojitosti se jakoby odsekávají nejvyšší části profilu vlny a s deformací profilu v závislosti na čase se jeho výška zmenšuje.

Diferenciální operátory v /1.14/ působící na J_+ a J_- nejsou nic jiného, než operátory diferencování v rovině x, t podél tzv. charakteristických linií /charakteristik/ C_+ a C_- .

V nepohyblivém prostředí se šíří vzruchy na všechny strany rychlostí zvuku. V obecném případě, kdy se prostředí pohybuje a rychlost pohybu závisí na (x_i, t) , šíření malých vzruchu se bude skládat z místní rychlosti pohybu a místní rychlosti zvuku

$$dx_i/dt = v_i \pm c_i \cos \alpha_i ,$$

kde dx_i/dt jsou projekce rychlosti šíření čela vlny na odpovídající souřadnice os a $\cos \alpha_i$ jsou směrové kosíny normály k povrchu čela. Řešení předchozího systému při zadaných počátečních podmínkách pohybu určuje jistý povrch $f(x_i, t) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Takový povrch nazýváme povrchem charakteristických linií/charakteristik/. V závislosti na tom, šířili se vlna v kladném, nebo záporném směru, rozlišujeme dva typy charakteristik C_+ a C_- , pro které platí $dx/dt_+ = v + c$ a $dx/dt_- = v - c$.

V případě prosté vlny $x = t(v \pm c) + F(v)$. Diferencováním obdržíme $dx = (v \pm c)dt + dv[t + tc'v + F'(v)]$. Na druhé straně podél charakteristik C_{\pm} máme $dx = (v \pm c)dt$ a srovnáním obou výrazů najdeme, že podél charakteristik je $dv[t + tc'v + F'(v)] = 0$. Výraz v hranatých závorkách nemůže být roven nule. Proto $dv = 0$ t.j. $v = \text{konst.}$ Tímto způsobem docházíme k závěru, že podél charakteristik C_{\pm} zůstává konstantní rychlost a s ní všechny ostatní veličiny. V tzv. automodelní vlně /prosté vlně s $F(v) = 0$ / tyto přímký vytvářejí svazek procházející počátkem /z centra/ souřadnic v rovině x, t . Vzhledem k této vlastnosti automodelovou prostou vlnu nazýváme centrovanou.²

Příklad 1.3.2

Nelezněte charakteristiky centrované prosté vlny v polytropickém plynu.

Řešení:

V centrované vlně, šířící se napravo od nepohyblivého plynu máme

$$x/t = v + c = c_1 + (\gamma + 1) v / 2$$

Charakteristiky C_+ představují svazek přímek $x = \text{konst} \cdot t$ a charakteristiky C_- jsou určeny rovnicí

$$dx/dt = v - c = (\beta - \gamma)/(\gamma + 1) (x/t) - 4 c_1 (\gamma + 1),$$

integrací dostaneme

$$x = -2 c_1 t (\gamma - 1) + \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} \cdot c_1 t_1 \cdot (t/t_1)^{\beta - \gamma(\gamma + 1)}$$

kde je konstanta integrace vybrána tak, aby charakteristika C_- procházela bodem $x = c_1 t_1$, $t = t_1$ na charakteristice C_+ $x = c_1 t$, která tvoří hranici mezi prostou vlnou a oblastí v klidu.

Linie toku jsou v rovině x, t dány rovnicí

$$dx/dt = v = 2/(\gamma + 1) [(x/t) - c_1],$$

odkud pro charakteristiku C_1 máme

$$x = -2 c_1 t (\gamma - 1) + (\gamma + 1) \cdot c_1 t (\gamma - 1) (t/t_1)^{2/(\gamma + 1)},$$

index 1 je značí stav v klidu.

Nechť se prostá vlna šíří podél kladné osy x . Pro kompresní vlnu je nutné splnit $F_1' < 0$. Derivace podle argumentu je menší než nula. Derivaci $\partial \rho / \partial x$ nalezneme podle pravidla o diferencování složené funkce

$$\partial \rho / \partial x = F_1' / (2c/\rho + (\partial^2 \rho / \partial V^2)_s F_1' t / 2c \rho^4),$$

kde $V = 1/\rho$ je specifický objem. Uvažujme nejprve $(\partial^2 \rho / \partial V^2)_s > 0$. /případ $(\partial^2 \rho / \partial V^2)_s < 0$ budeme uvažovat později/. Vidíme, že pokud $F_1' < 0$ a $(\partial^2 \rho / \partial V^2)_s > 0$, pak při nějaké hodnotě je jmenovatel nula a derivace $\partial \rho / \partial x$ limituje k nekonečnu.

Analogický výsledek dostaneme i jinou cestou. Diferencujeme-li pohybovou rovnici /1.12/ v jednorozměrném přípa-

dě podle \underline{a} $/F^i = 0/$, a rovnici kontinuity /1.10/ dva-
krát podle \underline{t} dostaneme nelineární vlnovou rovnici ve tva-
ru

$$\partial^2 p / \partial t^2 = c^2 (\rho / \rho_1)^2 \partial^2 p / \partial a^2 + (\rho_1 / \rho^3 c^2)^2 (\partial^2 p / \partial v^2)_s (\partial p / \partial t)^2, \quad /1.16/$$

použijeme-li kinematickou podmínku kompatibility /1.9/
v níž zaměníme \underline{z} za \underline{p} , dostaneme

$$\partial^2 p / \partial t^2 = c_1^2 \partial^2 p / \partial a^2 - 2 c_1 \delta / \delta t [\partial p / \partial a]. \quad /1.17/$$

Omezíme-li se na případ šíření vlny homogenním plynem
 $/p_1 = \text{konst}/$. Z /1.16/ a /1.17/ ~~dostaneme~~

$$2 c_1 \delta / \delta t [\partial p_2 / \partial a] = - (\rho_1 / \rho^3 c^2)^2 (\partial p / \partial t)^2 (\partial^2 p / \partial v^2)_s. \quad /1.18/$$

Z /1.14/ plyne

$$\partial p / \partial t = - c_1 (\partial p_2 / \partial a),$$

a proto /1.18/ dostává tvar

$$\delta / \delta t (\partial p_2 / \partial a) = - 1 / 2 \rho_1^4 c_1^3 (\partial p / \partial a)^2 (\partial^2 p / \partial v^2)_s. \quad /1.19/$$

Uvažovali jsme, že na čele vlny je $c = c_1$, $\rho = \rho_1$. Z /1.19/
máme

$$\partial p_2 / \partial x (t) = \partial p_2 / \partial x (0) \left[1 + 1 / 2 \rho_1^4 c_1^3 (\partial^2 p / \partial v^2)_s \cdot \right. \\ \left. \cdot (\partial p / \partial x)(0) t \right]^{-1}.$$

Jestliže $\partial p / \partial x (0) < 0$ a $(\partial^2 p / \partial v^2)_s > 0$, pak deri-
vace $\partial p_2 / \partial x \rightarrow \infty$ při $t = - 2 \rho_1^4 c_1^3 / [(\partial^2 p / \partial v^2)_s \partial p / \partial x (0)]$

Prošetříme prostorový případ. Necht' se homogenním ply-
nem v klidu začne šířit vlna o konečné amplitudě a necht'
její čelo má libovolný tvar. Diferencujeme rovnici konti-

nulty /1.10/ dvakrát podle času. Přitom do levé části vstoupí členy $\partial v_2^i / \partial a^j$, $\partial^3 x_2^i / \partial a^i \partial t^2$, které vypočítáme. Z pohybové rovnice a podmínek kompatibility

I. řádu máme na čele vlny

$$\partial v_2^i / \partial t = - \partial p_2 / \rho_2 \partial n \cdot n^i, \quad \partial v_2^i / \partial t = - c_1 \partial v_2^i / \partial n,$$

odkud

$$\begin{aligned} \partial v_2^i / \partial n &= \partial p_2 / \rho_1 c_1 \partial n \cdot n^i, \quad \partial p_2 / \rho_1 c_1 \partial n \cdot n^i \cdot n_j, \\ x_1^i &= a^i, \quad n^i = \nu^i. \end{aligned}$$

Derivace

$$\begin{aligned} \partial^3 x_2^i / \partial a^i \partial t^2 &= - \partial / \partial a^i (\partial p_2 / \rho_2 \partial x^i) = \partial \rho_2 / \rho_1^2 \partial n \cdot \partial p_2 / \partial n - \\ &- \mathcal{F} p_2 / \rho_1 \partial x^i \partial x^i. \end{aligned}$$

Hodnota druhého členu v pravé části na čele vlny se určuje z geometrické podmínky kompatibility II. řádu :

$$\partial^2 p_2 / \partial x^i \partial x^i = \mathcal{F} p_2 / \partial n \partial n - 2 H \partial p_2 / \partial n.$$

Ze vztahu

$$\begin{aligned} \partial^2 p_2 / \partial x^i \partial x^i &= \mathcal{F} p_2 / \partial a^i \partial a^i - \partial p_2 / \partial x^k \cdot \partial^2 x_2^k / \partial a^i \partial a^i, \\ x_1^i &= a^i, \end{aligned}$$

a rovnice kontinuity /1.10/ plyne

$$\partial^2 p_2 / \partial n \partial n = \mathcal{F} p_2 / \partial v \partial v + \partial p_2 / \rho_1 \partial n \cdot \partial \rho_2 / \partial n.$$

Takovým způsobem - dvojnásobným diferencováním rovnice kontinuity podle \underline{t} dostaneme

$$\begin{aligned} - 1 / \rho_1 \cdot \partial^2 p_2 / \partial v \partial v + 2H \cdot 1 / \rho_1 \cdot \partial p_2 / \partial n &= - 1 / \rho_1 \mathcal{F} p_2 / \partial t^2 + \\ + 2 / \rho_1^2 (\partial \rho_2 / \partial t)^2. & \quad /1.20/ \end{aligned}$$

Spolu s /1.4/, /1.9/, /1.20/, dostaneme rovnici popisující profil tlaku za vlnou, analogicky /1.19/

$$\delta/\delta t \partial p_2/\partial n = c_1 \cdot H(\partial p_2/\partial n) - 1/2 \rho_1^4 c_1^3 (\partial^2 p/\partial v^2)_s \cdot (\partial p_2/\partial n)^2. \quad /1.21/$$

V našem případě, kdy se vlna šíří s konstantní rychlostí je střední křivost H v čase t rovna

$$H(t) = H(0) - c_1 t K(0) / (1 - 2H(0)c_1 t + (c_1 t)^2 K(0)),$$

kde $H(0)$, $K(0)$ jsou hodnoty střední a Gaussovské křivosti v počátečním čase.

Rovnice /1.21/ je typu Bernoulliho. Její řešení je

$$\partial p_2/\partial n(t) = \partial p_2/\partial n(0) \exp\left(c_1 \int_0^t H(\alpha) d\alpha\right) \cdot \left[1 + A \int_0^t \exp\left(c_1 \int_0^\beta H(\alpha) d\alpha\right) d\beta\right]^{-1},$$

$$A = 1/2 \rho_1^4 c_1^3 (\partial^2 p/\partial v^2)_s \cdot \partial p_2/\partial n(0).$$

Derivace podle tlaku limituje k nekonečnu při $t = t_1$, kde

$$\int_0^{t_1} \exp\left(c_1 \int_0^\beta H(\alpha) d\alpha\right) d\beta = -1/A, \quad A < 0$$

Uvažujme partikulární případy sférické divergentní vlny / $H = -1/(r_0 + c_1 t) < 0$ / a sférické konvergentní vlny / $H = 1/(r_0 - c_1 t) > 0$ /, kde r_0 je poloměr čela vlny v počátečním čase. Hodnota t_1 je rovna

$$t_1^{(1)} = (r_0/c_1) (1 - \exp c_1/(Ar_0)), \quad H > 0,$$

$$t_1^{(2)} = (r_0/c_1) (1 - \exp c_1/(Ar_0)) \exp(-c_1/(Ar_0)), \quad H < 0.$$

Vidíme, že $t_1^{(1)} < t_1^{(2)}$. Při $|c_1/(Ar_0)| \gg 1$ a $|c_1/(Ar_0)| \ll 1$ máme

$$t_1^{(1)} \approx r_0/c_1, \quad t_1^{(2)} \approx (r_0/c_1) \exp(-c_1/(Ar_0)), \quad |c_1/(Ar_0)| \gg 1,$$

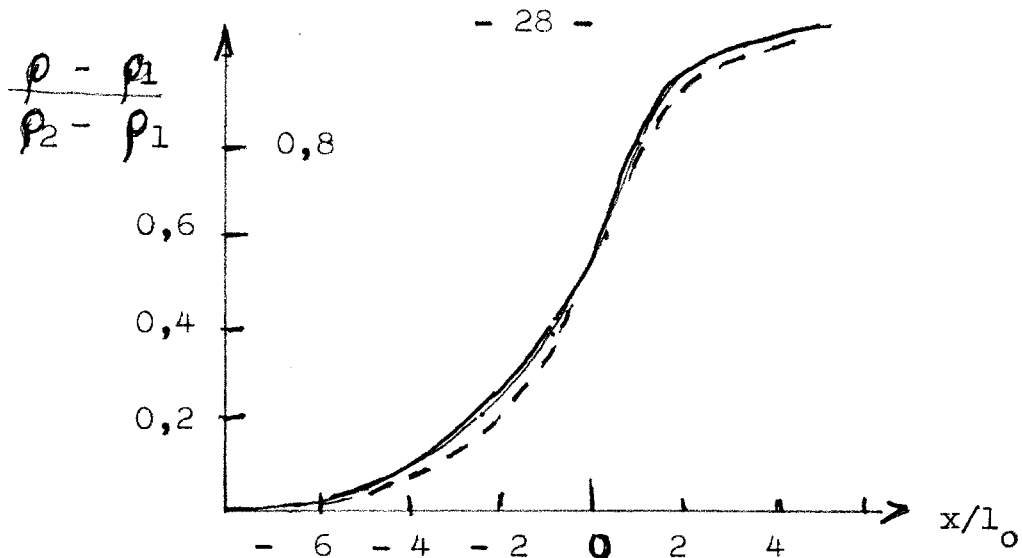
$$t_1^{(1)} \approx t_1^{(2)} \approx -1/A, \quad |c_1/(Ar_0)| \ll 1.$$

Tímto způsobem jsou spojitě toky v určitém momentu nemožné. Vzniká otázka: jak popsat takové toky v rámci mechaniky kontinua. Postupuje se následovně: zavede se povrch nespojitosti, kterým je rázová vlna. Při šíření kompresních vln konečné amplitudy se jejich profil zmenšuje vlivem tlakových sil. Ve stejném čase ^{se} jejich profil deformuje vlivem dissipativních sil. Výsledkem působení těchto faktorů je vznik zóny se skokovou změnou parametrů, která rozděljuje prostředí na dvě oblasti: oblast v klidu a s vybuze- nou částí kontinua. V této zóně rázového přechodu jsou gradienty veličin charakterizujících stav plynu /hustota, tlak, rychlost/ velmi vysoké. Tloušťka zóny rázového přechodu je několikanásobkem střední volné dráhy molekul.

Pro výpočet parametrů zóny rázového přechodu jsou rovnice mechaniky kontinua nepoužitelné a je nutné použít molekulárně-kinetických představ.

Avšak to nevyklučuje kvalitativní studium struktury rázového přechodu pomocí mechaniky kontinua s přihlednutím k vlivu viskozity. Při tom se ukazuje, že viskozita je tím mechanismem, který přeměňuje kinetickou energii usměrněného pohybu molekul plynu ve stavu klidu na teplo. Tepelná vodivost pouze umožňuje přenos energie chaotického pohybu atomů a molekul z jednoho místa na druhé a při tom neovlivňuje směr jejich pohybu.

Na obr. 1.4 jsou porovnány experimentální a vypočítané hodnoty hustot v zóně rázového přechodu.³⁹ Při výpočtu byly použity Boltzmannovy kinetické rovnice.



Obr. 1.4 Rozložení hustot v zóně rázového přechodu. l_0 je střední volná dráha v klidném prostředí³⁹

--- experiment

----- výpočet

Pokusně byly rázové vlny objeveny známým rakouským fyzikem Ernstem Machem /1878/.⁶⁸

Mechanismus vzniku rázové vlny z kompresní vlny byl pozorován nejenom v plynech, ale i kondenzovaných látkách. Tak například, při šíření kompresní vlny ve svislém sloupci vody s amplitudou 10 - 50 MPa narůstá tlak v čase řádově desítky mikrosekund.⁴⁰ Při šíření tlakové vlny se strmost jejího čela zvětšuje vlivem nelineárních efektů, a ve vzdálenosti asi 2 m vzniká nespojitost t.j. rázová vlna. Rychlost šíření rázových vln ve vodě je v tomto rozsahu tlaku blízká rychlosti zvuku / $U \rightarrow c_1$ /.

Rázové vlny zředění byly pokusně objeveny s použitím freonu 13. Počáteční stav čela byl blízký kritickému bodu kapalina-pára. V těchto pokusech byly zaregistrovány expanzní vlny, jejichž útlum trval asi 1 ms. Při šíření těchto vln nedocházelo k rozplynutí čela na rozdíl od expanzních vln v plynech.

Příklad 1.3.3

Píst se pohybuje v dlouhé trubce rychlostí 33 m/s směrem doleva. Prostředí je vzduch, jenž je charakterizován rychlostí zvuku $c_1 = 330$ m/s, adiabatický exponent $\gamma = 1,4$, počáteční tlak $p_1 = 0,1$ MPa. Jaký tlak se vytvoří za pístem a jaký bude tvar vzniklé vlny za 50 a 100 ms po náhlém uvedení pístu do pohybu?

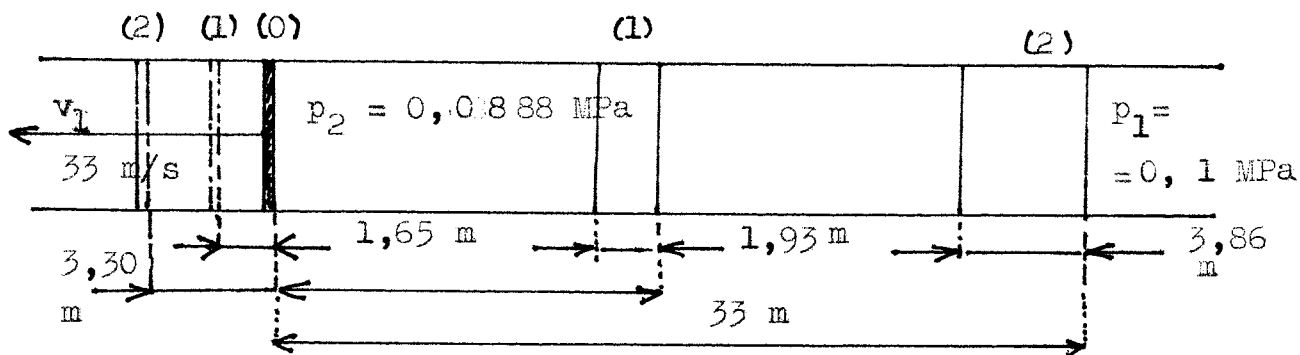
Řešení:

$$p_2/p_1 = [1 - (\gamma - 1)v_1 / 2c_1]^{2\gamma/(\gamma - 1)} = [1 - (1,4 - 1)33 / 2 \cdot 330]^{2 \cdot 1,4 / (1,4 - 1)} = 0,888,$$

$$\rho_2/\rho_1 = (p_2/p_1)^{1/\gamma} = 0,888^{1/1,4} = 0,919,$$

$$T_2/T_1 = (p_2/p_1)^{(\gamma - 1)/\gamma} = 0,888^{(1,4 - 1)/1,4} = 0,967,$$

$$a_2/a_1 = (p_2/p_1)^{(\gamma - 1)/2\gamma} = 0,888^{(1,4 - 1)/2 \cdot 1,4} = 0,983,$$

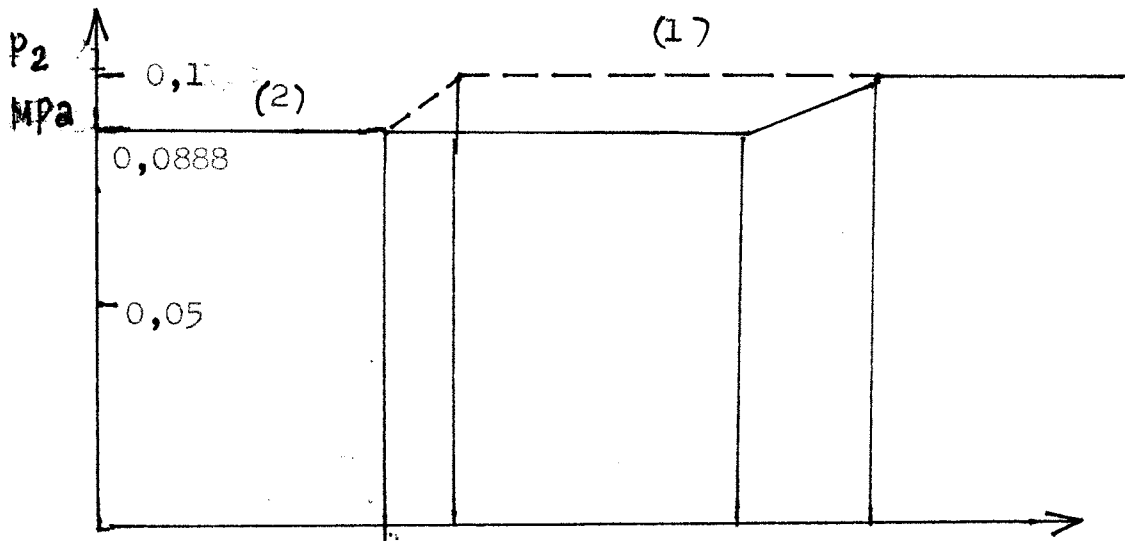


Obr.1 Expanzní vlna vyvolaná pohybem pístu

(1) po 50 ms, (2) po 100 ms

Tlak v blízkosti pístu je 0,0888 MPa, snížený o 12 %, čelo vlny se šíří rychlostí 330 m/s, její konec $v_2 = c_2 - v_1 = 330 \cdot 0,983 - 33 = 291,4$ m/s a šířka vlny se zvětšuje za jednotku času o $c_1 - c_2 = 330 - 291,4 = 38,6$ m/s.

V čase hned po $t = 0$ je čelo vlny strmé a za dobu 50 ms se rozšíří na délku $(c_1 - c_2) t = 38,6 \cdot 0,05 = 1,93$ m a za dobu 100 ms na délku $38,6 \cdot 0,1 = 3,86$ m. V čase $t = 0$ je konec i počátek vlny v místě $x = 0$. Za dobu 50 ms uběhne konec rázové vlny $c_2 \cdot t = 291,4 \cdot 0,05 = 14,57$ napravo a píst urazí dráhu $v_1 \cdot t = 33 \cdot 0,05 = 1,65$ m, takže prostor mezi pístem a koncem vlny, ve kterém je stálý tlak 0,0888 MPa je 16,22 m. Tých prostor po 100 ms je 32,44 m.

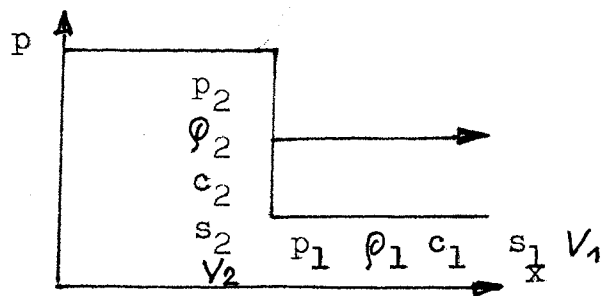


Obr. 2 Průběh tlaku v expanzní vlně

(1) po 50 ms, (2) po 100 ms

1.4 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI RÁZOVÝCH VLN

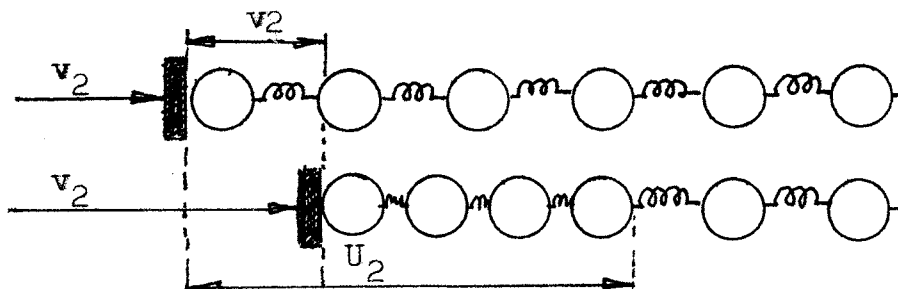
Jestliže použijeme představu mechaniky kontinua, pak zóna rázového přechodu je povrch nespojitého skoku v čele rázové vlny. /Obr. 1.5 /



Obr. 1.5 Rázová vlna, indexy 1 a 2 se vztahují k hodnotám před a za vlnou

Při průchodu přes čelo rázové vlny se všechny veličiny - tlak, hustota, rychlost zvuku, rychlost prostředí, entropie mění skokem.

Šíření rázové vlny si můžeme představit s pomocí řady pružně spojených kuliček /Obr. 1.6/. Rychlost přemístění kuliček je hmotová rychlost částic v_2 , v našem případě je to rychlost písti uvádějící kuličky do pohybu. Tato rychlost je vždy menší než rychlost čela rázové vlny U_2 , která odděluje kuličky neztlačené - v klidu od kuliček stlačených a pohybujících se.



Obr. 1.6 Mechanická představa rázové vlny v pružném prostředí

Protože v prostředí vzniká nespojitost - rázová vlna, jsou pohybové rovnice v diferenciální formě nepoužitelné. Použijeme zákony zachování hmoty, impulsu a energie v integrální formě. Uvažujme libovolný objem V , který se pohybuje spolu s prostředím rychlostí U , vzhledem k prostředí před nespojitostí, t.j. které je v klidu.

Předpokládejme, že uvnitř tohoto objemu existuje povrch nespojitosti. Označíme-li V_1 část objemu před čelem rázové vlny a V_2 část objemu za rázovou vlnou: $V_1 + V_2 = V$

Zákon zachování hmoty zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_1} \rho dV + \frac{d}{dt} \int_{V_2} \rho dV = \\ &= - \oint_{\sigma_3^{(1)}} \rho U d\sigma + \oint_{\sigma_3^{(2)}} \rho U d\sigma = \oint_{\sigma_3} (\rho_2 U_2 - \rho_1 U_1) d\sigma = 0, \end{aligned}$$

nebo

$$\rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 . \quad /1.22/$$

Analogicky

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \rho F_i dV + \oint_{\sigma} P_{ij} n_j d\sigma, \quad /1.23/$$

přičemž

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_1} \rho v_i dV &= \int_{V_1} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV + \oint_{\sigma_1} \rho v_i v_j n_j d\sigma + \\ &+ \oint_{\sigma_3^{(1)}} (-U n_j + v_j) n_j \rho v_i d\sigma. \end{aligned}$$

Protože

$$\int_{V_1} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV + \oint_{\sigma_1 + \sigma_2} \rho v_i v_j n_j d\sigma = \int_{V_1} \rho F_i dV + \oint_{\sigma_1} P_{ij} n_j d\sigma,$$

pak

$$\frac{d}{dt} \int_{V_1} \rho v_i dV = \int_{V_1} \rho F_i dV + \oint_{\sigma_1 + \sigma_3^{(1)}} P_{ij} n_j d\sigma - \oint_{\sigma_3^{(1)}} \rho v_i U d\sigma. \quad /1.24/$$

Pro objem V_2 je správný výraz

$$\frac{d}{dt} \int_{V_2} \rho v_i dV = \int_{V_2} \rho F_i dV + \oint_{\sigma_2 + \sigma_3^{(2)}} P_{ij} n_j d\sigma + \oint_{\sigma_3^{(2)}} \rho v_i U d\sigma. \quad /1.25/$$

S pomocí /1.24/ a /1.25/ s přihlédnutím k /1.23/ máme

$$\int_V \rho F_i dV + \oint_{\sigma_1 + \sigma_2} P_{ij} n_j d\sigma = \int_V \rho F_i dV + \oint_{\sigma_1 + \sigma_2} P_{ij} n_j d\sigma + \oint_{\sigma_3^{(2)}} P_{ij} n_j d\sigma + \oint_{\sigma_3^{(2)}} P_{ij} n_j d\sigma + \oint_{\sigma_3} (\rho_2 v_2^i U_2 - \rho_1 v_1^i U_1) d\sigma,$$

protože $n_i = -n_i$, pak

$$\oint_{\sigma_3} [\rho_2 v_2^i U_2 - \rho_1 v_1^i U_1 + (P_2^{ij} - P_1^{ij}) n_j] d\sigma = 0,$$

nebo

$$P_1^{ij} n_j + \rho_1 v_1^i U_1 = P_2^{ij} n_j + \rho_2 v_2^i U_2. \quad /1.26/$$

V systému souřadnic, spojených s rázovou vlnou / $v_1^i = -U n^i$, $v_2^i = -U_2 n^i$ / má předchozí vztah tvar

$$-P_1^{ij} n_j + \rho_1 U^2 n_i = -P_2^{ij} n_j + \rho_2 U_2^2 n_i$$

Obraťme pozornost k energetické rovnici. Pro objem V_1 máme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_1} \rho (e + 1/2 v^2) dV &= \int_{V_1} \partial/\partial t [\rho (e + 1/2 v^2)] dV + \\ &+ \oint_{\sigma_1} \rho (e + 1/2 v^2) v_i n^i d\sigma + \oint_{\sigma_3^{(1)}} \rho (e + 1/2 v^2) \cdot \\ &\cdot (-U n_i + v_i) n^i d\sigma = \int_{\sigma_2 + \sigma_3^{(1)}} F_i v^i dV + \oint_{\sigma_2 + \sigma_3^{(1)}} P_{ij} n^j v^i d\sigma - \end{aligned}$$

$$-\oint \rho(e + 1/2 v^2) U d\sigma, \quad /1.27/$$

Pro objem V_2 máme

$$\begin{aligned} d/dt \int_{V_2} \rho(e + 1/2 v^2) dV &= \int_{V_2} F_i v^i dV + \oint_{\sigma_2 + \sigma_3^{(2)}} P_{ij} n^j v^i d\sigma + \\ &+ \oint_{\sigma_3^{(2)}} \rho(e + 1/2 v^2) U d\sigma. \end{aligned} \quad /1.28/$$

Sečteme-li /1.27/, /1.28/ a spřihlédnutím k /1.13/, dostaneme

$$\oint_{\sigma_3^{(2)}} \left[\rho_2^{U_2} (e_2 + 1/2 v_2^2) + P_2^{ij} n_j v_2^i - \rho_1^{U_1} (e_1 + 1/2 v_1^2) - P_1^{ij} v_1^i n_j \right] d\sigma = 0,$$

nebo

$$\begin{aligned} \rho_1^{U_1} (e_1 + 1/2 v_1^2) + P_1^{ij} v_1^i n_j &= \rho_2^{U_2} (e_2 + \\ &+ 1/2 v_2^2) + P_2^{ij} v_2^i n_j. \end{aligned} \quad /1.29/$$

Při $U = U_2 = 0$, t.j. když je povrch nespojitosti kontaktním povrchem, dostaneme

$$P_1^{ij} n_j = P_2^{ij} n_j, \quad P_1^{ij} n_j v_1^i = P_2^{ij} n_j v_2^i.$$

Vynásobíme-li první rovnici v_1^i a odečteme ji od druhé dostaneme $P_2^{ij} n_j (v_1^i - v_2^i) = 0$. Jestliže $P^{ij} = -p \delta^{ij}$, pak $v_1^n = v_2^n$. Je-li $U \neq 0$ / povrch nespojitost představuje rázovou vlnu/ a z /1.29/ máme

$$\begin{aligned} (e_1 + 1/2 v_1^2) + P_1^{ij} v_1^i n_j / \rho_1^{U_1} &= e_2 + 1/2 v_2^2 + \\ &+ P_2^{ij} v_2^i n_j / \rho_2^{U_2}. \end{aligned} \quad /1.30/$$

V systému souřadnic spojených s rázovou vlnou má třetí podmínka pro vlnu tvar $v_1^i = -U n^i$, $v_2^i = -U_2 n^i$ /

$$e_1 + 1/2 v_1^2 - P_1^{ij} n_i n_j / \rho_1 = e_2 + 1/2 v_2^2 - P_2^{ij} n_i n_j / \rho_2$$

Vztahy /1.22/, /1.26/, /1.30/ představují podmínky v rázové vlně. Pro nevazkový plyn $P^{ij} = -p \delta^{ij}$ v systému souřadnic spojených s rázovou vlnou je můžeme zapsat ve tvaru

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad /1.31/$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad /1.32/$$

$$h_1 + v_1^2/2 = h_2 + v_2^2/2, \quad h = e + p/\rho, \quad /1.33/$$

kde h je enthalpie vztažená k jednotkovému objemu, v_k jsou normální hmotové rychlosti částic. Tangenciální složky rychlosti jsou spojité při přechodu přes čelo rázové vlny.

K výše uvedeným zákonům zachování je nutné přidat podmínku růstu entropie při průchodu rázovou vlnou

$$s_2 > s_1. \quad /1.34/$$

Vzrůst entropie je způsoben vlivem disipativních dějů v zóně rázového přechodu, kterou přibližně nahrazujeme idealizovaným matematickým povrchem.

Vztahy /1.31/ a /1.34/ odvodil Henri Hugoniot /1889/⁴² a také nezávisle W. N.J. Rankine /1870/⁴¹.

Tyto vztahy umožňují nalézt stav prostředí a rychlost za vlnou, jestliže jsou známy výchozí parametry látky /před vlnou/ a rychlost šíření vlny.

Zapišeme rovnici /1.32/ ve formě

$$p_1 + \rho_2 v_1 v_2 = p_2 + \rho_1 v_1 v_2 ,$$

odkud nalezneme

$$v_1 v_2 = (p_2 - p_1) / (\rho_2 - \rho_1) .$$

S použitím rovnice /1.31/, máme pro rychlost šíření vlny

$$U = v_1 = \sqrt{\rho_2 / \rho_1 (p_2 - p_1) / (\rho_2 - \rho_1)} .$$

Při $p_2 \rightarrow p_1$ je rychlost šíření $U = v_1 \rightarrow c_1$.

Z rovnic /1.31/ - /1.33/ můžeme vyloučit rychlost a dostaneme vztah, ve kterém máme čistě termodynamické veličiny

$$h_2 - h_1 = 1/2 \cdot (p_2 - p_1) (v_1 + v_2) . \quad /1.35/$$

Rovnice /1.35/ svazuje stav za vlnou se stavem před vlnou a nazývá se Hugoniotova / nebo rázová/ adiabata. Výraz

$$H(p, v, p_1, v_1) = h(p, v) - h(p_1, v_1) - 1/2(p - p_1) \cdot (v + v_1) .$$

je Hugoniotova funkce.

V rovině (p, v) rázová adiabata má strmější průběh, než obdobná isentropa / Obr. 1.7 /

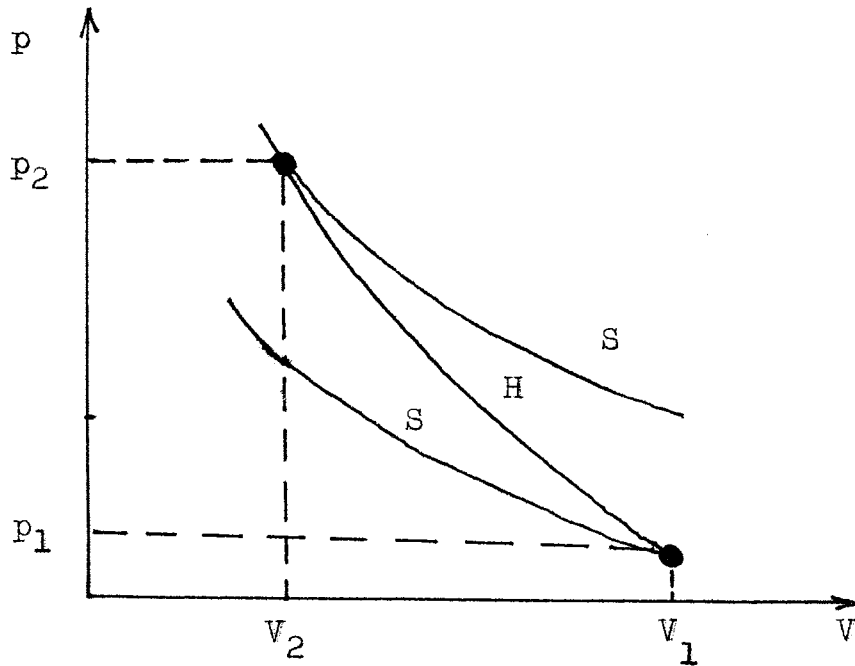
Nechť se vlna šíří v ideálním plynu $\gamma = c_p / c_v = \text{konst}$,
 $p = \rho RT / M'$; $M' = \text{konst}$.* Z první rovnice /1.31/ máme

$$v_2 = (\rho_1 / \rho_2) v_1 . \quad /1.36/$$

Druhá podmínka /1.32/ vzhledem k /1.36/ má tvar

$$p_2 = p_1 + \rho_1 v_1^2 (1 - \rho_1 / \rho_2) . \quad /1.37/$$

* M' je molekulová hmotnost



Obr. 1.7 H - Hugoniotova adiabatata
S - Isoentropy

Entalpie ideálního plynu je

$$h = \gamma p / \rho(\gamma - 1).$$

Dosadíme-li /1.36/ a /1.37/ do třetí podmínky charakterizující rázovou vlnu máme

$$(\gamma / (\gamma - 1))(1 - \rho_1 / \rho_2)(\rho_1 / \rho_2 v_1^2 - p_1 / p_2) = v_1^2 (1 - \rho_1 / \rho_2) (1 + \rho_1 / \rho_2). \quad /1.38 /$$

Protože při $\rho_1 \neq \rho_2$ / v opačném případě by bylo $V_1 = V_2$ /, pak obě části vzorce /1.38 / je možné zkrátit výrazem $1 - \rho_1 / \rho_2$. V ideálním plynu je čtverec rychlosti zvuku roven

$$c_1^2 = p_1 / \rho_1.$$

Zavedeme-li označení

$$v_1 / c_1 = M,$$

kde M je Machovo číslo, dostaneme z /1.38 /

$$p_2/p_1 = (\gamma + 1) M^2 / [2 + (\gamma - 1) M^2]. \quad /1.39 /$$

S použitím /1.39 / a /1.37 / najdeme

$$p_2/p_1 = (2\gamma M^2 - \gamma + 1) / (\gamma + 1). \quad /1.40 /$$

Jak je vidět ze vzorce /1.39/, pro silné vlny $M \gg 1$ a

$$p_2/p_1 \doteq (\gamma + 1) / (\gamma - 1).$$

Stupeň stlačení za rázovou vlnou v ideálním plynu je konečný. Souvisí to s tím, že zvýšení tlaku plynu za rázovou vlnou je doprovázeno jeho ohřátím.

Pro silné rázové vlny je poměr tlaků p_2/p_1 roven

$$p_2/p_1 \doteq 2\gamma M^2 / (\gamma + 1).$$

Z /1.39/ a /1.40/ a s použitím stavové rovnice plynu

$p = \rho RT/M$ nalezneme vztah pro teplotu plynu před a za vlnou.

$$T_2/T_1 = (2\gamma M^2 - \gamma + 1) [2 + (\gamma - 1) M^2] / (\gamma + 1)^2 M^2.$$

Odvozené vzorce mají omezený rozsah použití. Se zvýšenou teplotou / v silných rázových vlnách / se v plynu vybudují vnitřní stupně volnosti molekuly a dochází k disociaci, ionizaci a tvorbě nových látek. Přitom poměr specifických tepel není konstantní. Tyto efekty mají především vliv na hodnotu hustoty a teploty za rázovou vlnou.

Vyloučíme-li z /1.39/ a /1.40/ Machovo číslo nalezneme vztah mezi rozdílem rychlostí před a za vlnou a tlakovým skokem ve vlně

$$v_2 - v_1 / c_1 = \sqrt{2/\gamma} \frac{(p_2/p_1) - 1}{\sqrt{(\gamma + 1) p_2/p_1 + \gamma - 1}} . \quad /1.40/$$

Hugoniotova adiabatata má pro ideální plyn tvar

$$p_2/p_1 = [(\gamma + 1)p_2 - (\gamma - 1)p_1] / [(\gamma + 1)p_1 - (\gamma - 1)p_2] ,$$

Ukážeme, že v plynu s normálními termodynamickými vlastnostmi $(\partial^2 p / \partial V^2)_s > 0$ jsou možné jen kompresní rázové vlny. Pro jednoduchost se omezme případem slabých rázových vln.

Použijeme výraz /1.35/ pro Hugoniotovu adiabatatu a rozložíme veličiny do řady podle Δs a Δp :

$$\begin{aligned} & (\partial h / \partial s)_p \Delta s + (\partial h / \partial p)_s \Delta p + 1/2 (\partial^2 h / \partial p^2)_s \Delta p^2 + \\ & 1/6 (\partial^3 h / \partial p^3)_s \Delta p^3 \approx 1/2 \Delta p [v_1 + (\partial v / \partial p)_s \Delta p + 1/2 \cdot \\ & \cdot (\partial^2 v / \partial p^2)_s \Delta p^2] . \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $(\partial h / \partial s)_p = T$, $(\partial h / \partial p)_s = v$, dostaneme

$$\Delta s = 1/12 T_1 \cdot (\partial^2 v / \partial p^2)_s \Delta p^3 .$$

Z podmínky

$$\Delta s > 0, \quad (\partial^2 v / \partial p^2)_s > 0$$

vyplývá

$$\Delta p > 0, \text{ t.j. tlak za rázovou vlnou roste.}$$

Ukážeme, že podél rázové adiabataty roste entropie se zmenšováním specifického objemu, při podmínce $(\partial p / \partial s)_v > 0$.

Skutečně podél Hugoniotovy adiabataty je splněna rovnost

$$2Tds - (p - p_1)dV + (V - V_1)dp = 0 .$$

Jestli by v libovolném bodě derivace entropie byla nulová, pak

$$dP/dV = (p - p_1) / (V - V_1).$$

Jinak řečeno přímka vedená z bodu 1 se souřadnicemi p_1, V_1 do bodu 2 se souřadnicemi p, V se musí dotýkat adiabaty v bodě p, V . Přitom derivace entropie podél přímky bude v bodě P, V nulová. To je nemožné. Diferenciál Hugoniotovy funkce podél přímky a diferenciál entropie jsou vázány vztahem $dH = Tds$. V bodech 1 a 2 je funkce H nulová. Důsledkem toho je, že mezi těmito body se musí nacházet alespoň jeden extrém funkce H / a taktéž entropie/. Tento extrém je maximem, což vyplývá z faktu, že podél přímky je druhá derivace d^2s/dl^2 záporná / 1 je úsek v rovině pV /,

$$d^2s/dl^2 = A \left[\left(\frac{\partial^2 s}{\partial V^2} \right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_V^2 - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial V \partial p} \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_V \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_p + \left(\frac{\partial^2 s}{\partial p^2} \right)_V \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_p^2 \right] < 0, \quad A > 0.$$

Výraz v závorce je záporný, což vyplývá z podmínky $(\partial^2 p / \partial V^2)_s > 0$. Abychom se o tom přesvědčily, uvažujme entropii jako funkci objemu a tlaku

$$s = s(p, V).$$

Vypočítáme druhou derivaci $(\partial^2 p / \partial V^2)_s$ podle pravidla o diferencování

$$\left(\frac{\partial^2 s}{\partial p^2} \right)_V \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_p^2 - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial V \partial p} \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_V \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_p + \left(\frac{\partial^2 s}{\partial V^2} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_V^2 = - \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_V^3 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s < 0,$$

neboť $(\partial p / \partial s)_V > 0$. Proto podél přímky je $ds/dl > 0$ v bodě 1. a $ds/dl < 0$ v bodě 2. Z toho plyne, že podél adiabaty je skutečně $ds \neq 0$. Protože v bodě 1 entropie roste s poklesem specifického objemu, rovněž roste podél celé Hugoniotovy adiabaty. Entropie prostředí se zvětšuje při průchodu rázové vlny, hustota a tlak za vlnou jsou větší, než před

ní.

Není složité ukázat, že pro normální plyn je rychlost rázové vlny nadzvuková vzhledem k plynu před vlnou a podzvuková vzhledem k plynu za vlnou.

Nyní obraťme pozornost k Hugoniotove adiabatě v rovině (p, V) . Nechť index 1 označuje stav před vlnou a index 2 stav za vlnou. Vyznačme na adiabatě body 1 a 2. Rychlost rázové vlny vzhledem k plynu před vlnou je

$$U^2 = V_1^2 (p_2 - p_1) / (V_1 - V_2) \text{ a}$$

čtverec rychlosti zvuku před vlnou je roven

$$c_1^2 = - V_1^2 (\partial p / \partial V)_s .$$

V bodě 1 tečna k rázové adiabatě splývá s tečnou k isentropě. Rychlost rázové vlny je úměrná tangente úhlu sklonu přímky spojující body 1 a 2. Proto je $U > c_1$, neboť tangens sklonu přímky je větší než tangens sklonu tečny/porovnáme-li moduly/. Rychlost rázové vlny v plynu za jejím čelem je

$$U_1^2 = V_2^2 (p_2 - p_1) / (V_1 - V_2) ,$$

t.j. je úměrná tangensu úhlu sklonu téže přímky. Podél této přímky je v bodě 2 splněna podmínka

$$\partial s_2 / \partial V > 0 .$$

Diferencujeme-li stavovou rovnici $p(V, s)$ podél výše zmíněné přímky nalezneme

$$(p_2 - p_1) / (V_2 - V_1) = (\partial p / \partial V)_s + (\partial p / \partial s)_V \partial s / \partial V .$$

Zapišeme tuto rovnost ve tvaru

$$V_2^2 (p_2 - p_1) / (V_2 - V_1) = - V_2^2 [(\partial p / \partial V)_s + (\partial p / \partial s)_V (\partial s / \partial V)] ,$$

nebo

$$U_1^2 = c_2^2 - (\partial p_2 / \partial c)_V \partial s_2 / \partial V \cdot v_2^2 .$$

Z toho plyne

$$U_1 < c_2 .$$

Vzruch v prostředí za čelem vlny se šíří ve směru šíření rázové vlny, kterou dříve nebo později dohoní.

Příklad 1.4.1

Odvoďte vztah pro poměr V_2/V_1 , pro případ ideálního plynu.

Řešení:

Enthalpie ideálního plynu je $h = \gamma p V / (\gamma - 1)$,

dosazením tohoto vztahu do /1.35/ dostaneme po úpravách

$$V_2/V_1 = [(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2] / [(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2]$$

pro silné rázové vlny $p_2 \gg p_1$ je

$$V_2/V_1 = (\gamma + 1) / (\gamma - 1) .$$

1.5 ZMĚNY INTENZITY RÁZOVÉ VLNY PŘI JEJÍM ŠÍŘENÍ

Rázová vlna se může zeslabovat, nebo zesilovat v závislosti na formě vlny a rozložení parametrů za i před vlnou. Odvodíme diferenciální vztahy popisující změnu intenzity rázové vlny podél paprsku.

K tomuto účelu použijeme podmínku kompatibility,

kdy použijeme pro částici Eulerovy souřadnice.

Kinematická podmínka kompatibility 1. řádu má tvar

$$(\partial x^k / \partial t) + B^k U = 0, \quad B^k = (\partial x^k / \partial a^i) v^i. \quad /1.41/$$

Ze zákona zachování hmoty při průchodu rázovou vlnou plyne

$$(\partial x^k / \partial t) = U(1 - \epsilon) n_k, \quad \epsilon = \rho_1 / \rho_2, \quad /1.42/$$

kde n_k je projekce vnější jednotkové normály k čelu vlny v prostoru $x^1 x^2 x^3$.

Z /1.41/ a /1.42/ plyne

$$B^k = (\epsilon - 1) n_k, \quad B^k n_k = \bar{B} = (\epsilon - 1). \quad /1.43/$$

Použijeme rovnost /1.2/, kterou zapíšeme ve tvaru

$$\delta_{ij} - n_i n_j = g^{\alpha\beta} \partial x^i / \partial v^\alpha \cdot \partial x^j / \partial v^\beta.$$

Vynásobíme-li tento výraz veličinou

$$c^j = \partial^2 x^j / \partial a^k \partial a^l \cdot v^k v^l,$$

dostaneme

$$c^i = [\partial^2 x^j / \partial v \partial v] n_i n_j + g^{\alpha\beta} \partial x^i / \partial v^\alpha (\partial x^j / \partial v^\beta [\partial^2 x^j / \partial v \partial v]),$$

nebo

$$c^i = \bar{c} n^i + g^{\alpha\beta} \partial x^i / \partial v^\alpha \cdot c_\beta, \quad \bar{c} = c^k \cdot n_k,$$

$$c_\beta = \partial x^j / \partial v^\beta [\partial^2 x^j / \partial v \partial v].$$

Veličina \bar{c} se určuje z rovnice kontinuity.

$$\frac{D(x_2^1, x_2^2, x_2^3)}{D(a^1, a^2, a^3)} = \begin{vmatrix} \partial x_2^1 / \partial a^1, & \partial x_2^1 / \partial a^2, & \partial x_2^1 / \partial a^3 \\ \partial x_2^2 / \partial a^1, & \partial x_2^2 / \partial a^2, & \partial x_2^2 / \partial a^3 \\ \partial x_2^3 / \partial a^1, & \partial x_2^3 / \partial a^2, & \partial x_2^3 / \partial a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\rho_0(a^1, a^2, a^3)}{\rho_2(a^1, a^2, a^3)}.$$

Uvažujme, že $\rho_0(a^1, a^2, a^3) = \rho_1(a^1, a^2, a^3)$ Zavedeme pomocné Lagrangeovy souřadnice $a^i = x_1^i$ takové, že v uvažovaném čase vytvářejí pravoúhlý systém souřadnic, přičemž osa \bar{a}^3 je normálou k čelu vlny, osy \bar{a}^1 a \bar{a}^2 jsou tečny. Zapišeme rovnici kontinuity v těchto pomocných proměnných a diferencujeme ji podle času, nalezneme

$$\partial^2 x_2^3 / \partial \bar{a}^3 \partial \bar{a}^3 = 1/\rho_2 \partial \rho_1 / \partial \bar{a}^3 - \rho_1 / \rho_2^2 \cdot \rho_2 / \partial \bar{a}^3 - \varepsilon \cdot$$

$$\cdot \left(\partial^2 x_2^1 / \partial \bar{a}^1 \partial \bar{a}^3 + \partial^2 x_2^2 / \partial \bar{a}^2 \partial \bar{a}^3 \right).$$

S použitím /1.3/ a výrazu derivace ^{podle} normály podél povrchu

$$\partial v^i / \partial u^\alpha = - g^{\beta\sigma} b_{\alpha\beta} \partial a^i / \partial u^\sigma, \quad a^i = x^i,$$

máme

$$\partial^2 x_2^1 / \partial \bar{a}^1 \partial \bar{a}^3 + \partial^2 x_2^2 / \partial \bar{a}^2 \partial \bar{a}^3 = g^{\alpha\beta} \partial_{B^i} / \partial u^\alpha \partial \bar{a}^i / \partial u^\beta =$$

$$= (\varepsilon - 1) g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} \partial \bar{a}^i / \partial u^\tau \partial \bar{a}^i / \partial u^\beta = (1 - \varepsilon) g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} g_{\tau\beta} =$$

$$= (1 - \varepsilon) g^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = 2(1 - \varepsilon) H.$$

$b_{\alpha\beta}$ jsou koeficienty druhé kvadratické formy, H je střední křivost čela vlny.

Tedy po předešlém výkladu máme

$$\bar{C} = \epsilon/\rho_1 (\partial p_1/\partial v - \partial p_2/\partial v) - 2\epsilon(1-\epsilon)H. \quad /1.44/$$

Nechť rázová vlna libovolné formy se šíří v ideálním plynu, přičemž se plyn před a za vlnou pohybuje. Stavová rovnice je ve tvaru $p = p(\rho, s)$. Vynásobíme obě části pohybové rovnice n_i a nalezneme rozdíl veličiny $m_i \partial^2 x^i/\partial t^2$ před a za čelem vlny, dostaneme

$$[\partial^2 x^i/\partial t^2]_{n_i} = -1/\rho_2 \cdot \partial p_2/\partial n + 1/\rho_1 \cdot \partial p_1/\partial n. \quad /1.45/$$

Vyčíslíme levou část v /1.45/ s použitím kinematické podmínky kompatibility 2. řádu /1.9/,

$$\begin{aligned} \bar{C}U^2 - 2U \delta B/\delta t - \bar{B} \delta U/\delta t - \bar{B}U \partial v_1^n/\partial n &= \\ = 1/\rho_2 \partial p_2/\partial n + 1/\rho_1 \partial p_1/\partial n. &\quad /1.46/ \end{aligned}$$

Dosadíme do /1.46/ hodnotu B a C z /1.43/ a /1.44/ a nalezneme

$$\begin{aligned} v/\rho_1 \cdot U^2 (\partial p_1/\partial n - n^2 \partial p_2/\partial n) - 2H\epsilon(1-\epsilon)U^2 - 2U \delta\epsilon/\delta t + \\ + (1-\epsilon)\delta U/\delta t &= -1/\rho_1 \partial p_2/\partial v + 1/\rho_1 \partial p_1/\partial v. \quad /1.47/ \end{aligned}$$

Hodnoty derivací hustot a tlaku za čelem vlny souvisejí ve vztahu /1.47/ relací

$$\partial p_2/\partial v = (\partial p/\partial \rho)_s \partial \rho_2/\partial v + (\partial p/\partial s)_\rho \partial s_2/\partial v.$$

Z /1.4/ vyplývá, že $(\partial s/\partial t = 0)$ pokud disipace v prostředí neexistuje, pak

$$\partial s_2/\partial v = 1/U \delta[s]/\delta t + \partial s_1/\partial v,$$

kde

$$\partial s_1/\partial v = [\partial p_1/\partial v - c_1^2 \partial \rho_1/\partial v] / (\partial p_1/\partial s)_\rho$$

a tak máme

$$\partial p_2 / \partial v = c_2^2 \partial \rho_2 / \partial v + (\partial p / \partial s)_\rho \left[1/U \cdot \delta s / \delta t + \partial s_1 / \partial v \right].$$

/1.48/

Rovnice /1.47/, /1.48/ spolu se vztahy popisující stav v rázové vlně umožňují vyjádřit změnu rychlosti/nebo změnu Machova čísla/ rázové vlny v závislosti na derivaci podle normály parametrů za vlnou. V případě ideálního plynu máme

$$\begin{aligned} 1/c_1 \cdot \delta M / \delta t = & A_1 \cdot 1/p_1 \cdot \partial p_2 / \partial n + A_2 H + A_3 \cdot 1/p_1 \cdot \partial p_1 / \partial n + \\ & + A_4 \cdot 1/\rho_1 \cdot \partial \rho_1 / \partial n + A_5 1/\rho_1 c_1 \cdot \partial \rho_1 / \partial t + A_6 1/c_1 \cdot \partial v_1^n / \partial n, \end{aligned}$$

/1.49/

$$\begin{aligned} A_1 &= (M^2 - 1) A'_1 / F, & A'_1 &= -(\gamma + 1)^3 M^4 / 2\gamma w, \\ A_2 &= 2qw / (\gamma + 1) M^2, & A'_2 &= -(2\gamma - 1) M^2 q / 2\gamma, \\ A_4 &= -M^2 q / 2, & A'_4 &= -(\gamma - 1) qM / 2, \\ A_6 &= -qM, & F &= 2(2\gamma - 1) M^4 + (\gamma + 5) M^2 - \\ & & & - \gamma + 1, \\ q &= 2\gamma M^2 - \gamma + 1, \\ w &= (\gamma - 1) M^2 + 2. \end{aligned}$$

Vzorec /1.49/ svazuje změnu Machova čísla M rázové vlny se střední křivostí rázové vlny v uvažovaném bodě s derivací tlaku podle normály a času na parametrech toku před a za vlnou. Všechny koeficienty vstupující do /1.49/ zachovávají své znaménko při změně Machova čísla. Uvedené vztahy mají jednoduchý fyzikální smysl: Rovinná rázová vlna šířící se homogenním prostředím /plynem/ se zeslabuje, jestliže $\partial p_2 / \partial n > 0$ a zesiluje, jestliže $\partial p_2 / \partial n < 0$. Rovinná vlna za čelem, kde $\partial p_2 / \partial n = 0$ šířící se plynem se zesiluje, jestliže rychlost zvuku před vlnou se zmenšuje se vzdálenos-

tí a zeslabuje se, jestliže rychlost zvuku před vlnou vzrůstá.

Jestliže za vlnou $\partial p_2 / \partial n = 0$ a před vlnou derivace podle souřadnic všech veličin, kromě proměnné rychlosti podle normály jsou rovny nule, pak se vlna zesiluje při $\partial v_1^n / \partial n < 0$ a zeslabuje při $\partial v_1^n / \partial n > 0$. Konvergentní vlna $/H > 0 /$, kde $\partial p_2 / \partial n = 0$, jakož i derivace všech proměnných podle souřadnic před vlnou se zesiluje, kdežto divergentní vlna $/H < 0 /$ se zeslabuje a všechny derivace veličin před vlnou podle souřadnic se rovněž zeslabují.

Uvažujme případ termodynamicky rovnovážného plynu, který se řídí stavovou rovnicí $p = p(\rho, s)$. Předpokládáme, že tlak za čelem vlny je p_2 a poměr hustot ve vlně je $\epsilon = \rho_1 / \rho_2$, Entropie za čelem vlny závisí na rychlosti šíření vlny U a také na tlaku a hustotě před čelem vlny. Platí

$$\delta \epsilon / \delta t = \partial \epsilon / \partial U \cdot \delta U / \delta t + \partial \epsilon / \partial p_1 \cdot \delta p_1 / \delta t + \partial \epsilon / \partial \rho_1 \cdot \delta \rho_1 / \delta t, \quad /1.50/$$

$$\partial p_2 / \partial U = c_2^2 \partial \rho_2 / \partial U + (\partial p_2 / \partial s)_\rho \partial s_2 / \partial U,$$

$$\partial \rho_2 / \partial U = - \rho_1 / \epsilon^2 \cdot \partial \epsilon / \partial U,$$

$$\delta [s] / \delta t = U [\partial s / \partial v].$$

Poslední vztah je možné zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} & \partial s_2 / \partial U \delta U / \delta t + \partial s_2 / \partial p_1 \delta p_1 / \delta t + \partial s_2 / \partial \rho_1 \delta \rho_1 / \delta t - \\ & - \partial s_1 / \partial v U = U [\partial s_2 / \partial v - \partial s_1 / \partial v], \text{ odkud} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial s_2 / \partial v &= 1/U \cdot \partial s_2 / \partial U \cdot \delta U / \delta t + 1/U \cdot \partial s_2 / \partial p_1 \cdot (U \partial p_1 / \partial v + \\ &+ c_1^2 \partial p_1 / \partial t) + 1/U \cdot \partial s_2 / \partial \rho_1 \cdot (\partial \rho_1 / \partial t + U \partial \rho_1 / \partial v). \quad /1.51/ \end{aligned}$$

Derivace $\partial \epsilon / \partial U$, $\partial \epsilon / \partial p_1$, $\partial \epsilon / \partial \rho_1$, $\partial s_2 / \partial U$, $\partial s_2 / \partial p_1$, $\partial s_2 / \partial \rho_1$ jsou určeny vztahy platnými pro rázovou vlnu a stavovou rovnicí plynu: $p_2 = p_2(\rho_2, s_2)$.

Vypočítáme hodnoty těchto derivací a dosadíme je do /1.51/ a /1.50/. Vzhledem k /1.47/, /1.50/, /1.51/ nalezneme změnu parametrů v rázové vlně ve tvaru

$$\begin{aligned} 1/c_1^2 \delta U / \delta t &= A_1 \cdot 1/\rho_1 c_1^2 \cdot \partial p_2 / \partial n + A_2 H + A_3 1/\rho_1 \cdot \partial p_1 / \partial n + \\ &+ A_4 1/\rho_1 c_1^2 \cdot \partial p_1 / \partial n + A_5 1/\rho_1 c_1 \cdot \partial p_1 / \partial t, \quad \text{kde} \end{aligned}$$

$$A_i = A'_i / F_1,$$

$$A'_1 = - \epsilon F_2 (1 - M_1^2) / (1 - \epsilon), \quad A'_2 = 2 \epsilon F_2,$$

$$\begin{aligned} A'_3 &= M^2 [\epsilon (1 - M_1^2) F_1 - 2M_1^2 F - 2(1 + M_1^2) (J + M_1^2) / F_3] / (1 - M_1^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'_4 &= [1 - M_1^2 + 2M_1^4 + J(3 - M_1^2) + 2(1 + M_1^2) (J + M_1^2) / F_3] / (1 - M_1^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'_5 &= 2 [M(1 + M_1^2)(1 + \epsilon(1 - M^2)) - M_1^2(1 + M) / M + \\ &+ J(1 - M^2 / M_1^2) / M] / (1 - M_1^2), \end{aligned}$$

$$F_1 = 1 + 2M_1^2 - J, \quad F_2 = 1 + J, \quad F_3 = (1 - \epsilon) (\partial p_1 / \partial s)_p / \rho_1 T_1$$

$$J = \rho_1^2 U^2 (\partial v / \partial p)_H.$$

/ při $J = -1$ se derivace $(\partial p_2 / \partial s)_p$ limituje k nekonečnu. Spodní index H /Hugoniot/ označuje derivaci podél Hugoniotovy adiabaty. Pro změnu Machova čísla podél paprsku je možné

psát podobný výraz, jako v předchozím případě:

$$\begin{aligned} 1/c_1 \delta M / \delta t = \bar{A}_1 \cdot 1/\rho_1 c_1^2 \partial p_2 / \partial n + \bar{A}_2^H + \bar{A}_3 \cdot 1/\rho_1 \cdot \\ \cdot \partial \rho_1 / \partial n + \bar{A}_4 \cdot 1/\rho_1 c_1^2 \cdot \partial p_1 / \partial n + A_5 \cdot 1/\rho_1 c_1 \partial \rho_1 / \partial t , \end{aligned}$$

/1.52/

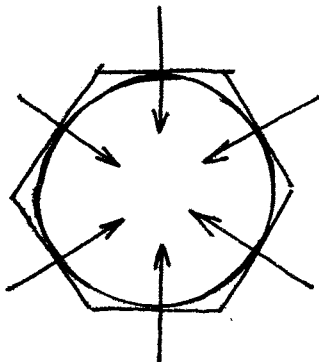
kde

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 = A_1, \bar{A}_2 = A_2, \bar{A}_3 = A_3 - 1/2 M^2 (1-\varepsilon) \left[\rho_1 / c_1^2 \left(\partial^2 p_1 / \partial \rho^2 \right)_s - \right. \\ \left. - \left(\partial^2 p_1 / \partial \rho \partial s \right) \cdot \rho_1 / \left(\partial p_1 / \partial s \right) \rho \right] , \\ \bar{A}_4 = A_4 + 1/2 M^2 \rho_1 (1-\varepsilon) \partial^2 p_1 / \partial \rho \partial s / \left(\partial p_1 / \partial s \right) \rho , \\ \bar{A}_5 = A_5 + 1/2 M (1-\varepsilon) \rho_1 / c_1^2 \left(\partial^2 p_1 / \partial \rho^2 \right)_s . \end{aligned}$$

Poznamenejme, že při $J = 1 + 2M_1^2$ dostaneme vztah mezi křivostí vlny a derivací podle normály v závislosti na tlaku za čelem vlny a parametry plynu před vlnou.

1.6 FOKUZACE RÁZOVÝCH VLN

Představme si srážku velkého počtu šikmých rovinných rázových vln, jejichž čela se dotýkají válce a pohybují se k jeho ose. /obr. 1.8/ V limitě nekonečného počtu vln dos-



Obr. 1.8 Konvergentní rázové vlny

taneme válcovou konvergentní/sbíhavou/ vlnu.

Pozornost ke konvergentním a fokuzovaným rázovým vlnám je spojena s tím, že za těmito vlnami je možné dosáhnout vysokých tlaků a teplot a je možné v poměrně malém objemu zkoncentrovat energii rázových vln. Cylindrické a sférické konvergentní rázové vlny řadíme obecně ke kumulativním dějům. V konvergentní cylindrické nebo sférické rázové vlně tlak i teplota limitují k nekonečnu, kdežto hustota se blíží ke konečné hodnotě podle zákona, který jen velmi málo závisí na tom, jak vlna vznikla. Kumulaci tohoto typu je možné objasnit tím, že když poloměr rázové vlny limituje k nule, vlna působí na nekonečně malou hmotu prostředí. Reálný děj kumulace je různými vlivy ohraničený.

Konvergentní sférické a válcové rázové vlny prvně studoval Guderley⁴³ v případě ideálního plynu bez přihlídnutí k vlivu viskozity a teplotní vodivosti plynu. Nalezl automodelové/autopodobné/ řešení pro silnou rázovou vlnu. Při tom

rychlost U rázové vlny závisí na vzdálenosti přibližně podle zákona

$$U = \text{konst } r^{-m},$$

kde $m = 0,2$ v případě válcové geometrie a $m = 0,39$ v případě sférické geometrie ($\gamma = 1,4$).

Podobné řešení vypracoval později nezávisle Landau⁴⁴ a Staňukovič.⁵ Tlak v případě sférické geometrie a $\gamma = 3$ roste jako $r^{-1,13}$ a pro válcovou geometrii s poloměrem $r^{-0,47}$. Tato práce je pozoruhodná nejenom fyzikálně, ale i metodicky, jako příklad polynomické aproximace, ve kterých se určují vlastní hodnoty obyčejné diferenciální rovnice a nepoužívá se na rozdíl od Sedova rozměrová analýza.³

Automodelová řešení jsou správná pro silné rázové vlny jen potud, pokud se poloměr čela rázové vlny nestane srovnatelný s rozměrem zóny rázového přechodu. Viskozita a teplotní vodivost vede k tomu, že veličiny v centru sbíhavých válcových a sférických vln zůstávají konečné i když velmi vysoké.

Konvergentní rázové vlny jsou nestabilní vůči libovolným nerovnostem na čele vlny a při dalším šíření se zesilují. Možné mezní koncentrace energie je ovlivněna zejména touto nestabilitou.

Konvergentní válcové a kulové rázové vlny byly studovány pokusně a teoreticky mnoha autory, avšak řada prací spojených s vojenským výzkumem není publikována.

Poměrně dobře jsou prostudovány konvergentní válcové a kulové detonační vlny a je zajímavé, že v určitém stupni kumulace, kdy je chemická energie detonující výbušniny srovnatelná s energií rázové vlny je možné i konvergentní deto-

nační vlny popisovat jako konvergentní rázové vlny. Tak například ve výše citované práci⁴⁴ zanedbání chemické energie je nejenom důsledkem, ale i předností teorie: z rozměrové analýsy plyne, že pouze v polynomickém přiblížení můžeme od parciálních diferenciálních rovnic přejít k obyčejným diferenciálním rovnicím. Zanedbání chemické energie výbušnin je správné v poslední fázi kumulace, což je výhodné pro odhad parametrů imploze. V počátečních stadiích imploze je tlak určen chemickou energií trhaviny, uvedenou aproximací nelze použít.

V laboratoři konvergentní vlnu získáme například v rázové trubici za tělesem kapkovitého tvaru, při odrazu rovinné rázové vlny z dutiny, nebo s pomocí kulové vrstvy trhaviny, kterou iniciujeme na její vnější straně v několika bodech současně. Je možné použít různě profilované výbušné kovové folie, které jsou přiváděny k výbuchu vysokými hodnotami elektrického proudu s krátkou dobou náběhu.

K přerozdělení energie dochází i při šíření rázových vln v prostředí, ve kterém se snižuje hustota. Při tom na rozdíl od konvergentních vln se důsledkem zmenšování hustoty, tlak limituje k nule a teplota a vnitřní energie neomezeně vzrůstá. Energie předávaná nekonečně malé hmotě vede k neomezeně velké rychlosti. V pracích^{3,20} jsou řešeny úlohy o šíření kulové rázové vlny v prostředí s proměnnou hustotou $\rho_1 = Ax$, $\rho \rightarrow 0$ při $x \rightarrow 0$. Vlna se šíří podle zákona $x = A_1 (-1)^\alpha$, $1 \leq \alpha$ při dosažení povrchu rázovou vlnou $x = 0$ v čase $t = 0$. V okolí bodu $x = 0$ je rozložení parametrů dáno výrazy

$$p \sim x^{\delta-2(1-\alpha)/\alpha}, \quad \rho \sim x, \quad U \sim x^{-(1-\alpha)/\alpha}, \quad T \sim U^2.$$

Ve vrstvě látky v okolí bodu $x = 0$ dochází ke koncentraci energie.

Závažný krok při studiu jevu učinili Chester, Chisnell a Whitham, kteří předložili na základě analýzy velkého množství partikulárních a asymptotických případů obecný a dostatečně přesný výraz pro zesílení rázové vlny, jež souvisí se zmenšující se plochou čela S ve sbíhavé rázové vlně²⁶

$$T \sim S^{-2} \left\{ 1 + 2/\delta + [2/\delta - 1]^{1/2} \right\} \approx S^{-0,394}$$

$T > T_1$, kde T_1 je teplota před čelem. Tento vztah dobře aproximuje vztah $T(r) \sim r^{-0,39}$.

Pěkný přehled této problematiky uvádí Tyl a Włodarczyk.⁶¹

Příklad 1.6.1

Uveďte aproximativní vztah pro sbíhavou slabou/akustickou/vlnu.

Řešení:

Z optiky je známo, že lineární sbíhavá vlna ve sférické nebo válcové geometrii vzrůstá podle zákona

$$A^2 \sim S^{-1},$$

kde A je amplituda vlny a S je plocha jejího čela. Růst parametrů /například teplotního skoku T / na čele slabé sférické vlny se řídí předchozím vztahem

$$T(r) \sim r^{-1} \quad \text{a pro válcovou vlnu vztahem}$$

$$T(r) \sim r^{-0,5}.$$

1.7 RÁZOVÉ VLNY V PEVNÝCH LÁTKÁCH

Rázové vlny se používají při studiu vlastností pevných látek při vysokých tlacích, při sestavování stavových rovnic pevných látek i k průmyslovým účelům.

Výzkum šíření rázových vln v pevných látkách má praktický smysl: využíváme výbuch v různých technologiích jako je například svařování a plátování výbuchem, výroba tvrdých materiálů / nitrid bóru, diamantový prášek/ a pod.

Šíření rázových vln v pevných látkách ve srovnání s plyny má svoje zvláštnosti, které jsou způsobeny vnitřní stavbou pevných látek. Síly vzájemného působení mezi atomy a molekulami pevných látek jsou na rozdíl od plynů velké. Stlačitelnost pevných látek je tudíž na rozdíl od plynů malá. Proto rychlost prostředí /hmotová rychlost/ za čelem rázové vlny je mnohem menší, než je rychlost samotné vlny. Z tohoto pohledu považujeme rázové vlny v pevných látkách, kdy tlak za čelem vlny dosahuje desítky GPa, za slabé.

Při malých deformacích vlastnosti pružných pevných těles popisuje známý Hookův zákon, který vyjadřuje lineární závislost mezi napětími P_{ij} a deformací ϵ_{ij} . V případě homogenního, izotropního pevného tělesa máme

$$\epsilon_{ij} = [(1 + \nu)/ E] P_{ij} - (\nu/ E) P_{kk} \delta_{ij} ,$$

$$\epsilon_{ij} = 1/2 (\partial w_i / \partial x_j + \partial w_j / \partial x_i) .$$

w_i jsou složky vektoru přemístění, ν je Poissonův koeficient, E je Youngův modul pružnosti. V jiné formě můžeme Hookův zákon zapsat ve tvaru

$$P_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij},$$

kde λ , μ jsou Laméovy koeficienty

Při růstu napětí se lineární závislost mezi napětími a deformacemi narušuje.

Častěji se používá model pružně-plastické látky. Tento model je založen na následujících předpokladech :

1/ látka zůstane pružnou, pokud napětí nepřevyší určitou mez

2/ v plastickém stavu je výsledná deformace rovna součtu pružné $\varepsilon_{ij}^{(x)}$ a plastické $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ deformace

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(x)} + \varepsilon_{ij}^{(p)},$$

3/ při plastické deformaci se objem nemění

$$\varepsilon_{ij}^p = 0,$$

4/ napětí závisí pouze na pružných deformacích

$$P_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}^{(x)} + \lambda \varepsilon_{kk}^{(x)} \delta_{ij}.$$

Obyčejně uvažujeme, že plastická deformace začíná tehdy, kdy maximální tečné napětí dosahují v pevné látce určité hodnoty. Jak je známé i -tá složka síly působící na jednotkovou plochu je rovna $P_{ij} n_j$. Jestliže vezmeme hlavní osy tenzoru, pak čtverec tečného napětí bude v rovinném případě roven

$$\pm (P_{11} - P_{22}) n_1^2 n_2^2.$$

Tato veličina má maximum při $n_1 = n_2 = 1/2$. Označíme-li jako P hodnotu napětí, při které začíná plastická deformace, zapíšeme podmínku plastičnosti ve tvaru /kriterium podle Misesa /

$$P_{11} - P_{22} = \pm 2P^* \quad /1.53/$$

Uvažujme jednoosou deformaci / $\epsilon_{11} \neq 0, \epsilon_{22} = 0$ /.

Z /1.53/ a Hookova zákona dostaneme, že přechod od pružné do plastické deformace nastává při

$$P_{11} = (1 - \nu)2P^* / (1 - 2\nu).$$

Použijeme Hookův zákon a pohybovou rovnici /1.12/, a předpokládejme že jsou objemové síly nulové

$$\partial^2 w_i / \partial t^2 = \mu \partial^2 w_i / \partial x_j \partial x_j + (\lambda + \mu) \partial^2 w_k / \partial x_i \partial x_k.$$

Všimněme si podélných a příčných rovinných vln. Vlna se šíří ve směru osy x_1 . Jestliže je vlna rovinná, pak přemístění je v tomto případě závislé pouze na x_1 a nezávisí na x_2 a x_3 . Složky w_i představují řešení rovnic

$$\partial^2 w_1 / \partial t^2 = c_L^2 \partial^2 w_1 / \partial x_1 \partial x_1, \quad \partial^2 w_2 / \partial t^2 = c_T^2 \partial^2 w_2 / \partial x_1 \partial x_1,$$

$$\partial^2 w_3 / \partial t^2 = c_T^2 \partial^2 w_3 / \partial x_1 \partial x_1,$$

$$c_L^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho, \quad c_T^2 = \mu / \rho \quad /1.54/$$

Veličiny c_L a c_T jsou rychlosti podélných a příčných vln v pevné látce.

Obraťme pozornost ke vztahům na čele rázové vlny v pevné látce. Tyto vztahy jsou podobné vzorcům /1.31/ - /1.33/. První vztah vyjadřuje zákon zachování hmoty, zůstává beze změny. Zákony zachování impulsu a energie při průchodu přes čelo rázové vlny mají tvar

$$- P_{11}^{(1)} + \rho_1 v_1^2 = - P_{11}^{(2)} + \rho_2 v_2^2,$$

$$e_1 + v_1^2 / 2 - P_{11}^{(1)} / \rho_1 = e_2 + v_2^2 / 2 - P_{11}^{(2)} / \rho_2.$$

Obyčejně se jako silová charakteristika bere hydrodynamá-

mický tlak $p = -1/3 P_{ii}$. Přitom považujeme závislost změny objemu na pružné komponentě tlaku $p^{(x)}(V)$ podobný závislosti $P_{11}^{(x)}(V)$. Takové zjednodušení je oprávněné, když je amplituda rázových vln v kondenzovaných látkách mnohem větší, než reálné pevnostní charakteristiky.

Pro plastický stav látky můžeme s použitím /1.53/ napsat

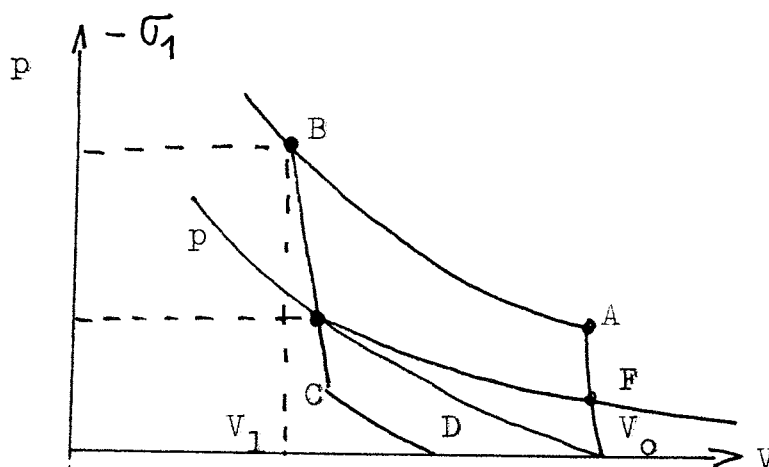
$$P_{11} = p + 1/3 P^*$$

Na obr. 1.9 je znázorněn diagram pro jeden cykl rázového stlačení a odlehčení/expanze/ v (P, V) souřadnicích.

V pružné oblasti je derivace dP_{11}/dV rovna

$$dP_{11}/dV = dp/dV = -(K + 4\mu/3) / V, \quad /1.55/$$

kde K je modul objemové stlačitelnosti.



Obr. 1.9 pV diagram rázového stlačení a odlehčení

Pak se látka stane plastická. V plastickém stavu derivace dP_{11}/dV je rovna

$$dP_{11}/dV = dp/dV = -K/V, \quad /1.56/$$

Výrazy /1.55/ a /1.56/ jsme získali za předpokladu konstantních pružných modulů v Hookově zákonu a platnosti meze tekutosti podle Misese. Tyto veličiny se mohou měnit se změnou hustoty, teploty a rychlosti deformace látky.

Modul objemového stlačení K obyčejně roste s růstem p , proto pro kondenzované látky podél křivky AB platí $\partial^2 p / \partial V^2 > 0$.

Připusťme, že v bodě B /obr. 1.9/ začne odlehčení. Tlak p začne monotónně klesat. V kondenzovaných látkách má odlehčení kvalitativně jiný charakter než u plynů. V počáteční etapě, taktéž při stlačení, mají na deformaci vliv pružné vnitřní síly. Při stlačení složka P_{11} roste rychleji, než P_{22} . Naopak při odlehčení složka napětí P_{11} klesá rychleji, než P_{22} . Proto se při odlehčení zpočátku chová látka jako pružné těleso, dokud nepřejde do plastického stavu. Úsek BC odpovídá pružnému stavu látky a v bodě C je splněna podmínka $P_{22} - P_{11} = 2P^*$. V úseku CD probíhá odlehčení v plastickém stavu. Uvažovaný děj určuje charakteristické zvláštnosti rázových vln v pevných látkách.

V oblasti plastických deformací je rychlost zvuku rovna

$$c_{p1}^2 = dp/d\rho = -v^2 dp/dV = VK. \quad /1.57/$$

Z /1.54/ a /1.57/ získáme vztah mezi podélnou pružnou a plastickou rychlostí zvuku

$$c_L / c_{p1} = \sqrt{3(1 - \mu) / (1 + \mu)}.$$

Je vidět, že $c_L > c_{p1}$

Přítomnost zlomu na rázové adiabatě vede k tomu, že rázová vlna bude nestabilní. Zlom může vzniknout důsledkem

přechodu pružných deformací k plastickým, nebo v důsledkem fázového přechodu.

Uvažujme rázovou adiabatou se zlomovým bodem podle obr. 1.10. Rychlost šíření rázové vlny, pomocí tlaku p_2 za čelem rázové vlny je dána vztahem

$$U_{12} = v_1 \sqrt{(p_2 - p_1) / (v_1 - v_2)} .$$

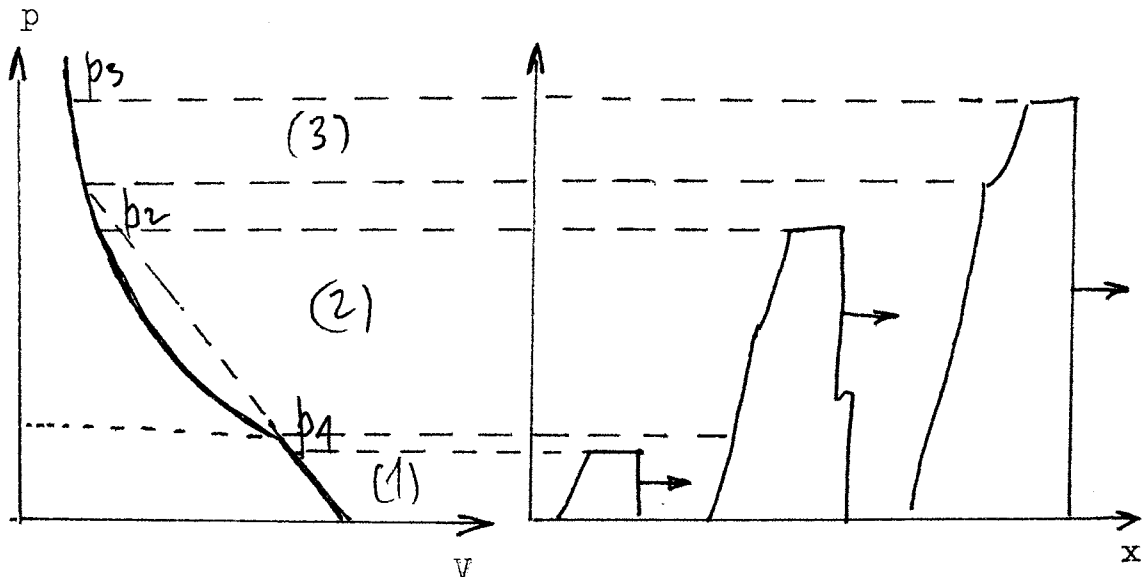
Jestliže rázová vlna přechází ze stavu 1 do stavu 3 je rychlost rázové vlny

$$U_{13} = v_1 \sqrt{(p_3 - p_1) / (v_1 - v_3)} .$$

Při $(p_3 - p_1) / (v_1 - v_3) < (p_2 - p_1) / (v_1 - v_3)$ je splněna nerovnost

$$U_{12} > U_{13} .$$

Silná rázová vlna /při $p_3 > p_2$ / se šíří pomaleji, než slabší vlna /při $p \leq p_2$ /.



Obr. 1.10 Struktura rázových vln různé amplitudy v pružno-plastickém prostředí

Vlna, která za čelem má tlak větší, než p_2 , nemůže být stabilní. Rozpadne se na dvě vlny: jednu, která přechází ze stavu 1 do stavu 2 a druhou, která se šíří ze stavu 2 do stavu 3. Rychlost první vlny je

$$U'_{12} = V_2 \sqrt{(p_2 - p_1) / (V_1 - V_2)}.$$

Druhá vlna se pohybuje před ní rychlostí

$$U_{23} = V_2 \sqrt{(p_3 - p_2) / (V_2 - V_3)}.$$

Je vidět, že pokud

$$(p_3 - p_2) / (V_2 - V_3) < (p_2 - p_1) / (V_1 - V_2),$$

pak

$$U_{23} < U'_{12}.$$

Vzdálenost mezi první a druhou vlnou se postupem času zvětšuje. První vlnu nazýváme *elastický prekursor* /EP/.

Pokusné výsledky získané při stlačování pevných látek rázovými vlnami se používají při sestavování stavových rovnic pevných látek.

Rázové vlny se v pevných látkách získávají pomocí výbušnin, srážek jiných rychle letících těles, působení laserového paprsku o velkém výkonu na povrch pevných látek atd.

Při velkých tlacích je možné tečné napětí v pevné látce zanedbat.

V pevných látkách je vnitřní energie a tlak dána součtem pružných a tepelných složek:²⁰

$$e = e^{(x)} + e^{(T)} + e^{(e)},$$

$$p = p^{(x)} + p^{(T)} + p^{(e)}, \quad /1.58/$$

$$de^{(x)} / dV = -p,$$

kde $e^{(x)}$, $p^{(x)}$ jsou veličiny určené pružnou interakcí, závisující pouze na hustotě látky. $e^{(T)}$, $p^{(T)}$ jsou tepelné složky, které závisejí na tepelném pohybu částic/atomů a molekul/. $e^{(e)}$, $p^{(e)}$ odpovídají tepelné excitaci elektronů. Příspěvek elektronového členu je nutné uvažovat od teplot řádově 10^4 K. Takové teploty vznikají při rázovém stlačení kovů do tlaků 10^3 GPa a více. Při nižších tlacích můžeme s dostatečnou přesností uvažovat první dva členy.

Při tlacích za rázovou vlnou do několika GPa používáme často Mie-Grüneisenovu stavovou rovnici^{47,48}

$$\begin{aligned} e &= e^{(x)} + 3Nk/M \cdot T f(\Theta/T), \\ p &= p^{(x)} + \Gamma(V)/V [e - e^{(x)}], \end{aligned} \quad /1.59/$$

kde f je Debyeova funkce $f(z) = 1/z^3 \int_0^z \alpha^3 / (e^\alpha - 1) d\alpha$, N je počet atomů v 1 g látky, k je Boltzmannova konstanta M je atomová nebo molekulová hmotnost, $\Theta_D = h\omega/k$ je charakteristická teplota, ω je frekvence kmitů krystalické mřížky, h je Planckova konstanta a Γ je Grüneisenova konstanta.

Hodnota $\Gamma_0 = \Gamma(V_0)$ se za normálních podmínek určuje z termodynamické rovnosti

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V / \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T,$$

odkud máme

$$\Gamma(V_0) = K / \rho_0 c_V \alpha_T.$$

$K = 1/V_0 (\partial N / \partial T)_p$ je koeficient objemové roztažnosti a $\alpha_T = -1/V_0 (\partial V / \partial p)_T$ je koeficient izotermické stlačitelnosti.

Jak ukazaly pokusy, lze v řadě případů ukázat na to, že mezi rychlostí šíření rázové vlny a rychlostí prostředí za vlnou tzv. hmotové rychlosti platí lineární závislost.

$$U = c_1 + b v_2 .$$

Přitom, pokud je $p_2/p_1 \gg 1$, dostaneme rázovou adiabatu ve tvaru

$$p_2 = \rho_1^2 c_1^2 / \rho_2 [1 - b \rho_1 / \rho_2]^2 .$$

Uvedený vztah umožňuje z pokusných dat sestavit stavovou rovnici pevné látky.

Do vztahu /1.59/ vstupují dvě neznámé funkce: $p^{(x)}(V)$ a $\Gamma(V)$. Hodnoty $p^{(x)}(V)$ se určují pokusně rázovým stlačením a stlačením statickým v normálních podmínkách.

Příklad 1.7.1

Je třeba stanovit změnu Grüneisenovy konstanty s objemem.

Řešení:

Podle Slatery⁴⁹ a Landaua⁴⁸ jsou všechny frekvence úměrné rychlosti zvuku $c = v(-dp/dv)^{1/2}$ a nepřímo úměrné meziatomové vzdálenosti $r \sim v^{-1/3}$. Za těchto předpokladů je

$$\omega \sim v^{1/3} [-d/dv p^{(x)} v^{4/3}]^{1/2} .$$

Podle Dugdala a McDonalda⁵⁰ je

$$\omega \sim v^{1/3} [-d/dv p^{(x)} v^{2/3}]^{1/2} .$$

A podle teorie volného objemu⁵¹, pro částice kmitající ve sféricko-symetrickém poli svých sousedů, je

$$\omega \sim - \left[\frac{d}{dV} p^{(\alpha)} V^{4/3} \right]^{1/2}.$$

Všechny tyto rozdílné výrazy mohou být vyjádřeny jednou formulí pro frekvenci

$$\omega \sim V^{2-t/3} \left[- \frac{d}{dV} p^{(\alpha)} V^{2t/3} \right]^{1/2} \quad /1/$$

Její logaritmická derivace podle objemu určuje Grüneisenův koeficient Γ

$$\Gamma = \frac{d \ln \bar{\omega}}{d \ln V} = - \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3} \right) - \frac{V}{2} \frac{d^2/dV^2 (p^{(\alpha)} V^{2t/3})}{d/dV (p^{(\alpha)} V^{2t/3})}.$$

Hodnota $t = 0$ odpovídá teorii Landaua-Slatera, $t = 1$ teorii Dugdalla-McDonalda, $t = 2$ teorii volného objemu. Při $V = V_0$ máme $\Gamma(t = 0) = \Gamma(t = 1) + 1/3 = \Gamma(t = 2) + 2/3$.

Pro centrální síly, které se řídí polynomickou závislostí $p = B \cdot V^{-\gamma}$,

$$\Gamma = 1/2 + (\gamma - 1)/2, \quad t.j. \quad /2/$$

nezávisí na hustotě pro všechny hodnoty t . Mezní hodnota

Γ je pro volný elektronový plyn rovna $2/3$. Počáteční hodnoty $\Gamma(V_0) = \Gamma_0$ pro většinu iontových krystalů a kovů leží v intervalu 1,5 až 2,5. Pro iontové krystaly je správnější hodnotou $t = 2$ a pro kovy $t = 1$.

Příklad 1.7.2

Vyhledejte práci⁵⁴ a prostudujte odvození vztahu

$$c_p (1 - 4\nu^2) = E_a \alpha' \quad /1/$$

pro bezkontrakční izotropické pevné látky splňující Hookův zákon /ideální pevná látka/. Zjistěte hodnoty těchto veličin pro berilium.

Řešení:

Be: $c_p = 1779,39 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, specifické teplo při stálém p
 $\rho = 1877 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, hustota
 $\alpha' = 1,08 \cdot 10^5 \text{ K}^{-1}$, lineární koeficient roztažnosti
 $E_a = 30,79 \cdot 10^{-10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, lineární adiabatický modul
 $\nu = 0,033$ teorie, elasticity
 $\nu = 0,032$ experiment, Poissonův koeficient

Srovnáme-li rovnici $c_V(1 + 2\nu) = \nu E_i \alpha / (1 - 2\nu)$ s
Grüneisenovou rovnicí $\Gamma c_V = \nu E_i \alpha' / (1 - 2\nu)$ dostaneme
pro ideální pevnou látku vztah

$$\Gamma = 1 + 2\nu(T) \quad /2/$$

/ E_i lineární izotermický modul elasticity/

Co znamená malá hodnota Poissonova koeficientu ν u Be
vzhledem k vnitřnímu tření?

Poznámka: Be se používá pro výrobu neutronových zářičů
ve směsi s Ra a Cf²⁵², nebo jako neutronové
zrcadlo.

Příklad 1.7.3

Odhadněte šířku čela rázové vlny v mědi, je-li rychlost rázové vlny $U = 14,3$ km/s, přičemž je měď stlačena na hodnotu $V_2/V_1 = 0,509$. Grüneisenův koeficient $\Gamma_1 = 1,96$. Mezimolekulární vzdálenost atomů mědi je $2,7 \cdot 10^{-10}$ m. Uvažujte každý atom jako harmonický oscilátor s frekvencí ω , která závisí na Debyeově teplotě θ_D .

Řešení:

Teoretické výpočty tloušťky čela rázových vln se pohybují v rozsahu od jednotek až po desítky jednotek mezimolekulárních vzdáleností. Protože mikroskopická teorie není ještě vytvořena, není jisté i samotné použití Hugoniotových vztahů pro její výpočet. Při pomalém adiabatickém zatížení mědi o počáteční teplotě T_1 na tlak p_2 bude jeho stlačení izotermické a naopak, čím rychlejší měď zatížíme, tím větší bude hodnota tepelné složky $e^{(T)}$ v celkové vnitřní energii e . Tak např. dvojnásobné stlačení vede k tomu, že tepelná složka energie $e^{(T)}$ značně převyšuje její potenciální složku $e^{(X)}$. Odhadneme nejprve, jakou rychlostí musí každý atom látky shromáždit energii, aby tepelná složka energie odpovídala realitě. Při průchodu rázové vlny tlak v průměru na každou částici látky ze čas τ roste od 0 na p_2 a pak zůstává konstantní. Analogicky skokem při tloušťce čela za čas τ vzroste vnitřní energie i její tepelná složka. Uvažujme každý atom jako harmonický oscilátor s kruhovou frekvencí ω , která závisí na Debyeově teplotě θ_D . Růstu tlaku v rázové vlně odpovídá v průběhu času τ růst síly $F(t)$ od 0 do hodnoty F_2 , která vybuzuje tři stupně volnosti oscilátorů. Konečný výsledek závisí velmi

málo na času narůstání a proto považujeme sílu $F = 0$ při $t < 0$, $F = F_2 \cdot t/\tau$ při $0 < t < \tau$, $F = F_2$ při $t > \tau$. Pak práce vnější síly $F(t)$ nebo-li celková vnitřní energie vztažená na jeden stupeň volnosti atomu bude

$$e = 1/2m \int_0^t |F(t) \exp(-i\omega t) dt|^2 .$$

Dosadíme-li vztah pro $F(t)$ do tohoto vztahu dostaneme:

$$e = 2F_2^2 / m \omega^4 \tau^2 [\sin^2 \omega\tau/2 + \omega^2 \tau^2/4 - \omega\tau \cdot \sin \omega\tau/2 \cdot \cos(\omega t - \omega\tau/2)] . \quad /1/$$

Konečná amplituda vlnění atomu při $t > \tau$ ⁵³:

$$a = 2F_2 / m \tau \omega^4 \sin \omega\tau/2 \quad /2/$$

a tepelná složka energie vztažená na jeden stupeň volnosti atomu je:

$$e^{(T)} = 2F_2 / m \tau^2 \omega^4 \cdot \sin^2 \omega\tau/2 . \quad /3/$$

Poslední člen ve výrazu pro $e^{(T)}$ není určen, osciluje kolem střední hodnoty a zajišťuje přenos a periodickou výměnu energie kmitajících atomů s vnější silami, t.j. se sousedními atomy.

Protože se přírůstek vnitřní energie prostředí přerušuje při dosažení konečného tlaku p_2 v čase τ , můžeme považovat narůstání vnitřní energie e v čase τ za ukončené. Pak $\cos(\omega t - \omega\tau/2) = \cos \omega\tau/2$ a poměr $e^{(T)} / e = \sin^2 \omega\tau/2 / [\sin^2 \omega\tau/2 + \omega^2 \tau^2/4 - \omega\tau \cdot \sin \omega\tau/2 \cdot \cos \omega\tau/2]$. /4/

Odhadneme hodnotu τ pro měď na ploše jednoho atomu:

Koeficient

$$\Gamma_2(V_2) = \Gamma_1(V_2/V_1) = 1,96 \cdot 0,509 = 0,9976$$

Protože $p^{(x)} / p^{(T)} = V_2/V_1$ a $\Gamma_2(V_2) = p^{(T)} \cdot (V_2/V_1)$, kde $p^{(x)}$ a $p^{(T)}$ je elastická a tepelná složka tlaku, $\Gamma_2 \doteq 1$ a $e^{(T)}/e \doteq 0,76$

Debyeova teplota, při hodnotě $\Gamma_2(V_2)$ a hodnotě poměru $e^{(T)}/e$

$$\theta_D(v_2) = \theta_D(v_1) \cdot \exp\left(-\int_{v_1}^{v_2} (v_2/v) dv\right) \quad \dagger \quad /5/$$

a pro střední cyklickou frekvenci vlnění platí $\hbar\omega(v_2) = e^{-1/3}$.
 • k $\theta_D(v_2)^*$ dostaneme pro ω za čelem vlny hodnotu $\approx 1 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$.
 A řešíme-li rovnici pro $e^{(T)}/e$ pro hodnotu 0,76 dostaneme
 $\omega\tau \doteq 2,1$ a z toho $\tau \doteq 2,1 \cdot 10^{-14} \text{ s}$.

Doba průchodu rázové vlny pohybující se rychlostí $U = 14,3 \text{ km/s}$, je-li meziatomová vzdálenost u mědi $2,7 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ je
 $\tau_p \doteq 1,9 \cdot 10^{-14} \text{ s}$. Dobrý souhlas τ a τ_p nasvědčuje, že lokální tloušťka rázové vlny je rovna meziatomové vzdálenosti.
 Jak by se změnila nalezená hodnota při ustavování rovnovážné teploty a za přítomnosti fázových přechodů? τ se vztahuje pouze k narůstání tlaku a energie v čele rázové vlny.

Porovnejte tento výsledek s výsledkem, který získal svého času Tamm⁵² přibližným řešením Boltzmannovy rovnice.

* $\hbar = h/2\pi$, h je Planckova konstanta

$$\theta_D = \hbar\omega/k$$

$$\dagger \theta_D(v_2) = \theta_D(v_1) \cdot \exp(-v_2 \cdot \ln(v_2/v_1)).$$

Příklad 1.7.4

26

Použijte Chester-Chisnell-Whithamovu /CCW/ metodu pro odvození parametru rázové konvergentní vlny v pevné látce. K analýze použijte Grüneisenovu stavovou rovnici a vyhledejte data potřebná pro uran.

Řešení:

V CCW metodě mají zákony zachování hmoty, impulsu a energie tvar

$$\rho_2(U - v_2) = \rho_1 U,$$

$$p_2 = p_1 + \rho_1 U v_2,$$

$$e_2 = e_1 + 1/2(p_2 + p_1)(1/\rho_1 - 1/\rho_2).$$

Stavová rovnice má tvar

$$p = p(\rho, e) = p^{(x)} + \rho \Gamma (e - e^{(x)}).$$

hmoty, impulsu, energie

S použitím zákonů zachování a stavové rovnice s přihlédnutím k podmínce $p_1 = e_1 = 0$, pak tlak a hmotovdu rychlost za čelem rázové vln můžeme vyjádřit jako funkci hustoty

$$p = p^{(x)} - \Gamma \rho \cdot e^{(x)} / [1 - \Gamma/2 (\rho/\rho_1 - 1)],$$

$$U = |v_2| = \sqrt{p \cdot (1/\rho_1 - 1/\rho)}.$$

Závislost rychlosti zvuku na hustotě je pro Grüneisenovu stavovou rovnici dána podle Staňukoviče vztahem

$$c = (\partial p / \partial \rho)_s = \sqrt{A - p \cdot B}, \tag{1/}$$

kde

$$A/\rho / = - 1/\Gamma \cdot d\Gamma / d\rho - 1/\rho (1 + \Gamma),$$

$$B/\rho / = dp^{(x)}/d\rho - p^{(x)}/\Gamma \rho \cdot d(\Gamma \rho)/d\rho - p^{(x)}\Gamma/\rho. \tag{2/}$$

K systému rovnic zachování ^{hmoty, impulsu, energie} musíme přidat diferenciální rovnici popisující šíření čela rázové vlny podél negativní charakteristiky. Tato rovnice má tvar

$$dp/\rho c - dv + cv/(v - c) \cdot v dr/r = 0, \quad /3/$$

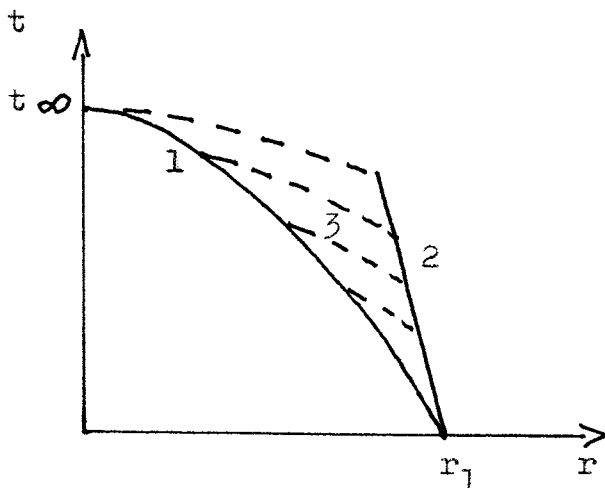
kde ν je koeficient symetrie $\nu = 1$ pro válcovou geometrii, $\nu = 2$ pro sférickou geometrii, r je Eulerova souřadnice čela vlny.

Pohyb v (r, t) rovině ilustruje obr. 1. Křivka 1 a 2 reprezentuje negativní charakteristiku $dr/dt = v - c$. Symbol t_∞ označuje dobu, kdy rázová vlna dospěje do centra.

Dosadíme-li výrazy pro p , U a c do rovnice popisující šíření čela rázové vlny podél negativní charakteristiky, nalezneme po integraci vztah mezi hustotou za čelem konvergentní vlny a poloměrem r/r_1 je poloměr v čase $t_1 = 0$:

$$\left(r/r_1\right)^\nu = \exp \left\{ - \int_{\rho_1}^{\rho} (U + c)/UC \left[F(1/\rho_1 - 1/\rho) + p/\rho^2/2U + F/c\rho \right] d\rho \right\},$$

$$\text{kde } F(\rho) = dp^{(x)}/d\rho - d(\Gamma\rho)/d\rho \cdot e^{(x)}/\left[1 - \Gamma/2 (\rho/\rho_1 - 1)\right] + \\ + (1/2\rho_1 d(\Gamma\rho)/d\rho - 1/2 d\Gamma/d\rho)\rho^{(x)} - \rho\Gamma e^{(x)}/\left[1 - \Gamma/2 (\rho/\rho_1 - 1)\right]^2. \quad /4/$$



Obr. 1 Šíření konvergentní rázové vlny v (r, t) rovině

S pomocí vztahu pro p , U , v a pro $(r/r_1)^y$ mohou být určeny funkce $p(r)$, $v(r)$, $U(r)$ a rovněž $p/p_1 = f(r/r_1)$.

Data pro uran:

$$\rho_1 = 19,07 \text{ g/cm}^3, \quad \Gamma_1 = 2,32, \quad \Gamma = \Gamma_1 \rho_1 / \rho + 2/3(1 - \rho_1 / \rho).$$

Příklad 1.7.5

Použijte Chester-Chisnell-Whithamovu /CCW/ metodu²⁶ pro odvození parametrů rázové konvergentní vlny v pevné látce.

K analýze použijte empirickou rovnici ve tvaru $U = c_1 + b v_2$ a vztahy z předchozí úlohy. Vyhledejte konstanty c_1 a b pro uran.

Řešení:

Pro $p_1 = e_1 = 0$ a zavedeme-li označení $U_1 = -v_2$ parametry za čelem rázové vlny můžeme vyjádřit ve tvaru

$$|U| = c_1 + b U_1,$$

$$p = \rho_1 U_1 (c_1 + b U_1), \quad /1/$$

$$\rho = \rho_1 (c_1 + b U_1) / (c_1 + (b - 1) U_1),$$

$$c = c_1 + (b - 1) U_1 \sqrt{1 + 2b U_1 / c_1}.$$

Dosadíme-li tyto vztahy do diferenciální rovnice popisující šíření čela rázové vlny podél negativní charakteristiky dostaneme vztah mezi U_1 a r , který také určuje vztah mezi hmotovou rychlostí za čelem vlny a poloměrem.

$$\left[1 + c_1 + 2b U_1 / (c_1 + b U_1) \sqrt{1 + 2b U_1 / c_1} \right] \left[1 / (c_1 + (b - 1) U_1) \right]$$

$$\cdot \left[\sqrt{1 + 2b \frac{U}{c_1}} + 1/U \right] dU = -v dr/r. \quad /2/$$

Tuto rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{1}{(1 + (b - 1)q) \sqrt{1 + 2bq}} + \frac{1}{q} + \frac{1}{(1 + bq)(1 + (b - 1)q)} + \frac{\sqrt{1 + 2bq}}{q(1 + bq)} dq = -v dr/r,$$

kde $q = U/c_1 = M - 1/b$ a $M = |U|/c_1$ je Machovo číslo.

Integrací této rovnice s počáteční podmínkou $q|_{r=r_1} = q_1 = U_1/c_0 = U_1/c_0$ dostaneme

$$\frac{q_1(1 + bq_1) [1 + (b - 1)q_1 (\sqrt{1 + 2bq_1} - 1)(\sqrt{1 + 2bq_1} + 1)]}{q(1 + bq) [1 + (b - 1)q_1 (\sqrt{1 + 2bq} - 1)(\sqrt{1 + 2bq_1})]} \cdot \exp \left\{ - 2\sqrt{b^2 - 1} \left[\arctg \sqrt{(1 + 2bq)(b - 1)/(b + 1)} - \arctg \sqrt{(1 + 2bq_1)(b - 1)/(b + 1)} \right] - 2 \arctg \sqrt{1 + 2bq} - \arctg \sqrt{1 + 2bq_1} \right\} = (r/r_1)^v. \quad /3/$$

Rázové parametry jsou vyjádřeny pomocí parametru q :

$$v = -c_1 q,$$

$$U = -c_1(1 + bq),$$

$$p = \rho_1 c_1^2 q(1 + bq).$$

Pro uran platí $\rho_1 = 18,45 \text{ g/cm}^3$, $c_1 = 2,565 \text{ km/s}$

$$b = 1,531, \quad \rho_0 = 2,03.$$

Příklad 1.7.6

S pomocí Walsh-Christianovy metody⁵⁹ vypočítejte průběh teploty v rázové vlně až do tlaku zhruba 10 GPa v mědi a nitrometanu /NM/. Pro měď použijte Hugoniotovy data dané tabulkou:

p_1 /GPa/	0	2,6	5,7	9,5
V_2/V_1	1	0,98	0,96	0,94

a pro NM použijte empirickou závislost pro organické kapalinu podle Amstera a Woolfolka ve tvaru $U = 1,31c_0 + 1,61v$ km/s, kde c_0 /km/s/ je rychlost zvuku a v /km/s/ je hmotová rychlost částic. Použijte k výpočtu teploty v čele rázové vlny data uvedená v tabulce:

Látka	Expanzní koef.	Rychlost zvuku	Spec. teplo	Spec. teplo	Teplota	Spec. objem
	$10^3 \alpha$ [K ⁻¹]	c_0 [km/s]	c_p [J/g.K]	c_v [J/g.K]	T [K]	V_1 [cm ³ /g]
NM	1,22	1,30	1,7431	1,2215	298	0,8839
Cu	0,053	3,5	0,3892	0,3892	298	0,1123

Řešení:

Pro teplotu a entropii podél Hugoniotovy adiabaty platí

$$Tds = c_v dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV \quad \text{a} \quad /1/$$

$$Tds = (V_1 - V) dp/2 + p dV/2.$$

Řešením těchto dvou rovnic pro T a po integraci s konstantní hodnotou c_v a $(\partial p/\partial T)_V$ dostaneme

$$T_2(V_2) = T_1 \exp [x(V_1 - V_2)] + \exp [-xV_1] \cdot \int_{V_1}^{V_2} f(V) \exp \cdot [xV/c_v] dV, \quad /2/$$

kde $x = (\partial p / \partial e)_V = (\partial p / \partial v)_V / c_V$,

$$f(v) = [\partial p / \partial v (V_1 - v) + p] / 2,$$

$$(\partial p / \partial T)_V = \alpha / K,$$

kde K je objemový modul stlačitelnosti $(\partial v / \partial p)_T / V_1$ a α je koeficient objemové termické roztažnosti $-(\partial v / \partial T)_p / V_1$ a roztažnosti, tudíž

$$x = -\alpha / K c_V.$$

S pomocí výše uvedených vztahů nalezneme

$$x = \alpha c_0^2 / c_p V_1.$$

Pomocí Rankin-Hugoniotových vztahů

$$p_2 - p_1 = \rho_1 U v,$$

$$V_2 / V_1 = (U - v) / U \quad \text{a empirické adiabaty podle Amstera}$$

a Woolfolka určíme závislost

$$p_2(V_1) = 1,013 (1,31c_0 A + 1,61A^2) / V_1 \quad [\text{GPa}], \quad /3/$$

kde

$$A = 1,31c_0 (V_1 - V_2) / (1,61V_2 - 0,61V_1),$$

platnou v rozsahu 3 - 15 GPa.

$$x_{\text{NM}} = 1,22 \cdot 10^{-3} \cdot (1,3 \cdot 10^5)^2 / 1,2215 \cdot 10^7 \cdot 0,8839 = 1,9096$$

$$x_{\text{Cu}} = 0,053 \cdot (3,5 \cdot 10^5)^2 / 0,3892 \cdot 10^7 \cdot 0,1123 = 14,854$$

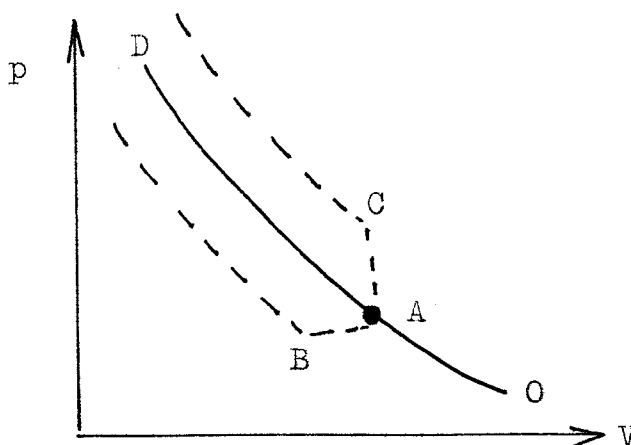
Výsledky

Nitrometan NM	p_2 [GPa]	0	7,4	8	10
	T_2 [K]	-	1000	1175	1323

Měď	p_2 [GPA]	0	2,6	5,7	9,5
	T_2 [K]	300	313	328	346

1.8 FÁZOVÉ PŘECHODY V RÁZOVÝCH VLNÁCH ^{7,18,20,47}

Vysoké tlaky, které se vytváří za rázovými vlnami mohou změnit strukturu energetického spektra v kondenzovaných látkách. Zkrácení meziatomových vzdáleností vede k rozšíření a překryvu energetických zón. Vytvářejí se nové fáze a stavy látek, které jsou hustší a vykazují větší symetrii. Přejít k hustším krystalickým strukturám s pohlcením utajeného tepla / fázové přechody I. druhu/ pozorujeme při polymorfních přeměnách v kovech. V případě silných rázových zatížení může dojít ke ztrátě stability krystalové mřížky a tání látky. Na obr. 1.11 je schematicky znázorněna rázová adiabata zahrnující fázový přechod. Při stlačení látky



Obr. 1.11 Rázová adiabata v látce s fázovým přechodem

z počátečního stavu O nastává v bodě A fázový přechod. V případě polymorfni přeměny pozorujeme zmenšení hustoty v úseku AB při neznatelných přírůstcích tlaku. To se objasňuje tím, že se krystalová mřížka přestavuje do nového rovnovážného stavu, odpovídajícího menším meziatomovým vzdálenostem.

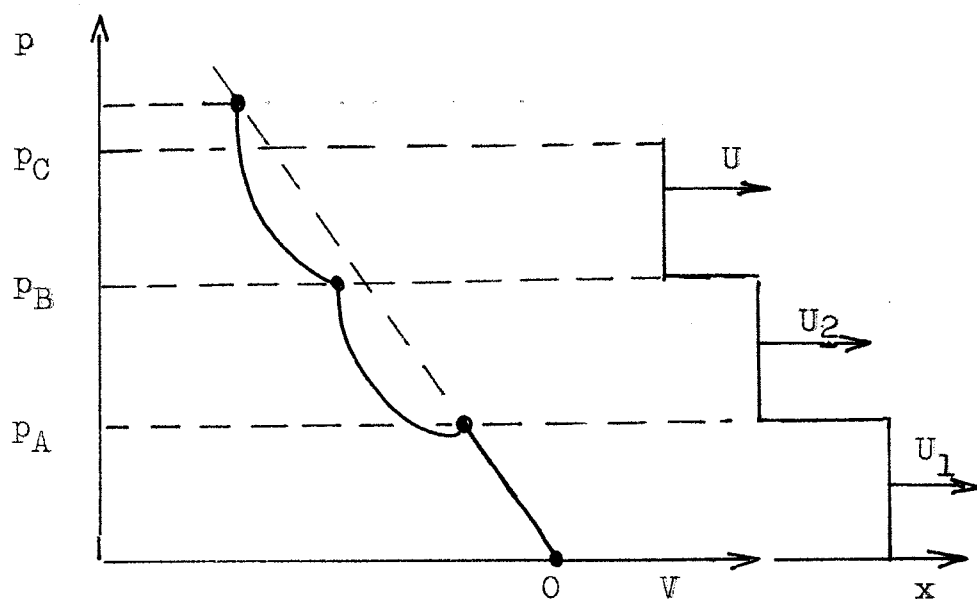
Zmenšení objemu vyžaduje nepatrné zvýšení tlaku. Při tání /AC/ se objem skoro nemění, ale tlak prudce vzrůstá. V bodech B a C se fázové přechody završují. V oblastech AB a AC se látka nachází v dvoufázovém stavu, křivka OD odpovídá rázové adiabatě látky bez fázového přechodu.

Poznamenejme, že při dynamickém zatížení se nové fáze tvoří tehdy, jestliže je doba rázového stlačení látky podstatně větší, než doba přeměny. Pokud tato podmínka není splněna, pak se tvoří metastabilní fáze, nebo směsi rovnovážných a metastabilních fází.

Jak jsme poznali, přítomnost zlomů na rázové adiabatě vede k rozpadu rázové vlny. A jestliže látkavykazuje fázový přechod I. druhu a je pružně-plastická může vzniknout dokonce systém tří vln, jak je znázorněno na obr. 1.12.

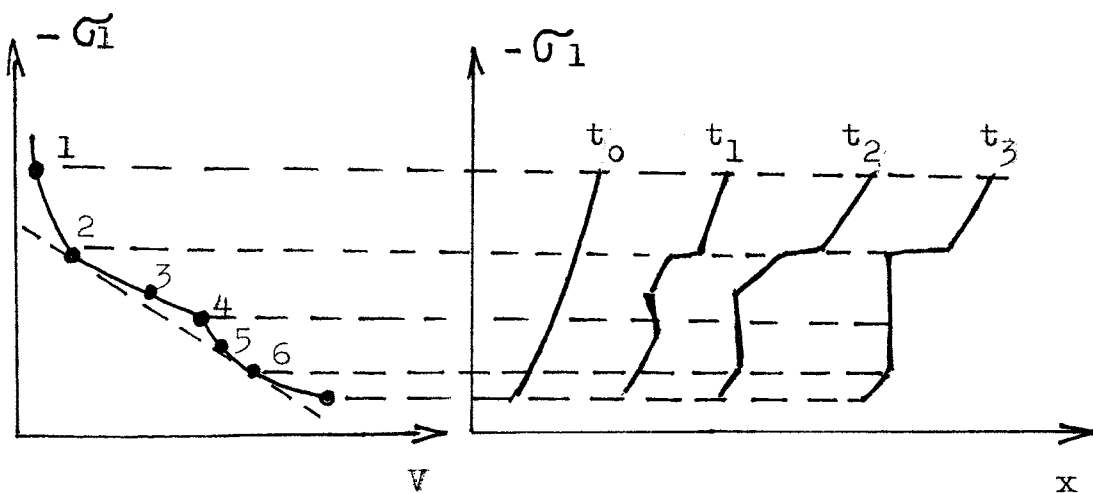
Fázové přechody v kondenzovaných látkách a s tím spojený anomální průběh rázových adiabat a adiabat odlehčení podmiňují vznik expanzních rázových vln.

Rázové vlny vyvolávající fázové přechody jsou spojeny s malými změnami entropie. Proto je expanzní adiabata obyčejně blízká a svým tvarem podobná rázové adiabatě. Přítom-



Obr. 1.12 Struktura rázové vlny v pružno-plastic-
ké látce s fázovým přechodem.

nost úseku v oblasti fázového přechodu, ve kterém je splněna nerovnost $(\partial^2 p / \partial v^2)_s < 0$, vede ke vzniku rázové vlny zředění. Vývoj a rozložení tlaku ve vlně zředění je kvalitativně znázorněn na obr. 1.13. Vlny zředění vznikají například výstupem rázové vlny na volný povrch zatěžovaného tělesa.



Obr. 1.13 Vývoj vlny zředění v látce s fázovým přechodem.

1.9 FYZIKÁLNÍ EFEKTY VZNIKAJÍCÍ PŘI PŮSOBENÍ RÁZOVÝCH VLN NA KONDENZOVANÉ LÁTKY

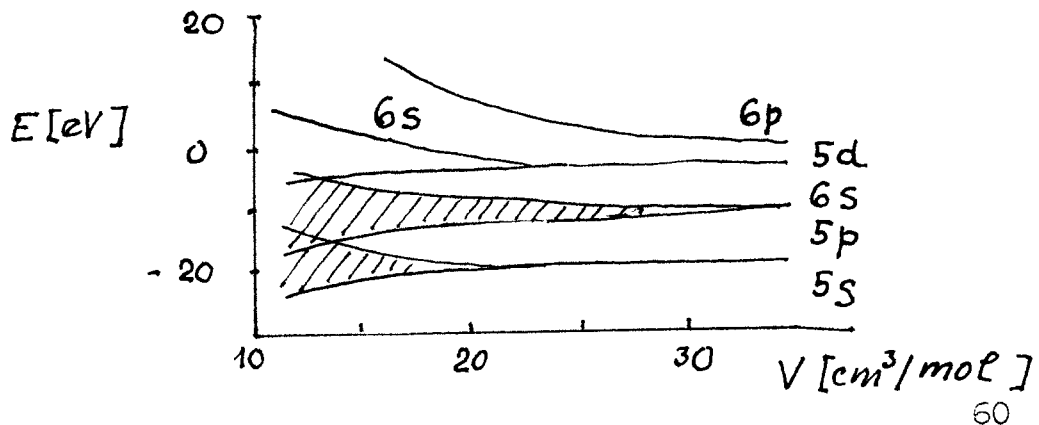
Při vysokých tlacích za rázovými vlnami může dojít k překrytí pásma mezi valentní zónou a pásmem vodivosti u dielektrik a polovodičů.

Uvažujme zjednodušené schema přechodu dielektrika do kovového stavu pod vlivem rázového zatížení. Jestliže se vlivem rázového zatížení atomy k sobě přibližují, diskrétní energetické hladiny se rozšiřují a přeměňují se na pásma dovolených energetických stavů. V případě dielektrika mezi horním zaplněným pásmem a spodním nachází zakázané pásmo. Vzdálenost mezi nimi je např. v případě polovodiče charakterizována excitační energií. Když se dielektrikum stlačuje, pásma se začnou překrývat a jejich šířka se zvětšuje až do momentu, kdy se horní hranice vyššího zaplněného pásma nepřekryje se spodním nezaplněným pásmem. V tomto momentu se vytváří kovová fáze.

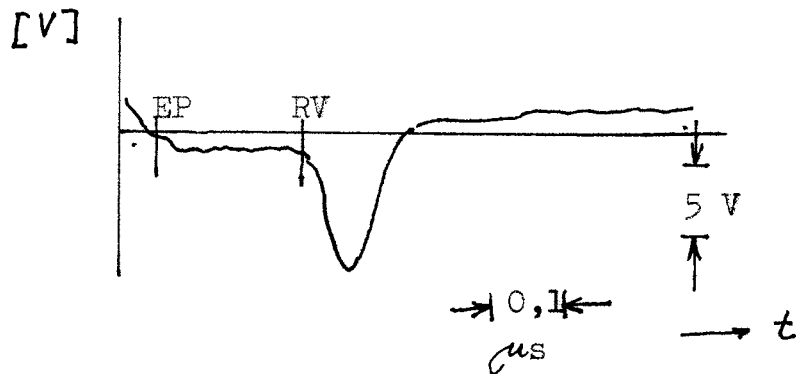
Na obr.1.14 je znázorněn energetický diagram stlačení Xenonu vypočítaný Rossem.⁶⁰ V počáteční etapě nejnižším pásmem vodivosti je pásmo 6s se specifickým objemem $27 \text{ cm}^3/\text{mol}$, které je postupně nahrazováno pásmem 5d. Při specifickém objemu $12 \text{ cm}^3/\text{mol}$, při kterém Xenon přechází do kovového stavu, se pásmo 5d překrývá s valentním pásmem.

Na obr.1.15 je uveden oscilogram vodivosti železa při rázovém zatížení s amplitudou $17,5 \text{ GPa}$. Počáteční nulový posun linie odpovídá odporu železa v nenabuzeném stavu. Při působení vlny $8,3 \text{ GPa}$ je odpor záporný. Po příchodu rázové vlny $17,5 \text{ GPa}$ se amplituda odporu prudce zvětšuje, ale zůstává na-

dále záporná.



Obr. 1.14 Energetický diagram stlačování Xenonu⁶⁰



Obr. 1.15 Oscilogram elektrické vodivosti železa
při rázovém stlačení / $p_2 = 17,5$ GPa/
EP příchod elastického prekursoru
RV " rázové vlny, t je čas⁶⁰

Kromě vlivu na elektrické vlastnosti látek, silné rázové stlačení doprovází změna magnetických charakteristik. Tak například při rázovém zatížení železa s amplitudou 13 GPa, kdy v železe nastává fázový přechod I. druhu, dochází k úplné demagnetizaci vzorku. To se objasňuje tím, že se ferromagnetické α -železo s objemově-centrovanou kubickou mřížkou mění v nemagnetické ϵ -železo, které je hranově-centrované.

Pokusy s rázovým zatížením slitin Fe-Ni ukázaly, že demagnetizace těchto hranově-centrovaných slitin při určitých zatíženích může být způsobena snížením Curiovy teploty, která

charakterizuje fázový přechod II. druhu, přechod od uspořádaného stavu do stavu neuspořádaného. Podobně se chovají tvrdé a měkké ferity při rázovém zatěžování a teplotním namáhání při explozi trhavin. Posun Curiových teplot byl zjištěn pomocí vibračního magnetometru a měřením pomocí vah. Z těchto důvodů je nutné směs identifikačních feritů používaných ke značkování trhavin, využívajících charakteristickou Curiovu teplotu, zapracovat do tělísek z umělé hmoty.

Například v Mn-Zn feritu, ale i jiných materiálech pozorujeme magnetickou anizotropii vyvolanou rázovou vlnou, která je charakterizována změnou směru magnetizace. Směr šíření rázové vlny je totožný s tímto vektorem.

ŠÍŘENÍ RÁZOVÝCH VLN V TERMODYNAMICKY NEROVNOVÁŽNÝCH PROSTŘEDÍCH

2.1 POHYBOVÉ ROVNICE NEROVNOVÁŽNÉHO PLYNU

Uvažujme systém, který se nachází ve stavu neúplné termodynamické rovnováhy. Pojem entropie se zavádí pro systém s konečným odklonem od rovnovážného stavu. Pro popis takového systému zavedeme nerovnovážný stupeň ξ / nebo pro několik takových parametrů ξ_i , $i = 1, 2, \dots$ /. Předpokládáme, že vnitřní energie e , vztažená k jednotkové hmotě je funkcí hustoty ρ , entropie s a nerovnovážnému stupni ξ_i . V rovnovážném stavu je $\partial e / \partial \xi_i = 0$. Označíme $\xi_i^{(0)}$ hodnotu parametru ve stavu termodynamické rovnováhy.

Nerovnovážný stupeň charakterizuje odklon stavu prostředí od rovnovážného stavu, vybraný pro každý konkrétní případ jednotlivě. Tak například jako nerovnovážný parametr může být vybrána měnící se teplota, relativní koncentrace a pod. Nerovnovážný stupeň můžeme vždy vybrat tak, aby byla splněna rovnost

$$\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_{s, \xi_i} = -p, \quad i = 1, 2, \dots$$

Změnu nerovnovážných stupňů vyjadřujeme relaxačními rovnicemi

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = f_i(\rho, s, \xi_1, \dots, \xi_N).$$

Nelezneme výraz *pro* entropii. Zákon zachování energie pro nevazký, nevodivý plyn bez působení vnějších sil

má tvar

$$de = - p dV .$$

Obecný výraz pro změnu vnitřní energie je tvaru

$$de = - p dV + T ds + \frac{\partial e}{\partial \xi_i} d \xi_i ,$$

odkud

$$\frac{\partial s}{\partial t} = - 1/T \frac{\partial e}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = - 1/T \frac{\partial e}{\partial \xi_i} \cdot f_i .$$

Zanedbáme-li viskozitu a tepelnou vodivost má pohybová rovnice nerovnovážného plynu tvar /jsou použity Lagrangeovy proměnné/:

$$\rho \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} = - g^{km} \frac{\partial p}{\partial a^k} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial a^m} ,$$

$$\rho \frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(a^1, a^2, a^3)} = \rho_0(a^1, a^2, a^3), \quad /2.1/$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 1/T \cdot \frac{\partial e}{\partial \xi_i} \cdot f_i ,$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = f_i(\rho, s, \xi_1, \dots, \xi_N)$$

Systém /2.1/ popisuje pohyb relaxujícího prostředí.

Šíření ~~vzruchů~~ má v nerovnovážném plynu svoje zvláštnosti. ⁶²

Nechť se v plynu šíří slabý vzruch. Zavedeme dobu relaxace τ malých odchylek od lokální termodynamické rovnováhy.

Jestliže doba ~~za~~ kterou se podstatně mění veličiny charakterizující šíření vlny je mnohem menší, než doba relaxace, pak se vlna šíří s vysokofrekvenční rychlostí zvuku

$c_\infty = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_{s, \xi}}_{\xi=1}$. Jestliže charakteristická doba změny veličin plynů dynamiky bude mnohem větší, než doba relaxace,

pak se vlna šíří s rovnovážnou rychlostí zvuku $c_0 = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_{s, \xi}}_{\xi=0}$ /nízkofrekvenční rychlostí zvuku/.

Šíření slabých rázových vln v relaxujícím plynu probíhá následovně.⁶² Čelo slabé rázové vlny se zpočátku šíří s rychlostí blízkou vysokofrekvenční rychlosti zvuku (c_∞), přičemž její amplituda se v jednorozměrném případě tlumí podle exponenciálního zákona. S průběhem času se počáteční diskontinuita vyrovnává a místo ní nastupuje plavně narůstající vzruch šířící se nízkofrekvenční rychlostí zvuku c_0 .

Podívejme se detailněji na šíření takových vzruchů v relaxujícím plynu v nejjednoduším případě. Nechť molekula plynu má $(d + d_r)$ stupňů svobody, přičemž se rovnováha podle d stupňů svobody ustavuje okamžitě a ustavení rovnováhy podle d_r stupňů svobody popisuje relaxační rovnice. Vnitřní energie je

$$e = d/2 \cdot p/\rho + e_1,$$

kde

$$de_1/dt = -1/\tau (e_1 - d_r/2 \cdot p/\rho).$$

Systém rovnic jednorozměrného toku v Eulerových proměnných má tvar

$$\partial v/\partial t + v \partial v/\partial x + 1/\rho \partial p/\partial x = 0,$$

$$\partial \rho/\partial t + v \partial \rho/\partial x + \rho \partial v/\partial x = 0, \quad /2.2/$$

$$\begin{aligned} & \partial/\partial t (d/2 \cdot p/\rho + e_1) + v \partial/\partial x (d/2 \cdot p/\rho + e_1) + \\ & + p/\rho \partial v/\partial x = 0, \end{aligned}$$

$$\partial e_1/\partial t + v \partial e_1/\partial x = -1/\tau (e_1 - d_r/2 \cdot p/\rho).$$

Jestliže doba relaxace je v uplném systému /2.2/ dostatečně malá, pak je veličina e_1 přibližně rovna své rovnovážné hodnotě:

$$e_1 = \alpha_r/2 \cdot p/\rho.$$

Šíření vzruchů jsou v tomto případě dostatečně dobře popsány rovnovážnými rovnicemi

$$\begin{aligned} \partial v/\partial t + v \partial v/\partial x + 1/\rho \partial p/\partial x &= 0, \\ \partial \rho/\partial t + v \partial \rho/\partial x + \rho \partial v/\partial x &= 0, \quad /2.3/ \\ \partial/\partial t [(\alpha + \alpha_r)/2 \cdot p/\rho] + v \partial/\partial x [(\alpha + \alpha_r)/2 \cdot p/\rho] + \\ + p/\rho \partial v/\partial x &= 0. \end{aligned}$$

Nalezneme hodnoty "zamrzlé" a rovnovážné rychlosti zvuku.

K tomu použijeme kinematické podmínky kompatibility

I. řádu za předpokladu

$$\begin{aligned} [p] = 0, [\rho] = 0, [v] = 0, [e_1] = 0, \\ [\partial p/\partial x] \neq 0, [\partial \rho/\partial x] \neq 0, [\partial v/\partial x] \neq 0. \end{aligned}$$

Z kinematické podmínky kompatibility máme

$$[\partial z/\partial t] = -U' [\partial z/\partial x], \quad z = p, \rho, v, e_1,$$

kde U' je rychlost pohybu čela. Zapišeme systém rovnic /2.2/ zleva a zprava od čela vlny a jejich rozdíl vede k rovnicím

$$\begin{aligned} (-U' + v) [\partial v/\partial x] + 1/\rho [\partial p/\partial x] &= 0, \\ \rho [\partial v/\partial x] + (-U' + v) [\partial \rho/\partial x] &= 0, \\ \alpha/2\rho (-U' + v) [\partial p/\partial x] + \alpha p/2\rho^2 (U' - v) [\partial \rho/\partial x] + \\ + p/\rho [\partial v/\partial x] + (-U' + v) [\partial e_1/\partial x] &= 0, \\ (-U' + v) [\partial e_1/\partial x] &= 0. \end{aligned}$$

Je vidět, že derivace vnitřní energie na čele vlny je nulová.

Pro to, aby derivace tlaku, hustoty, rychlosti na čele vlny byly různé od nuly / v opačném případě čelo vlny zaniká/, je nutné, aby byl nulový determinant

$$\begin{vmatrix} -U' + v & 1/\rho & 0 \\ \rho & 0 & -U' + v \\ p/\rho & \alpha/2\rho(-U' + v) & \alpha p/2\rho^2(U - v) \end{vmatrix}$$

Z toho plyne $U = v \pm c_\infty$ "zamrzlá rychlost" rychlost zvuku je rovna

$$c_\infty = \sqrt{(1 + 2\mu)p/\rho}.$$

Analogicky ze systému /2.3/ plyne

$$U' = v \pm c_0,$$

kde hodnota rovnovážné rychlosti zvuku je dána vztahem

$$c_0 = \sqrt{[1 + 2/(\alpha + \alpha_r)] p/\rho}.$$

Proto, aby přibližný systém /2.3/ nebyl v rozporu s úplným systémem /2.2/, je nutné splnit nerovnost

$$c_\infty > c_0$$

Tato podmínka je očividně splněna.

Čelo vlny se šíří prostředím rychlostí c_∞ a za ním se pohybuje vzruch s menší rychlostí c_0 . Při zmenšení doby relaxace rychlý signál s rychlostí c_∞ se zmenší a základní se šíří rychlostí c_0 . V rámci popisu, daného systémem rovnic relaxujícího plynu /2.2/, diskontinuita na čele vlny existovat nebude, jestliže rychlost U rázové vlny, která se zavádí při použití přibližného systému rovnic /2.3/ je ohraničena mezemi

$$v_2 - c_\infty < U' < v_1 + c_\infty.$$

Indexy 1 a 2 označují rychlosti plynu před a za rázovou vlnou.

V tomto případě je možné konstatovat, že systém rovnic relaxujícího plynu předurčuje strukturu rázové vlny. Diskontinuitu, t.j. rázovou vlnu zavádíme v tom případě, kdy používáme pro popis pohybu prostředí přibližný systém /2.3/.

Levá část výše uvedené nerovnosti je splněna vždy: rychlost rázové vlny je vyšší, než rychlost plynu za ní.

Vlny se v daném případě šíří s rychlostí c_0 , relativně vůči prostředí. Jestliže se v plynu šíří rázová vlna s rychlostí U , ohraničené mezemi

$$c_0 < U < c_\infty,$$

pak, se typické ostré čelo nevytvoří. Tento výsledek byl potvrzen pokusně - pozorováním šíření rázové vlny v oxidu uhličitém při $M = U/c_0 \leq 1,043$.³⁹

2.2 ŠÍŘENÍ RÁZOVÝCH VLN V NEROVNOVÁŽNÉM PROSTŘEDÍ

Nechť se nerovnovážným prostředím šíří rázová vlna. Pro jednoduchost předpokládejme, že všechny parametry prostředí jsou před vlnou konstantní. Jinak řečeno, předpokládejme, že doba relaxace v prostředí před vlnou je mnohem větší, než uvažovaný časový interval. V tom případě derivace podle normály a tlaku je možné zapsat následovně:

$$\begin{aligned} \partial p / \partial v = & (\partial p / \partial \rho)_{s, \xi_i} \partial \rho / \partial v + (\partial p / \partial s)_{\rho, \xi_i} \partial s / \partial v + \\ & + \partial p / \partial \xi_i \partial \xi_i / \partial v . \end{aligned} \quad /2.4/$$

Derivace změny entropie na čele vlny je s přihlédnutím k /2.4/ rovna

$$\delta [s] / \delta t = - [1/T \cdot \partial e / \partial \xi_i \cdot f_i] + U [\partial s / \partial v] .$$

Poznamenejme, že $\delta \xi_i / \delta t = 0$, jestliže je prostředí před vlnou homogenní t.j. $\partial \xi_i / \partial v = -1/U [\partial \xi_i / \partial t] = -1/U \cdot f_i$.

S použitím /1.47/, máme

$$\begin{aligned} & [1 + 3M_1^2 - (1 - \epsilon) M_1^2] (1 + M_1^2) 1 / \rho_1 T_2 \cdot (\partial p_2 / \partial s)_{\rho, \xi_i} \cdot \\ & \cdot 1 / c_\infty \delta M / \delta t = - (1 - M_1^2)^2 \epsilon / (1 - \epsilon) \rho_1 c_\infty^2 \partial p_2 / \partial n + \\ & + 2 \epsilon M^2 (1 - M_1^2) H + e^2 M (1 - M_1^2) / \rho_1 c^2 (1 - \epsilon) \cdot \\ & \cdot f_i [M (1 - M_1^2) \partial p_2 / \partial \xi_i - 1 / \rho_1 T_2 c_\infty (\partial p_2 / \partial s)_{\rho, \xi_i} \partial e_2 / \partial \xi_i] . \end{aligned}$$

Jestliže v relaxujícím prostředí se šíří rovinná rázová vlna konstantní intenzity / $M = \text{konst}$ / , pak za čelem rázové vlny musí existovat gradient tlaku.

V nerovnovážném plynu se rázová vlna může zesilovat v důsledku transformace zbytkové energie na energii postupného pohybu plynu. Charakter intenzity rázové vlny v závis-

losti na čase je určen stupněm nerovnovážnosti plynu před vlnou. Ve výpočtech uskutečněných řadou autoru pro oscilující nerovnovážný plyn byl objeven ostrý pokles tlaku v oblasti za rázovou vlnou, způsobený expanzí plynu. Bylo ukázáno, že efekt zesílení rázové vlny klesá se zvětšením počáteční hodnoty Machova čísla vlny.

2.3 ZVLÁŠTNOSTI ŠÍŘENÍ RÁZOVÝCH VLN V PLAZMĚ

Jestliže se rázová vlna šíří v plazmě musíme uvažovat vysokou vodivost elektronové komponenty v důsledku rozdílu hmotností elektronů a iontů. Tato skutečnost určuje strukturu rázové vlny v plazmatu. Elektronová teplota *se namění na teplotu vlny*.

Vlivem difuze se vytváří elektrická dvojvrstva.

Při šíření rázových vln v nerovnovážné slabě ionizované plazmě pozorujeme rozplynutí čela rázové vlny na stínových a interferenčních snímcích. Možné objasnění tohoto efektu spočívá v tom, že je před čelem rázové vlny plyn silně turbulentní. To vede k vymizení ostrého čela.

3. VZÁJEMNÉ PŮSOBENÍ RÁZOVÝCH VLN

3.1 VZÁJEMNÉ PŮSOBENÍ ROVINNÉ RÁZOVÉ VLNY SE SLABOU VLNOU

Nechť se v plynu šíří rovinná rázová vlna, přičemž všechny parametry před a za vlnou jsou konstantní. Zaujímá nás vzájemné působení této vlny se slabými vzruchy/akustickými vlnami, nehomogenitami hustoty, rychle zabržděnými toky plynu/. Uvedená úloha má praktický význam, neboť v prostředí ve kterém se šíří rázové vlny vždy existují slabé/ nebo konečné/ nehomogenity. Kromě toho je tato problematika těsně spojena se stabilitou rázových vln. Připomněme si ještě jednu skutečnost. Rázová vlna je vzruchem mimořádně nelineárním. Pro slabé /lineární/ vzruchy platí princip superpozice. Jako přirozená se jeví otázka, co se stane v případě vzájemného působení lineárního a nelineárního vzruchu. Omezme se zpočátku na slabé vzruchy ve formě rovinných vln. Ve skutečnosti libovolný slabý vzruch můžeme vyjádřit superpozicí rovinných vln s pomocí Fourierovy transformace. Nejprve se seznámíme se vzájemným působením prostorového vzruchu s rázovou vlnou.

Při interakci slabého vzruchu s rázovou vlnou je čelo vlny obecně zakřivené a Machovo číslo vlny /t.j. její intenzita/ se mění. Se změnou Machova čísla vlny se skokově mění i entropie při průchodu čelem vlny a v prostředí vzniká doplňková entropická excitace.

V dalším výkladu použijeme Lagrangeovy proměnné a^i . Přednost Lagrangeových proměnných spočívá v tom, že při

jejich použití se tvar vlnové akustické rovnice nemění, nezávisle na tom, pohybuje-li se prostředí, nebo je v klidu. Zavedeme souřadnice x^1, x^2 takové, že rychlost rázové ^{vlny} směřuje podél osy x^1 a čelo vlny je paralelní s osou x^2 . Ve stavu klidu platí pro kontinuum

$$x_1^1(a^1, a^2, t) = a^1, \quad x_1^2 = \epsilon a^2, \quad \epsilon = \rho_1 / \rho_2 \quad /3.1/$$

Za rázovou vlnou je

$$x_2^1 = (1 - \epsilon)Ut + a^1, \quad x_2^2 = a^2.$$

Pak

$$v_1^1 = 0, \quad v_2^1 = \partial x_2^1 / \partial t = (1 - \epsilon)U,$$

v soulase se vztahy pro rázovou vlnu. Závislosti Eulerových souřadnic částice v plynu před vlnou jsou použity ve tvaru /3.1/ pro to, aby za vlnou byla rychlost šíření vzruchů podél osy a^1 a a^2 stejná. Lineární vlnová rovnice pro oblast za rázovou vlnou má tvar

$$\partial^2 \delta p_2 / \partial t^2 = c_{20}^2 / \epsilon_0^2 \left(\partial^2 \delta p_2 / \partial a^1 \partial a^1 + \partial^2 \delta p_2 / \partial a^1 \partial a^1 \right),$$

$$c_{20} = c_2(M_0), \quad \epsilon_0 = \epsilon(M_0),$$

přičemž

$$p_2 = p_{20} + \delta p_2.$$

p_{20} je tlak za rázovou vlnou před interakcí se slabou vlnou.

Nyní si odvodíme výraz pro změnu střední křivosti H čela rázové vlny s časem. Střední křivost povrchu je dána vzorcem

$$2H = g^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta},$$

proto je

$$2 \cdot \delta H / \delta t = \delta g^{\alpha\beta} / \delta t \cdot b_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \delta b_{\alpha\beta} / \delta t \quad /3.2/$$

Z diferenciální geometrie známe vzorec

$$b_{\alpha\beta} = n_i \partial^2 x^i / \partial u^\alpha \partial u^\beta,$$

a /3.2/ s jeho pomocí přepíšeme do tvaru

$$\delta b_{\alpha\beta} / \delta t = n_i \delta / \delta t (\partial^2 x^i / \partial u^\alpha \partial u^\beta) - n_i \delta / \delta t \partial x^i / \partial u^\sigma \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma,$$

kde $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$ je Christoffelův symbol.

Změna souřadnic čela vlny je určena rychlostí jejího šíření a rychlostí prostředí před vlnou:

$$\delta x^i / \delta t = U n^i + v_1^i.$$

Vezmeme-li to v úvahu, dostaneme:

$$\begin{aligned} \delta b_{\alpha\beta} / \delta t &= \partial^2 U / \partial u^\alpha \partial u^\beta - \partial U / \partial u^\sigma \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + n_k (\partial^2 v_1^k / \partial u^\alpha \partial u^\beta - \\ &- \partial v_1^k / \partial u^\sigma \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma) - U g^{\xi\eta} b_{\alpha\xi} b_{\beta\eta}. \end{aligned} \quad /3.3/$$

Derivace $\delta g^{\alpha\beta} / \delta t$ je rovna

$$\begin{aligned} \delta g^{\alpha\beta} / \delta t &= g^{\alpha\sigma} g^{\beta\lambda} (2 U b_{\sigma\lambda} - \partial v_1^k / \partial u^\sigma \cdot \partial v_1^k / \partial u^\lambda - \\ &- \partial v_1^k / \partial u^\lambda \cdot \partial v_1^k / \partial u^\sigma). \end{aligned} \quad /3.4/$$

Dosadíme /3.3/ a /3.4/ do /3.2/ dostaneme

$$\begin{aligned} 2 \delta H / \delta t &= \Delta U + n_k \Delta v_1^k + g^{\alpha\beta} g^{\xi\eta} b_{\alpha\xi} (U b_{\beta\eta} - 2 \partial v_1^k / \partial u^\beta \cdot \\ &\cdot \partial v_1^k / \partial u^\eta), \end{aligned}$$

$$\Delta = g^{\alpha\beta} \partial^2 / \partial u^\alpha \partial u^\beta - \partial / \partial u^\sigma \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma.$$

Uvedený vzorec bude pochopitelnější, jestliže čelo vlny bude sférické a rychlost šíření bude stejná ve všech bodech čela a prostředí před vlnou bude v klidu. V tom případě

$$\delta H / \delta t = U / r^2,$$

kde r je poloměr vlny.

Jestliže bude tvar čela vlny blízký k rovině, a křivost i rychlost plynu v_1 budou stejné řádu, jakož ²ⁱ změna rychlosti podél jejího čela, pak vzorec nabude tvaru / α^1, α^2 , jsou pravoúhlé souřadnice jsou v dotyku s čelem/

$$2 \delta H / \delta t \approx \partial^2 U / \partial \alpha^1 \partial \alpha^1 + \partial^2 U / \partial \alpha^2 \partial \alpha^2 + n_i \cdot \\ \cdot (\partial^2 v_1^i / \partial \alpha^1 \partial \alpha^1 + \partial^2 v_1^i / \partial \alpha^2 \partial \alpha^2).$$

Při $v_1^i = 0$ máme

$$2 \delta H / \delta t \approx \partial^2 U / \partial \alpha^1 \partial \alpha^1 + \partial^2 U / \partial \alpha^2 \partial \alpha^2, \quad /3.5/$$

t.j. změna křivosti čela vlny závisí na změně rychlosti šíření vlny podél jejího čela.

3.1.1 Odráz rovinné akustické vlny od rázové vlny

Uvažujme akustickou vlnu, která dopadá na čelo rázové vlny ze strany stlačeného plynu. Při tom se čelo rázové vlny deformuje a vzniká odražená akustická vlna a druhotný entropický vzruch. V plynu před rázovou vlnou žádné vzruchy vzniknout nemohou, neboť rázová vlna se šíří plynem nadzvukovou rychlostí. Chování plynu v této a dalších úlohách předpokládáme ideální.

Dopadající a odražený vzruch uvažujme jako rovinné vlny, představující řešení akustických vlnových rovnic:

$$\delta p_2^{(1)} / p_1 = \varphi(n_1^{(1)} a^i - Mc_1 k_0 t),$$

$$\delta p_2^{(2)} / p_1 = \psi(n_1^{(2)} a^i + Mc_1 k_0 t),$$

$$n_1^1 = \cos \theta ,$$

$$n_2^1 = \sin \theta > 0, n_2^2 < 0, \quad x_1^1 = a^1, \quad x_1^2 = \epsilon a^2,$$

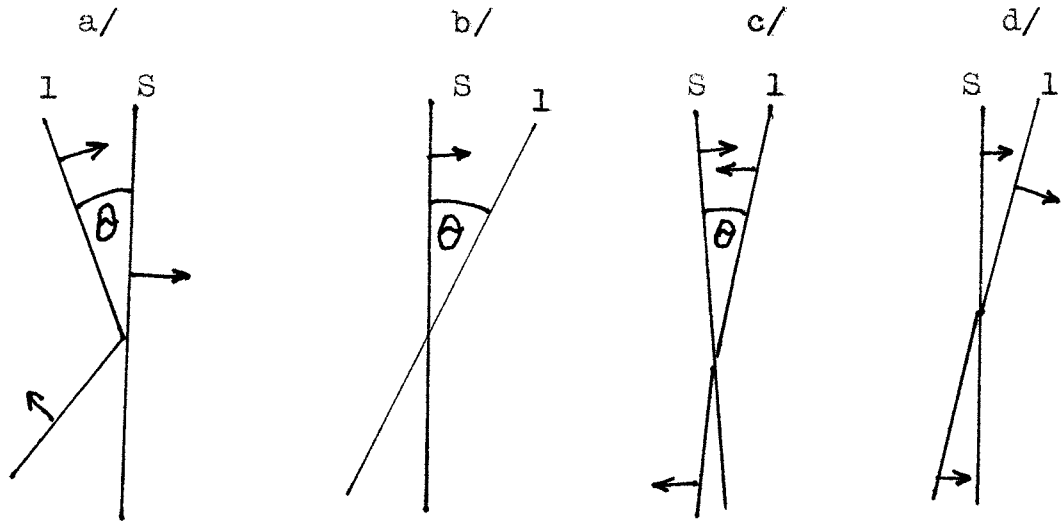
$$k_0 = \sqrt{q_0/w_0} .$$

θ označuje úhel dopadu slabé vlny na čelo rázové vlny /obr. 3.1. / Horní indexy (1) a (2) označují dopadající a odraženou vlnu.

Nalezneme úhel, pod kterým se odráží dopadající slabá vlna, nebo jinak řečeno určíme projekci jednotkové normály k čelu odražené akustické vlny. Proto použijeme následující představu.

Umístíme počátek souřadnic do průsečíku čela dopadající akustické vlny s rázovou vlnou. V tomto novém systému souřadnic bude tok ustálený. Ve starém systému to odpovídá skutečnosti, že se vzruch šíří se stejnou rychlostí podél

čela rázové vlny od dopadající i odražené vlny.



Obr. 3.1: a/ Odraz akustické vlny od vlny rázové

S - rázová vlna, l-čelo dopadající akustické vlny, 2-čelo odražení vlny, θ úhel dopadu rázové vlny.

b/ Lom rázové vlny na slabé diskontinuitě

S - rázová vlna, l-hranice diskontinuity, θ úhel dopadu rázové vlny

c/ Vzájemné působení rázové a akustické vlny

S - rázová vlna, l-akustická vlna

d/ Rázová vlna dohání akustickou vlnu

S - rázová vlna, l-akustická vlna

Z toho plyne úměrnost argumentů φ a ψ na čele rázové vlny

$$n_2^{(1)} (n_1^{(2)} + k_0) = n_2^{(2)} (n_1^{(1)} - k_0). \quad /3.6/$$

Rovnice /3.6/ má dva kořeny

$$n_1^{(2)} = \sigma_1, \quad \sigma_1 = (\alpha_1 n_1^{(1)} - 2k_0) / (\alpha_1 - 2k_0 n_1^{(1)}),$$

$$\alpha_1 = 1 + k_0^2, \quad n_1^{(2)} = -n_1^{(1)}.$$

Fyzikální smysl má pouze první kořen. Při $1 \geq n_1^{(1)} > 2k_0/\alpha_1$ existují dopadající i odražené vlny. Při $n_1^{(1)} < 2k_0/\alpha_1$ je $n_1^{(2)} < 0$. Řešení v tomto případě můžeme najít, jestli vezme-
me dvě dopadající vlny, které jsou na sobě závislé. Při $n_1^{(1)} = 1/k_0$ jsou vlny takové, že jejich celková amplituda je nulová / v systému souřadnic spojených s průsečíkem vlnových čel, rychlost plynu za vlnou je při tom rovna rychlosti zvuku/.

Funkci ψ nalezneme s použitím dynamické podmínky kompatibility ve tvaru /1.29/, spolu s linearizovaným výrazem pro změnu křivosti rázové vlny /3.5/

Dosadíme do /1.29/ výrazy

$$\delta p_2/p_1 = \varphi + \psi, \quad \delta M = (\gamma - 1)/4\gamma M_0 (\varphi - \psi)|_{a^1 = Mc_1 t},$$

nalezneme

$$\psi(a^1, a^2, t) = \frac{4q_0 F_1^2 (n_1^{(1)} - F_2)(M_0^{(1)} - F_3)}{(M_0^2 - 1)^2 w_0^2 (F_4 n_1^{(1)} - F_6)(F_5 n_1^{(1)} - F_7)} \varphi(\xi),$$

$$F_1 = (2\gamma - 1)M_0^4 + 2M_0^2 + 1,$$

$$F_{2,3} = \frac{F_8 \sqrt{w_0} \mp (\gamma + 1)(\gamma - 1)^{1/2} M_0 (M_0^2 - 1)^2}{2F_1 \sqrt{q_0}},$$

$$F_{4,5} = \frac{2\sqrt{q_0}}{w_0} (\gamma M_0^2 + 1 \pm M_0 \sqrt{(\gamma - 1)w_0}),$$

$$F_{6,7} = (\gamma - 1)(M_0^2 - 1)w_0^{-1/2} \pm \sqrt{\gamma - 1} M_0 \alpha_1,$$

$$F_8 = (5\gamma - 1)M_0^4 + 4M_0^2 - \gamma + 1,$$

$$\xi = -(\alpha_1 - 2k_0 n_1^{(1)})(n_1^{(2)} a^2 + M_0 c_1 k_0 t) / \alpha_2,$$

$$M_2^{(2)} = \sigma_2,$$

$$\sigma_2 = -\alpha_2 / (\alpha_1 - 2k_0 n_1^{(1)}), \quad \alpha_2 = k_0^2 - 1.$$

Existují takové hodnoty úhlů dopadu vlny, při kterých odražená vlna neexistuje, a jmenovitě při

$$\cos \theta = F_2 \quad \text{a} \quad \cos \theta = F_3 .$$

Při těchto úhlech dopadu se bude čelo rázové vlny deformovat a v plynu vzniknou entropické vzruchy, avšak do hloubky stlačeného plynu rázovou vlnou se akustické vzruchy šířit nebudou.

Při normálním dopadu akustické vlny na čelo rázové vlny ze strany stlačeného plynu můžeme výsledné vzruchy vyjádřit ve tvaru

$$\frac{\delta p_2(a, t)}{p_1} = \varphi (\alpha - k_0 M_0 c_1 t) + k \varphi \left[\frac{1 - k_0}{1 + k_0} (\alpha + k_0 M_0 c_1 t) \right],$$

$$k = \frac{(M_0^2 - 1)^2 [2(2 - \gamma)] M_0^2 - \gamma + 1}{j_0^2 \gamma_0},$$

$$j_0 = 1 + M_0^2 (1 + 2/k_0).$$

Jak je vidět v odražené vlně u argumentu máme součinitel, zahrnující změnu frekvence sinusové vlny v důsledku Dopplerova efektu. Koeficient odrazu k je záporný při $\gamma \leq 5/3$, t.j. vlna zředění se odráží ve tvaru kompresní vlny a naopak. Nechť $2 > \gamma > 5/3$. V tom případě $k = 0$ při $M_0 = M^* = \sqrt{(\gamma - 1) / (2(2 - \gamma))}$ /odražená vlna neexistuje/

$$k > 0 \text{ při } M_0 < M^* \quad \text{a} \quad k < 0 \text{ při } M_0 > M^*$$

Při $\gamma \geq 2$ je koeficient odrazu kladný pro všechna Machova čísla vlny M_0 .

3.1.2 Dopad rovinné rázové vlny na nehomogenní rozhraní plynu

Představme si, jak rázová vlna dopadá na rovinné rozhraní s nehomogenním plynem v klidu. Nalevo od rozhraní je hustota plynu konstantní a napravo závisí pouze na rázové souřadnici/vzdálenosti od rozhraní obr.1.16 b// Hustota se v nehomogenní oblasti řídí vztahy

$$\rho_1(x^1, x^2) = \rho_0 [1 + h'(\beta)], \quad \beta = n_1^{(1)} x^1, \quad h' = \delta\rho/\rho_0,$$

$$\rho_0 = \text{konst.}$$

Výsledkem vzájemného působení rázové vlny s nehomogenitou vzniká odražená vlna, ve které je změna tlaku za čelem vlny dána vztahem

$$\delta p_2/p_1 = \psi(n_1^{(2)} a^1 + M_0 k_0 c_1 t), \quad x_1^1 = a^1.$$

Nalezneme směr šíření odražené vlny. Z podmínky proporcionalnosti argumentů funkce h' a ψ vyplývá

$$n_1^{(2)} = \left[(n_1^{(1)})^2 - (\alpha_3 n_2^{(1)})^2 \right] (k_0 n_1^{(1)} + L) \left[(n_1^{(1)})^2 + (\epsilon n_2^{(1)})^2 \right]^{-1/2} - 1$$

$$(n_1^{(1)} + k_0 L)^{-1}, \quad /3.7/$$

$$L = \left[(n_1^{(1)})^2 - \alpha_2 (\epsilon n_2^{(1)})^2 \right]^{1/2}, \quad \alpha_3 = \epsilon k_0.$$

Při $1 > n_1^{(1)} > \beta_0 = \alpha_3 (1 + \alpha_3^2)^{1/2}$ je hodnota $n_1^{(2)} > 0$.
 Při $n_1^{(1)} = \beta_0$ je veličina $n_1^{(2)} = 0$, t.j. čelo odražené akustické vlny je kolmé k čelu rázové vlny. Při $\beta_0 > n_1^{(1)} > \beta_1 = \epsilon [\alpha_2 / (1 + \alpha_2 \epsilon^2)]^{1/2}$ je veličina $n_1^{(2)}$ záporná. Při $n_1^{(1)} < \beta_1$ se výraz pod odmocninou v /3.7/ stává záporný a řešení lineární úlohy neexistuje. To znamená, že při tako-

vých hodnotách $n_1^{(1)}$ tok v libovolně malém okolí bodu průsečíku vlnových čel nebude homogenní. Řešení, které vykazuje zvláštnosti v průsečíku vlnových čel ⁸⁴ našel Ďakov a rovněž autoři práce ^{84,87}. Funkce ψ má tvar

$$\psi(a^1, a^2, t) = \frac{2\gamma\omega_0(M_0^2-1)}{(\gamma+1)^4 M_0^4 F_9} \left(\frac{n_1^2+k_0}{n_1^{(1)}}\right)^2 [(\gamma+1)^3 M_0^6 + \omega_0^3](n_1^{(1)})^2 - \omega_0^3] h'(\eta),$$

$$F_9 = 2F_7(n_1^{(2)})^2 + 2F_8 n_1^{(2)}/k_0 + F_{10}, F_{10} = 3(\gamma+1)M_0^4 + 2(\gamma+3)M_0^2 - \gamma + 1,$$

$$\eta = M_1^{(1)}(n_1^{(2)} a^2 + M_0 c_1 k_0 t) / (n_1^{(2)} + k_0), n_1^{(2)} > 0.$$

Při $n_1^{(1)} = [\omega_0^3 / ((\gamma+1)^3 M_0^6 + \omega_0^3)]^{1/2}$ a $M_0 < \left[\frac{1}{8\gamma} (\gamma^2 + 6\gamma - 3 + (\gamma+1)\sqrt{(\gamma+1)(\gamma+9)}) \right]^{1/2}$ odražená vlna neexistuje.

Uvažujme jednorozměrný případ. Nechť čelo rázové vlny je paralelní s rozhraním nehomogenity, přičemž rozložení hustoty uvnitř nehomogenity závisí pouze na rázové souřadnici - vzdálenosti k rozhraní. V tom případě máme

$$\delta\rho_2/\rho_1 = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{M_0^2(M_0^2-1)}{j_0} h'\left(\frac{a + M_0 k_0 c_1 t}{1+k_0}\right), \quad 13.8/$$

$$\delta\rho_2/\rho_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \left[1 - \frac{2(\gamma-1)(M_0^2-1)^3}{j_0 \rho_0 \omega_0} \right] h'(a) + \frac{2(\gamma+1)M_0^4(M_0^2-1)}{j_0 \rho_0 \omega_0} h'\left(\frac{a + M_0 k_0 c_1 t}{1+k_0}\right). \quad 13.87$$

Na rozdíl od změny tlaku, která se šíří formou vlny, výraz pro změnu hustoty má dva členy. Jeden představuje vlnu, a druhý závisí pouze na souřadnici a nikoliv na čase.

Při malých hodnotách Machova čísla, kdy je vklad druhého členu v pravé části vztahu /3.8/ malý, a je možné ho zanedbat, rozložení hustoty za vlnou uvnitř nehomogenity má stejný charakter jako rozložení hustoty před vlnou.

Ze vztahu /3.8/ vyplývá, že absolutní veličina gradientu hustoty uvnitř nehomogenity vzrůstá, když se tímto prostředím šíří rázová vlna. Poměr gradientů hustot před a za vlnou je roven

$$\frac{\partial \rho_2 / \partial x}{d \rho_1 / dx} = \frac{(\gamma + 1) M_0^6}{\rho_0 \omega_0^3} \left[(\gamma - 1)^2 M_0^2 + (\gamma + 2)(\gamma + 2 \cdot (1 + \omega_0 \sqrt{\omega_0 / \rho_0})) - 5 \right].$$

Pro silné vlny / $M_0 \gg 1$ / máme

$$\frac{\partial \rho_2 / \partial x}{d \rho_1 / dx} = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^2 \cdot \frac{\gamma + 8}{\gamma + 4 + 3\sqrt{2\gamma/(\gamma - 1)}}.$$

3.1.3 Vstříčná interakce rázové a akustické vlny

Uvažujme rázovou a akustickou vlnu, které se pohybují proti sobě. V tomto případě odražená akustická vlna neexistuje, neboť žádný vzruch nemůže předejhnat čelo rázové vlny / Obr. 3.1.3c//.

Rovnice dopadající a procházející vlny zapíšeme ve tvaru

$$\delta p_1/p_\infty = \varphi(n_1^{(1)} x^i + c_\infty t), \quad \delta p_2/p_1 = \psi(n_1^{(2)} a^i + M_0 k_0 c_1 t),$$

$$x_1^1 = a^1, \quad x_1^2 = \varepsilon a^2, \quad n_1^{(1)} > 0, \quad n_1^{(2)} > 0.$$

p_∞ a p_1 jsou tlaky před a za akustickou vlnou, před interakcí s rázovou vlnou. Nalezneme úhel lomu akustické vlny na čele rázové vlny. Z podmínky úměrnosti argumentu funkce ψ a φ na čele rázové vlny vyplývá

$$n_1^{(2)} = \frac{(b^2 - (\alpha_2 n_2^{(1)})^2)(k_0 b + \sqrt{B})}{(b^2 + \varepsilon n_2^{(1)}) (b + k_0 \sqrt{B})},$$

$$B = b^2 - \alpha_2 (\varepsilon n_2^{(1)})^2, \quad b = n_1^{(1)} + 1/M_0. \quad /3.9/$$

Veličina $n_1^{(2)}$ je nulová při $n_1^{(1)} = \lambda_0$, kde

$$\lambda_0 = \frac{2(\gamma-1)(M_0^2-1)(\gamma M_0+1)}{(\gamma+1)M_0[(\gamma+1)M_0^2+\sqrt{D}]}, \quad D = q_0 w_0 [M_0^2(1+\alpha_3)-1].$$

Při $n_1^1 < \lambda_0$ řešení odpovídá superpozici dvou vln: dopadající ze strany stlačeného plynu a vlny procházející. Při $M_0 >$

$$> \alpha_1 = [1 + \sqrt{(\gamma+1)(\gamma-1)}]^{1/2} \text{ a } n_1^{(1)} < \lambda_1, \text{ kde}$$

$$\lambda_1 = [(\varepsilon_0 M_0)^2 \alpha_2 - 1] / [M_0 \varepsilon \sqrt{\alpha_2 D_1} + 1],$$

$$D = 1 + M_0^2 (1 + \alpha_2 \varepsilon^2),$$

Výraz

vztahu 3.9

pod odmocninou v 3.9 se stává záporný a řešení lineární úlohy neexistuje / tok v nekonečně malém okolí bodu průsečíků vln není homogenní/. Tvar funkce ψ určíme z /1.49/:

$$\psi = \frac{w_0}{(\gamma+1)^2 M_0^2} \left(\frac{n_1^{(2)} + k_0}{b} \right)^2 [m_1 (n_1^{(1)})^3 + m_2 (n_1^{(1)})^2 + m_3 n_1^{(1)} + m_4] \varphi(x) / F_0,$$

$$m_1 = 8 M_0 (M_0^2 - 1) (\gamma M_0^2 + 1),$$

$$m_2 = 2 [2\gamma M_0^6 + (2\gamma + 5\gamma + 5) M_0^4 - 2(2\gamma + 1) M_0^2 + \gamma - 1],$$

$$m_3 = 2 M_0 [(\gamma + 3) M_0^4 + 4(\gamma^2 + 2\gamma - 1) M_0 - \gamma^2 + 5],$$

$$m_4 = -2(\gamma - 1) M_0^6 + (3\gamma^2 + 2\gamma - 5) M_0^4 + 2(\gamma^2 + 5\gamma + 2) M_0^2 - (\gamma - 1)(\gamma + 3),$$

$$x = \frac{b (n_1^{(2)} a^i + M_0 k_0 c_1 t)}{n_1^{(2)} + k_0}.$$

V jednorozměrném případě, kdy rázová vlna se šíří ve směru kladné osy a akustická vlna v opačném směru, máme

$$\delta p_2 / p_\infty = \frac{1}{(\gamma+1) g_0} [2M_0^4 + 2(\gamma+1)M_0^3 + (3\gamma-1)M_0^2 - \gamma + 1] \varphi(x),$$

$$g_1 = (M_0 + 1)(a + M_0 k_0 c_1 t) / M_0 (1 + k_0).$$

Vidíme, že amplituda procházející vlny roste ve srovnání s amplitudou dopadající akustické vlny. Pro silné vlny je poměr procházející a dopadající vlny roven

$$\delta p_2 / p_1 \approx 2M_0^2 / (\gamma+1)(1 + \sqrt{2(\gamma-1)/\gamma}).$$

3.1.4 Rázová vlna dohání akustickou vlnu a působí na ni.

Uvažujme případ, rázová vlna dohání akustickou vlnu šířící se plynem před rázovou vlnou. V plynu za rázovou vlnou vzniká odražená akustická vlna /Obr.3.1.1d//.

Tlakový skok před a za rázovou vlnou zapíšeme ve tvaru

$$\delta p_1/p_\infty = \varphi(n_1^{(1)} x_1^1 - c_\infty t), \quad \delta p_2/p_1 = \psi(n_1^{(2)} a^2 + M_0 k_0 c_1 t),$$

$$x_1^1 = a^1, \quad x_1^{(2)} = \varepsilon a^2, \quad n_1^{(1)} > 0, \quad n_1^{(2)} > 0$$

Nalezneme směr šíření odražené vlny. Podmínka úměrnosti argumentů funkcí φ a ψ při $a^1 = M_0 c_1 t$ vede k vztahu

$$n_1^{(2)} = [b_1 - (\alpha_3 n_2^{(1)})^2] (k_0 b_1 + \sqrt{L}) [b_1^2 + (\varepsilon n_2^{(1)})^2]^{-1} \cdot (b_1 + k_0 \sqrt{L})^{-1} \quad /3.10/$$

$$L = b_1^2 - \alpha_2 (\varepsilon n_2^{(1)})^2, \quad b_1 = n_1^{(1)} - 1/M_0.$$

Veličina $n_1^{(2)}$ bude nulová při $n_1^{(1)} = \mu_0$, kde

$$\mu_0 = (1 + \alpha_3 \sqrt{D_2}) / [(1 + \alpha_3) M_0], \quad D_2 = D / (q_0 w_0). \quad \text{odmocninou}$$

Nechť $M_0 > \alpha_4$. Výraz pod $\sqrt{\quad}$ v /3.10/ bude záporný / řešení lineární úlohy neexistuje / při $n_1^{(1)} < \mu$, kde

$$\mu_1 = [1 + \varepsilon \sqrt{\alpha_2 (D_1 - 1)}] / [(1 + \alpha_2 \varepsilon^2) M_0] \quad /3.11/$$

Při $M_0 < \alpha_4$ řešení lineární úlohy neexistuje, jestliže $n_1^{(1)}$ leží v intervalu $\mu_2 < n_1^{(1)} < \mu_1$, kde

$$\mu_2 = [1 - \varepsilon \sqrt{\alpha_2 (D_1 - 1)}] / [M_0 (1 + \alpha_2 \varepsilon^2)]. \quad /3.11/$$

V jednorozměrném případě máme

$$\psi(a, t) = q_0 \frac{1+k_0}{\gamma+1} \frac{(M_0-1) [2\gamma M_0^3 - 2\gamma M_0^2 + (\gamma-1)M_0 + 1]}{F(1+k_0) + 2(\gamma+1)M_0^2(M_0^2-1)} \varphi(x),$$

$$x = \frac{M_0-1}{M_0(1+k_0)} (a + M_0 k_0 c_1 t).$$

Odvodíme limitní případy slabé $M_0 \sim 1$ / a silné $M_0 \gg 1$ /
 rázové vlny. Pro slabou vlnu je

$$\psi' = \frac{2-\gamma}{2(\gamma+1)^2} \delta M \varphi \left[\frac{\delta M (a + c_1 t)}{2} \right], \quad M_0 = 1 + \delta M, \quad \delta M \ll 1,$$

přičemž, jak se dalo očekávat, amplituda odražené vlny li-
 mituje k nule při $M_0 \rightarrow 1$.

Pro silnou rázovou vlnu je amplituda odražené vlny úměr-
 ná M_0^2 :

$$\psi = \frac{2\gamma M_0^2}{\gamma+1} \frac{1}{1 + \sqrt{2(\gamma-1)/\gamma}} \varphi(x), \quad x = \frac{a_1 + M_0 c_1 t \sqrt{2\gamma/(\gamma-1)}}{1 + \sqrt{2\gamma/(\gamma-1)}}.$$

V těchto souvislostech můžeme rázovou vlnu považovat za
 "zesilovač" i "generátor" vzruchů. Akustické vlny se při
 průchodu rázovou vlnou zesilují. Gradient hustoty uvnitř
 nehomogenity roste, prochází-li touto nehomogenitou rázová
 vlna. Důsledkem interakce akustické vlny s vlnou rázovou je
 změna Machova čísla a dodatkový vzruch podmíněný dodatko-
 vou změnou entropie.

3.1.5 Interakce rázové vlny s akustickou v termodynamicky rovnovážném plynu

Získané výsledky je možné lehce zobecnit na případ termodynamicky rovnovážného plynu se stavovou rovnicí $p = p(\rho, s)$. Vraťme se k příkladu odrazu rovinné akustické vlny od vlny rázové. Rovnice dopadající a odražené akustické vlny vyjádříme ve tvaru

$$\begin{aligned}\delta p_2^{(1)}/p_1 &= \varphi(n_i^{(1)} a^i - c_2 t/\varepsilon), \\ \delta p_2^{(2)}/p_1 &= \psi(n_i^{(2)} a^i - c_2 t/\varepsilon), \\ x_1^1 &= a^i, \quad x_1^2 = \varepsilon a^2.\end{aligned}$$

Dynamická podmínka kompatibility /1.52/ vede k rovnicím

$$\begin{aligned}\psi &= -k\varphi(\partial\varepsilon), \quad k = N_1/N_2, \\ N_1 &= M_1^2(3 + M_1^2 + (1-M_1^2)/\varepsilon - 2M_1^2 z)(n_i^{(1)})^2 - \\ &\quad - M_1[4(1+M_1^2) - M_1^2(3+M_1^2)z]n_i^{(1)} + 1 + \\ &\quad + 3M_1 - M_1^2(1-M_1^2)/\varepsilon - M_1^2(1+M_1^2)z, \\ N_2 &= (1-M_1^2)[(1-\varepsilon)M_1^2(n_i^{(1)})^2/\varepsilon + M_1^3 z n_i^{(1)} + \\ &\quad + 1 - (z + 1/\varepsilon)M_1^2]. \\ z &= (1-\varepsilon) \frac{1}{\rho_1 T_2} \left(\frac{\partial p_2}{\partial s} \right)_\rho. \quad /3.12'/ \\ \partial\varepsilon &= -(1+M_1^2 - 2M_1 \cos\theta)(n_i^{(2)} a^i + c_2 t/\varepsilon)/(1-M_1^2), \\ M_1^{(2)} &= \bar{\sigma}_1, \quad n_2^{(2)} = \bar{\sigma}_2, \\ \bar{\sigma}_1 &= [(1+M_1^2) \cos\theta - 2M_1]/(1+M_1^2 - 2M_1 \cos\theta), \\ \bar{\sigma}_2 &= -(1-M_1^2) \sin\theta/(1+M_1^2 - 2M_1 \cos\theta), \quad \text{kde}\end{aligned}$$

M_1 označuje Machovo číslo rázové vlny ~~v~~zhledem k plynu za ní.

V jiném značení bude koeficient odrazu zapsán následovně:

$$k = N_1' / N_2'$$

$$N_1' = M_1^2 (3 - J + 1/\epsilon) (n_1^{(1)})^2 - 2M_1 (M_1^2 + 2 - 2J) n_1^{(1)} + 2M_1^2 + 1 - J - M_1^2 (1 + J) / \epsilon,$$

$$N_2' = M_1^2 (-1 + 1/\epsilon) (1 + J) (n_1^{(1)})^2 + 2M_1 (M_1^2 + J) n_1^{(1)} + (1 - M_1^2 / \epsilon) (1 + J) - 2(M_1^2 + 2).$$

Jestliže $N_2' = 0$, pak koeficient odrazu bude nekonečně velký /při $N_1' \neq 0$ /. Odpovídající hodnota z_0 v /3.12/ je rovna

$$z_0 = \frac{(1 - \epsilon) / \epsilon \cdot (M_1 \cos \theta)^2 + 1 - M_1^2 / \epsilon^2}{M_1^2 (1 - M_1 \cos \theta)},$$

$$1 \geq \cos \theta \geq M_1. \quad /3.12/$$

Malezneme limity změny veličiny z_0 . Z /3.12/ vyplývá

$$\beta z_0 = -1 - y - \sigma / (y - 1),$$

$$y = M_1 \cos \theta, \quad M_1^2 \leq y \leq M_1,$$

$$\beta = \epsilon M_1^2 / (1 - \epsilon),$$

$$\sigma = (1 - M_1^2) / (1 - \epsilon),$$

odkud

$$d(\beta z_0) / dy = \frac{\sigma - (y - 1)^2}{(y - 1)^2}.$$

Veličina z_0 může mít extrém při $y = 1 - \sqrt{\sigma}$. S přihlédnutím k limitám změn y , dostaneme

$$1 - \epsilon \geq 1 / (1 - M_1^2),$$

což je nemožné. Z toho plyne že extrém neexistuje a deri-

vace dz_0/dy zachovává svoje znaménko v intervalu $M_1^2 \leq y \leq M_1$.
Znamená to, že z_0 nabývá minimální a maximální hodnoty na konci intervalů /při $\cos \theta = M_1$ a $\cos \theta = 1/$:

$$(1 + M_1)/M_1^2 \geq z_0 \geq [E(1 + M_1^2) - M_1^2]/EM_1^2.$$

To odpovídá oblasti změny parametru $\rho_1^2 U (\partial V_2 / \partial p_2)_H$, (kde index H označuje derivaci podél Hugoniotovy křivky):

$$\frac{c_2^2 - v_2^2 - v_2 U}{c_2^2 - v_2^2 + v_2 U} \leq \rho_1^2 U^2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2} \right)_H \leq 1 + 2M_1,$$

$$N_2 = \varepsilon U,$$

označované jako oblast "spontánní generace zvuku".

Takovéto označení je spojeno s tím, že libovolný slabý vzruch, který se odráží od čela vlny se silně zesílí a potom se již šíří s velkou amplitudou.

Jak jsme viděli, při výše uvedených parametrech vzniká originální rezonance. Detailnější popis s pomocí nelineárních členů ukazuje na to, že neomezený růst amplitudy odražené vlny, který vyplývá z řešení lineární úlohy neexistuje. Amplituda odražené slabé vlny zůstává malá při malé amplitudě dopadající vlny, ačkoliv ji převyšuje. Jestliže označíme změnu tlaku v dopadající vlně jako $\delta p^{(1)}$ a odraženou vlnu jako $\delta p^{(2)}$, pak při $\delta p^{(1)} \rightarrow 0$ platí přibližně

$$\delta p^{(2)} \sim \sqrt{\delta p^{(1)}}.$$

3.1.6 Prostorová interakce rázové rovinné vlny se slabými vlnami

Předchozí řešení umožňují sestrojit řešení prostorové úlohy o interakci slabých vln s rovinnou rázovou vlnou. Každý malý prostorový vzruch si můžeme v lineárním případě představit jako superpozici rovinných vln, pro něž jsou řešení již známa.

Uvažujme rychlost šíření rázové vlny ve směru osy x^3 . Pro projekci normály zachovejme předchozí označení: index 1 se vztahuje k projekci ve směru šíření, index 2 na rovinu čela rázové vlny. Nechť slabá vlna dopadá na rázovou vlnu se strany stlačeného plynu $\gamma = \text{konst}$ a má tvar / s přihlédnutím k úhlu dopadu měnicím se od 0 do β /

$$\delta p_2^{(1)}/p_1 = \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^\beta Z(\xi_0, \chi, \theta) d\theta,$$

$$\xi_0 = a^1 \sin \theta \chi + a^2 \sin \theta \sin \chi + a^3 \cos \theta - M_0 k_0 c_1 t,$$

$$x_1^1 = \varepsilon a^1, \quad x_1^2 = \varepsilon a^2, \quad x_1^3 = a^3,$$

$$x_2^1 \approx \varepsilon a^1, \quad x_2^2 \approx \varepsilon a^2, \quad x_2^3 \approx (1-\varepsilon) M_0 c_1 t + \varepsilon a^3.$$

Pak celková změna tlaku v odražené vlně a částečně i v dopadající / pro proměnné, pro které úhel dopadu leží v intervalu od β do $\pi/2$ / je

$$\delta p_2^{(2)}/p_1 = - \frac{4\gamma_0 F_1^2}{(M_0^2 - 1)^2 \omega_0^2} \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^\beta \frac{(\cos \theta - F_2) \cdot (\cos \theta - F_3)}{(F_4 \cos \theta - F_6) \cdot (F_5 \cos \theta - F_7)} \cdot Z(\xi, \chi, \theta) d\theta,$$

$$\xi = -(\alpha_1 - 2k_0 \cos \theta) [\sigma_1 a^3 + \sigma_2 (a^1 \cos \chi + a^2 \sin \chi) + M_0 k_0 c_1 t] / a_2.$$

Výsledný vzruch zahrnuje součet $\delta p_2^{(1)} + \delta p_2^{(2)}$.

Při dopadu rovinné rázové vlny do oblasti nehomogenity plynu, který se nachází v klidu, vzruch za vlnou bude charakterizován vztahem

$$\delta p_2^{(2)} / p_1 = \frac{2\gamma(M_0^2 - 1)w_0}{(\gamma + 1)^4 M_0^4} \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^r \left(\frac{n_1^{(2)} + k_0}{\cos \theta} \right)^2 \cdot \frac{[(\gamma + 1)^3 M_0^6 + w_0^3] \cos^2 \theta - w_0^3}{F_9} \varphi(\eta, \chi, \theta) d\theta,$$

$$\cos r = \alpha_3 (1 + \alpha_3^2)^{-1/2},$$

$$\eta = \cos \theta [n_1^{(2)} a^3 + n_2^{(2)} (a^1 \cos \chi + a^2 \sin \chi) + M_0 k_0 c_1 t] / (k_0 + \sigma_1),$$

přičemž

$$\int_0^{2\pi} d\chi \int_0^r \varphi(\eta_0, \chi, \theta) d\theta = h(x^1, x^2, x^3),$$

$$\eta_0 = x^1 \sin \theta \cos \chi + x^2 \sin \theta \sin \chi + x^3 \cos \theta.$$

Jestliže rázovou vlnu šířící se termodynamicky rovnovážným plynem, dohání akustická vlna, pak řešení je tvaru

$$\delta p_2 / p_1 = \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\vartheta} (\varphi + \psi) d\theta,$$

$$\cos \vartheta = 1/M_1,$$

přičemž

$$\int_0^{2\pi} d\chi \left[\int_0^{\vartheta} \varphi(\xi_0, \chi, \theta) d\theta + \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \psi(\xi, \chi, \theta) d\theta \right] =$$

$$= \frac{1}{p_1} \delta p_2^{(1)}(a^1, a^2, a^3, t).$$

$$\xi_0 = a^1 \sin \theta \cos \chi + a^2 \sin \theta \sin \chi + a^3 \cos \theta - c_2 t / \varepsilon,$$

$$\psi = -k\varphi(\xi, \chi, \theta),$$

$$\cos \alpha \varepsilon_1 = 2M_1 / (1 + M_1^2),$$

$$\xi = - [(1 + M_1^2 - 2M_1 \cos \theta) / (1 - M_1^2)] \cdot [\bar{\sigma}_1 a^3 + \bar{\sigma}_2 \cdot (a^1 \cos \chi + a^2 \sin \chi) + c_2 t / \varepsilon,$$

kde $(1/p_1) \delta p_2^{(1)}(a^1, a^2, a^3, 0)$ je známá funkce /rozložení tlaku v dopadající vlně/.

Je vhodné poznamenat, že v obecném případě neexistuje řešení prostorové úlohy o interakci rovinné rázové vlny s vlnami slabými. Nyní uvažujme případ, kdy *slabá vlna* dopadá na rázovou vlnu ze strany stlačeného plynu. Při malých úhlech dopadu, dopadající rovinné vlně bude odpovídat vlna odražená. Avšak při určitém úhlu dopadu bude sumární *vlna* shlukem dvou dopadajících vln, které jsou v určité závislosti. V prostorovém případě vznikne vzájemná závislost mezi rovinnými vlnami ve kterých se rozpadají dopadající *slabé vlny*. Docházíme k určitým podmínkám, které klademe na tvar dopadající vlny. Nejsou-li splněny, pak úloha o odrazu akustické vlny od čela rázové vlny ve formě lineárního zadání nemá řešení. Fyzikální smysl spočívá v následujícím. Jestliže změny veličin za čelem dopadající akustické vlny ve směru jejího šíření budou malé ve srovnání se změnami v příčném směru, pak vybuzené toky za čelem rázové vlny nelze považovat za superpozici dopadající a odražené akustické vlny.

Vraťme se k úloze o dopadu rázové vlny do nehomogenity. Viděli jsme, že tato úloha v lineární formulaci v obecném případě nemá řešení. Dané okolnosti umožňují jednoduchý fyzikální výklad. Jestliže změna hustoty před rázovou vlnou je ve směru jejího šíření malá ve srovnání se změnou hustoty v příčném směru, pak vybuzený tok nemůžeme považovat za vlnu zředění, která se šíří homogenním plynem za rázovou vlnou, jejíž čelo je blízké k čelu rovinnému.

3.2 JEDNOROZMĚRNÉ INTERAKCE RÁZOVÝCH VLN

V této kapitole budeme studovat interakci dvou rázových vln, které se pohybují proti sobě, interakci, kdy jedna rázová vlna dohání druhou, lom rázové vlny na kontaktním povrchu atd. Výsledky všech těchto interakcí lze nalézt řešením úlohy o spontánním rozpadu nespojitosti.

3.2.1 Rozpad diskontinuity

Pojem rozpadu diskontinuity zavádíme následujícím způsobem. Uvažujme rovinu, která dělí prostor na dvě části zaplněné plynem. V každé oblasti jsou parametry plynu konstantní, avšak odlišují se od sebe. Jestliže nejsou veličiny, které charakterizují plyn vlevo i vpravo, ve vzájemném vztahu, t.j. jsou zadány libovolně, pak hovoříme o rozpadu diskontinuity. Libovolná diskontinuita se obecně řečeno rozpadá na dva vzruchy, které se šíří na opačné strany. Takovými vzruchy mohou být buď dvě rázové vlny, a nebo rázová vlna a vlna zředění, a nebo dvě vlny zředění. Při rozpadu diskontinuity nemohou vzniknout dvě rázové vlny, které se šíří jedním směrem. Ve skutečnosti v úloze neuvažujeme žádný charakteristický rozměr, proto řešení musí být autopodobné t.j. závislé na proměnné x/t . V rovině x,t všechny vzruchy musí vycházet z jednoho bodu. Rychlost šíření vln musí být konstantní. Dvě rázové vlny se nemohou z jednoho bodu šířit na jednu stranu: druhá by dohonila první, neboť rychlost první je menší, než rychlost zvuku za ní a rychlost druhé je větší, než rychlost zvuku v plynu před ní. Spojení rázových vln odporuje podmínce autopodobnosti.

Z té samé příčiny při rozpadu diskontinuity nemůže vznikat rázová vlna a vlna zředění, které se šíří na jednu stranu, jakož i dvě expanzní vlny.

Pro jednoduchost uvažujme případ ideálního plynu a rovinu (p, v) . Předpokládejme, že $p_2 > p_1$, $v_1 = 0$, $v_2 \neq 0$. Indexy 1 a 2 se vztahují k plynu nalevo a napravo od uvažované diskontinuity. Za rázovou vlnou se ve směru kladné osy x pohybuje plyn rychlostí v :

$$v = c_1 \sqrt{2/\gamma} \cdot (p/p_1 - 1) \sqrt{(\gamma + 1) p/p_1 + \gamma - 1},$$

$$p > p_1. \quad /3.14/$$

Tento vzorec má jiný tvar než vztah /1.40/. Rychlost plynu v expanzní vlně získáme, použijeme-li Riemannovy invarianty. Pro vlny šířící se zleva napravo platí pro v :

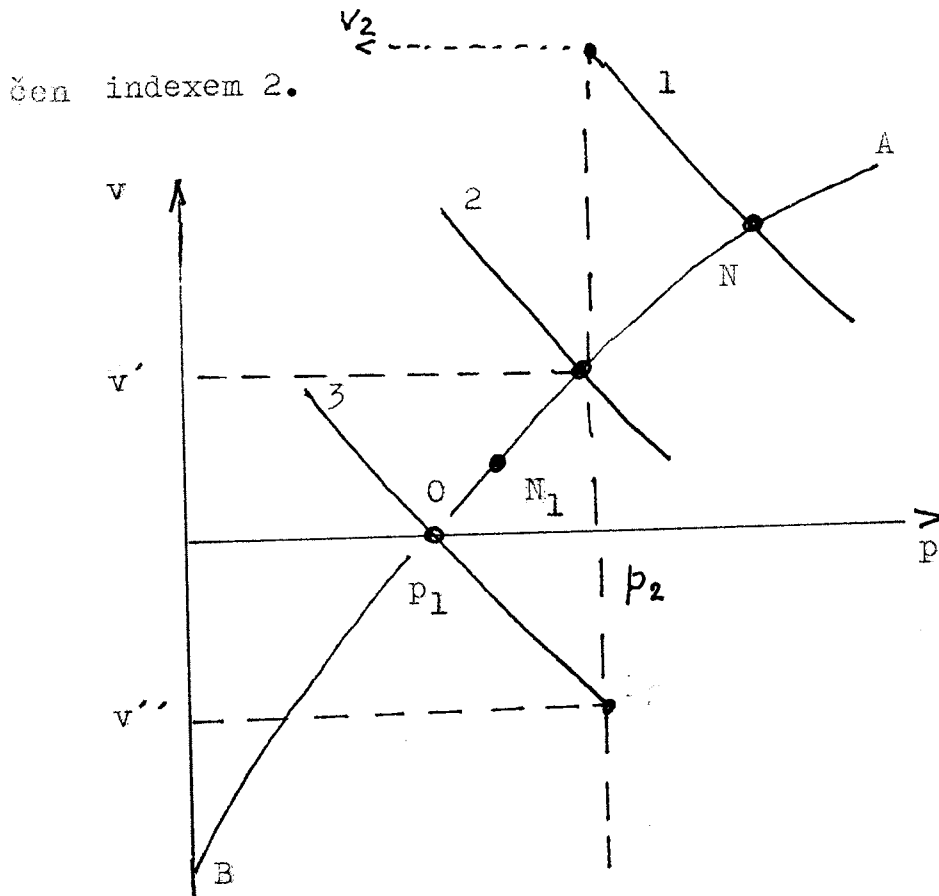
$$v = c_1 \sqrt{2(\gamma - 1)} \left[\left(\frac{p}{p_1} \right)^{\gamma - 1/2\gamma} - 1 \right], \quad p < p_1. \quad /3.15/$$

V rovině (p, v) umístíme na vodorovné ose bod $p = p_1$ a vedeme jím křivky /3.14/ a /3.15/. Dále zvolme bod $p = p_2$ a vedme jím přímkou rovnoběžnou s osou v . Tato přímkou protíná křivku AB v bodě /obr. 3.2 / s osou

$$v'/c_1 = \sqrt{2/\gamma} \cdot (p_2/p_1 - 1) \sqrt{(\gamma + 1) p_2/p_1 + \gamma - 1}.$$

Zafixujeme hodnotu p_2 a budeme měnit hodnotu rychlosti v_2 od $+\infty$ do $-\infty$.

Křivka AB představuje souhrn všech možných stavů plynu za vlnou /rázovou, nebo vlnou zředění/, šířící se zleva napravo, přičemž pro plyn v klidu je vzat index 1. Uvažujme, že $v_2 > v'$. Uvažujme výčet všech možných stavů plynu za vlnou, šířící se zprava doleva, jestliže stav v klidu je ozna-



Obr. 3.12 pv diagram použitý pro analýzu
 "spontánního rozpadu diskontinuity"
 OA - rázová vlna, OB - vlna zředění

Pro to musíme vést křivky podobné /3.14/ a /3.15/ bodem p_2, v_2 / křivka 1 na obr. 3.2 / Průsečíky představují řešení úlohy o "spontánním rozpadu diskontinuity". Ve skutečnosti, za dvěma vlnami, které se šíří na opačné strany, musí vzniknout kontaktní povrch a tlak a normálová rychlost plynu je v obou směrech stejná. Nalezené řešení splňuje tuto podmínku. Při $v_2 > v'$ rozpad diskontinuity vede k vytvoření dvou rázových vln, které se šíří na opačné strany. Skutečně: $p_N > p_2, p_N > p_1$. Jestliže $v_2 = v'$, pak k rozpadu diskontinuity nedochází a diskontinuita představuje rázovou vlnu. Necht $v_2 < v'$. V tom případě $p_1 < p_{N1} < p_2$, t.j. při šíření

rázové vlny doprava a šíření expanzní vlny doleva. Při

$v_2 = v''$, kde

$$v'' = 2c_1/(\gamma - 1) \cdot \left[(p_2/p_1)^{\gamma - 1/2\gamma} - 1 \right].$$

se diskontinuita při šíření nerozpadá a představuje vlevo šířící se expanzní vlnu. Při $v \ll v''$ při rozpadu vznikají dvě vlny zředění.

Tyto jevy prvně studoval N.E.Kočin⁶⁴. Pro případ reálného plynu je rozpad diskontinuity popsán např. v práci.⁶⁵

Získané výsledky slouží k analýze interakce rázových vln. V dalším textu tyto výsledky využijeme.

3.2.2 Vstříčná interakce rázových vln

Uvažujme, že se dvě rázové vlny pohybují proti sobě. Tlak za vlnou, která se šíří ve směru kladné osy x označíme p_2 a druhé vlně p_3 . Zvolíme $p_2 \geq p_3$. Při vstříčné interakci rázových vln se vytvářejí dvě rázové vlny, které se šíří na opačné strany. Dokažme toto tvrzení. V okamžiku srážky dvou vln se vytvoří "spontánní rozpad". Musíme ukázat, že

$$(v_2 - v_3)/c_2 > \sqrt{2/\gamma} \cdot (p_2/p_3 - 1) \sqrt{(\gamma + 1)p_2/p_3 + \gamma - 1}.$$

/3.16/

Při $p_2 = p_3$ je nerovnost očividně splněna. Dokážem, že je správná i při $p_2 > p_3$. Ze vztahu platných pro rázovou vlnu /1.36/ vyplývá že

$$v_2 = 2(M_2^2 - 1)c_1/(\gamma + 1)M_2, \quad v_3 = -2(M_3^2 - 1)c_1/(\gamma + 1)M_3.$$

/3.17/

Hodnota p_2/p_3 je

$$p_2/p_3 = (2\gamma M_2^2 - \gamma + 1)/(2\gamma M_3^2 - \gamma + 1). \quad /3.18/$$

Rychlost zvuku za vlnou

$$c_3 = c_1 \sqrt{p_3/p_1 \cdot \rho_1/\rho_3} = c_1 \sqrt{w_3 q_3} / (\gamma + 1) M_3, \quad /3.19/$$

$$w_3 = w(M_3), \quad q_3 = q(M_3).$$

S pomocí vztahů /3.17/ - /3.19/ nerovnost /3.16/ nabude tvaru

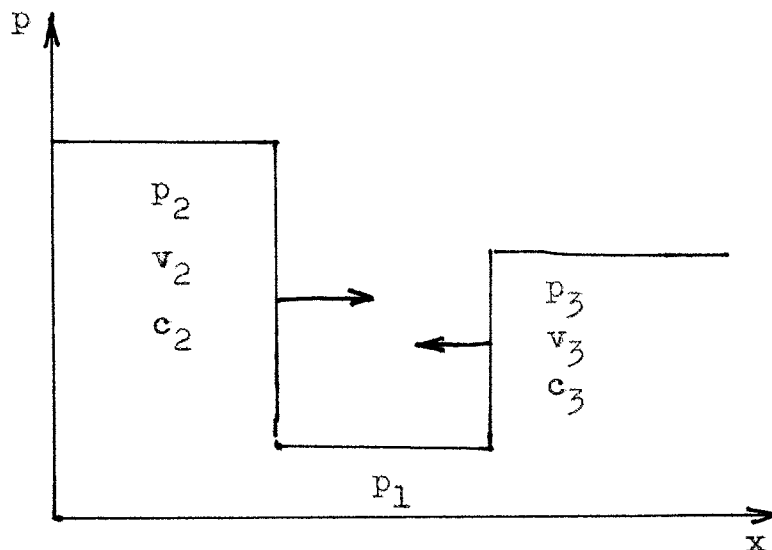
$$\frac{(M_2^2 - 1)/M_2 + (M_3^2 - 1)/M_3}{+ (\gamma + 1) M_2^2 - \gamma - 1} > \sqrt{w_3} / M_3 \cdot \frac{(M_2^2 - M_3^2) / \sqrt{\gamma - 1} M_3^2}{/3.16/}$$

Umocněním obou částí a úpravou dostaneme nerovnost /3.16/ ve tvaru

$$(M_2^2 - 1)(M_3^2 - 1) [2M_2^2 + 2(\gamma - 1)M_2M_3 - (\gamma - 1)] > 0.$$

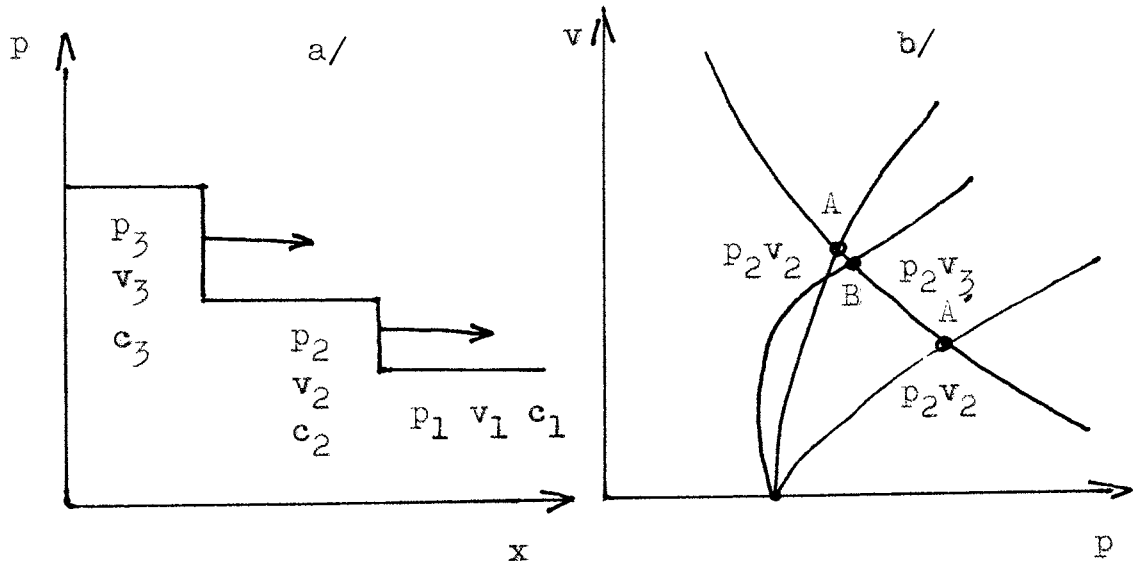
Je zřejmé, že je tato nerovnost splněna při $M_2 > M_3 > 1$.

Tím je naše tvrzení dokázáno.



Obr. 3.3. Vstřičná interakce rázových vln

3.2.3 Splynutí dvou rázových vln šířících se v jednom směru / obr. 3.4 /



Obr. 3.4 Interakce rázových vln souhlasného směru

Dvě rázové vlny se šíří homogenním plynem v jednom směru a dříve, nebo později splynou. První rázová vlna se vůči plynu za vlnou pohybuje dozvukovou rychlostí. Druhá vlna se pohybuje před čelem první a její čelo se pohybuje nadzvukovou rychlostí. V určitém okamžiku dohoní první vlnu a splyne s ní.

Označíme indexy 2 a 3 stav za první a druhou rázovou vlnou. Řešení úlohy bude záviset na poloze bodu se souřadnicemi p_3 , $v_2 + v_3$ na pv diagramu /viz obr.3.19 /, nebo přesněji na znaménku rozdílu

$$\delta = 2c_1/(\gamma + 1) \cdot (M_1^2 - 1) / M_1 + 2c_2/(\gamma + 1) \cdot (M_2^2 - 1) / M_2 - c_3 \sqrt{2/\gamma} \cdot (p_3/p_1 - 1) / \sqrt{(\gamma + 1)p_3/p_1 + \gamma - 1} \quad /3.19/$$

$$p_1 < p_2 < p_3 \cdot$$

Jeli $\delta > 0$ při rozpadu nespojitosti vznikají dvě rázové vlny, které se šíří na opačné strany a při $\delta < 0$ se doprava bude šířit rázová vlna a doleva vlna zředění. Při $\delta = 0$ k rozpadu nespojitosti nedojde a nespojitostí bude rázová vlna.

Zavedeme označení

$$M = \sqrt{[(\gamma + 1)p_3/p_1 + \gamma - 1] / 2\gamma}. \quad /3.20/$$

Spoužitím tohoto označení nabude výraz /3.19/ tvaru

$$\delta = -2c_1(\gamma + 1)^3 (M - M_1)M^2M_1^2[(\gamma + 1)M^2 + (\gamma - 1)M_1^2 - (\gamma - 1)(2M^2 - 2(\gamma - 1)MM_1 - (\gamma - 1))](M^2 - 1)(M_1^2 - 1).$$

Protože $M > M_1$ / v důsledku $p_3 > p_2$ /, pak znaménko veličiny δ závisí pouze na znaménku výrazu

$$2M^2 - 2(\gamma - 1)MM_1 - (\gamma - 1) = A(M).$$

Jestliže $A(M) > 0$, pak doleva se šíří expanzní vlna a jestliže $A(M) < 0$, pak se doleva šíří rázová vlna. Veličina M_2 je vyjádřena prostřednictvím Machova čísla M . Podmínce $M_2 > 1$ odpovídá hodnota $M > M_1$.

Rovnice $A(M) = 0$ má dva kořeny: jeden kladný a druhý záporný. Označme kladný kořen M^* . Rozlišujeme nerovnosti

$$M^* > M_1, \text{ jestliže } M_1 < \sqrt{(\gamma - 1) / 2(2 - \gamma)} = M(\gamma),$$

$$M^* < M_1, \text{ jestliže } M_1 > \sqrt{(\gamma - 1) / 2(2 - \gamma)}.$$

Veličina $\sqrt{(\gamma - 1) / 2(2 - \gamma)} > 1$, jestliže $\gamma > 5/3$. Nechť $\gamma \leq 5/3$.

V tomto případě $\sqrt{(\gamma - 1) / 2(2 - \gamma)} < 1$,

$$M_1 > \sqrt{(\gamma - 1) / 2(2 - \gamma)}, \quad M_1 > M^*, \quad A(M) > 0.$$

Z toho plyne, že při $\gamma \leq 5/3$ bude odraženým vzruchem expanzní vlna.

Nechť $2 > \gamma > 5/3$. V tomto případě $\sqrt{(\gamma - 1) / 2(2 - \gamma)} > 1$.

Analyzujeme případy $M_1 < M(\gamma)$ a $M_1 > M(\gamma)$.

a/ Při $M_1 < M(\gamma)$ je splněna nerovnost $M^* > M_1$. Jestliže $M^* > M > M_1$ /druhá vlna je slabá/, pak se odráží rázová vlna. Jestliže $M > M^* > M_1$ /druhá vlna je silná/, pak se odráží vlna zředění.

b/ Nechť $M_1 > M(\gamma)$ pak platí nerovnost $M^* < M_1$. V tomto případě $M > M^*$ a odráží se vlna zředění. Při

$$M = M_1(\gamma - 1) + \sqrt{(\gamma - 1)M_1^2 + 2(\gamma - 1)} / 2, \quad \gamma > 5/3$$

k odrazu nedochází.

Jestliže $\gamma \geq 2$, pak $M^* > M_1$. Charakter odrazu je stejný jako v případě a/.

3.2.3.1 Rázová trubice

Rázová trubice se používá při generaci rázových vln v laboratoři. Skládá se z ocelové trubky, která je rozdělena diafragmou na dva úseky: komoru nízkého tlaku a komoru vysokého tlaku. V určitém okamžiku se diafragma protrhne a dojde k toku plynu z části o vysokém tlaku do části o nízkém tlaku, a přitom se vytváří rázová vlna. Je však možné generovat rázovou vlnu v rázové trubici pomocí detonujícího plynu, trhaviny, explodujícího drátku a pod. Zjednodušeně však můžeme považovat tok plynu v rázové trubici za důsledek rozpadu nespojitosti. Při tom zanedbáme čas potřebný k rozrušení diafragmy.

Protože zprava i zleva je plyn v klidu, pak napravo se po protržení membrány bude šířit rázová vlna a nalevo vlna zředění. Mezi rázovou vlnou a vlnou zředění vznikne kontaktní povrch, který rozděluje plyn na stav (1) a (2). Tlak a rychlost plynu ^{jsou} stejné na obou stranách kontaktního povrchu:

$$p_3 = p_4,$$

$$v_3 = v_4,$$

nebo zapíšeme-li poslední rovnost s přihlédnutím k první,

$$2c_1 (M - 1/M) / (\gamma + 1) = 2c_2 \left[1 - \frac{(\gamma_2 - 1)/2 \gamma_2}{(\gamma_2 - 1)} \left(\frac{p_3}{p_4} \right)^2 \right] / (\gamma_2 - 1) \quad /3.21/$$

Poměr p_3/p_2 vyjádříme ve tvaru:

$$p_3/p_2 = p_3/p_1 \cdot p_1/p_2 = \left[\frac{(2\gamma_1 M^2 - \gamma_1 + 1)}{\gamma_1 + 1} \right] \cdot p_1/p_2 \quad /3.22/$$

Dosadíme /3.22/ do /3.21/, dostaneme

$$p_2/p_1 = \gamma_1 + 1 / (2\gamma_1 M^2 - \gamma_1 + 1) \left[1 - \frac{(\gamma_2 - 1) c_1}{(\gamma_1 + 1) c_2} \cdot \right. \\ \left. \cdot (M - 1/M) \right]^{-2\gamma_2 / (\gamma_2 - 1)} \quad /3.23/$$

Vzorec /3.23/ vyjadřuje tlakový skok s Machovým číslem. Machovu číslu $M = 1$ odpovídá poměr tlaků $p_2/p_1 = 1$. Hodnotu maximálního Machova čísla /při $p_2/p_1 \rightarrow \infty$ / nalezneme řešením kvadratické rovnice

$$1 - (\gamma_2 - 1) c_1 (M - 1/M) / (\gamma_1 + 1) c_2 = 0,$$

odkud

$$M_{\max} = \frac{(\gamma_1 - 1) c_2}{2(\gamma_2 - 1) c_1} \left[1 + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{(\gamma_2 - 1) c_1}{(\gamma_1 + 1) c_2} \right)^2} \right] \quad /3.24/$$

Při $\gamma_1 = \gamma_2 = 7/5$ a $c_1 = c_2$ je $M_{\max} \doteq 6,2$.

Z /3.23/ a /3.24/ je vidět, že pro získání silných rázových vln je výhodné naplnit komoru nízkého tlaku plynem s malou rychlostí zvuku a komoru s vysokým tlakem lehkým plynem s velkou rychlostí zvuku.

V praxi se rázová rovinná vlna vytváří až ve vzdálenosti 40 - 50 průměrů, neboť protržení membrány není okamžité. Rychlost rázové vlny z počátku roste, v jistém úseku rázové trubice je konstantní a pak klesá. V praxi rovněž zjišťujeme, že pro silné vlny při daném tlakovém skoku je maximální rychlost rázové vlny poněkud vyšší, než vypočtená podle vztahu /3.23/ a délka oblasti rovnoměrného toku je přibližně dvakrát menší, než vypočítané hodnoty. To je způsobeno dissipací energie.

Příklad 3.2.3.1.1

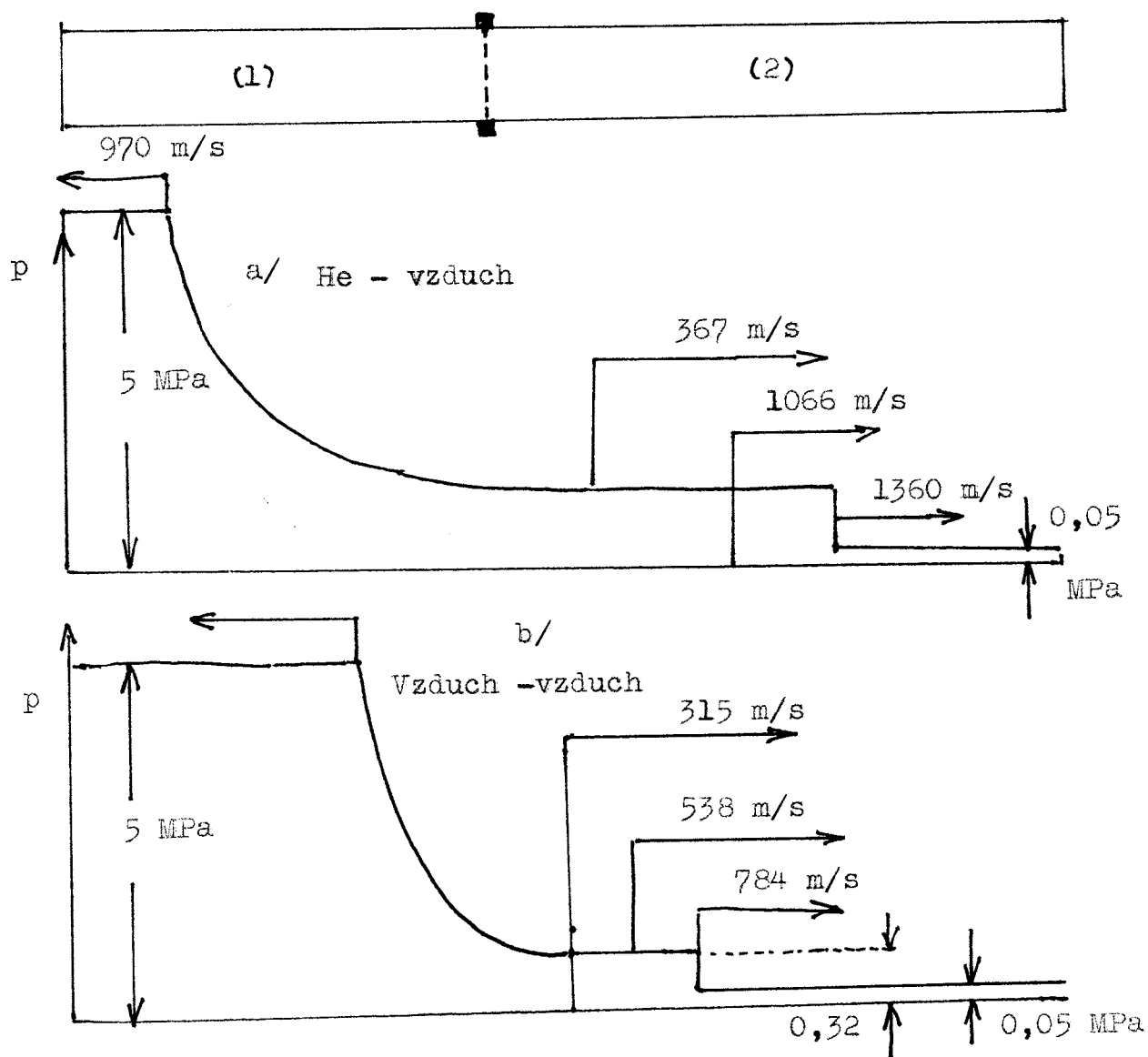
V rázové trubici je při protržení membrány v části (1) tlak 5 MPa a v část(2) 0,05 MPa. Stanovte parametry vzniklé vlny je-li

a/ část (1) naplněná heliem při teplotě 0°C , $c_1 = 970\text{ m/s}$,

$\gamma_1 = 1,66$ a část (2) je naplněna vzduchem teploty 0°C ,

$c_2 = 331\text{ m/s}$, $\gamma_2 = 1,40$.

b/ část (1) a (2) je naplněna vzduchem o teplotě 0°C



Obr. 1 Poměry v rázové trubici

Řešení:

a/

$$p_2/p_1 = 5/0,05 = 100, \quad c_1/c_2 = 331/1270 = 0,2606,$$

$$(\gamma_1 - 1) / 2\gamma_1 = (1,66 - 1) / 2 \cdot 1,66 = 0,1988,$$

$$(\gamma_2 - 1) / (\gamma_2 + 1) = (1,4 - 1) / (1,4 + 1) = 0,1667,$$

$$(\gamma_1 - 1)^2 / 2\gamma_2(\gamma_2 + 1) = (1,66 - 1)^2 / 2 \cdot 1,4(1,4 + 1) =$$

$$= 0,2546,$$

$$p_2/p_1 (\gamma_1 - 1) / 2\gamma_1 = 100^{0,1988} = 0,4003,$$

Pro kompresní vlnu platí vztah

$$(U/c_2)^2 = 2 / \gamma_2 (\gamma_2 + 1) \cdot (p_{3,4}/p_2 - 1)^2 / [p_{3,4}/p_2 + (\gamma_2 - 1) / (\gamma_2 + 1)].$$

Tlak na konci expanzní vlny p_3 musí být shodný s tlakem na čele rázové vlny /kompresní vlny/ p_4 . Pro expanzní vlnu šířící se do prostoru (1) platí

$$U/c_1 = 2 / (\gamma_1 - 1) [1 - p_{3,4}/p_1 (\gamma_1 - 1) / 2\gamma_1].$$

Vyloučením U dostaneme z obou rovnic

$$[1 - (p_{3,4}/p_1) (\gamma_1 - 1) / 2\gamma_1 \cdot (p_{3,4}/p_2) (\gamma_1 - 1) / 2\gamma_1] \cdot$$

$$\sqrt{p_{3,4}/p_2 + (\gamma_2 - 1) / (\gamma_2 + 1)} - c_2/c_1 \sqrt{(\gamma_1 - 1)^2 / 2\gamma_2 (\gamma_2 + 1)} \cdot$$

$$\cdot (p_{3,4}/p_2 - 1) = 0.$$

Po dosazení máme

$$[1 - 0,4003 (p_{3,4}/p_2)^{0,1988}] \cdot \sqrt{p_{3,4}/p_2 + 0,1667} - 0,6635 \cdot$$

$$(p_{3,4}/p_2 - 1) = 0 \quad \text{odkud} \quad p_{3,4}/p_2 = 19,54$$

Tomu odpovídá rychlost v rázové vlně

$$\begin{aligned} (U/c_2)^2 &= 2/1,4 \cdot (1,4 + 1) \cdot 18,54^2 / (19,54 + 0,1667) = \\ &= 10,38 \text{ a z toho } U/c_2 = 3,221, \end{aligned}$$

a dále

$$\begin{aligned} M_2^2 &= (\gamma_2 + 1)/2 \gamma_2 [p_{3,4}/p_2 + (\gamma_2 - 1)/\gamma_2 + 1] = \\ &= 2,4 \cdot (19,54 + 0,1667) / 2,8 = 16,891, \text{ a z toho} \\ M_2^2 &= 4,11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \quad T_{3,4}/T_2 &= [2\gamma_2 M_2^2 - (\gamma_2 - 1)] [(\gamma_2 - 1) M_2^2 + 2] / (\gamma_2 + 1)^2 M_2^2 = \\ &= [2,8 \cdot 16,891 - 0,4] [0,4 \cdot 16,891 + 2] / 2,4^2 \cdot 16,891 = \\ &= 4,221 \end{aligned}$$

Helium obsažené v prostoru 1) se rozpíná z tlaku 5 MPa na tlak 0,977 MPa. Při tom teplota klesá a

$$T_{3,4}/T_1 = (p_{3,4}/p_1)^{\gamma_1 - 1/\gamma_1} = 0,1954^{0,3976} = 0,524.$$

Rázová vlna, která má tlak 0,977 MPa se šíří rychlostí $4,11 \cdot 331 = 1360$ m/s a teplota v ní dosáhne hodnoty $4,221 \cdot 273 = 1152$ K po dobu, která závisí na délce trubky. Za rázovou vlnou se šíří rychlostí $3,221 \cdot 331 = 1066$ m/s kontaktní vlna, která odděluje vzduch teploty 1152 K v rázové vlně od helia, které se následkem expanze ochladí na teplotu $0,524 \cdot 273 = 142$ K /-131°/.

b/

$$p_2/p_1 = 100, \quad c_2/c_1 = 1,$$

$$(\gamma_2 - 1)/2\gamma_2 = 0,1429, \quad (\gamma_2 - 1)/(\gamma_2 + 1) = 0,1667,$$

$$(\gamma_2 - 1)^2 / 2\gamma_2(\gamma_2 + 1) = 0,1543, \quad (p_2/p_1)^{(\gamma_2 - 1)/2\gamma_2} = 0,5176.$$

Pak dosazením do rovnice použité již v případě a/ máme:

$$\begin{aligned} (1 - 0,5176 p_{3,4}/p_2)^{0,1429} &= \sqrt{p_{3,4}/p_2 + 0,1667} - \\ &- 0,1543 (p_{3,4}/p_2 - 1) = 0 \text{ a z toho } p_{3,4}/p_2 = 6,40. \end{aligned}$$

Této hodnotě odpovídá rychlost v rázové vlně

$$(U/c_2)^2 = 2/(1,4 \cdot 2,4) \cdot 5,40^2 / (6,40 + 0,1667) = 2,63$$

a z toho $U/c_2 = 1,626$.

Dále $M_2^2 = 2,40/2,80 \cdot 6,5667 = 5,6286$ a z toho $M_2 = 2,37$.

Teplota

$$T_{3,4}/T_2 = (2,8 \cdot 5,6286 - 0,4) \cdot (0,4 \cdot 5,6286 + 2) / 2,4^2 \cdot 5,6286 = 2,000 \text{ .}$$

Vzduch obsažený v prostoru (1) se rozepne v expanzní vlně z tlaku 5 MPa na tlak 0,32 MPa a přitom se ochladí

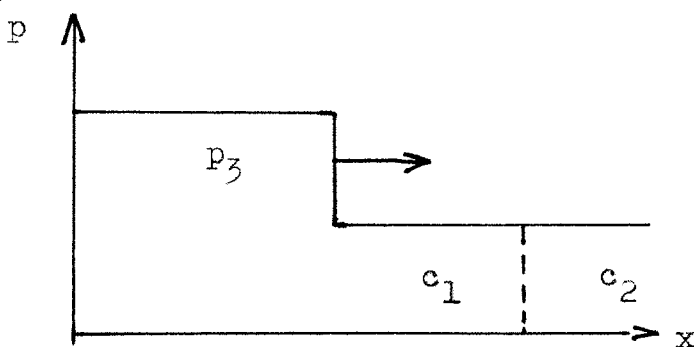
$$T_{3,4}/T_1 = 0,064^{0,2858} = 0,456 \text{ .}$$

Na obr. 1 b/ je znázorněna vzniklá vlna. Rázová vlna má tlak na čele 0,32 MPa a šíří se rychlostí $2,37 \cdot 331 = 783$ m/s.

Teplota v ní dosáhne $2,000 \cdot 273 = 546$ K za dobu, která závisí na délce trubky. Za rázovou vlnou se šíří rychlostí $1,626 \cdot 331 = 538$ m/s kontaktní vlna, která odděluje vzduch teploty 546 K /původně v části (2) / obsažený v rázové kompresní vlně od vzduchu obsaženého původně v části (2), který má na konci expanzní vlny teplotu $0,456 \cdot 273 = 125$ K /-148° C/. Je vidět, že parametry s použitím helia jsou vyšší, než při použití vzduchu. Proveďte podobný výpočet s použitím vodíku.

3.2.4 Lom rázové vlny na kontaktním povrchu

Nechť na kontaktní povrch, který rozděluje dvě části homogenního plynu v klidu s různou rychlostí zvuku dopadá rázová vlna /Obr. 3.5 /. V laboratorních podmínkách může být kontaktní povrch získán vzájemným působením rovinných rázových vln.



Obr. 3.5 Lom rázové vlny na kontaktním povrchu

V pokusech s lomem rázových vln se často používá membrána, která rozděluje dva různé plyny. Je natolik tenká, že nemá vliv na tok plynu a při průchodu rázové vlny se bez problémů lehce rozruší.

V okamžiku příchodu rázové vlny na kontaktní povrch vznikne nespojitost, která se posléze samovolně rozpadne. Při tom vpředu se bude vždy šířit rázová vlna. Odražený vzruch může být jak rázovou vlnou, tak vlnou expanzní.

Nejjednodušeji se řeší úloha v tom případě, kdy adiabatický exponent γ je stejný na obou stranách kontaktního povrchu. Uvažujme, že $c_1 > c_2$.

V tomto případě rychlost toku plynu za rázovou vlnou v plynu 1 bude větší než v plynu 2 za rázovou vlnou, odpovídající zadanému poměru tlaků / viz. odst. 3.2.1/ Odražený vzruch bude v tomto případě rázovou vlnou. Při $c_1 < c_2$

odpovídající hodnoty rychlosti toku v plynu 1 jsou menší, než v plynu 2, a odražený vzruch je centrovaná vlna zředění. Jinými slovy, když rázová vlna přechází z méně hustého plynu do plynu s větší hustotou, pak se odráží rázová vlna. Jestliže rázová vlna dopadá z hustšího plynu do plynu o menší hustotě, bude odražená vlna vlnou expanzní.

Uvedená tvrzení umožňují názorný výklad. Kontaktní povrch si můžeme představit jako píst pohybující se z plynu 1. Při $\rho_1 > \rho_2$ / $c_1 < c_2$ / rychlost pístu převyšuje rychlost toku v plynu 1 a plynem se šíří expanzní vlna.

Při $\rho_1 < \rho_2$ / $c_1 > c_2$ / je rychlost pístu menší, než je rychlost v plynu 1 a plynem se šíří rázová vlna.

Studujme případ, kdy $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Tvar rozpadu závisí na vzájemné poloze křivek

$$v_1 = c_1 \sqrt{2/\gamma_1} \cdot (p/p_1 - 1) / \sqrt{(\gamma_1 + 1) p/p_1 - \gamma_1 - 1},$$

$$v_2 = c_2 \sqrt{2/\gamma_2} \cdot (p/p_1 - 1) / \sqrt{(\gamma_2 + 1) p/p_1 + \gamma_2 - 1},$$

které představují závislosti rychlosti plynu za čelem rázové vlny na tlakovém skoku v plynech 1 a 2. Při $v_1 > v_2$ se odráží rázová vlna a při $v_1 < v_2$ se odráží vlna zředění. Při $v_1 = v_2$ odražený vzruch neexistuje. Poměr rychlostí bude

$$v_1/v_2 = \frac{c_1/c_2 \sqrt{\gamma_2/\gamma_1} \sqrt{(\gamma_2 + 1) p/p_1 + \gamma_2 - 1}}{(\gamma_1 + 1) p/p_1 + \gamma_1 - 1}.$$

Čtverec tohoto výrazu je

$$(v_1/v_2)^2 = (c_1/c_2)^2 \gamma_2/\gamma_1 [(\gamma_2 + 1) p/p_1 + \gamma_2 - 1] / [(\gamma_1 + 1) p/p_1 + \gamma_1 - 1].$$

Veličina

$$F(z) = \frac{(\gamma_2 + 1)p/p_1 + \gamma_2 - 1}{(\gamma_1 + 1)p/p_1 + \gamma_1 - 1}, \quad z = p/p_1$$

monotonně roste /při $\gamma_1 > \gamma_2$ /, nebo monotonně klesá /při $\gamma_1 < \gamma_2$ /.

Možné jsou případy

$$a/ \quad c_1/c_2 > \gamma_1/\gamma_2, \quad c_1/c_2 > \sqrt{\gamma_1(\gamma_1 + 1)/\gamma_2(\gamma_2 + 1)}.$$

Při všech hodnotách $p > p_1$ platí nerovnost $v_1 > v_2$. Odráží se rázová vlna

$$b/ \quad c_1/c_2 < \gamma_1/\gamma_2, \quad c_1/c_2 < \sqrt{\gamma_1(\gamma_1 + 1)/\gamma_2(\gamma_2 + 1)}.$$

Při všech hodnotách $p > p_1$ je splněna nerovnost $v_1 < v_2$. Odráží se centrovaná vlna zředění.

$$c/ \quad c_1/c_2 > \gamma_1/\gamma_2, \quad c_1/c_2 < \sqrt{\gamma_1(\gamma_1 + 1)/\gamma_2(\gamma_2 + 1)}$$

($\gamma_1 < \gamma_2$, $c_1 < c_2$) Při $p_2 < p^*$ /dopadající vlna je slabá/ se odráží rázová vlna a při $p_2 > p^*$ /dopadající vlna je silná/, vzniká vlna zředění.

$$d/ \quad c_1/c_2 < \gamma_1/\gamma_2, \quad c_1/c_2 > \sqrt{\gamma_1(\gamma_1 + 1)/\gamma_2(\gamma_2 + 1)}$$

($\gamma_1 > \gamma_2$, $c_1 > c_2$). Při $p_2 < p^*$ /dopadající vlna je slabá/ a odráží se expanzní vlna a při $p_2 > p^*$ /dopadající vlna je silná/, se odráží rázová vlna.

Hodnotu p^* představuje výraz

$$p^* = \gamma_1 - 1 - (c_1/c_2)^2 \gamma_2/\gamma_1 (\gamma_2 - 1) / (c_2/c_1)^2 \gamma_2/\gamma_1 \cdot (\gamma_2 + 1).$$

Při $p_2 = p^*$ k odrazu nedochází.

3.2.5 Normální odraz rázové vlny od rovinné stěny

Normální odraz rovinné rázové vlny od rovinné stěny je zvláštním případem úlohy o vstříčné interakci rázových vln, kdy jsou si jejich intenzity totožné. Při tom vzniká rázová vlna. V oblasti mezi stěnou a odraženou vlnou je plyn v klidu. Označíme indexem 1 stav před dopadající vlnou, indexem 2 stav za dopadající vlnou / nebo , což je to samé, před odraženou vlnou/, indexem 3 stav za odraženou vlnou. Zavedeme označení:

$$z_1 = (p_2 - p_1)/p_1, \quad z_2 = (p_3 - p_2)/p_2.$$

Ze vzorců /1.31/ - /1.33/ dostaneme, že v systému souřadnic spojených se stěnou je

$$v_2/v_1 = z_2/\gamma [1 + (\gamma + 1)/2\gamma z_2]^{1/2} = z_1/\gamma [1 + z_1] \cdot (1 + (\gamma - 1)/2\gamma z_1)^{1/2} \quad /3.25/$$

Z /3.25/ plyne

$$z_2^2 (1 + z_1)(1 + (\gamma - 1)/2\gamma z_1) = z_1^2 (1 + (\gamma + 1)/2\gamma z_2).$$

Tato kvadratická rovnice má dva kořeny

$$z_2^{(1)} = z_1/[1 + (\gamma - 1)/2\gamma z_1], \quad z_2^{(2)} = -z_1/[1 + z_1], \quad /3.26/$$

i když fyzikální smysl má pouze první kořen.

Z /3.26/ vyplývá, že při $(p_2 - p_1)/p_1 \ll 1$ máme

$$p_3 - p_1 \sim 2(p_2 - p_1).$$

Jinými slovy, tlakový skok pro slabé vlny vzroste dvakrát. Při $p_2/p_1 \gg 1$ /silné vlny/ bude tlak za odraženou vlnou roven

$$p_3 \simeq p_2 (3\gamma - 1)/(\gamma - 1).$$

Pro dvouatomový plyn $\gamma = 7/5$, to odpovídá osminásobnému

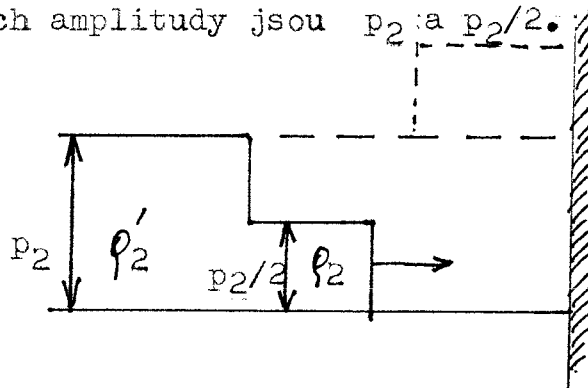
vzrůstu tlaku.

Příklad 3.2.5.1

Určete parametry odražené dvoustupňové stacionární rázové vlny od tuhé stěny.

Řešení:

Na pevnou stěnu dopadá dvoustupňová rázová vlna, druhá dohání první. Jejich amplitudy jsou p_2 a $p_2/2$. Počáteční stav v



kližu je označen indexem "1" a parametry v odražené vlně indexem "3".

$$v_2 = \sqrt{2p_2/2 \rho_1 (\gamma + 1)} + \sqrt{p_2/2 \rho_2 (1 - \rho_2/\rho_2')},$$

kde $\rho_2'/\rho_2 = [2(\gamma + 1) + \gamma - 1]/[2(\gamma - 1) + (\gamma + 1)] = (3\gamma + 1)/(\gamma - 1)$,

$$\rho_2/\rho_1 = \alpha = (\gamma + 1)/(\gamma - 1), \quad 1 - \rho_2/\rho_2' = 2/(\gamma - 1) \text{ a tudíž}$$

$$v_2 = \sqrt{\rho_2/\rho_1 (\gamma + 1)} + \sqrt{\rho_2'/\rho_2 (3\gamma - 1)}, \text{ a}$$

$$v_2 = 0 = v_1 - \sqrt{(p_3 - p_2)/\rho_2' (1 - \rho_2'/\rho_2)}, \text{ odtud}$$

$$v_2^2 = \left[\sqrt{\rho_2/\rho_1 (\gamma + 1)} + \sqrt{\rho_2'/\rho_1 (3\gamma - 1)} \right]^2 = (p_3/p_2 - 1) \rho_2/\rho_2' \cdot$$

$\cdot (1 - \rho_2'/\rho_2)$. Pro silné vlny $p_2 \gg p_1$ máme

$$z = p_3/p_2 = (3\gamma - 1)/(\gamma - 1), \quad \rho_3/\rho_2 = \alpha/(\gamma - 1),$$

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{3\gamma + 1}{3\gamma - 1} \left(\sqrt{\frac{1}{\gamma + 1}} + \sqrt{\frac{\alpha - 1}{(\gamma + 1)(3\gamma - 1)}} \right)^2 = \frac{(\alpha - 1)^2}{(\gamma + 1)\alpha + (\gamma - 1)}$$

z toho

/1/

$$z^2 - [2 + (\gamma - 1)\eta]z + [1 - \eta(\gamma - 1)] = 0$$

$$a \quad z = [2 + (\gamma + 1)\eta/2 + \sqrt{[2 + (\gamma + 1)\eta]^2 + 4[1 - \eta(\gamma - 1)]}/2]$$

Vypočítáme parametry pro $\gamma = 7/5$

/2/

$$\eta = 3,7213, \quad z = 10,9757$$

$$\rho_2'/\rho_2 = 1,625, \quad \rho_3/\rho_2' = 3,9382^+$$

$$\rho_3/\rho_1 = \rho_3/\rho_2' \cdot \rho_2'/\rho_2 \cdot \rho_2/\rho_1 = 3,938 \cdot 1,625 \cdot 6 = 38,397,$$

oproti parametrům normálního odrazu jednoduché vlny

$$z = \rho_3/\rho_2 = (3 \cdot 1,4 - 1)/(1,4 - 1) = 8,$$

$$\rho_2/\rho_1 = (1,4 + 1)/(1,4 - 1) = 6,$$

$$\rho_3/\rho_2 = 1,4/(1,4 - 1) = 3,5,$$

$$\rho_3/\rho_1 = 1,4(1,4 + 1)/(1,4 - 1)^2 = 21,$$

$$\rho_1 = 1,3\rho_1 v_1^2,$$

vidíme, že v profilované dvoustupňové vlně dostaneme pro parametry v odražené vlně větší hodnoty.

V několikastupňové profilované vlně dostaneme parametry ještě vyšší. Dalším zobecněním je kontinuálně profilovaná rovinná rázová vlna, které může být využito k hyperkompresi hmoty.⁶⁷

$$+/\quad \rho_3/\rho_2' = [(\gamma + 1)z + (\gamma - 1)]/[(\gamma - 1)z + (\gamma + 1)]. \quad /3/$$

$$\text{Pro } \gamma = 7/5 \quad \text{je } \rho_3/\rho_2' = (2,4z + 0,4)/(0,4z + 2,4).$$

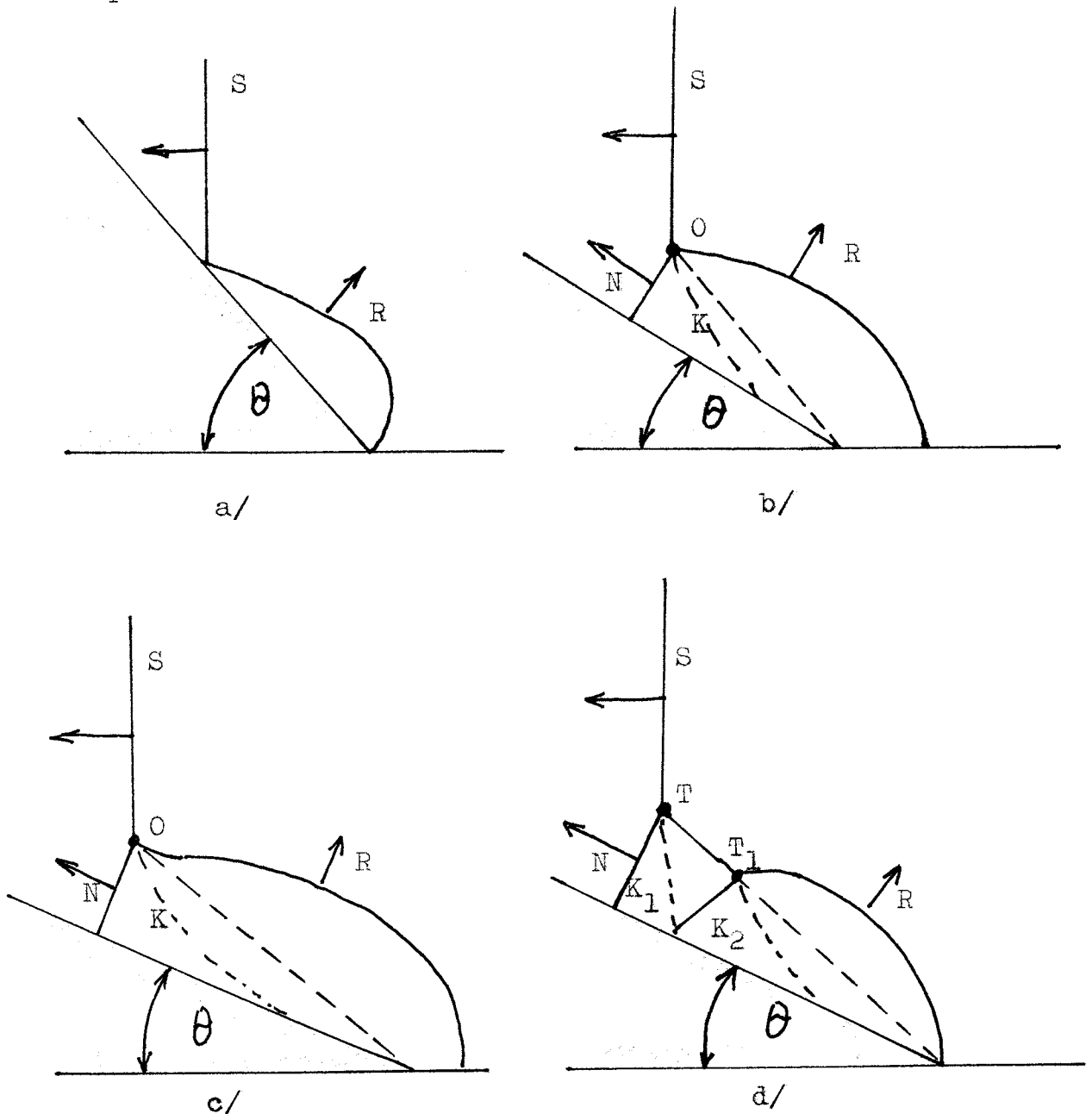
3.3 INTERAKCE ŠIKMÝCH RÁZOVÝCH VLN

Uvažujme interakci rázových vln, jejichž čela / nebo kontaktní povrchy/ svírají mezi sebou jistý úhel. Jestliže se obě rázové vlny v okolí bodů jejich střetu šíří stejným plynem, pak nazýváme takovou interakci vstřícnou. Jestliže se druhá rázová vlna šíří plynem za první rázovou vlnou, pak hovoříme o interakci dvou vln v jednom směru. Vstřícné interakce mají při malých úhlech mezi čely rázových vln regulární charakter, t.j. po interakci se vytvoří dvě nové vlny /Obr.3. 6a/ Při zvětšení úhlu mezi jejich čely regulární interakce není možná a je nahrazena Machovou interakcí / Obr. 3. 6.b/. Při Machově interakci se v trojném bodě O protínají tři čela rázových vln a kontaktní povrch rozdělující částice plynu prošlé rázovými vlnami S,R na jedné straně a rázovou vlnou N na straně druhé. Při velkých úhlech mezi vlnami v závislosti na určité intenzitě vln nemá úloha řešení. To znamená, že až na malé okolí bodu, průniku rázových vln, nelze považovat tok plynu za homogenní.

Při interakci dvou rázových vln v jednom směru se v průsečíku vytváří mohutnější rázová vlna ve srovnání s výchozí vlnou a kontaktní povrch i odražený vzruch, který může být vlnou expanzní, nebo rázovou vlnou v závislosti na intenzitě na sebe působících vln. Z toho co bylo řečeno vyplývá, že uvedené schema interakce nemůže odpovídajícím způsobem popisovat jevy, které pozorujeme při pokusech.

Jestliže se rázová vlna lomí na rozhraní dvou plynů, pak při malých úhlech dopadu vzniká procházející a odražená vlna, které mohou být vlnou rázovou a vlnou zředění. Při velkých

úhlech dopadu vzniká složitý obraz toku, který připomíná Machovskou interakci rázových vln, jejichž studium není doposud zakončeno.



Obr. 3.6. Odraz rázové vlny od rovinné stěny

a/ regulární odraz, b/ jednoduchý Machův odraz,
c/ složitý Machův odraz, d/ dvojitý Machův odraz

S - dopadající vlna, R - odražená vlna,

T - trojný bod, K - kontaktní povrch

Zajímavý jev byl pozorován při interakci rázové vlny s nahřátou vrstvou s teplotním profilem u ohřáté desky *Obr. 3.7* /rázová vlna se pohybuje podél desky/. Jestliže je rychlost rázové vlny menší než rychlost zvuku ohřátého plynu, pak rázová vlna v blízkosti stěny mizí a přeměňuje se na kompresní vlnu.⁶⁶



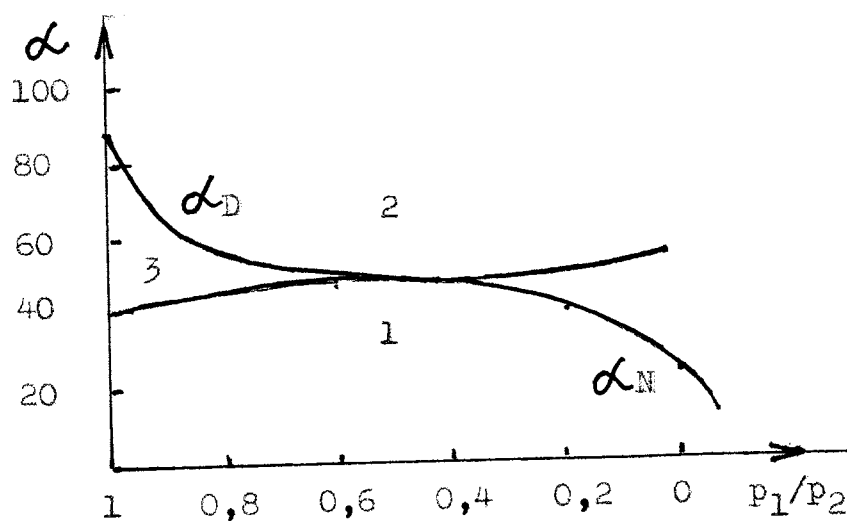
Obr. 3.7: Interferogram interakce rázové vlny s teplotní vrstvou /rázová vlna se pohybuje doprava/

3.4 ODRAZ RÁZOVÉ VLNY OD PEVNÉ STĚNY

3.4.1 Odraz rovinné rázové vlny od rovinné stěny

Při malých úhlech dopadu rázové vlny dochází k regulárnímu odrazu /obr. 3.6 a//. Při vzrůstu úhlu dopadu, v určitém okamžiku, kdy v systému souřadnic spojených s průsečíkem vlnových čel, rychlost toku za odraženou vlnou je blízká rychlosti zvuku a regulární odraz není možný. Vzniká Machův odraz /obr. 3.6 b//. Přitom částice plynu sledují pohyb dvou rázových vln, nebo Machovu vlnu t.j., rázovou vlnu OA na obr. 3.6 c//. Tyto dvě oblasti toků jsou rozděleny kontaktním povrchem. Rozlišujeme *jednoduchý*^a složitý Machův odraz /obr. 3.6 c, d//. Kromě toho existuje dvojitý Machův odraz, při kterém na odražené rázové vlně vzniká druhý trojný bod /obr. 3.6 d

Meze regulárního a Machova odrazu rovinné rázové vlny od rovinné stěny jsou uvedeny na obr. 3.8 .



Obr. 3.8. Meze regulárního a Machova odrazu

1 - Oblast regulárního odrazu, 2 - oblast Machova odrazu, 3 - oblast obou typů odrazu

Na vodorovné ose je uveden poměr tlaků p_1/p_2 v rázové vlně. Na svislé ose je vynesena úhel dopadu vlny. Pod křivkou 1 je možný pouze regulární odraz. Nad křivkou 2 je možný pouze Machův odraz. V oblasti mezi křivkami 1 a 2 je možný jak regulární, tak Machův odraz.

Pokusně byl přechod od regulárního k Machovu odrazu a naopak, sledován v pracích.^{8,68, 70- 80}

Otázky spojené s vlivem různých faktorů na přechod od regulárního k Machovu odrazu je uveden rovněž v práci.³⁹ Pěkný výklad spojený s výsledky vlastního studia jevu je uveden v práci.⁷⁸

Výsledky těchto prací jsou následující. Při stacionárním odrazu rovinné rázové vlny od pevného povrchu k přechodu dochází při $\alpha = \alpha_N$. Příkladem nestacionárního odrazu rázové vlny může být dopad rovinné vlny na zakřivenou stěnu, nebo tupé těleso. Úhel dopadu vlny přitom se nepřetržitě mění. V tom případě, jakož i při kvazistacionárním /autopodobném/ toku, přechod od regulárního odrazu k Machovu odrazu dochází při $\alpha > \alpha_D$. V práci⁷⁶ jsou komentována tato fakta následujícím způsobem. Jestliže se ohraničíme pouze pokusnými snímky jevu, je obtížné postřehnout začátek Machova odrazu, pokud se Machova konfigurace nachází v blízkosti samotné stěny. V práci⁷⁶ je učiněn předpoklad, že regulární nestacionární odraz rázové vlny je zaměňován za Machův dvojitý, který je chybně považován za odraz regulární. V jiných pracích se uvádí, že vznik mezní vrstvy^{73,77} a také vybuzení vnitřních stupňů volnosti molekul^{71,73} vede ke zvětšení úhlu přechodu od regulárního odrazu, k odrazu Machovu. Detailně, extrapolací pokus-

77
ných dat byla nalezena hodnota úhlu přechodu pro kvazistacionární tok odpovídající vymizení malé viskozity, a $\alpha = \alpha_D$. Je vhodné poukázat ještě na jednu skutečnost. Při analýze odrazu rázové vlny od zakřivené stěny se toky v okolí styku vlny se stěnou považují za lokálně homogenní. Tento předpoklad je narušen při nestacionárním odrazu vlny od tupého tělesa.

Vyšetřme, jaký vliv má na charakter toku poloha bodu přechodu od regulárního odrazu k Machovu odrazu. V bodě $\alpha = \alpha_N$ přechod regulárního odrazu k machovskému /jestli se realizuje/ musí probíhat plyně. Jestliže přechod probíhá při $\alpha = \alpha_D$, pak při přiblížení se k tomuto bodu musí hustota vzrůstat. Přechod k Machovu odrazu v tomto případě nemůže probíhat plyně. V plynu musí vznikat dodatečné vzruchy,⁷¹ které nejsou dosud pokusně prokázány. Možnost objasnění uvedeného faktu spočívá v tom, že zmíněné vzruchy jsou patrně slabé. Pokusně nalezené rozložení hustoty svědčí o tom, přechod k Machovu odrazu nastává při $\alpha \approx \alpha_D$.

Objektivní potíže určení přesných hranic mezi metodou odrazu při zkoumání jevu při pokusu a výsledky pokusů jsou ovlivněny vlastnostmi reálného plynu, které maskují hledaný výsledek. Například turbulentní víry, které vznikají v podmínkách konkrétního pokusu se řídí autonomním zákonem změny rychlosti difuze. To je neumožňuje považovat za plnohodnotné elementy automodelového toku, kde se vyžaduje rovnost rychlostí v odpovídajících bodech. Svým charakteristickým rozsahem ovlivňují jev i jiné děje v reálných plynech /například relaxační a pod./

Subjektivní příčinou snahy některých teoretiků je použi-

vání jednoduchých analytických metod při zpracování pokusných výsledků. Často se používají zjednodušené teorie, které na algebraické úrovni umožňují vypočítat lokálně některé parametry interakce. Jako příklad můžeme uvést tzv. elementární teorii Machova odrazu /ETMO/^{9,39}, ve kterých klíčové zjednodušení/jako je předpoklad o linearitě Machovy nožky a její kolmosti k povrchu tělesa/ umožňují vypočítat všechny parametry plynu v oblasti trojvlnové konfigurace s pomocí δ , θ , M , bez nalezení zákonů toku jako celku. Schema ETMO vede v některých případech/kdy není Machova vlna silně zakřivena/ k výsledkům blízkým skutečnosti. Avšak je matematicky nekorektní. Tok v okolí odražené vlny je formován vzruchy, které přicházejí do této oblasti z jiných úseků toku. Výrazem toho je i složitý popis toku pomocí eliptických rovnic. Ke správným výsledkům vede pouze úplné řešení okrajové úlohy pro celou oblast difrakce.²²

Příklad potíží, ve kterém se uvádí na pravou míru nesprávný popis Machova odrazu uvádí Griffith v referátu "Rázové vlny"³⁹, kde je poukázáno na to, jak je nesmyslné vtěsnat informace o systemizaci různých typů odrazů a pokusných výsledků do rámce přibližné Neumannovy ETMO.⁹

Úkol: Napiště si o separát práce: Harlow F.H., Amsden A.A., Fluid Dynamics- An Introductory Text, Rept. LA - 4100, Los Alamos Scientific Laboratory, University of Calif., Los Alamos, NM /1970/ a prostudujte si knihu Baker W.E.: Explosion in Air, University of Texas Press, Austin, Texas /1973/.

3.4.2 Odraz rovinné rázové vlny od hladkého tělesa libovolného tvaru

Při dopadu rovinné rázové vlny na hladký vypuklý povrch tělesa úhel dopadu nepřetržitě roste. Umístíme počátek souřadnic do bodu styku dopadající vlny s povrchem tělesa. Osa x^3 bude směřovat opačným směrem, než bude tok za dopadající vlnou. Rovnice povrchu tělesa zadáme ve tvaru $x_0^3 = -\psi(x_0^1, x_0^2)$. Jako vnitřní souřadnice bodů čela odražené vlny je výhodné použít souřadnice, které jsou projekcemi na rovinu $x^1 x^2$. Čas počítáme od okamžiku střetu rázové vlny s povrchem tělesa. Souřadnice odražené vlny jsou

$$x_s^i(x_0^1, x_0^2, t) = x_0^i + v_1^i(t - \psi/U_\infty) + Un_i(t - \psi/U_\infty + 1/2 c_1(t - \psi/U_\infty)^2 (n_i \delta M/\delta t + M \delta n_i/\delta t) + \dots \quad /3.27/$$

Dráha částice za nestacionární rázovou vlnou se určí následovně:

$$x_2^i(a^1, a^2, a^3, t + \Delta t) = x_1^i(a^1, a^2, a^3, t + \Delta t) + \Delta t \partial x^i/\partial t + 1/2 \Delta t^2 \cdot [\partial^2 x^i/\partial t^2] \quad /3.28/$$

Zde je t doba, za kterou částice dospěje na čelo rázové vlny. Jestliže je před rázovou vlnou prostředí homogenní, pak

$$\begin{aligned} x_1^i &= x_0^i + U_\infty(1 - \epsilon)\delta_{13}^i, \\ [\partial x^i/\partial t] &= U(1 - \epsilon)n_i, \quad [\partial^2 x^i/\partial t^2] = -1/\rho_2 \cdot \partial p_2/\partial x^i = \\ &= -1/\rho_1 \partial p_2/\partial v n_i - 1/\rho_2 \partial p_2/\partial u^\alpha \partial x_1^i/\partial u^\beta. \quad /3.29/ \end{aligned}$$

Z /3.27/ - /3.29/ dostaneme následující výraz pro střední křivost odražené rázové vlny v bodě N srážu s povrchem tělesa:

$$H = \frac{\cos^2 \alpha}{2L} \left[\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \cos \alpha (- (\psi_{11} + \psi_{22}) + \int_1 \int_2) - \right.$$

$$- 2 \frac{c_1}{U_\infty} \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{dM}{d\alpha} \int_3 + \frac{c_1}{U_\infty^2} \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\delta M}{\delta t} \Big], \quad /3.30/$$

$$\int_1 = 1 - 2 \frac{v}{U_\infty} + \frac{v^2 - U^2}{U_\infty^2}, \quad \int_2 = -\psi_2^2 \psi_{11} + 2\psi_1 \psi_2 \psi_{12} - \psi_1^2 \psi_{22}$$

$$\int_3 = \psi_1^2 \psi_{11} + 2\psi_1 \psi_2 \psi_{12} + \psi_2^2 \psi_{22}$$

$$\psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_0^i}, \quad \psi_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^i \partial x_0^j},$$

$$L = 1 + \sin^2 \alpha \left(\frac{v^2 - U^2}{U_\infty^2} - 2 \frac{v}{U_\infty} \right),$$

$$v = U_\infty (1 - \epsilon_\infty).$$

Z /3.30/ a mezní podmínky na povrchu tělesa nalezneme hodnoty $\delta M / \delta t$, a $\partial p_2 / \partial n$ v bodě N:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1} \frac{\delta M}{\delta t} &= - \frac{M^2 - 1}{w} \left[F - (\gamma + 1) M^2 (M^2 - 1) \frac{2(2\gamma - 1)M^2 + 5 - \gamma}{w} \right. \\ &\quad \cdot \operatorname{tg}^2 \beta \Big]^{-1} \left[\frac{\cos^2 \alpha}{(\gamma + 1)L} \left(\gamma \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} (- (\psi_{11} + \psi_{22}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_1 \int_2 \right) - 2 \frac{c_1}{U_\infty} \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{dM}{d\alpha} ((3\gamma - 1)M^2 - \gamma + 3) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \int_3 \right) - \frac{(\gamma + 1)^2 \cdot M^2 \cdot v^2}{2w} \cdot \frac{\cos^5 \alpha}{c_1^2} \cdot \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\cos^3 \beta \sin^2 \alpha} \cdot \int_3 \Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1} \frac{\partial p_2}{\partial n} &= \gamma(\gamma + 1) \left(\frac{v}{c_1} \right)^2 \frac{M^2}{2} \cdot \frac{\cos^5 \alpha}{\cos^3 \beta} \cdot \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha} \cdot \int_3 - \\ &\quad - \frac{4\gamma w}{\gamma + 1} \cdot \frac{c_1}{U_\infty^2} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{L} \cdot \frac{\delta M}{\delta t} + \frac{4\gamma w}{(\gamma + 1)L} \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{c_1}{U_\infty} \cdot \int_3 \frac{dM}{d\alpha}, \end{aligned}$$

$$F^* = F - (\gamma + 1) M^2 (M^2 - 1) \cdot \frac{2(2\gamma - 1)M^2 + 5 - \gamma}{w} \operatorname{tg}^2 \beta = 0$$

Při $\alpha = \alpha_* < \alpha_D$,

$$F = 2(2\gamma - 1)M^4 - (\gamma + 5)M^2 - \gamma + 1,$$

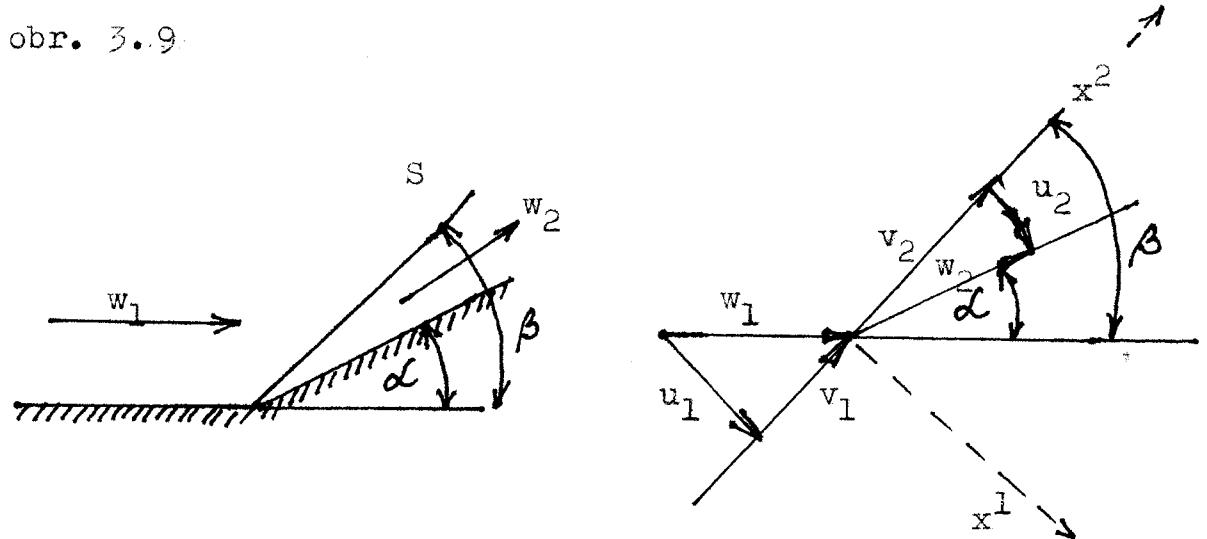
$$W = (\gamma - 1)M^2 + 2,$$

$$Q = 2\gamma M^2 - \gamma + 1.$$

Veličiny $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ jsou stejné jako ve vzorci /3.30/. Bod ve kterém je $\mathcal{L} = \mathcal{L}_*$ jeho vlastní. Křivost odražené vlny a všechny derivace neohraničeně rostou při $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_*$.

3.4.3 ŠIKMÉ RÁZOVÉ VLNY A RÁZOVÁ POLÁRA

Šikmé rázové vlny vznikají při obtékání těles s^{2,5}stupým úhlem, nebo při obtékání klínu. Situace je znázorněna na obr. 3.9.



Obr. 3.9. Schema toků při vzniku rázové vlny vektor $u_2 \perp v_2$

Zavedeme označení:

w_1, w_2 rychlosti toku plynu před a za čelem vlny

u_1, u_2 projekce rychlostí na osu x^1 , kolmou k čelu vlny

v_1, v_2 projekce rychlosti na osu x^2 , paralelní s čelem vlny

Platí

$$u_1 = w_1 \sin \beta, \quad v_1 = w_1 \cos \beta, \quad /3.31/$$

$$u_2 = w_2 \sin(\beta - \alpha), \quad v_2 = w_2 \cos(\beta - \alpha),$$

kde

$$w_1^2 = u_1^2 + v_1^2, \quad w_2^2 = u_2^2 + v_2^2.$$

Ze vztahu /3.31/ vyplývá

$$u_1/v_1 = \operatorname{tg} \beta, \quad u_2/v_2 = \operatorname{tg}(\beta - \alpha), \quad /3.32/$$

přičemž $v_1 = v_2$

Vztah /3.32/ můžeme přepsat do tvaru

$$u_2/u_1 = \rho_1/\rho_2 = \operatorname{tg}(\beta-\alpha)/\operatorname{tg}\beta. \quad /3.33/$$

Ze zákona zachování impulsu /1.32/ máme

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2 [1 - \rho_1/\rho_2] = \rho_1 w_1^2 \sin^2\beta (1 - \rho_1/\rho_2).$$

Pro polytropický plyn platí známý vztah /3.34/

$$\rho_1/\rho_2 = (\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2 / [(\gamma+1)p_2 + (\gamma-1)p_1],$$

a dosadíme-li jej do /3.34/ dostaneme

$$p_2 = \frac{2}{\gamma+1} \rho_1 w_1^2 [\sin^2\beta - (\gamma-1)/2 \rho_1 w_1^2 p_1], \quad /3.35/$$

nebo

$$p_2 - p_1 = 2 \rho_1 w_1^2 [\sin^2\beta - c_1^2/w_1^2] / (\gamma+1).$$

Nalezneme vztah mezi úhly α a β . S použitím /3.33/, /3.34/, /3.35/ dostaneme

$$\sin^2\beta (1 - \operatorname{tg}(\beta-\alpha)/\operatorname{tg}\beta) = \frac{2}{\gamma+1} [\sin^2\beta - c_1^2/w_1^2], \quad /3.36/$$

nebo ve tvaru

$$2/(\gamma-1) = (w_1/c_1)^2 \sin\beta [(\gamma+1)\operatorname{tg}(\beta-\alpha)/(\gamma-1)\operatorname{tg}\beta - 1].$$

Podmínka vzniku rázové vlny $u_1 > c_1$ a vždy /3.37/

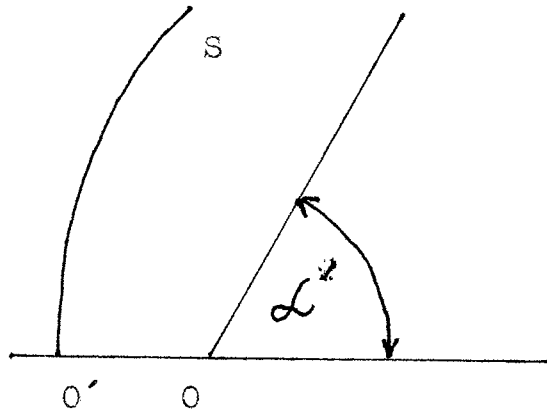
$$w_1 > c_1, \text{ neboť } v_1 > 0.$$

V teorii šikmé rázové vlny se dokazuje, že při určitých hodnotách uhlu rozevření klínu, nebo uhlu α se rázová vlna oddělí od vrcholu O a posune se do vzdálenosti O'. V úseku OO' dojde k doplňkovému adiabatickému stlačení plynu. V bodě O je tlak určíme ze vztahů / Obr. 3.10/

$$h'_2 = h_2 + u_2^2/2,$$

$$h_2'/h_1 = c_2'^2/c_2^2 =$$

$$= (p_2'/p_2)^{(\gamma-1)/2}, \quad /3.38/$$



$$h_2 = \gamma p_2 / (\gamma - 1) p_2,$$

a pak

Obr. 3.10 Oddělení rázové vlny od

je

vrcholu O při úhlu α^*

$$p_2'/p_2 = [1 + (\gamma - 1) \rho_2 u_2^2 / 2 \gamma p_2]^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad /3.39/$$

Z /3.31/ a výše uvedeného vztahu pro p_1/p_2 dostaneme

$$p_2' u_2^2 / p_2 = \rho_1 u_1^2 [(\gamma - 1) p_2 + (\gamma - 1) p_1 \sqrt{(\gamma + 1) p_2 + (\gamma - 1) p_1}] =$$

$$= (\gamma - 1) \rho_1 u_1^2 + 2 \gamma p_1 / [2 \rho_1 u_1^2 - (\gamma - 1) p_1] \quad /3.40/$$

a odkud

$$p_2'/p_2 = \left\{ [1 - (\gamma - 1)(\gamma - 1) u_1^2 + 2 c_1 \sqrt{2 \gamma 2 u_1^2 - (\gamma - 1) c_1^2 / \gamma}]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right\}. \quad /3.41/$$

Pro $\gamma = 1$ je $p_2'/p_2 = p_2'/p_1 = \sqrt{e}$.

Kritický úhel α^* určíme z rovnice /3.37/

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) / \operatorname{tg} \beta = (\gamma + 1) / (\gamma - 1) + 2 c_1^2 / (\gamma + 1) w_1^2 \sin^2 \beta. \quad /3.42/$$

Protože $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) / (1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha)$, dostaneme kubickou rovnici ve tvaru

$$\operatorname{tg}^3 \beta [(\gamma - 1) / 2 M_1^2 + 1] - \operatorname{tg}^2 \beta \cot \alpha (M_1^2 - 1) + \operatorname{tg} \beta \cdot [$$

$$\cdot (\gamma + 1) M_1 / 2 + 1] + \cot \alpha = 0,$$

kde $M_1^2 = w_1^2 / c_1^2$. Pro silné rázové vlny $M_1 \gg 1$ přechází

tato kubická rovnice na kvadratickou.

Vyloučíme-li ze základních rovnic zachování hmoty, impulsu a energie /1.31/-/1.33/ veličiny p_2 , ρ_2 , h_2 , u_1 a provedeme elementární úpravy dostaneme

$$\begin{aligned} p_2 / \rho_2 &= (\gamma - 1) h_2 / \gamma, \quad u_1^2 = w_1^2 - v_2^2, \\ c_1^2 / \gamma + w_1^2 - (u_2^2 + v_2^2)(\gamma - 1) / 2\gamma - c_1^2 u_2 / \gamma \sqrt{w_1^2 - v_2^2} &= \\ &= u_2 (w_1^2 - v_2^2) / \sqrt{w_1^2 - v_2^2} - u_2^2. \quad /3.43/ \end{aligned}$$

Základní zákonitosti šikmých rázových vln je možné vyjádřit názornou formou pomocí rovnice rázové poláry, která vyjadřuje vztah mezi parametry za čelem vlny u_2, v_2 a veličinami w_1, c_1 .

Orientujeme-li složky rychlostí w_1 a w_2 podle osy x^1 a x^2 a ve směru osy x^1 přitékající tok pak

$$w_{1,x^1} = w_1, \quad w_{1,x^2} = 0,$$

a

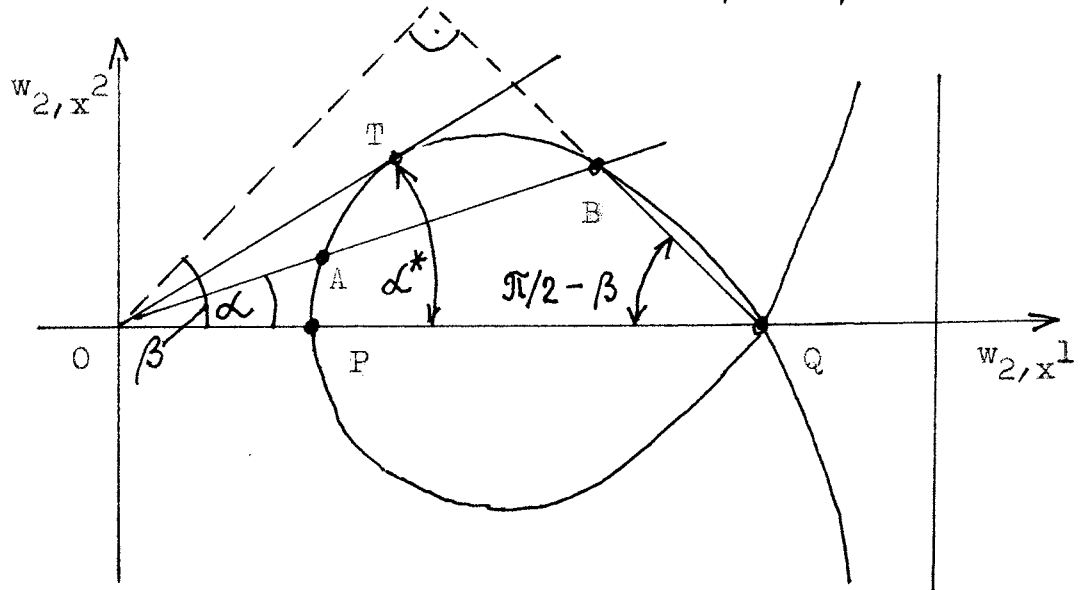
$$w_{2,x^1} = u_2 \sin \beta + v_2 \cos \beta, \quad /3.44/$$

$$w_{2,x^2} = v_2 \sin \beta - u_2 \cos \beta,$$

Vyloučíme-li z těchto rovnic veličiny β , v_2 , u_2 , dostaneme rovnici rázové poláry ¹⁰¹ /A. Busemann 1931/ viz. obr. 3.11

$$\begin{aligned} w_{2,x^2}^2 &= (w_1 - w_{2,x^1})^2 \cdot 2(w_1 - c_1^2/w_1) / (\gamma + 1) - (w_1 - w_{2,x^1}) / [\\ &[(w_1 - w_{2,x^1}) + 2c_1^2 / (\gamma + 1) w_1]]. \quad /3.45/ \end{aligned}$$

Jde o rovnici kastrofoidy, kde $\operatorname{tg} \alpha = w_{2,x^2} / w_{2,x^1}$.



Obr. 3.11 Rázová polára v rovině w_{2,x^1} , w_{2,x^2}

Rázová polára protíná vodorovnou osu v bodech P a Q, kterým odpovídají hodnoty

$$w_{2,x^1} = w_1 = c_1,$$

$$w_{2,x^1} = (\gamma - 1)w_1 / (\gamma + 1) + 2c_1 / (\gamma + 1)$$

První odpovídá elementární/zvukové vlně/. Vedeme-li z bodu O přímku pod úhlem α vidíme, že protíná poláru v bodech A a B. To znamená, že při daných parametrech α , c_1 , w_1 jsou možné dva režimy obtékání. Zpravidla se realizuje režim charakterizovaný bodem B. Z obr. 3.11 je také zřejmé, že hodnota úhlu α nemůže při daných hodnotách c_1 , w_1 převýšit určitou hodnotu α^* odpovídající tečně vedené z bodu O ke bodu T na křivce. Při $w_1/c_1 = 0$ je $\alpha^* = 0$ a při růstu veličiny w_1/c_1

hodnota α také roste a při $w_1/c_1 \rightarrow \infty$ limituje k maximální hodnotě

$$\sin \alpha^* = 1/\gamma \quad /3.46/$$

Ze dvou režimů možného obtékání úhlu $\beta - \alpha$, režim odpovídající bodu A. se může uskutečnit při obtékání tupého úhlu, pokud $\alpha > \alpha^*$. Přímému skoku hustoty bude odpovídat bod P, neboť pro něj platí $u_{2,x^2} = u_{1,x^2} = 0$ a $u_{1,x^1} u_{2,x^1} = c^2$. Okolo takového tupého úhlu vzniká křivočará rázová vlna. Ostatní větve hypocyklóidy /Descartesova listu/ za bodem Q nemají fyzikální smysl.

3.4.4 PRANDTL - MEYEROVY TOKY

Z rovnice /3.33/ s použitím vztahu pro ρ_2/ρ_1

$$\rho_2/\rho_1 = (\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta / (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2,$$

dostaneme vztah

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) / \operatorname{tg} \beta = u_2/u_1 = \rho_1/\rho_2 = \frac{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta}.$$

Rozdělíme-li čitatel i jmenovatel na $1/2 M_1^2 \sin^2 \beta$, dostaneme

$$1/ M_1^2 \sin^2 \beta = (\gamma + 1) \operatorname{tg}(\beta - \alpha) / 2 \operatorname{tg} \beta - (\gamma - 1)/2,$$

a z toho

$$M_1^2 \sin^2 \beta - 1 = (\gamma + 1) M_1^2 \sin \beta \sin \alpha / 2 \cos(\beta - \alpha). \quad /3.46/$$

Při malých úhlech odklonu α , můžeme tento vzorec přepsat do tvaru

$$M_1^2 \sin^2 \beta - 1 \approx (\gamma + 1) M_1^2 \operatorname{tg} \beta \cdot \alpha / 2. \quad /3.47/$$

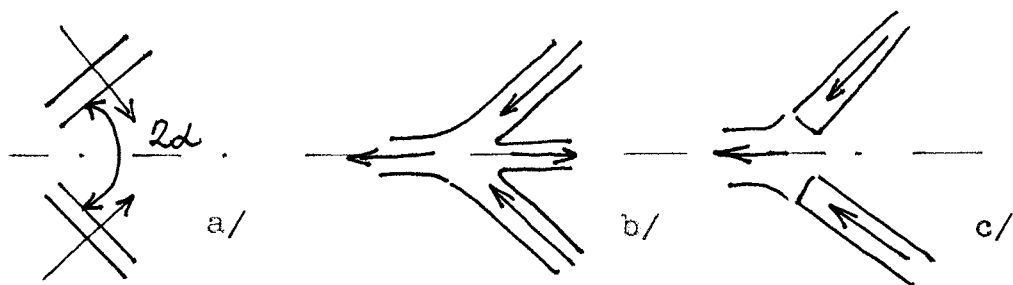
Je-li Machovo číslo velmi veliké, pak $\beta \ll 1$, ale $M_1 \beta \gg 1$

Příklad 3.4.3.1

Odvoďte limitní vzorec pro rychlost kumulativního paprsku, je-li předmětem kumulace plyn, plazma, stlačitelné medium.

Řešení:

Nejprve si připomeneme základní vzorec z teorie kumulativních paprsků pro nestlačitelnou kapalinu. Nechť se dvě rovinné vrstvy kapaliny střetávají s rychlostmi V_0 pod úhlem 2α



Děj je stacionární v systému souřadnic, pohybujících se rychlostí $V_0/\sin\alpha$, a v ní srážející se vrstvy mají rychlost $V_0 \cot\alpha$. Protože Bernoulliho integrál je konstantní $2p + v^2 = \text{konst}$ a tlak p je v ∞ nulový, rychlost všech paprsků v nekonečné vzdálenosti od srážky je rovna $V_0 \cot\alpha$. Rychlost kumulativního paprsku, který se pohybuje v laboratorním systému dopředu je

$$V_j = V_0 \cot\alpha + V_0/\sin\alpha = V_0 \cot\alpha/2 \quad \text{I.}$$

Při malých α máme $V_j \gg V_0$ a kumulace se projevuje silnou koncentrací kinetické energie v kumulativním paprsku.

V plynu, nebo plazmě je analogický efekt omezen stlačitelností. Uvažujme například srážku dvou vrstev plynu, nebo plazmy ve vakuu a budeme předpokládat, že

$$V_0 \gg c_0, \quad \text{II.}$$

kde c_0 je rychlost zvuku.

Poznamenejme, že pokud se podmínka II. naruší je nutné počítat s rozletem plynu. Při expanzi plynu do vakua se plyn na rozhraní ochlazuje a rychlost zvuku je mnohem menší, než rychlost plynu. Proto, je-li dokonce nerovnost II. narušena v objemu plynu, tím více je tato podmínka splněna při srážce vrstev plynu.

Při platnosti podmínky II. závisí režim srážek vrstev plynu pouze na úhlu α . Jestliže $\alpha^* = \arcsin 1/\gamma$ /výsledek 3.46/, pak se kumulativní paprsek netvoří a toky v bodech srážky vrstev se odklánějí na šikmých rázových vlnách /c/ Při

$$\alpha > \alpha^*$$

III.

je taková konfigurace nemožná. V tomto případě se vytváří kumulativní paprsek, jehož rychlost je dána vztahem I.

Podmínka III. vede k omezení rychlosti paprsku

$$V_j < V_0 (1 + \cos \alpha^*) / \sin \alpha^* = V_0 [\gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2}] =$$

$$\text{Pro } \gamma = 5/3 \quad = 3V_0,$$

což je důsledek stlačitelnosti. Pro $\gamma = 3 - 7$, což je hodnota pro málo stlačitelné kapaliny - vodu a kovy je $V_j < 10 - 15V_0$.

V praxi však takových hodnot nedosahujeme, neboť nejde o srážku ideálních kapalin a kumulativní paprsek je ovlivňován hydrodynamickými nestabilitami.

je

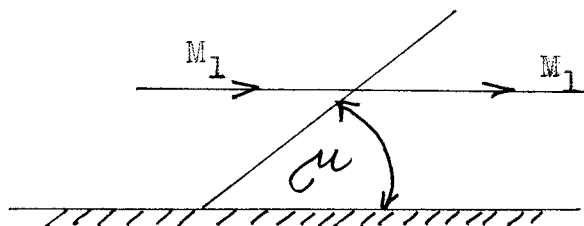
$$\beta = (\gamma + 1)\alpha / 2 .$$

V případě malé hodnoty α hodnota β se přibližuje k $\pi/2$, nebo k hodnotě μ , v závislosti od toho, je-li $M_2 \geq 1$.

Je-li $M_2 > 1$, pak můžeme použít přibližný výraz $\operatorname{tg} \beta \approx \operatorname{tg} \mu = 1/\sqrt{M_1^2 - 1}$. Pak

$$M_1^2 \sin^2 \beta - 1 = (\gamma + 1)\alpha M_1^2 / 2\sqrt{M_1^2 - 1} . \quad /3.48/$$

Úhel μ představuje případ, kdy $\alpha \rightarrow 0$ a $\beta \rightarrow \mu$ a /3.46/ přechází na rovnici $M_1^2 \sin^2 \mu - 1 = 0$.



Obr. 3.12 Přečlov skokové změny na Machovu

linii. / $\mu = \arcsin 1/M$ /

Chceme-li vyjádřit jak se odlišuje úhel β na Machově úhlu μ položíme

$$\beta = \mu + \varepsilon ,$$

kde $\varepsilon \ll \mu$. Výraz $\sin(\mu + \varepsilon)$ můžeme přibližně vyjádřit vzhledem k relacím $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$, $\cos \varepsilon \approx 1$ ve tvaru $\sin \beta \approx \sin \mu + \varepsilon \cos \mu$ a ze vztahů $\sin \mu = 1/M_1$ a $\cot \mu = \sqrt{M_1^2 - 1}$, pak dostaneme $M_1 \sin \beta \approx 1 + \varepsilon \sqrt{M_1^2 - 1}$, nebo $M_1^2 \sin^2 \beta \approx 1 + 2\varepsilon \sqrt{M_1^2 - 1}$.

Srovnáme-li poslední vztah s /3.48/, dostaneme závislost ε a α ve tvaru $\varepsilon = (\gamma + 1) M_1^2 \alpha / 4(M_1^2 - 1)$. Jestliže úhel odklonu α má konečnou hodnotu, pak úhel sklonu slabého skoku

se liší od Machova úhlu o hodnotu ε .

Vyjádříme změnu rychlosti toku při přechodu přes skok:

$$\begin{aligned} w_2^2/w_1^2 &= (u_2^2 + v_2^2)/(u_1^2 + v_1^2) = [\operatorname{tg}^2(\beta - \alpha) + 1]/\operatorname{tg}^2\beta + 1 = \\ &= \cos^2\beta/\cos^2(\beta - \alpha). \text{ Pro } \cos^2\beta \text{ máme} \end{aligned}$$

$$\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = (M_1^2 - 1)(1 - 2\varepsilon\sqrt{M_1^2 - 1})/M_1^2.$$

Odsud dostaneme analogické výrazy pro $\cos^2(\beta - \alpha)$, jestliže ε zaměníme na $\varepsilon - \alpha$. Jestliže zanedbáme členy řádu α^2 a vyšší dostaneme

$$w_2/w_1 \approx 1 - \alpha/\sqrt{M_1^2 - 1},$$

$$Aw/w_1 \approx -\alpha/\sqrt{M_1^2 - 1}. \quad /3.48/$$

Změna všech ostatních parametrů toku, včetně entropie je úměrná α . / $4s \sim \alpha^3$ /

Přibližný vztah /3.48/ v diferenciální formě můžeme použít k odvození zákonů isentropického toku plynu při jeho stlačení, nebo zředění související s odklony o úhel α .

Rovnice /3.48/ je použitelná pro libovolný bod isentropického odklonu plynového toku a po integraci získáme vztah $\alpha = \varphi(M)$, kdy centrovaná expanzní vlna byla studována Prandtl^{em} a Meyerem. Rovnici /3.48/ přepíšeme do tvaru

$$-d\alpha = \sqrt{M^2 - 1} dw/w, \text{ nebo}$$

$$-\alpha + \text{const} = \int \sqrt{M^2 - 1} dw/w = \varphi(M), \quad /3.49/$$

kde $\varphi(M)$ je funkce Prandtl^{ova}-Meyera. Abychom mohli vyčíslit integrál a nalézt vztah pro φ , musíme w vyjádřit pomocí vztahů

$$w = cM, \quad c_1^2/c_2^2 = 1 + (\gamma - 1)M^2/2,$$

odkud dostaneme

$$dw/w = dM/M + dc/c = dM/M [1 + (\gamma - 1) M^2/2] .$$

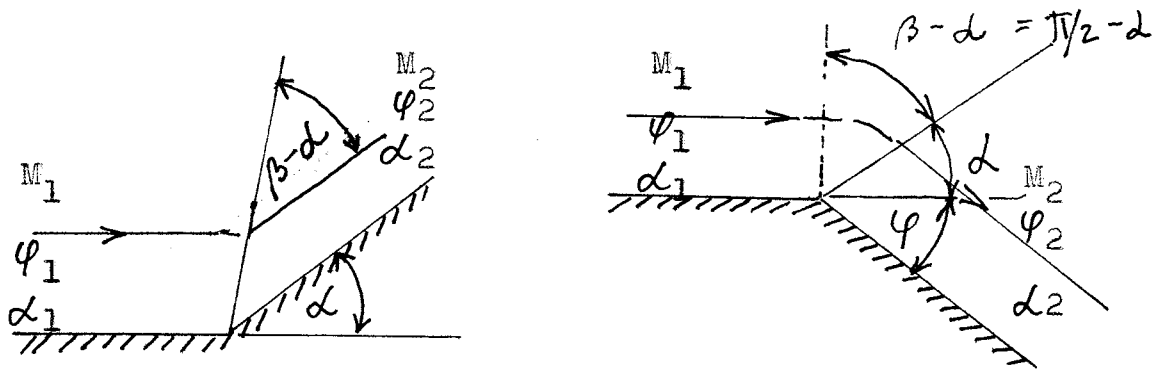
Pak má funkce $\varphi(M)$ tvar

$$M = \sqrt{M^2 - 1} / [1 + (\gamma - 1) M^2/2] \cdot dM/M = \sqrt{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)} \cdot \operatorname{arccotg} \sqrt{(\gamma - 1)(M^2 - 1)/(\gamma + 1)} - \operatorname{arccotg} \sqrt{M^2 - 1} .$$

Integrační konstanta byla vybrána tak, aby /3.50/ $M = 1$ odpovídala hodnota $\varphi = 0$. Bezrozměrnou veličinu φ / v radiánech/ je možné převést na stupně. Nadzvukové Machovo číslo M je vždy spojeno s určitou hodnotou Prandtl-Meyerovy funkce φ . Při změně M od 1 do ∞ hodnota φ monotonně roste od 0 do $\varphi_{\max.}$, přičemž ¹⁰³

$$\varphi_{\max} = \pi \left[\sqrt{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)} - 1 \right] / 2 \quad /3.51/$$

Na obr. 3.13 znázorněna Prandtl-Meyerova funkce, a Machovo číslo s úhlem odklonu pro případy komprese a expanze.



$$\varphi_2 = \varphi_1 - |\alpha_2 - \alpha_1| \quad \varphi_2 = \varphi_1 + |\alpha_2 - \alpha_1|$$

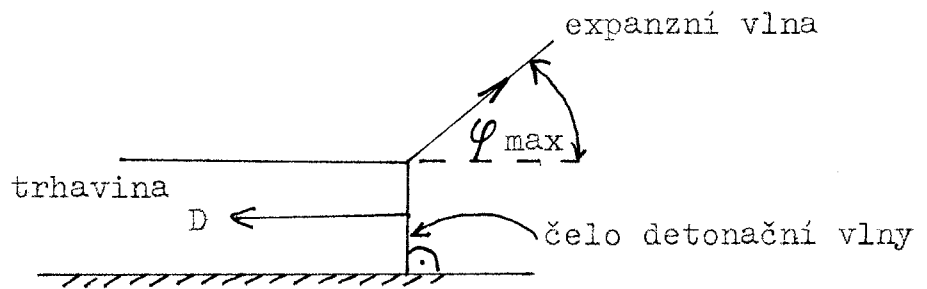
Komprese

Expanze

Obr. 3.13 Vztah mezi φ a α při prostých isentropických odklonech toku.

Při expanzi plynu s $\gamma = 7/5$ do vakua je $\varphi_{\max} \doteq 2,28 \text{ rad} = \doteq 130,4^\circ$, kdežto při nadzvukovém průniku kumulativního kovového paprsku do vakua je úhel odklonu, uvažujeme-li s $\gamma = 4$, $\varphi_{\max} \doteq 0,46 \text{ rad} \doteq 26^\circ$ a rozšíření výstupního otvoru v terči bude zanedbatelné.

V případě detonace v režimu tzv. "klouzavé detonace", kdy je čelo detonační vlny kolmé k povrchu tělesa a detonační zplodiny proudí podél povrchu je úhel odklonu při jejich expanzi do vakua při $\gamma = 3$: $\varphi_{\max} = 37,15^\circ$. Jde-li o expanzi do vzduchu s $\gamma = 7/5$ představuje rozdíl $\varphi_{\max} - \varphi_{\max, \text{vzduch}}$, u vojenských trhavin 2 - 3°.

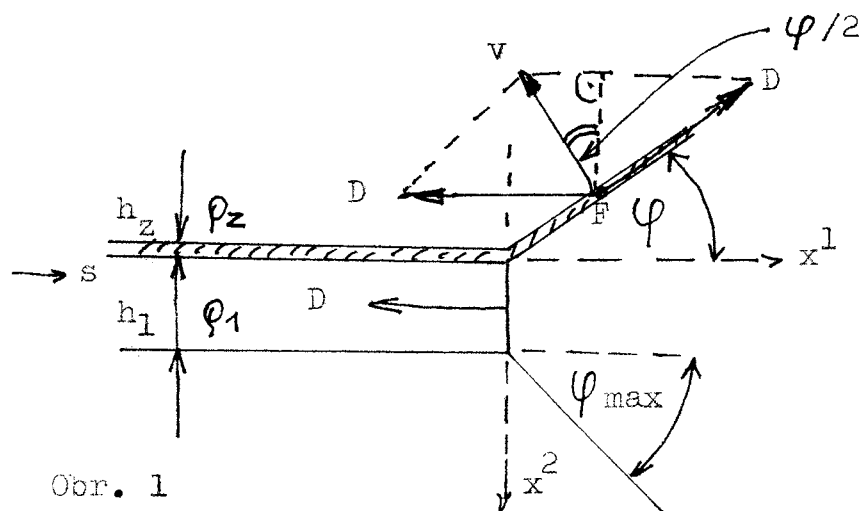


Obr. 3.14 Častý případ režimu "klouzavé detonace"

Příklad 3.4.4.1

Odvoďte přibližný vztah pro rychlost urychlované desky pomocí detonace trhaviny v režimu "klouzavé detonace".

Řešení:



Obr. 1

Z obr. 1 plyne $v_{x1} = D(\cos \varphi - 1)$, $v_{x2} = D \sin \varphi$ a z toho
 $v = |\vec{v}_F| = [(v_{x1})^2 + (v_{x2})^2]^{1/2} = 2D \sin \varphi/2$. /1/

Zákon, jakým se mění φ v závislosti na tzv. balistickém poměru $r = C/M_Z = \rho_1 \cdot h_1 / \rho_2 \cdot h_2$, kde C je hmotnost nálože a M_Z je hmotnost urychlované desky, byl odvozen na základě hypotézy, podle níž se mění tlak detonačních zplodin podél zdvihané desky délkou s exponenciálně

$$dp/ds = - \lambda p/Dh_1 \quad /2/$$

Aproximujeme-li detonační poláru přímkou $p/p_{CJ} \approx (1 - \xi)/\varphi_{max}$, kde $\xi = \xi(s) = \xi(Dt)$ a λ je konstanta

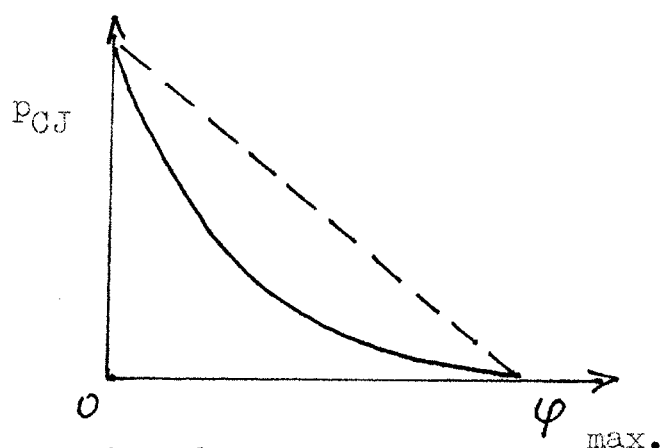
$$dp/ds = - p_{CJ} d\xi/\varphi_{max} ds - \lambda p/Dh_1,$$

což po integraci a v limitě pro $s \rightarrow \infty$ dává vztah

$$1/\varphi = 1/\varphi_{max} + \lambda(\gamma + 1)/Dr = a + b/r, \quad /3/$$

kde $a = 1/\varphi_{max}$ a $b = (\gamma + 1)/D$. / viz. kapitola 5. o detonaci./

Uvedená aproximace je uvedena na obr. 2



Obr. 2

Vztah pro rychlost odletující desky v a výraz pro $1/\varphi = f(r)$ důvěrně znají pracovníci zabývající se plátováním s pomocí výbuchu a konstruktéři klinových kumulativních táhlých náloží.

4. STABILITA RÁZOVÝCH VLN

4.1 STABILITA RÁZOVÝCH VLN V ROVNOVÁŽNÉM A NEROVNOVÁŽNÉM PLYNU

V balistických pokusech uskutečněných v 50 letech bylo zjištěno, že při pohybu modelů ve freonech přestává být za určitých podmínek čelo přední rázové vlny hladké. Na čele přední rázové vlny vznikají četné trojvlnové konfigurace /průsečíky třech vln v jednom bodě/. Obraz toku vypadá tak, jako i za rovinnou vlnou v přítomnosti příčných vln. V řadě případů zůstává čelo vlny hladké, avšak za ním vzniká turbulentní tok. Odpor modelů se za těchto jevů měnil. Byly rovněž prováděny pokusy v rázové trubici s inertními plyny / argon, krypton, xenon/, ale i s molekulárními plyny /CO₂/. Vyjasnilo se, že šíření silných rázových vln /při rychlosti několika km/s/ má řadu zvláštností. Čelo vlny přestává být rovinné a v řadě případů dochází k narušení čela, rozložení hustoty a koncentrace elektronů v relaxační zóně nemá monotónní charakter.

Všechny tyto zvláštnosti odhalují prahový charakter podle rychlosti vlny a počátečního tlaku. Malé příměsi vodíku /cca 1 %/ mají stabilizující vliv na tok plynu. Popisovaný jev dostal název relaxační nestabilita rázových vln. Skutečnou roli při tom hraje evidentně intenzivní přeměna excitační energie na energii kinetickou.

V souvislosti s vyjmenovanými jevy vzniká problém stability rázových vln. Jak je již uvedeno výše spontánní rozpad nespojitosti je nestabilní a rozpadá se na dva vzruchy, jež

každý může být rázovou vlnou, nebo vlnou zředění. Ukazuje se, že při určitém specifickém tvaru Hugoniotovy adiabaty je možný rozpad rázové vlny. Existují dva směry teoretického výzkumu stability rázových vln. V prvním z nich se zkoumá rozvoj malých excitací, vzruchů, nebo vlnění na čele rázové vlny. Tyto vzruchy se projevují i za čelem vlny. V podstatě se však studuje odraz vzruchů od čela rázové vlny dopadající ze strany stlačeného plynu. Jestliže amplitudy vzruchů s časem narůstají, pak považujeme rázovou vlnu za nestabilní. Naopak, jestliže excitace jsou utlumeny, pak je vlna stabilní.

Druhý přístup je spojen s výzkumem možných rozpadů rázové vlny. Jestliže má Hugoniotova adiabata zlomové body, nebo různá zakřivení, pak se rázová vlna může rozpadnout na vlny různého charakteru.

Řešení prostorové úlohy odrazu akustických vln od čela rázové vlny v termodynamicky rovnovážném plynu umožňuje nalézt zákon změny rozvoje vzruchů na čele rázové vlny v závislosti na čase. Orientujme osu x^3 podle normály k nevybuze-
né vlně. Rovnice čela vlny zapíšeme ve tvaru $x^3 = f(x^1, x^2)$, kde $f = 0$ při $x^1 = x^2 = 0$. Ze vztahu /3.12/ a vztahu

$$\delta x^i / \delta t = M c_1 n^i$$

vyplývá, že lineárním přiblížením ve vybraném systému souřadnic, bude rovnice pro čelo rázové vlny tvaru

$$f = \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\chi} \frac{1-k}{\xi_2} \left[\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\xi_3} \varphi(\alpha, \chi, \theta) d\alpha - \int_0^{\xi_3} \varphi(\alpha, \chi, \theta) d\alpha \right] d\theta = \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\chi} \frac{1-k}{\xi_2} \cdot [$$

$$\int_{\xi_2}^{\bar{x} + \xi_3} \varphi(\alpha, \chi, \theta) d\alpha - \int_0^{\bar{x}} \varphi(\alpha, \chi, \theta) d\alpha \Big] d\theta, \quad /4.1/$$

$$\xi_1 = \frac{1 - M_1^2}{M^2 (1 - \xi)} (2 - M_1^2 \bar{x}), \quad \xi_2 = \cos \theta - 1/M_1, \quad \xi_3 = M c_1 t \xi_2,$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\epsilon} (x^1 \cos \chi + x^2 \sin \chi) \sin \theta.$$

Předpokládejme, že akustická vlna dožene rázovou vlnu v čase $t = 0$ a má rovinné čelo t.j. $f = 0$, pokud $t < 0$. Předpokládejme, že $\delta p_2(x^1, x^2, x^3, 0) \rightarrow 0$ při $x^i \rightarrow \pm \infty$. Nechť v /4.1/ $t \rightarrow -\infty$. S přihlédnutím, že $\varphi(\alpha, \chi, \theta) \rightarrow 0$ při $\alpha \rightarrow \pm \infty$, dostaneme z /4.1/

$$\int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\alpha} \frac{1-k}{\xi_2} \int_0^{\bar{x}} \varphi(\alpha, \chi, \theta) d\alpha = 0 \quad f \rightarrow 0 \text{ při } t \rightarrow \infty$$

/4.2/

Tedy, jestliže $N_2 \neq 0$, pak při $t \rightarrow \infty$ a fixovaných hodnotách x^1, x^2 jsou vzruchy na čele rázové vlny utlumeny v soulase s /4.2/.

Podobný výsledek dostaneme pro dvourůměrnou úlohu. Studium stability rázových vln s pomocí analýzy rozpadu nespojitostí se zabýval Kuzněcov.⁸⁵ Ukázal, že k rozpadu může dojít za podmínek

$$J < -1, \quad J > 1 + 2M_1, \quad J = \rho_1^2 U^2 (\partial v_2 / \partial p)_H, \quad M_1 = U/c_2.$$

Otázka o tom, dochází-li k rozpadu v uvedených mezích zůstává otevřená. Uvedené meze souhlasí s výsledky lineární analýzy úlohy o stabilitě rázových vln.^{83,84,86}

4.2 RÁZOVÉ VLNY V PROSTŘEDÍ S NEHOMOGENITAMI

Při studiu šíření rázových vln je dobré si uvědomit, že v klidném prostředí /plynu/ se nacházejí rozličné nehomogeneity: náhodné změny hustoty, rychlosti zvuku. Zajímavým a nepříliš zkoumaným jevem je například pohyb rázových vln v turbulentním toku. V souvislosti s tím vznikají dvě otázky:

1/ jaký vliv mají nehomogeneity na šíření rázové vlny a na strukturu jejího čela, 2/ a jaký vliv má rázová vlna na samotné nehomogeneity. Pripustíme, že se nejprve bude šířit do oblasti, která vykazuje nehomogenitu v rychlosti zvuku. Přitom se rychlost vlny bude měnit od bodu k bodu tak, že se čelo vlny bude deformovat. Úseky čela rázové vlny s kladnými hodnotami křivosti mají tendenci k fokuzaci.

Přitom se za vlnou budou šířit vzruchy a vzniknou oblasti, ve kterých je turbulence.

Pokusy ukazují, že čelo rázové vlny se v nehomogenní oblasti rozmazává a za vlnou dochází k intenzivnímu promíchávání plynu. Pokud rázová vlna dopadne do oblasti turbulentního toku, čelo rázové vlny zmizí.

4.3 RELATIVISTICKÉ RÁZOVÉ VLNY

Při výstupu rázových vln na povrch kompaktní hvězdy typu bílého trpaslíka, může rychlost rázové vlny dosáhnout hodnot blízkých rychlosti světla. Při popisu vlastností takových vln se v rovnicích plyn^{2.°}é dynamiky^{1.} uplatňují relativistické efekty.⁺

Předpokládejme, že tok látky směřuje kolmo k čelu rázové vlny. Označíme v_1, v_2 rychlosti plynu před i za čelem vlna a u_1, u_2 odpovídající 4-rychlosti plynu t.j.

$$u = (v/c) / \sqrt{1 - v^2/c^2} = v / c \cdot \theta$$

$$\theta = \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad /4.3/$$

kde c je rychlost světla.

Podmínky zachování hmoty, impulsu a energie mají v rázové relativistické vlně tvar

$$N_1 u_1 = N_2 u_2,$$

$$p_1 + h_1 u_1^2 = p_2 + h_2 u_2^2, \quad /4.4/$$

$$h_1 u_1 / \theta_1 = h_2 u_2 / \theta_2,$$

kde N je hustota počtu částic o hmotnosti m , taková že měrný objem $V = 1/mN$, $h = p + e$ je entalpie jednotky objemu, p je tlak a e je objemová hustota energie. Všechny tyto termodynamické veličiny se vztahují k vlastnímu systému souřadnic, kdy je kontinuum v klidu a u i θ se vztahují k systému souřadnic spojených s čelem vlny.

Z těchto předpokladů vyplývají základní vztahy teorie relativistických rázových vln

+ / Jen pro zajímavost - rovnice kontinuity má tvar nulové

1/ rovnice relativistické rázové adiabaty

$$h_1 u_1 / \theta_1 = h_2 u_2 / \theta_2, \quad /4.5/$$

$$V_2 / V_1^2 = \sqrt{(e_1 + p_2)(e_1 + p_1) / (e_2 + p_1)(e_2 + p_2)}.$$

Jestliže zavedeme označení

$V_2 / V_1 = y$, $p_2 / p_1 = z$, $p_1 V_1 / c^2 = \alpha$, $\delta / \delta - 1 = \beta$ dostaneme z předchozích dvou rovnic

$$\alpha (yz - 1)^2 + \alpha \beta (1 + yz) = (z - 1)(1 + y + \alpha \beta (1 + yz)^2), \quad /4.5/$$

která se používá k analýze vlastností rázových vln.

2/ rychlost pohybu čela rázové vlny $U = -v_1$ při podmínce, že se prostředí ve stavu 1 nachází v klidu

$$U = c V_1 \sqrt{(p_2 - p_1) [e_1 V_1^2 - e_2 V_2^2 + p (V_1^2 - V_2^2)]}. \quad /4.6/$$

S použitím rovnice pro rázovou adiabatu můžeme tento vztah přepsat do tvaru

$$U = c \sqrt{(p_2 - p_1)(p_1 + e_1) / (e_2 - e_1)(p_2 + e_2)}, \quad /4.7/$$

nebo s použitím proměnných y, z, α .

$$U = c \sqrt{\alpha z / (1 - y + \alpha z (1 - 4y^2))} \quad /4.7/$$

3/ rychlost pohybu plynu za čelem rázové vlny vůči prostředí

$$v = c \sqrt{(p_2 - p_1)(e_2 - e_1) / (p_1 + e_2)(p_2 + e_1)}, \quad /4.8/$$

nebo

$$v = \sqrt{\alpha z (1 - y + 3\alpha yz) / (1 + \alpha z)(1 + 3\alpha yz)} \quad /4.8/$$

Přechod ve vztazích pro U a v k odpovídajícím výrazům ne-relativistické teorie $c \rightarrow \infty$, tak že $pV \ll c^2$ ($\alpha \ll 1$).

Rychlost zvuku je dána vztahem

4- divergence $\partial N_i u^i / \partial x^i = 0$ a Eulerova rovnice je tvaru $h u^k \partial u_i / \partial x^k = \partial p / \partial x^i - u_i u^k \partial p / \partial x^k$. ²

$$a = \gamma c^2 p / h .$$

Zavedeme-li chemický potenciál μ a tok částic j

$$\mu = h/N = (\gamma p / \gamma - 1 + N m c^2) / N ,$$

$$j = N_1 u_1 = N_2 u_2 ,$$

a dále zavedeme označení $X = \mu_2 N_1 / \mu_1 N_2$ a pro Machova čísla $M_1 = c v_1 / a_1$, $M_2 = c v_2 / a_2 = v_2 / a_2 \theta_2$.

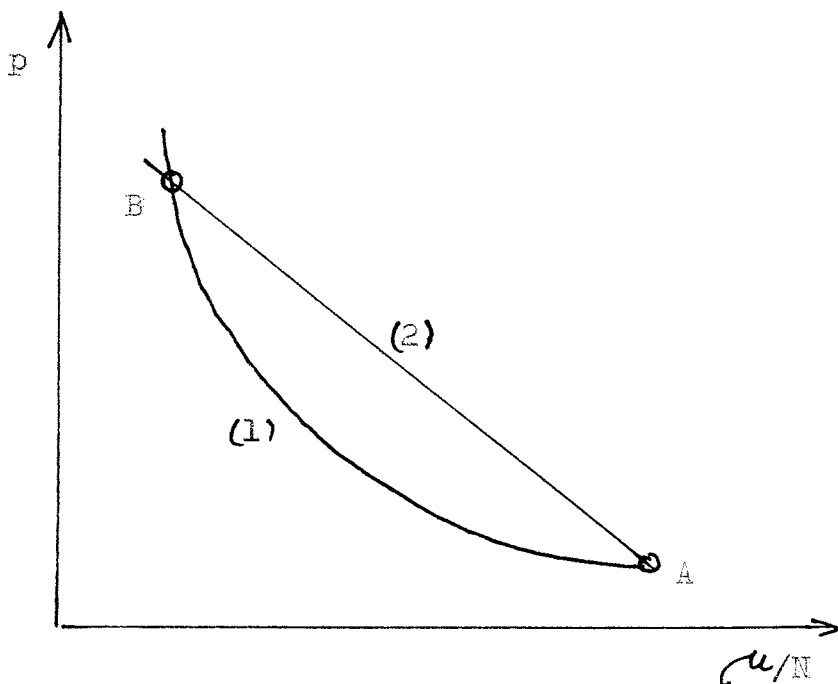
S použitím chemického potenciálu μ je možné základní vztahy zachování ^{hmoty, impulsu a energie} zapsat ve tvaru tzv. Taubovy adiabaty ⁹¹

$$\mu_2^2 - \mu_1^2 = (p_2 - p_1) (\mu_1 / N_1 + \mu_2 / N_1) , \quad /4.9/$$

a pro tok j

$$- j^2 = (p_2 - p_1) (\mu_2 / N_2 - \mu_1 / N_1) .$$

Relativistická adiabata je v proměnných p a μ/N zobrazena na obr. 4.1



Obr. 4.1 Relativistická rázová adiabata (1)

Počáteční a konečný stav na obr. ^{4.3} adiabaty je spojený přímkou, jejíž sklon je $-j^2 = -(N_1 u_1)^2$. Průsečík přímky (2) s adiabatou (1) určuje parametry u^2/N_2 a p_2 v bodě B.

Dále je možné nalézt parametry na čele rázové vlny

$$p_2/p_1 = \gamma_1(1 - X)M_1^2 + 1, \quad /4.10/$$

nebo

$$p_2/p_1 = (1 - X)u_1^2(d\beta + 1)/d + 1,$$

a

$$N_2/N_1 = 1 + \left\{ 1 + 4d\beta_2(d\beta + 1)[\gamma_1 M_1^2(1 - X) + 1]X \right\}^{1/2} / \\ / 2(d\beta_1 + 1)X .$$

Pro poměr hustot v systému souřadnic spojených s čelem vlny je

$$N_2'/N_1' = N_2 \theta_1 / N_1 \theta_2 = \sqrt{[(N_2/N_1)^2 + u_1^2] / (1 + u_1^2)}.$$

Pro poměr teplot v ideálním plynu platí

$$T_2/T_1 = p_2 N_1 / p_1 N_2 .$$

V astrofyzice je nutné uvažovat s tlakem a hustotou energie záření, a za rázovou vlnou s tvorbou elektron-positronových párů - tím vším se parametry relativistických rázových vln komplikují.

Pokus získat odpovídající analytický popis učinil Gross. 100
Avšak do rychlostí rázových vln, nepřesahujících hodnotu $U = 10^5$ km/s můžeme používat klasické teorie.

5. DETONAČNÍ VLNY

5.1 Úvod

Detonaci výbušnin si můžeme představit jako současné působení rázové vlny a chemické reakce. Rázové stlačení iniciuje reakci a energie reakce udržuje amplitudu vlny.

V plynech byla detonace objevena při studiu šíření plamene v trubkách v r. 1881 Mallardem a Le Chatelierem a nezávisle Berthelotem a Vieillem.^{106,107} Detonace u kondenzovaných výbušnin byla objevena v r. 1865 švédským inženýrem A. Nobelem,¹⁰⁸ který první použil rázovou vlnu generovanou výbuchem třaskavé rtuti pro iniciaci procesu výbuchu.

Základy klasické hydrodynamické teorie detonace byly vypracovány ruským fyzikem Michelsonem¹¹² /1893/, Chapmanem¹¹³ /1899/, Jouguetem¹¹⁵ /1901/, Rayleighem¹¹⁴ /1912/. Spinovou detonaci objevil Campbell a Woodhead¹¹⁸ /1926/. O další rozvoj teorie se zasloužili: Zeldovič¹¹⁹ /1940/, Neumann¹²⁰ /1942/, Doring¹²¹ /1943/, Stanjukovič⁵, Chariton a Rozing¹²², Taylor¹⁴, Jones¹²³, Kirkwood¹²⁴, Černyj³⁰, Dremin¹⁷, Mader²⁴, Fickett¹⁵ a další. Většina teoretických a experimentálních prací o detonaci se vztahuje k plyným směsím /Ščelkin¹⁶, Fay¹²⁵, Solouchin¹²⁶, Openheim¹²⁷, Bdzil¹²⁸ a j./

Základní výsledky těchto prací se ukázaly správnými i pro kondenzované výbušniny.^{2,7,23}

Výbušniny jsou schopné vlivem iniciačního impulzu rychlé exotermické přeměny s vývojem silně zahřátých plyných zplodin výbuchu.

Při detonaci je chemická přeměna trhavin a explozivních směsí podobná hoření, kdy probíhá postupně od vrstvy k vrstvě, t.j. látkou se šíří čelo chemické přeměny. Avšak mezi detonací a hořením existují principiální rozdíly.

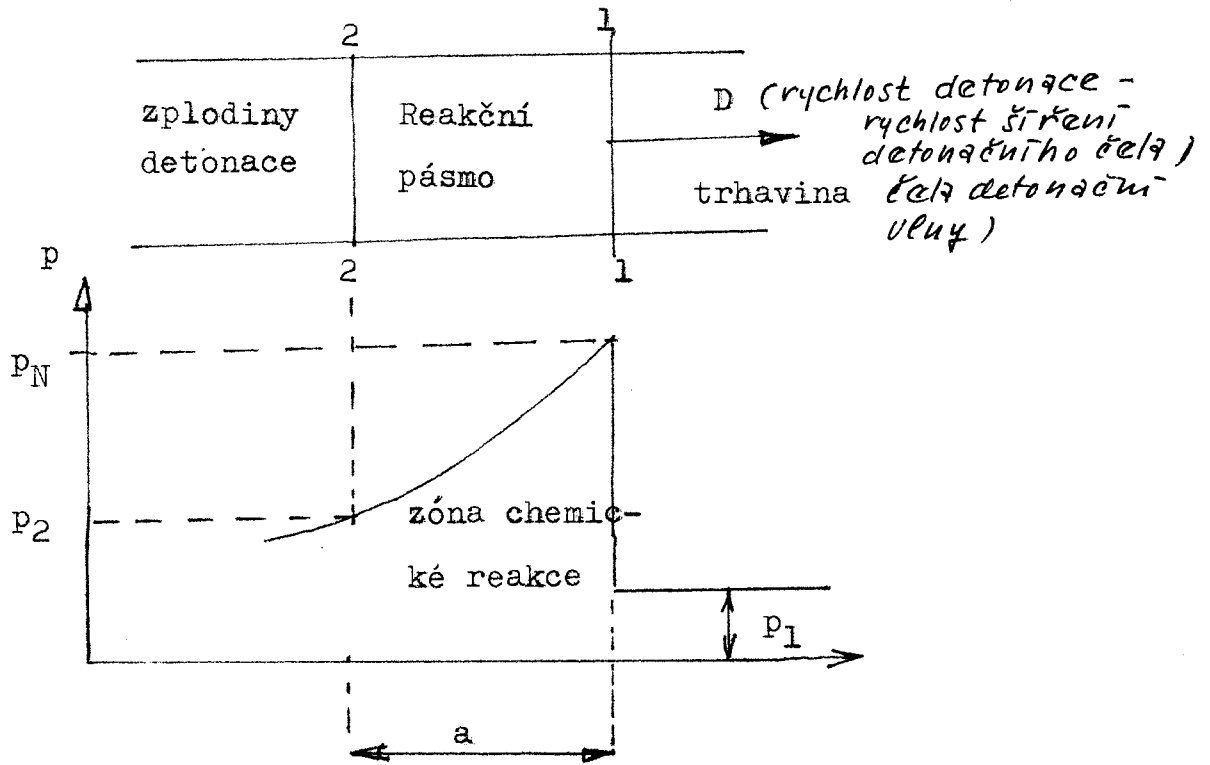
Spočívají v následujícím.

Čelo hoření v závislosti na různých vnějších podmínkách se může šířit různou rychlostí, kdežto rychlost šíření detonačního čela na vnějších podmínkách v podstatě nezávisí. Rychlost hoření je vždy menší, a rychlost detonace je vždy větší, než rychlost zvuku v trhavině. Šíření čela hoření je podmíněno relativně pomalými ději jako je teplotní vodivost, difuze, konvekce. Při detonaci exotermická reakce vzniká v důsledku ohřevu rázového stlačení trhaviny. Část energie je při tom předávána čelu rázové vlně, a znemožňuje její zeslabení.

Přívod energie k rázové vlně udržující její amplitudu se uskutečňuje nejenom rychlou chemickou reakcí, ale i jinými způsoby. Například intenzivním pohlcováním laserového záření, rázově stlačeným plynem za čelem rázové vlny, při šíření rázových vln nerovnovážným plynem, kdy za čelem vlny vnitřní energie různých stupňů volnosti molekul přecházejí v energii postupného pohybu a pod.

5.2 HYDRODYNAMICKÁ TEORIE DETONACE

Při šíření detonačních vln v kondenzovaných trhavinách šířka zóny chemické reakce je mnohem menší, než rozměry trhaviny. Vyjdeme-li z předpokladu, že šířka zóny nehraje podstatnou roli a detonační čelo je povrchem nespojitosti, oddělující výchozí trhavinu od zplodin reakce dospějeme k ideji klasické hydrodynamické teorii detonace ve které se uvažuje rovinné stacionární detonační čelo. Na obr. 5.1 je schematicky znázorněna struktura rovinné detonační vlny. Čelo rázové vlny se šíří trhavinou s konstantní rychlostí a stlačuje ji do tlaku p_N , teplota T_1 a hustota ρ_1 výchozí trhaviny vzrůstají.



Obr.5.1 Struktura rovinné detonací vlny /ZND teorie. 119-121:
Zeldovič, Neuman, Döring /

Při těchto hodnotách začne chemická reakce. Průměrná reakční dobu chemické reakce určuje střední počet srážek N . Pro uskutečnění jednoho elementárního aktu reakce je zapotřebí aby $N \gg 1000$. Šířku zóny chemické reakce \underline{a} je možné určit ze vztahu $\underline{a} = t(D - \bar{v})$, kde t je doba průběhu reakce, \bar{v} je střední rychlost částice v zóně chemické reakce. Rovina 2-2 odděluje zónu chemické reakce od zplodin detonace, D je detonací rychlost

Stacionární režim detonace uvažujeme v systému souřadnic spojených s detonací vlnou. V tomto systému částice trhaviny protíná čelo rázové vlny, stlačuje se na tlak p_N , přeměňuje se v zóně chemické reakce a při tom se vybavuje teplo. Pak se částice pohybuje směrem do zplodin detonace a tlak klesá na hodnotu p_2 . Po ukončení chemické reakce zplodiny detonace isentropicky expandují.

Parametry za detonační vlnou jsou spojeny s parametry výchozí trhaviny s pomocí zákonů zachování hmoty, impulsu a energie. Odpovídající vztahy jsou analogické podmínkám v rázové vlně a mají tvar

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad v_1 = D, \quad /5.1/$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad /5.2/$$

$$h_1 + v_1^2/2 + Q = h_2 + v_2^2/2 \quad /5.3/$$

První dvě podmínky jsou souhlasné s podmínkami pro rázovou vlnu. Do zákona zachování energie vstupuje veličina Q - množství tepla, které se uvolňuje z jednotkové hmotnosti látky chemickou reakcí. Po transformaci třetí rovnice dostaneme analog Hugoniotovy adiabaty:

$$h_2/p_2, v_2/ - h_1/p_1, v_1/ = \frac{1}{2} /p_2 - p_1//v_1 + v_2/ + Q/ /5.4/$$

$$e_2/p_2, v_2/ - e_1/p_1, v_1/ = \frac{1}{2} /p_2 + p_1//v_1 - v_2/ + Q/ /5.4'/$$

Funkce $e_2/p_2, v_2/$ a $h_2/p_2, v_2/$ při výpočtech konkretizujeme.

Rovnice /5.4/nazýváme Hugoniotovou adiabatou pro zplodiny reakce. Nechť veličina Q je nezávislá na tlaku a specifickém objemu. Tak jako dříve, předpokládáme, že systém vykazuje vlastnosti dané nerovnostmi:

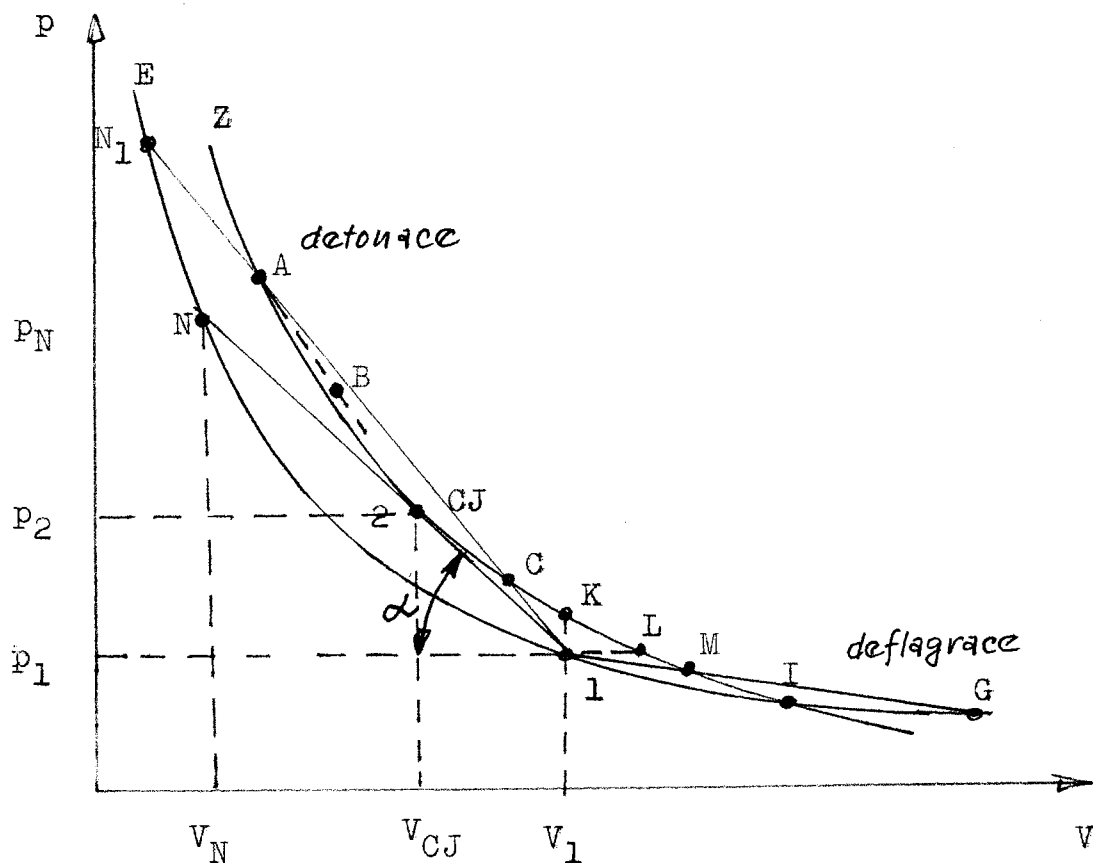
$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s < 0, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_s > 0$$

Geometrické znázornění systému rovnic /5.1/-/5.4/ v pV souřadnicích je na obr. 5.2.

Při šíření rázové vlny je výchozí výbušnina stlačována na tlak p_N a objem V_N . Jejich hodnoty leží na rázové Hugoniotově adiabatě procházející bodem s počátečními hodnotami výbušniny $/p_1, v_1/$.

Důsledkem toho, že po uvolnění chemické energie v zóně

reakce dochází k expanzi vytvořených zplodin , rázová adiabata zplodin detonace /křivka Z/ je položena nad rázovou adiabatou výchozí výbušniny /křivka E/



Obr. 5.2. pV diagram detonačních a deflagračních vln

E - rázová adiabata výbušniny

Z - Hugoniotova adiabata zplodin výbuchu

S použitím prvních dvou vztahů dostaneme stejně jako v případě rázových vln

$$\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} = - \frac{v_2^2}{V_2^2} = - \frac{v_1^2}{V_1^2}, \quad /5.5/$$

nebo

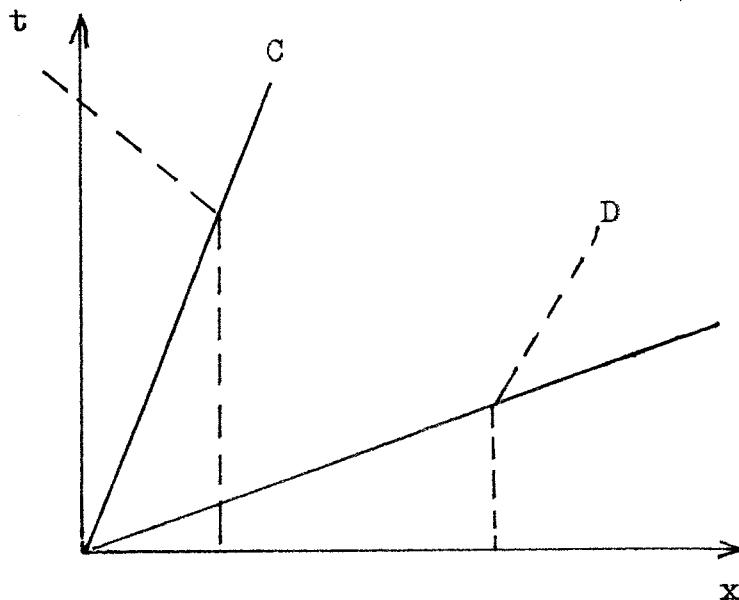
$$p_2 - p_1 = - (V_2 - V_1) \cdot v_1^2 / V_1^2. \quad /5.6/$$

V rovině pV představuje formule /5. 6/ rovnici přímky, která se nazývá Michelsonovou-Rayleighovou přímkou.^{112,114}

Ze vztahu /5. 5/ vyplývá, že se vzrůstem tlaku za čelem vlny roste i hustota a naopak. Detonaci přísluší vzrůst tlaku. Proces, při kterém tlak klesá, nazýváme pomalým hořením /deflagrací/. Z /5.1/ a /5.2/ nalézáme

$$\frac{p_2 - p_1}{v_2 - v_1} = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad /5.7/$$

Věnujme pozornost vztahu /5.7/. Vybereme systém souřadnic, spojený s nereagujícím prostředím. Je vidět, že zdetonační vlnou se hmota pohybuje ve stejném směru jako samotná vlna. Naopak, při pomalém hoření se kontinuum pohybuje zrychleně ve směru opačném, než je směr šíření vlny. Dráha částic při detonaci /D/ a deflagraci /C/ je znázorněna čárkovaně na obr. 5.3.



Obr. 5.3 xt diagram detonačních/D/ a deflagračních/C/ vln. /dráha částic čárkovaně/

Uvažujme případ ve kterém se nemění objem: $V_1 = V_2$.

Pak z /5.4/ vyplývá, že

$$e_{2/V_1, p_2} - e_{1/V_1, p_1} = Q.$$

Vyjádříme vnitřní energii ve tvaru $e = e(V, p(s, V))$. Derivace $(\partial e / \partial s)_V$ je rovna $(\partial e / \partial s)_V = T = (\partial e / \partial p)_V$, odkud

$$\frac{\left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_V}{\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_V} = T > 0 \quad \text{a} \quad p_2 > p_1.$$

Takový děj nazýváme detonací při konstantním objemu. Rychlost šíření detonačního čela je v tomto případě nekonečně veliká.

Uvažujme případ, ve kterém se nemění tlak: $p_2 = p_1$. Pak z /5.4/ je vidět, že

$$h_{2/p_2, V_2} - h_{1/p_1, V_1} = Q.$$

Nalezneme derivaci $(\partial h / \partial V)_p$:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial V}\right)_p = p + \left(\frac{\partial e}{\partial V}\right)_p \quad /5.8/$$

Platí rovnost

$$\left(\frac{\partial e}{\partial V}\right)_p = \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s = -p. \quad /5.9/$$

S pomocí /5.9/ zapíšeme výraz /5.8/ ve tvaru:

$$\frac{\partial h}{\partial V} = \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s = - \frac{T(\partial p / \partial V)_s}{(\partial p / \partial s)_V} > 0,$$

jestliže $(\partial p / \partial V)_s < 0$. Pak je $V_2 > V_1$. Takový děj nazýváme deflagrací při konstantním tlaku. Rychlost čela reakce je v tomto případě rovna nule, vzhledem k nereagujícímu prostředí.

Připustíme, že veličiny p_1 a V_1 jsou dány a rychlost čela reakce D neznáme. Ne všechny hodnoty p a V vyhovující Hugoniotově adiabatě zplodin detonace, odpovídají dějům za čelem vlny. Nutné je uvažovat doplňující podmínku

$$\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} < 0, \quad /5.10/$$

která vyplývá ze vzorce /5.5/.

Studujme v rovině pV /viz. obr. 5.2/ souhrn bodů, které vyhovují rázové adiabatě zplodin detonace /GKA/ a podmínce /5.10/. Z bodu 1, charakterizujícího počáteční stav, vedeme svazek přímek Michelsona /5.6/, protínajících adiabaty v detonační části /horní část adiabaty - křivka KC2A/ a v oblasti deflagrace /spodní část adiabaty - LMG/. Každá z nich protíná rázovou adiabaty ve dvou bodech. Michelsonovy přímky, které se dotýkají rázové adiabaty odpovídají Chapman-Jouguetovým dějům. Podmínka dotyku je následující:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_H = \frac{p_1 - p_2}{V - V_1}, \quad /5.11/$$

kde se derivace bere podél Hugoniotovy adiabaty.

Z /5.4/ máme

$$Tds + \frac{1}{2} \left[/V - V_1/dp - /p - p_1/dV \right] = 0. \quad /5.12/$$

V každém ze dvou bodů dotyku má entropie extrém

$$dS = 0.$$

Jinými slovy, entropie proreagovaného kontinua nabývá stacionární hodnoty při Chapman-Jouguetových dějích. Z toho plyne, že v bodech dotyku rázové adiabaty s Michelsonovou přímkou je splněna rovnost

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_H = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s \quad /5.13/$$

Čtverec rychlosti zvuku ve zplodinách reakce je:

$$c_2^2 = -v_2^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_s \quad /5.14/$$

S použitím /5.5/, /5.11/, /5.13/, /5.14/ dostaneme, že při Chapman-Jouguetových dějích platí

$$|v_2| = c_2,$$

t.j. čelo reakce se pohybuje vzhledem ke zplodinám reakce místní rychlostí zvuku.^{113,115}

Provedeme důkaz, že za Chapman-Jouguetových podmínek má rychlost D a entropie zplodin reakce relativní minimum při detonaci a relativní maximum při deflagraci. Vyjdeme z faktu, že podél Hugoniotovy adiabaty je splněna nerovnost

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_H \geq 0$$

Z /5.12/ vyplývá

$$2T \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_H = p - p_1 - v - v_1 \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_H.$$

Diferencujeme tuto rovnost podle v , dostaneme v bodech A a I

$$2T \left(\frac{\partial^2 s}{\partial v^2}\right)_H = -v - v_1 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_H,$$

protože v těchto bodech je $\partial s / \partial v = 0$.

V bodě I /viz. obr. 5.2/ máme $\left(\frac{\partial^2 s}{\partial v^2}\right)_H < 0$ a v bodě A máme $\left(\frac{\partial^2 s}{\partial v^2}\right)_H > 0$. Znak rovnosti nemá fyzikální smysl odporuje stavové rovnici ve tvaru $p = p/v, s/$. Diferencujeme-li tuto rovnici dvakrát podle v najdeme v bodech A a I

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_H = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_s + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v \left(\frac{\partial^2 s}{\partial v^2}\right)_H.$$

Při podmínce

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_s > 0,$$

nemohou být nulové veličiny $(\partial^2 p / \partial v^2)_H$ a $(\partial^2 s / \partial v^2)_H$. Diferenciál Hugoniotovy funkce je v rovině pV roven

$$dH = Tds.$$

Pak derivace funkcí H a s jsou podél přímek současně nulové. Vyberme přímku, která protíná Hugoniotovu křivku v bodech A a C. Hugoniotova funkce je v těchto bodech nulová. Mezi body A a C existuje nejméně jeden extrém entropie. Tento extrém je maximem. Platí

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_v = \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v} > 0. \quad /5.15/$$

Veličina $(\partial s / \partial v)_p$ je rovna

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_p = - \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_v \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s, \quad /5.16/$$

$$t.j. \quad \partial s / \partial v_p > 0. \quad /5.17/$$

Diferencujeme-li rovnost /5.15/ dvakrát podle V :

$$\left(\frac{\partial^2 s}{\partial v^2}\right)_p + 2 \frac{\partial^2 s}{\partial p \partial v} \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s + \left(\frac{\partial^2 s}{\partial p^2}\right)_v \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_v \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_s = 0.$$

S použitím /5.16/, a také nerovností

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_v > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_s > 0,$$

máme

$$\left(\frac{\partial^2 s}{\partial v^2}\right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_v^2 - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial p \partial v} \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_v + \left(\frac{\partial^2 s}{\partial p^2}\right)_v \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)^2 < 0.$$

V extrémálním bodě je druhá derivace entropie podél přímky rovna

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dl^2} &= \left[\left(\frac{dV}{dl} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial V^2} \right)_p + 2 \frac{\partial^2 s}{\partial p \partial V} \frac{dp}{dV} + \left(\frac{\partial^2 s}{\partial p^2} \right)_V \left(\frac{dp}{dV} \right)^2 \right] = \\ &= \left(\frac{dV}{dl} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 s}{\partial V^2} \right)_p + 2 \frac{\partial^2 s}{\partial p \partial V} \left(- \frac{(\partial s / \partial V)_p}{(\partial s / \partial p)_V} \right) + \left(\frac{\partial^2 s}{\partial p^2} \right)_V \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{(\partial s / \partial V)_p^2}{(\partial s / \partial p)_V^2} \right] = \frac{(dV/dl)^2}{(\partial s / \partial p)_V^2} \left[\left(\frac{\partial^2 s}{\partial V^2} \right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_V^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial p \partial V} \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_V \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_p + \left(\frac{\partial^2 s}{\partial p^2} \right)_V \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_p^2 \right]. \end{aligned}$$

Proto funkce s a také H mají pouze jedno maximum, které leží mezi body A a C . V bodě A je $ds/dl > 0$ a v bodě C je $ds/dl < 0$. Uvažujme v rovině PV průsečíky Hugoniotovy křivky s přímkami procházející bodem p_1, V_1 . Body blízkí se tomuto bodu, odpovídají dějům slabým, a body vzdálené od tohoto bodu charakterizují proces silný. Silné procesy se vyznačují vyšším tlakem ve zplodinách výbuchu a slabé menším. V obou bodech nabývá Hugoniotova funkce stejné hodnoty - je nulová, neboť v mezilehlém bodě přímky musí ležet maximum.

Jestliže přímka protíná detonační větev, pak se veličina V podél ní zmenšuje, kdežto podél přímky, která protíná deflagrační větev, veličina V roste. Proto platí

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dV} &< 0 \quad \text{v bodě } C, && \text{/detonační větev/} \\ \frac{ds}{dV} &> 0 \quad \text{v bodě } A, \\ \frac{ds}{dV} &> 0 \quad \text{v bodě } M, && \text{/deflagrační větev/} \end{aligned}$$

$$\frac{ds}{dV} < 0 \text{ v bodě G.}$$

Podél Michelsonovy přímky je

$$\frac{dp}{dV} = \frac{p - p_1}{V - V_1} = -\rho_2^2 v_2^2.$$

Proto derivace entropie je podél této přímky

$$\frac{ds}{dV} = \left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_p + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_V \frac{dp}{dV} = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_V \left[\frac{dp}{dV} + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s \right], \quad /5.18/$$

nebo

$$\frac{ds}{dV} = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_V \rho_2^2 / c_2^2 - v_2^2 /.$$

Čili, pro detonační větev v soulase s /5.18/ máme

$$|v_2| > c_2 \text{ v bodě C,}$$

/5.19/

$$|v_2| < c_2 \text{ v bodě A.}$$

Pro deflagrační větev platí opačné nerovnosti.

Obdrželi jsme důležitý výsledek: čelo reakce se pohybuje při detonaci nadzvukovou rychlostí vzhledem k výchozímu klidovému stavu. V případě slabé /podkomprimované/ detonace a silné deflagrace se čelo pohybuje nadzvukovou rychlostí, vzhledem k prostředí, které je za čelem vlny. Pohyb reakčního čela je podzvukový při deflagraci, vzhledem k výchozímu klidovému stavu a podzvukový vzhledem k prostředí za čelem silné /překomprimované/ detonace a slabé deflagrace.

Najdeme parametry plynu za detonační vlnou v případě Chapman-Jouguetovy detonace. Budeme-li předpokládat, stejný adiabatický koeficient ve výchozím plynu i zplodinách detonace γ .

Z rovnice /5.2/ máme pro případ detonace CJ / Chapman-Jouguetovy

detonace/.

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 = p_2 + \rho_2 / \gamma^{-\frac{p_2}{2}} / = p_2 / 1 + \gamma / ,$$

odkud

$$p_2 = \frac{p_1 + \rho_1 v_1^2}{\gamma + 1} . \quad / 5.20/$$

V případě $p_2/p_1 \gg 1$, máme

$$p_2 = \frac{\rho_1 v_1^2}{\gamma + 1} = \frac{\rho_1 D^2}{\gamma + 1} .$$

Z první rovnice systému /5.1/ vyplývá

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1}{\sqrt{\gamma p_2 / 2}} ,$$

nebo

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1^2 / \gamma + 1 /}{\gamma v_1^2 + c_1^2} . \quad /5.21/$$

Při $v_1/c_1 \gg 1$ se tento vzorec zjednodušuje

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma} .$$

Uvažujme rovnici /5.3/. Spolu s /5.20/ a /5.21/ nalezneme

$$v_1^4 - 2 [c_1^2 + Q / \gamma - 1 /] v_1^2 + c_1^4 = 0 ,$$

odkud

$$v_1^2 = c_1^2 + Q / \gamma^2 - 1 / \pm \sqrt{2c_1^2 Q / \gamma - 1 / + Q^2 / \gamma^2 - 1 /^2} .$$

Detonaci odpovídá znaménko (+) před odmocninou. Při

$Q/c_1^2 \gg 1$ máme

$$v_1 = D = \sqrt{2 / \gamma^2 - 1 / Q} .$$

Stacionární režim detonace předpokládá, že se zónachemické reakce a všechny její přechodové a okamžité stavy, pohybují jednou rychlostí

$$D = \text{konst.}$$

Takový režim může být realizován jestliže všechny stavové parametry se v zóně budou měnit podél Michelsonovy přímky v rovině pV. Zplodiny detonace expandují isentropicky.

Tak jak bod CJ rozděluje stacionární zónu chemické reakce od nestacionární expanze, tak nutnou podmínkou stabilní detonace je zvuková, nebo nadzvuková rychlost zóny, vzhledem k pohybu zplodin detonace. V opačném případě expanzní vlny doženou zónu chemické reakce, což vede k poklesu tlaku a teploty, a stabilní režim detonace není možný. Rázová vlna šířící se vzhledem k zóně chemické reakce podzvukovou rychlostí vyvolává v zóně excitace, které doženou rázovou vlnu, což umožňuje udržovat její intenzitu. V případě CJ detonace takové excitace ze zóny zplodin detonace nemohou dohnat zónu chemické reakce a detonační vlna bude stabilní. Nechť Michelsonova přímka l_{N_1} je strmější a protíná adiabatou zplodin detonace v bodech A a C. Výbušnina bude v tomto případě stlačena na tlak p_{N_1} . Takové detonační vlny nazýváme překomprimované. Parametry se v zóně chemické reakce mění podél přímky N_1 . Bod A leží na rázové adiabatě zplodin detonace, která odpovídá úplnému uvolnění tepla chemické reakce. V tomto bodě platí nerovnost $D_A < v_A + c_A$. Pak expanzní vlny ze zóny chemické reakce doženou rázovou vlnu a zmenší její amplitudu tak, až nastoupí režim stabilní detonace, odpovídající přímce l_N . Vidíme, že režim překomprimované detonace nemůže být stabilní.

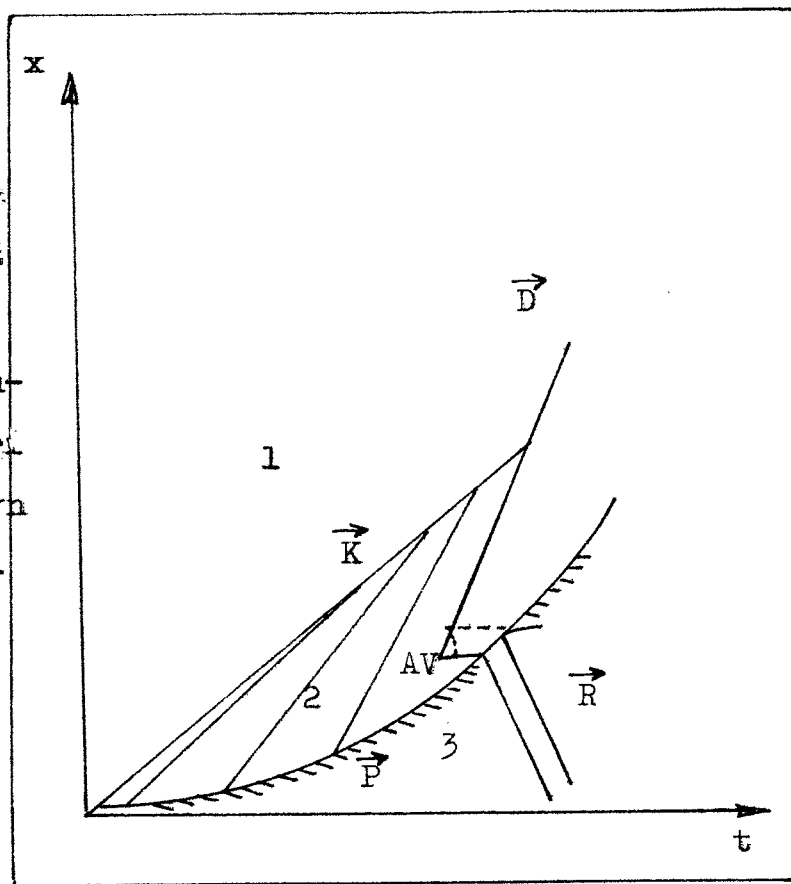
Stabilní detonace má minimální rychlost, která odpovídá sklonu Michelsonovy přímky a je tečnou k rázové adiabatě zplodin detonace v bodě CJ. Taková detonace má normální průběh a nazýváme jí normální detonací.

Úsek rázové adiabaty zplodin detonace z bodu 2 do bodu K odpovídá průběhu podkomprimované detonace, při které je splněna nerovnost $D_C > v_C + c_C$. Takový režim je charakterizován tím, že rychlost detonace je velká $D_C = D_A$, a tlak za zónou chemické reakce p_C je menší, než tlak $p_2 = p_{CJ}$ v CJ bodě. Režim podkomprimované detonace vyvolaný ve výbušnině rázovou vlnou není možný. To je spojeno s tím, že Michelsonova přímka, podél které dochází ke stavovým změnám v zóně reakce, v tomto případě prochází oblastí, kde nejsou splněny podmínky pro průběh reakce. Podkomprimované resp. slabé detonační vlny můžeme získat jestliže pro iniciaci chemické reakce použijeme slabou iniciaci /iniciátory/, například laseru.

Hoření plynných a kondenzovaných výbušnin může za určitých podmínek přejít v detonaci. Děj přechodu hoření v detonaci má u pevných výbušnin několik fází: 1/ stabilní hoření ve vrstvách, kde je převod tepla uskutečňován teplotní vodivostí 2/ hoření, kdy základním dějem je vynucená konvekce 3/ stadium, kde je endotermická reakce podporována kompresními vlnami 4/ normální detonace vyvolaná rázovou vlnou šířící se výbušninou konstantní nadzvukovou rychlostí. V závislosti na fyzikálně-chemických vlastnostech výbušniny, geometrii nálože, vnějších podmínkách a charakteru iniciace mohou být realizovány různé fáze výbušného procesu lišící se rozdílnou dobou trvání.

Na obr. / 5.4/ je znázorněn děj přechodu hoření v detonaci plynné směsi při jejím zážehu s konce uzavřené trubky.¹³²

Při zážehu směsi v dlouhé trubce se vytvoří laminární plamen P, jehož rychlost šíření je 1 - 10 m/s. Expandující zplodiny hořící, podobně jako plyn o vysokém tlaku vyvolají tok plynu, skládající se z kompresní vlny K a pomalu šířícího se čela plamene.



Za kompresní vlnou dochází k urychlení pohybu čela plamene 10 až 20 krát. Dále spolu s vývojem turbulentního toku plynu před plamenem se mění laminární hoření v turbulentní. Důsledkem toho se zvětšuje rychlost šíření plamene, čemuž odpovídá vyšší hodnota tlaku a teploty. Progresivní zvyšování amplitudy vlny a rychlosti plamene trvá tak dlouhu, pokud v kompresní vlně nebudou vytvořeny nutné podmínky pro zážeh a adiabatické stlačení směsi a přechod hoření v detonaci.

Obr. /5.4/ Schema přechodu hoření ¹³²
 P - dráha čela plamene, K - čelo kompresní vlny, D - deonační vlna, R - retonační vlna, AV - adiabatický

plamenem se mění laminární hoření v turbulentní. Důsledkem toho se zvětšuje rychlost šíření plamene, čemuž odpovídá vyšší hodnota tlaku a teploty. Progresivní zvyšování amplitudy vlny a rychlosti plamene trvá tak dlouhu, pokud v kompresní vlně nebudou vytvořeny nutné podmínky pro zážeh a adiabatické stlačení směsi a přechod hoření v detonaci.

V momentu vzniku detonační vlny v bodě AV se vytváří vlna opačného směru, která se zpočátku šíří stlačeným plynem jako detonační a posléze ve zplodinách hoření jako vlna rázová.

Takové inverzní vlny nazýváme retonační /R/.

5.3 Detonace plynů a kondenzovaných trhavin

V plynných výbušných směsích detonační režim výbušné přeměny je možný pouze při určitých koncentracích hořlavého plynu v závislosti na chemickém složení směsi, tlaku a teploty.

Snížení tlaku vede ke vzniku tzv. pulsujícího čela detonace a popřípadě k vytvoření tzv. spinové detonace, při které vznikají na čele detonační vlny konfigurace tří rázových vln otáčející se po šroubovici. Při dalším snížení tlaku detonace zaniká. K. I. Ščelkin¹⁶ a Ja. B. Zeldovič první poukázali, že spinová detonace představuje šikmou překomprimovanou detonační vlnu a hoření ve spinové detonaci za čelem trojitě Machovy konfigurace. Nezávisle položili teoretické základy tohoto jevu N. Manson¹²⁹ a J.A. Fay¹²⁵. Spinovou detonaci objevil C. Campbell a D. Woodhead /1926/¹¹⁸. Upozorňujeme na výběrné přehledy a články, které se týkají těchto jevů.¹³¹⁻¹³³

Spinová detonace se mimo jiné ukázala být mezním případem pulsující detonace a vzniká tehdy, kdy se v průřezu trubky počne šířit pouze jedna nehomogenita na rozdíl od mnoha nehomogenit při pulsující detonaci. Pulsující detonace je spojena s nestabilitou detonačního čela a představuje skutečnost, že v mnoha fyzikálně homogenních výbušninách není detonační čelo hladkým povrchem, a reakce na čele detonačních vln neprobíhá současně v průřezu nálože. V experimentech nacházíme různou intenzitu záření a chaotické zakřivení povrchu detonačního čela. Nestabilitu detonačního čela a pulsující detonaci nacházíme ve všech plynných směsích, mnoha kapalných, ale i pevných trhavinách.

Jejích struktura detonačního čela se úplně odlišuje od zóny reakce jednorozměrné teorie ZND/Zeldovič, Neumann, Döring/. Pohyb prostředí má v těchto případech turbulentní charakter. Spinová detonace byla rovněž zjištěna i v kondenzovaných trhavinách /směsi TNT a RDX/.¹³⁶

Příklad 5.3.1

Určete termodynamické hodnoty plynu bezprostředně za silnou rázovou resp. detonační vlnou odpovídající bodu CJ.

Řešení:

Bezprostředně za rázovou vlnou je plynná směs neproreagovaná a její stav odpovídá bodu N Rayleigh-Michelsonovy přímky $\underline{p_1, V_1, N}$ na Hugoniotově rázové adiabatě plynné směsi. Označíme-li souřadnice tohoto bodu p_N, V_N máme v souhlase se známým vzorcem

$$V_2/V_1 = (\gamma_2 + 1)p_1 + (\gamma_2 - 1)p_2 / (\gamma_2 - 1)p_1 + (\gamma_2 + 1)p_2$$

analogický vztah

$$V_N/V_1 = (\gamma_N + 1)p_1 + (\gamma_N - 1)p_N / (\gamma_N - 1)p_1 + (\gamma_N + 1)p_N ,$$

a platí rovněž

$$(p_N - p_1)/(V_1 - V_N) = v_1^2/V_1^2 = j^2.$$

Ze vzorců pro $v_1 = \sqrt{2(\gamma_2^2 - 1)Q}$ a $v_1 - v_2 = v_1/(\gamma_2 + 1)$ dostaneme

$$p_N = p_1 \frac{4(\gamma_2^2 - 1)Q}{c_{v1}(\gamma_N^2 - 1)T_1}, \quad V_N = V_1 \frac{(\gamma_N - 1)}{(\gamma_2 + 1)},$$

$$T_N = \frac{4(\gamma_2^2 - 1)Q}{c(\gamma_N + 1)^2}, \quad p_N/p_2 = \frac{2(\gamma_2 + 1)}{(\gamma_N + 1)}.$$

a je-li $\gamma_N \doteq \gamma_2$ pak platí přibližně /1/

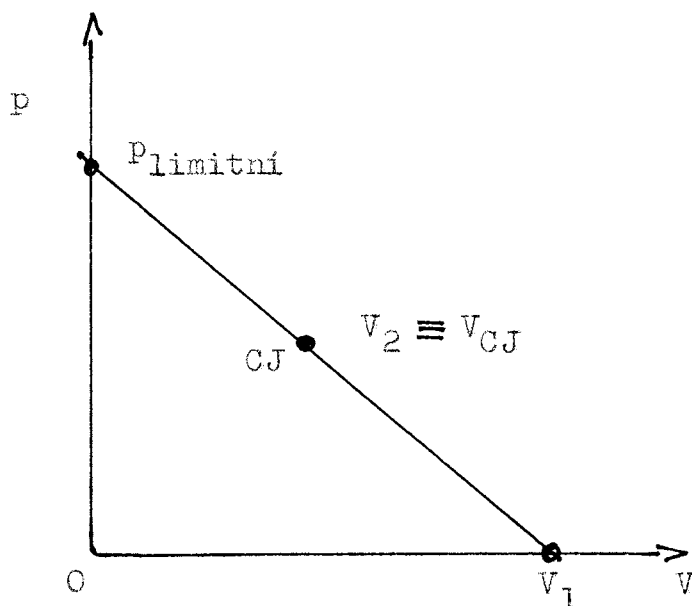
$p_N = D \cdot v_N \cdot \rho_1 \doteq 2D^2 \rho_1 / (\gamma_2 + 1) \doteq 2p_2 \equiv 2p_{CJ} \doteq 4p_1$, neboť
 z výrazu pro Hugoniotovu adiabatu $p_2 = 2(Q + e_1) / [\gamma_2 + 1 / \gamma_2 - 1] \cdot$
 $\cdot [V_2 - V_1]$ pro $V_2 = V_1$ plyne $p_1 = (\gamma_2 - 1)(Q + e_1) / V_1$ t.j.
 $p_2 \doteq 2p_1$.

Příklad 5.3.2

Před II. světovou válkou nebyla známá stavová rovnice pro
 kondenzované výbušniny, ale byla již měřena detonační
 rychlost trhavin. Již v té době byla pro litý TNT hustoty
 $1,6 \text{ g/cm}^3$ známa hodnota detonační rychlosti $D = 7 \text{ km/s}$.
 Určete limit detonačního tlaku s použitím zákona zachování
 hmoty a impulsu.

Řešení:

Na obr.1 je znázorněna Rayleigh-Michelsonova přímka v (p, V)
 souřadnicích



$$p / (V_1 - V) = (D / V_1)^2$$

Průsečík této přímky s
 tlakovou souřadnicí
 / nekonečná komprese/
 je limitní hodnotou
 detonačního tlaku

$$p_{\text{limitní}} = D^2 / V_1 ,$$

Obr. 1

což pro uvedené hodnoty TNT představuje 78,4 GPa. Pro V_2/V_1 platí vztah $V_2/V_1 = \gamma/(\gamma + 1)$ a vyplývá z něj a CJ podmínky o rychlosti toku v reakční zóně, která musí být zvuková, že určuje sklon isentropy procházející CJ bodem. Pro různé látky je $\gamma > 1$. / $\gamma \sim 1,2$ pro ideální plyny při vysoké teplotě/ Z toho pro $V_2/V_1 < 0,5$ je detonační limit tlaku

$$p'_{\text{limitní}} = D^2/2V_1$$

což je pro TNT 39,2 GPa a jestliže použijeme hodnotu $\gamma \sim 1,2$ obdržíme tlak okolo 36 GPa. Naměřená hodnota je zhruba polovinou tohoto odhadu a je 20 GPa.

Příklad 5.3.3

Sestrojte Hugoniotovu adiabatu detonujícího oxidu dusnatého v plynné fázi, který se rozkládá na dusík a kyslík podle reakce



Průměrná molekulová hmotnost reaktantů a zplodin je 30, výbuchové teplo reakce je 3013 kJ/kg. Vypočtete detonační parametry této plynné výbušniny.

Řešení:

$$p_1 = 0,1 \text{ MPa} = 10^5 \text{ Pa},$$

$$c_v = 5R/2,$$

$$\gamma = 1,4,$$

$$T_1 = 300 \text{ K},$$

$$v_1 = 0,8314 \text{ m}^3/\text{kg},$$

Jestliže c_v je v intervalu 0 - 300 K konstantní a je 5R/2, pak

$$e_1 = 5RT_1/2m = p_1 v_1 / (\gamma - 1) = 5 \cdot 8,3143 \cdot 300 / 2 \cdot 30 = \\ \doteq 208 \text{ kJ/kg}.$$

Poměr

$$Q/e_1 = 3013/208 \doteq 14,5.$$

Hugoniotova adiabata detonace je

$$p_2/p_1 = [2(Q/e_1 + 1) / (\gamma - 1) + 1 - v_2/v_1] / (\gamma + 1) v_2 / (\gamma - 1) \cdot \\ \cdot [v_1 - 1] = (78,5 - v_2/v_1) / (6 v_2/v_1 - 1).$$

Pro rázovou adiabatu je v předchozím vztahu $Q = 0$ a

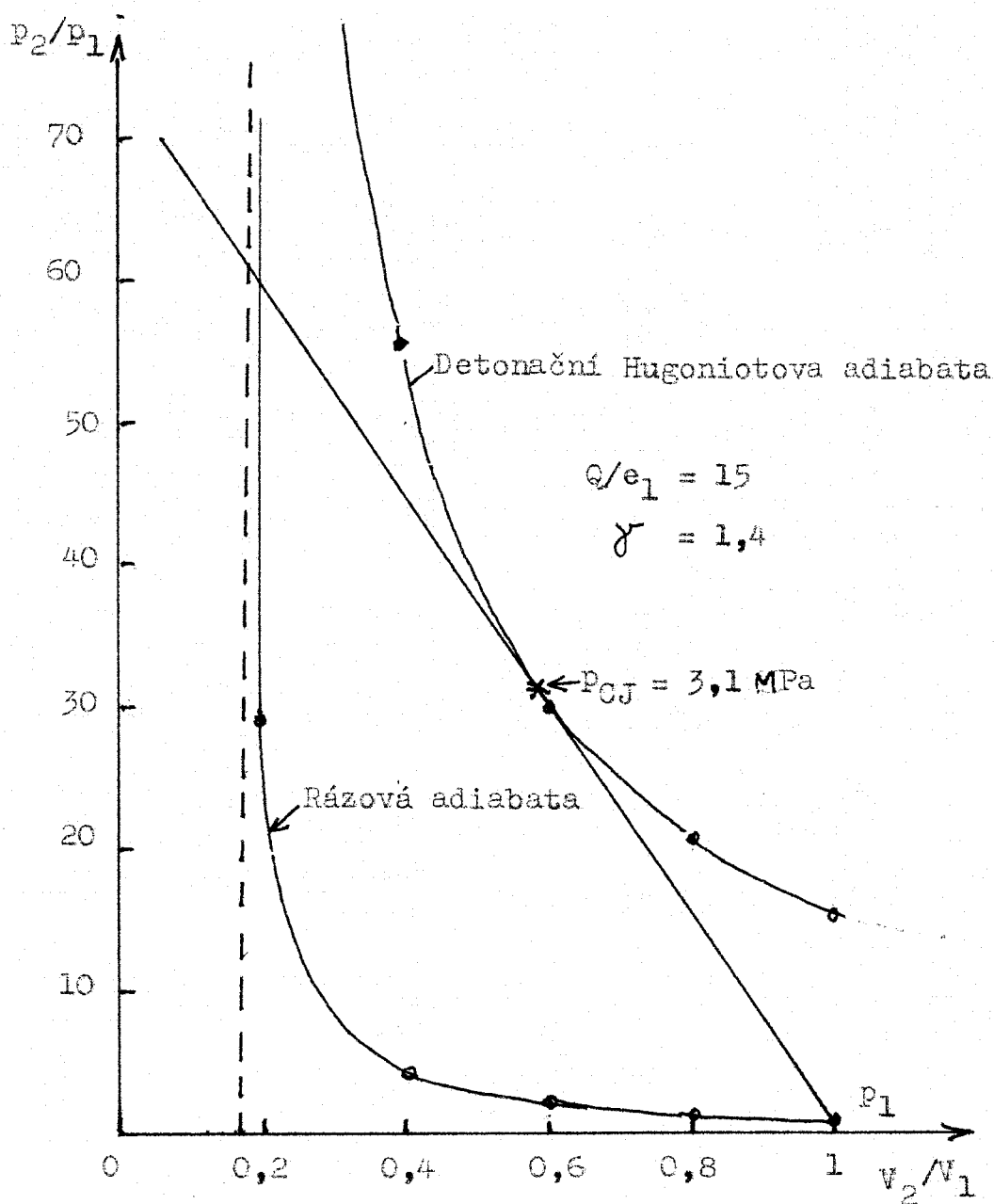
$$p_2/p_1 = (6 - v_2/v_1) / (6 v_2/v_1 - 1).$$

Detonační tlak

$$p_2 \equiv p_{CJ} = 2(\gamma - 1)(Q + e_1) / V_1 = 3099 \text{ kPa} = 3,1 \text{ MPa} .$$

Detonační rychlost

$$D = \sqrt{2(\gamma^2 - 1)(Q + e_1)} = \sqrt{2(1,4^2 - 1)(3013 + 208) \cdot 10^3} = 2487 \text{ m/s} = 2,487 \text{ km/s} .$$



Obr. 1 Rázová a detonační Hugoniotova ^{detonujícího} adiabata NO.

Vznikající zplodiny detonace je možné považovat za ideální plyn pouze v tom případě, kdy se výchozí výbušnina svými vlastnostmi rovněž blíží ideálnímu plynu, nebo představuje silně pórézní kondenzovanou látku.

Kondenzované trhaviny vykazují hustotu $1 - 2 \text{ g/cm}^3$. Při detonaci se přeměňují málo stabilní molekuly výchozí trhaviny během krátké doby, řádově 10^{-7} s , na stabilní molekuly zplodin detonace. Hustota zplodin detonace je zhruba $4/3$ krát větší než počáteční hustota trhaviny. Při takových hustotách je vlastní objem molekul, neboli kovolument b představuje značnou část celkového objemu. Abelova stavová rovnice s kovolumentem používaná pro nižší hodnoty tlaků např. ve vnitřní balistice ve tvaru $p/V - b = RT$ ukazuje, že tlak roste s inverzní hodnotou $V - b$. Neideálnost chování zplodin detonace se projevuje tím, že rychlost detonace kondenzovaných trhavin závisí na počáteční hustotě ρ_1 . Pro objasnění této závislosti je ale nutné kovolument považovat za proměnnou veličinu závislou na tlaku, což je obecně nepřijatelné.

Při ^{tlaku} $10 - 50 \text{ GPa}$ je specifický molární objem $\sim 10 \text{ cm}^3/\text{mol}$ a pro takové hodnoty tlaku a specifických objemů neexistují přímé experimentální údaje a není známa přesná mikroskopická stavová rovnice pro popis dějů při detonaci kondenzovaných trhavin.

Landau a Staňukovič jako první předložili použít pro určení stavu zplodin detonace rovnici používanou ve fyzice pevných látek. Tepelné kmity molekul kolem rovnovážných poloh jsou příčinou tepelné části tlaku a energie, a při

stlačování látky t.j. i zplodin detonace v detonační vlně vzrůstá elastický tlak a elastická část energie ve stavové rovnici. Stavová rovnice tohoto typu má tvar

$$p = p/V/ + p_T/V, T/ = B/V^\gamma + \Gamma c_V T/V =$$

$$= B/V^\gamma + \Gamma e/V \quad - \text{vztah /1.59/}$$

$$e = e/V/ + e_T/V, T/ = B/(\gamma - 1)V^{\gamma-1} + c_V T,$$

kde Γ je Grüneisenova konstanta, γ je polytropický, nebo adiabatický koeficient a B je konstanta.

Při vysokých tlacích není tlak určen tepelným pohybem molekul, ale pružnými silami vznikajícími při deformaci molekul při vzájemném působení /repulsní síly/. Tvar stavové rovnice použitelný pro popis dějů při detonaci nabývá jednoduchého tvaru

$$p = B/V^\gamma = B \cdot \rho^\gamma. \quad /5.22/$$

V této rovnici chybí teplota, v souhlase s tím co bylo výše uvedeno. Zbývá určit hodnotu polytropického koeficientu γ . Ze vztahu /5.20/ a s použitím /5.22/ zjistíme, že $D \sim \rho_1^{(\gamma_2 - 1)/2}$ a z pokusně zjištěné lineární závislosti detonační rychlosti na hustotě, musí být $\gamma_2 = 3$. To plyne i z rozměrové analýzy, neboť $p \sim \rho_1 D^2$ a je-li $D = \text{konst} \rho_1$, je $p = \rho_1^3$ a je-li $p = p/\rho$, pak je tudíž i $p \sim \rho^3$.

Aproximace s použitím $\gamma_2 = 3$ zjednodušuje řešení rovnic plynové dynamiky a metodu charakteristik.

Její opodstatnění je potvrzeno pokusně zjištěnými hodnotami, které se pro kondenzované trhavinu pohybují v rozmezí $2,5 \div 3,5$. Střední hodnotě $\gamma_2 = \gamma_{CJ} = 3$ odpovídá hodnota $p_2 \equiv p_{CJ} = \rho_1 D^2/4$ a $\rho_2/\rho_1 =$

$= \rho_{CJ} / \rho_1 = 4/3$. Veličina $\gamma_2 = \gamma_{CJ}$ není obecně konstantou, ale závisí na počáteční hustotě trhaviny ρ_1 . Jedna z mnoha přibližných korelací má tvar: $\gamma_2 = \gamma_{CJ} = [(10,2(1 - 1,3 \rho_1) / 15,6 \rho_1)] - 1$.

V tabulce /5.1/ jsou pro ilustraci uvedeny výsledky výpočtů detonační rychlosti a tlaku plyných i kondenzovaných výbušnin podle hydrodynamické teorie detonace a pokusně zjištěné hodnoty.^{12, 24}

Tabulka 5.1 Detonační parametry výbušnin.

Výbušnina	Hustota $\rho_1 / \text{g, cm}^{-3} /$	Detonační rychlost		Detonační tlak	
		$D / \text{km.s}^{-1} /$ výpočet	experiment	$p_{CJ} / \text{GPa} /$ výpočet	exper.
plynné					
$2\text{H}_2 + \text{O}_2$		2,806	2,819	$1,805 \cdot 10^{-3}$	
$2\text{H}_2 + \text{O}_2 + 6\text{H}_2$		3,749	3,532	$1,418 \cdot 10^{-3}$	
$2\text{H}_2 + \text{O}_2 + 3\text{O}_2$		1,925	1,922	$1,53 \cdot 10^{-3}$	
kapalné					
NO oxid	1,30	5,607	5,620	10,6	10
NG-nitroglycerin	1,59	7,700	7,580	24,6	25,3
NM-nitrometan	1,128	6,390	6,290	13,0	14,1
TNT-tritol	1,447	6,556	6,580	16,0	17,2
pevné					
TNT-tritol	1,64	7,050	6,950	20,6	19,0
RDX-hexogen	1,80	8,754	8,754	34,7	34,7
HMX-oktogen	1,90	9,159	9,100	39,5	39,3
PETN-pentrit	1,77	8,421	8,300	31,8	33,5

TATB-	1,895	7,848	7,860	29,7	31,5
trinitro-					
triamino-					
benzen					
AN-dusičnan					
amonný	1,05	5,262	4,500	7,32	-
HNB -					
hexanitro-					
benzen	1,973	8,466	9,300	35,5	42,0

Přísada kyslíku a dusíku k plynné směsi snižuje detonační rychlost, kdežto přísada lehkého vodíku vede ke zvýšení detonační rychlosti. Detonační rychlost totiž nezávisí jenom na hodnotě výbuchového tepla, ale i na molekulové hmotnosti zplodin detonace. Detonační parametry vypočítané jsou převzaty z monografie CH. Madera²⁴ a jsou vypočítány pomocí BKW /Becker-Kistiakowsky-Wilsonovy/ stavové rovnice.

$$pV/RT = 1 + x \exp \beta x, \text{ kde} \quad /5.23/$$

$$x = \alpha \sum x_i b_i / V (T + \theta),^2$$

kde $\alpha, \beta, \alpha, \theta$ jsou empirické konstanty. x_i je molární zlomek i -té složky a b_i jsou geometrické kovolumy i -té složky zplodin detonace. Tato rovnice je výsledkem zavedení potenciálu odpuzování do rovnice s viriálovými koeficienty a naopak rozvojem členu $x \cdot \exp \beta x$ do řady, kde $x = B/V$ dostaneme tvar tzv. viriálové /virialis = silový/, stavové rovnice, která zahrnuje viriál mezimolekulárních a vnějších sil.

$$pV/RT = 1 + x + x^2 + \dots = 1 + B/V + C/V^2 + \dots,$$

kde B je druhý viriálový koeficient, C třetí atd. Podrobnosti týkající se BKW stavové rovnice a výpočty parametrů trhavin s pomocí BKW rovnice jsou uvedeny ve zmíněné monografii a lit.^{24 188} Použití viriálové stavové rovnice VLW je uvedeno v lit.¹³⁶

Pro přibližný výpočet detonačních rychlostí a tlaků kondenzovaných trhavin a jejich směsí o sumárním vzorci $C_a H_b O_c N_d$ pro trhaviny o počáteční hustotě $\rho_1 > 1 \text{ g.cm}^{-3}$ je možné použít vztahu podle Jacobse a Kamleta^{137,138}

$$D = 0,706(1 + 1,3 \rho_1) \cdot \varphi^{1/2},$$

/5 .24/

$$p_{CJ} = 0,76 \varphi \rho_1,$$

kde

$$\varphi = N \cdot M'^{1/2} \cdot Q^{1/2},$$

kde

$$Q = \frac{28,9 b + 47,0(c - b/2) + \Delta H_{f0}}{12 c + b + 16 c + 14 d},$$

$D/\text{km.s}^{-1}$, p_{CJ}/GPa , $N/\text{mol.g}^{-1}$ je počet molů výbušniny, $M'/\text{g.mol}^{-1}$ je střední molekulová hmotnost zplodin výbuchu, $\rho_1/\text{g.cm}^{-3}$, $Q/\text{J.g}^{-1}$ je výbuchové teplo, $\Delta H_{f0}/\text{J.g}^{-1}$ je slučovací teplo a a, b, c, d , jsou koeficienty sumárního vzorce.

Pro hodnotu γ máme vztah závisející pouze na hustotě

$$\gamma_{CJ} = D^2/p_{CJ} - 1 = 0,6547(1 + 1,3 \rho_1)^2 / \rho_1 - 1,$$

a $N = (2c + 2d + b)/(48a + 4b + 56c + 64d),$

$$M' = (56c - 88d - 8b)/(2c + 2d + b).$$

Příklad 5.3.4

Vypočtete detonační parametry kapalného oxidu dusnatého, který se rozkládá na dusík a kyslík. Hustota kapalného NO je $\rho_1 = 1,29 \text{ g/cm}^3$. K výpočtu použijte Kamletovy vzorce a pro hodnotu $NM > 0,93$ použijte koeficient 0,715 namísto 0,76 ve výrazu pro p_{CJ} .

Řešení:

$$\rho_1 = 1,29 \text{ g/cm}^3,$$

$$Q = 3014 \text{ J/g},$$

$$M = 30, \text{ /průměrná molekulová hmotnost zplodin (g) trhaviny/}$$

$$N = 0,0333 \text{ /počet molů plynných detonačních zplodin/g trhaviny } 2/60 = 0,03333 \text{ /}$$

$$\varphi = 0,0333 \cdot 30^{1/2} \cdot 3014^{1/2} = 10,013,$$

$$D = 0,706 \cdot (1 + 1,3 \cdot 1,29) \cdot 10,013^{1/2} = 5,98 \text{ km/s},$$

$$p_{CJ} = 0,715 \cdot 10,013 \cdot 1,29^2 = 11,91 \text{ GPa}.$$

Porovnejte tyto hodnoty s pokusnými a vypočtenými hodnotami pomocí BKW uvedené v tabulce 5.1 a hodnotami vypočítanými pro detonaci v plynné fázi z příkladu 5.3.3.

Pomocí stejného postupu t.j. s použitím vztahů /5.24/ vypočítejte detonační parametry oktogenu /HMX/ a oktanitro-kubánu /OCNC/, jsou-li jejich slučovací tepla ΔH_{f0}

72,85 kJ/mol, 339,3 kJ/mol a hustota $\rho_1 = 1,903 \text{ g/cm}^3$,

$\rho_1 = 2,098 \text{ g/cm}^3$. / Obdrželi jste hodnoty D: 9,12 , 9,83 km/s a p_{CJ} : 38,1 , 46,7 GPa ? /

Příklad 5.3.5

Vztahy $D = \sqrt{2(\gamma^2 - 1)} Q$, $p_2 = 2(\gamma - 1)\rho_1 Q$ se často používají v teorii a k výpočtům detonace plynů. Q je zde kalorimetrická hodnota výbuchového tepla/t.j. určená v kalorimetrické bombě/. V literatuře naleznete všechny informace o tom, proč tyto vztahy dávají vysoké hodnoty pro kondenzované trhaviny. S použitím Staňukovičovy monografie⁵ odvoďte vztah $D^* = \sqrt{2(\gamma^2 - 1)(\gamma + 1) Q / (3\gamma - 1)}$, $p_2^* = 2(\gamma^2 - 1)\rho_1 Q / (3\gamma - 1)$. t.j. mezi kalorimetrickým výbuchovým teplem a výbuchovým teplem realizovaným při detonaci platí $Q^* = (\gamma + 1) Q / (3\gamma - 1)$. Porovnejte vypočtené hodnoty pro tritol/TNT, tetryl, hexogen.

Řešení:

je uvedeno v následující tabulce

Trhavina	Hustota ρ_1 [kg/cm ³]	Exponent γ	Výbuchové teplo kal. Q [kJ/kg]	Detonační rychlost D [km/s]	Detonační tlak p_2 [GPa]
				*	*
Tetryl	1,0	3,05	3851	8,64 5,63	16,1 8
Tritol	1,0	3,05	3599	7,72 5,44	15,05 7,48
	1,3	3,23	3977	8,65 6,03	23,52 11,45
	1,45	3,30	4186	9,08 6,32	28,48 14,20
	1,59	3,36	4353	9,45 6,55	33,54 17,80
Hexogen	1,80	2,98	5970	9,70 6,87	42,55 21,33

Porovnejte realističtější hodnoty D^* a p_2^* uvedené v druhém sloupci s pokusnými hodnotami. Všimněte si, že $Q^* = 1/2 Q$ pro $\gamma = 3$. Došli jste k závěru, že vztahy pro D^* , p_2^* , Q^* jsou hrubou aproximací? Dremin¹⁷ spojuje Q s izobaricko-izochorickým efektem tepelného zabarvení reakce.

Příklad 5.3.6

Určete zobecněnou adiabatou pro trhavyňy a stanovte detonační parametry hexogenu /RDX/, je-li jeho sumární vorec $C_3H_6N_6O_6$, počáteční hustota $\rho_1 = 1,8 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$, molekulová hmotnost $M = 222,1$, výbuchové teplo $Q = 5792 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}$ a adiabatický exponent $\gamma_{CJ} = 2,912$ /určený podle korelace uváděné v práci¹⁵³/.

Řešení:

Přijmeme hypotézu, že detonační rychlost na čele vlny je dána vztahem

$$D = c_N + v_N \quad \text{/analogie Chapman-Jouguetova vztahu/, /1/}$$

kde c_N je rychlost zvuku na čele detonační vlny a v_N hmotová rychlost rovněž na čele detonační vlny. Pro parametry na čele detonační vlny platí vztah $v_N/D = 2/(\gamma_N + 1)$, v CJ rovině vztah $v_{CJ}/D = 1/(\gamma_{CJ} + 1)$. Viz. příklad 5.3.1. Pro adiabatický exponent na čele vlny a v CJ rovině platí

$$\gamma_N = \gamma_{CJ} \cdot \rho_{CJ} / \rho_N = \gamma_{CJ} - 1, \quad /2/$$

a rovněž

$$v_N/v_{CJ} = 2(\gamma_{CJ} + 1)/\gamma_{CJ}.$$

Rychlost zvuku v CJ rovině je dána vztahem

$$c_{CJ}/c_1 = \rho_{CJ}/\rho_1 = (\gamma_{CJ} + 1)/\gamma_{CJ} \quad /3/$$

Změně $c_{CJ} \rightarrow c_N$ odpovídá změna $\gamma_{CJ} \rightarrow \gamma_N = \gamma_{CJ} + 1$ a proto

$$c_N/c_1 = (\gamma_{CJ} + 2)/(\gamma_{CJ} + 1), \quad /4/$$

tudíž zobecněná adiabata má tvar

$$\begin{aligned} D &= (\gamma_{CJ} + 2)c_1 / (\gamma_{CJ} + 1) + 2(\gamma_{CJ} + 1)v_{CJ} / \gamma_{CJ} = \\ &= A + B v_{CJ}. \end{aligned} \quad /5/$$

Hmotová rychlost v_{CJ} může být vyjádřena vztahem

$$v_{CJ} = [2\mathcal{G}_{CJ} - 1) Q / (\mathcal{G}_{CJ} + D)]^{1/2}. \quad /6/$$

Avšak výbuchové teplo Q se neuvolní ihned a v detonaci se realizuje teplo ηQ , kde η je realizační faktor

$$\eta = Q_{det}/Q = (\alpha + 1,65)\rho_1 / 5,5, \quad /7/$$

kde α je kyslíkový součinitel $\alpha = 2d/(4a + b)$ pro trhavinu o sumárním vzorci $C_a H_b N_c O_d$.

Rychlost zvuku můžeme určit podle Raoovy formule

$$c_1 = (\rho_1 z_i \beta_i / M)^3,$$

kde M je molekulová hmotnost, z_i počet chemických vazeb a β_i jsou příspěvky těchto vazeb.

\mathcal{G}_{CJ} vypočítáme z korelace: $\mathcal{G}_{CJ} = 1,25 + \mathcal{G}_1 (1 - e^{-0,546\rho_1})$

kde pro RDX je ¹⁵³

$$\mathcal{G}_1 = \frac{a + 0,35b + 0,5c}{0,2857a + 0,2166b + 0,1316c + 0,018d}.$$

a/ určení rychlosti zvuku ¹⁵²

$$z_i \beta_i = 6\beta_{C-H} + 6\beta_{C-N} + 3\beta_{N-NO_2} = 6 \cdot 95,2 + 6 \cdot 20,7 + 3 \cdot 330 = 1685,4$$

$$c_1 = (1,8 \cdot 1685,4 / 222,1)^3 = 2547,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b/ vypočítáme kyslíkový součinitel a realizační faktor

$$\alpha = 2 \cdot 6 / (4 \cdot 3 + 6) = 0,6667$$

$$\beta = (0,6667 + 1,65) \cdot 1,8 / 5,5 = 0,7582$$

c/ rychlost částic

$$v_{CJ} = [2(2,912 - 1) \cdot 0,7582 \cdot 5792 \cdot 10^3 / (2,912 + 1)]^{1/2} = 2084 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

d/ detonační rychlost

$$D = (2,912 + 2)2547,9 / (2,912 + 1) + 2(2,912 + 1).$$

$$\cdot 2084 / 2,912 = 8797 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

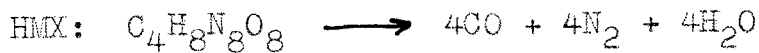
e/ detonační tlak

$$P_{CJ} = 1,8 \cdot 8797^2 \cdot 10^{-6} / (2,912 + 1) = 35,6 \text{ GPa}$$

Poznámka: Porovnejte zobecněnou adiabatou /5/ pro $\gamma = 3 - 4$ s pokusně stanovenou adiabatou podle Amstera a Woolfolka z příkladu 1. 76 , nebo pokusně zjištěnou zobecněnou adiabatou podle Voskoboynikova a kol.¹⁵²

Příklad 5.3.7

V knize³⁵ je uváděn empirický vztah pro vyjádření specifického impulsu ve tvaru $I_S \approx N^{1/2} \cdot T_S^{1/2}$. Odvoďte tento vztah a porovnejte relativní specifický impuls pro oktogen HMX, oktanitrokuban OCNC, jsou-li rovnice rozkladu



molekulová hmotnost $M = 296$

počet uvolněných molekul/molekulová hmotnost $N/M = 0,0406$

relativní slučovací teplo $\Delta H_f^* = 1,00$



molekulová hmotnost $M = 464$

počet uvolněných molekul/molekulové hmotnost $N/M = 0,026$

relativní slučovací teplo $\Delta H_f^* = 3,74$

Řešení:

Hybnost je dána vtahem $p_i = m_i v_i$, síla je $\dot{p}_i = \sum d/dt \cdot C(m_i v_i)$, kde m_i je celková hmotnost molekul typu i , vznikající při hoření a v_i je jejich rychlost. Z kinetické teorie plynů víme, že kinetická energie jednoho molu plynu s molekulovou hmotností M' a absolutní teplotou T je $M'v^2/2 = 3/2 RT$. Uvažujeme-li pouze jeden směr toku v trysce raketového motoru je $M'v^2/2 = RT/2$, nebo $v = (RT/M')^{1/2}$. Vykazují-li plyny při hoření paliva spalnou teplotu T_S , pak $v_i = (RT_S/M_i)^{1/2}$. Pak $\dot{p} = \sum d/dt (m_i (RT_S/M_i)^{1/2}) = \sum d/dt (m_i^2 (RT_S/M_i)^{1/2})$. Impuls je definován integrál změny hybnosti k jednotce hmotnosti paliva $I_S = \int_0^{t_S} p/M' dt = (RT_S)^{1/2}/M' \int_0^{t_S} \sum d/dt (m_i^2/M_i)^{1/2} dt$, kde M je hmotnost paliva. Po integraci je $I_S = (RT_S)^{1/2}/M' \sum (m_i^2/M_i)^{1/2}$. Protože $N_i = m_i/M_i$ je $I_S \sim T_S^{1/2}/M' \sum m_i^{1/2} \cdot N_i^{1/2}$. Tento výraz můžeme zjednodušit aproximací:

$$\sum_i m_i^{1/2} N_i^{1/2} \approx \sum_i m_i^{1/2} \cdot \sum_i N_i^{1/2} ,$$

$$\sum_i m_i^{1/2} \approx (\sum_i m_i)^{1/2} , \quad \sum_i N_i^{1/2} \approx (\sum_i N_i)^{1/2} ,$$

Protože $\sum_i m_i = M$, a N je celkový počet molů plynu na jednotku paliva, $N = (\sum N_i)/M$, pak pro $I_S \approx T_S^{1/2} \cdot N^{1/2}$. /1/

140

Teplotu hoření určíme pomocí standardních výpočtových metod jako

$$T_S = T_0 - \Delta H_S / c_{p,(g)} , \quad /2/$$

a spalné teplo paliva

$$\Delta H_S = \sum_i^{\text{zplodin}} N_i \Delta H_{f,i} - N_{\text{paliva}} \cdot \Delta H_{f,\text{paliva}} \quad /3/$$

Palivo	Teplota hoření T_S [K]	Zplodiny N [moly]	$T_S^{1/2} \cdot N^{1/2}$	Relativní I_S
HMX	3464	12	203,88	1,00
OCNC	3259	12	197,76	0,97

Relativní impuls oktannitrokubánu je horší než oktogenu.

Vypočtete podobným způsobem relativní impulsy hexogenu/RDX/, a nitroglycerinu /NG/, jsou-li jejich teploty hoření 3499 K, 4468 K.

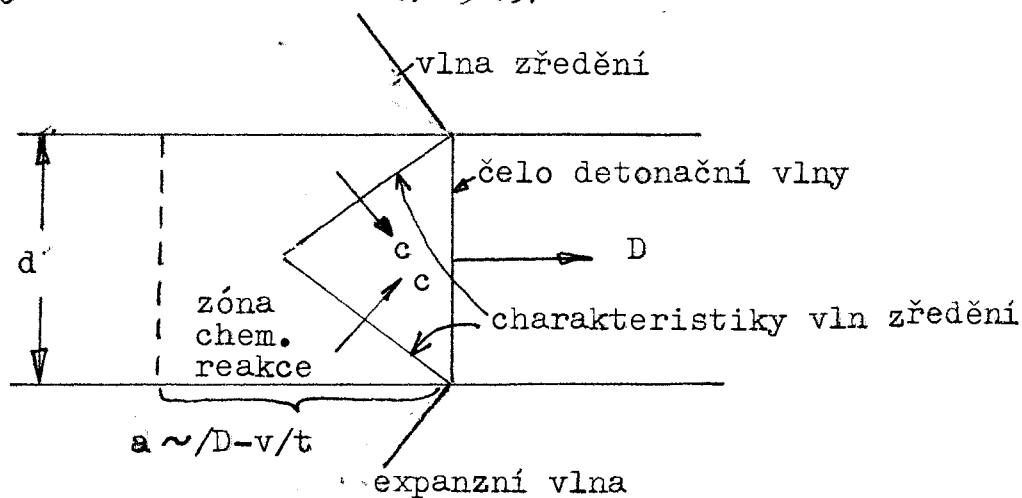
Tento příklad zde byl zařazen proto, že nově syntetizované trhavinny jsou testovány nejenom jako trhavinny, ale rovněž jako pohonné hmoty, což je častější případ.

Urychlovací účinek trhavin při detonaci je posuzován pomocí hmotové rychlosti $v_2 \equiv v_{CJ}$, a nebo Gurneyovy rychlosti. ¹⁴¹

V pevných trhavinách detonace uhasíná, jestliže průměr nálože je menší než tzv. kritický průměr nálože. Kritický průměr závisí na fyzikálně-chemických vlastnostech trhaviny a vnějších podmínkách / tlak, teplota/. Existenci kritického rozměru nálože/kritický průměr, kritická vrstva/ nelze objasnit pomocí klasické teorie detonace, neboť ta neuvažuje s konkrétní dobou trvání chemické reakce na čele detonační vlny. Souvislost mezi dobou chemické reakce a kritickým průměrem zjistil V.O. Rosing a Ju.V. Chariton /1940/¹²². Podmínka šíření detonace má tvar $d/c > \tau$, kde d je průměr nálože, c je rychlost zvuku v zóně chemické reakce, τ je doba chemické reakce. Z nerovnosti vyplývá, že doba chemické reakce látky stlačené rázovou/detonační/ vlnou musí být menší než je doba expanze reagujícího prostředí. Pro odhad kritického průměru platí přibližně

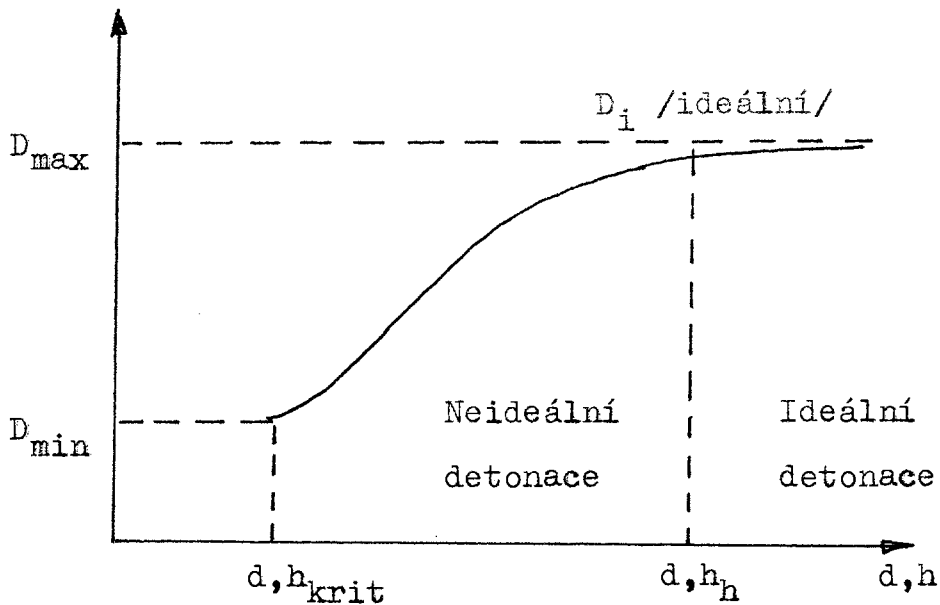
$$d_{\text{krit}} \approx c \tau$$

Se zmenšováním průměru nálože se zvětšuje rozptyl reagující trhaviny do stran a rostou ztráty energie, která udržuje detonaci. Situace je znázorněna na obr./ 5.5/



Obr. 5.5 Charitonova představa kritického průměru¹²²

V plynných a kondenzovaných výbušninách existuje mezní průměr a rovněž mezní vrstva při kterých detonace uhasíná.



Obr. / 5. 6 / Závislost detonační rychlosti na průměru/vrstvě/ náložce.

d, h_{krit} je spodní mezní/kritický/ průměr

d, h_h je horní mezní průměr, při $d, h \rightarrow \infty$,

$D \rightarrow D_{max} \equiv D_i$ /ideální/

U plynných výbušnin hovoříme spíše o mezních průměrech v trubkách, nebo kanálech, neboť realizace kritické vrstvy je u plynných výbušnin problematická. Horní mezní průměr, nebo vrstva se zpravidla neurčuje, neboť se k maximální detonační rychlosti blíží asymptoticky. Průběh křivky $D = f/d, h$ mezi d, h_{krit} a d, h_h je pro různé výbušniny různý a závisí na hustotě, textuře, výchozí teplotě, u plynných na viskozitě, adiabatické indukční periodě zážehu a pod.

Děj mezi kritickým průměrem a horním mezním průměrem nazýváme oblastí neideální detonace a režim nad horním mezním

průměrem považujeme za ideální. Je přirozené, že vzhledem k geometriím náloží je kritická vrstva vždy menší než kritický průměr, neboť ztráty energie expanzními vlnami jsou v druhém případě mnohem větší, než v prvním. V tab.5.2 je tato skutečnost dokumentována pro některé trhaviny a trhavinové směsi

Tab.5.2 Kritické vrstvy a průměry trhavin

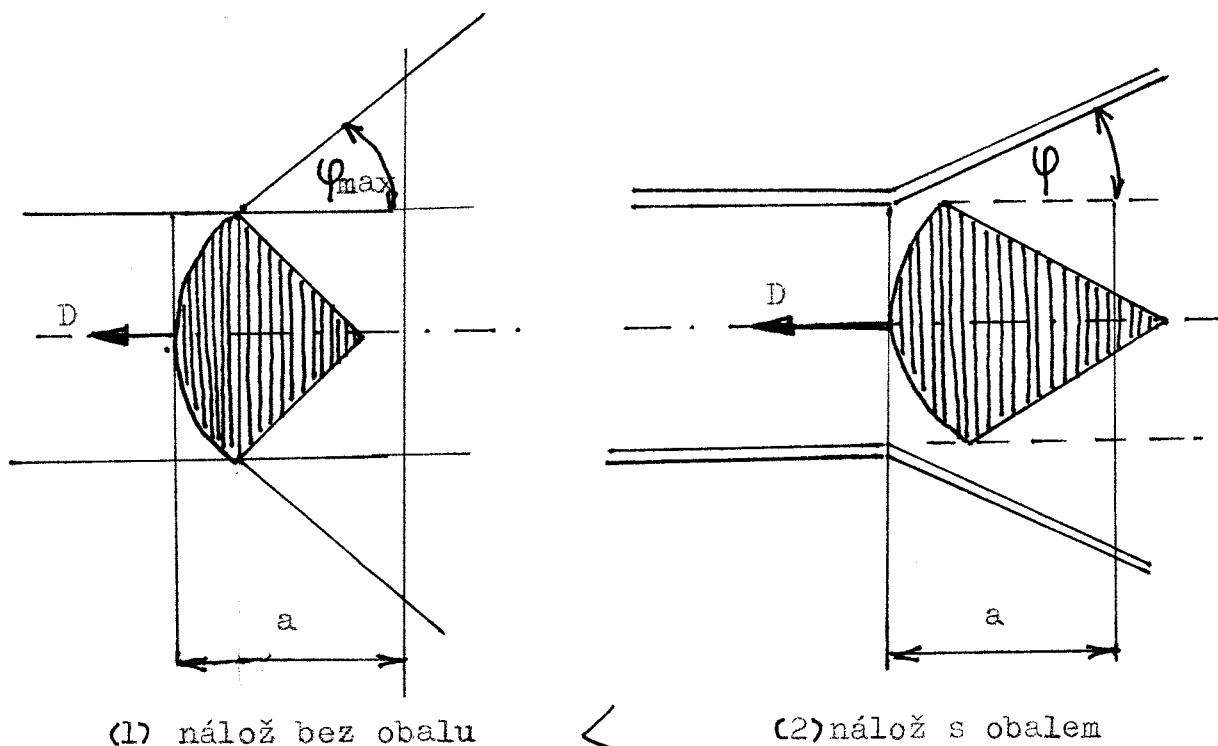
Trhavina	Hustota ρ [g/cm ³]	Kritická	
		vrstva h_{krit} [mm]	průměr d_{krit} [mm]
TNT lisovaný	1,63	2,16	2,6
PBTN/TNT litý			
50/50	1,70	1,39	6,7
RDX/TNT litý	1,69	1,43	4,3
50/50			
TATB lisovaný	1,70	0,85	6,35
Semtex 1A +	1,48	1,0	2,0

+/ průmyslová plastická trhavina.

Obal nálože neovlivňuje detonační charakteristiky při ideální detonaci, ale ovlivňuje spodní mezný/kritický/ průměr nebo vrstvu. Obal zpomaluje expanzi zplodin detonace a mění směr bočních expanzních vln. /viz. Obr. 5.7 /

Úhel expanze detonačních zplodin φ_{max} nálože bez obalu je menší, než úhel φ , pod kterým se rozevívá trubka, nebo odklání deska. V náloži s obalem se přetlakový kužel prodlouží a zůstane-li reakční zóna přibližně stejně dlouhá uvolňuje se v ní více energie, což se projeví např. vzrús-

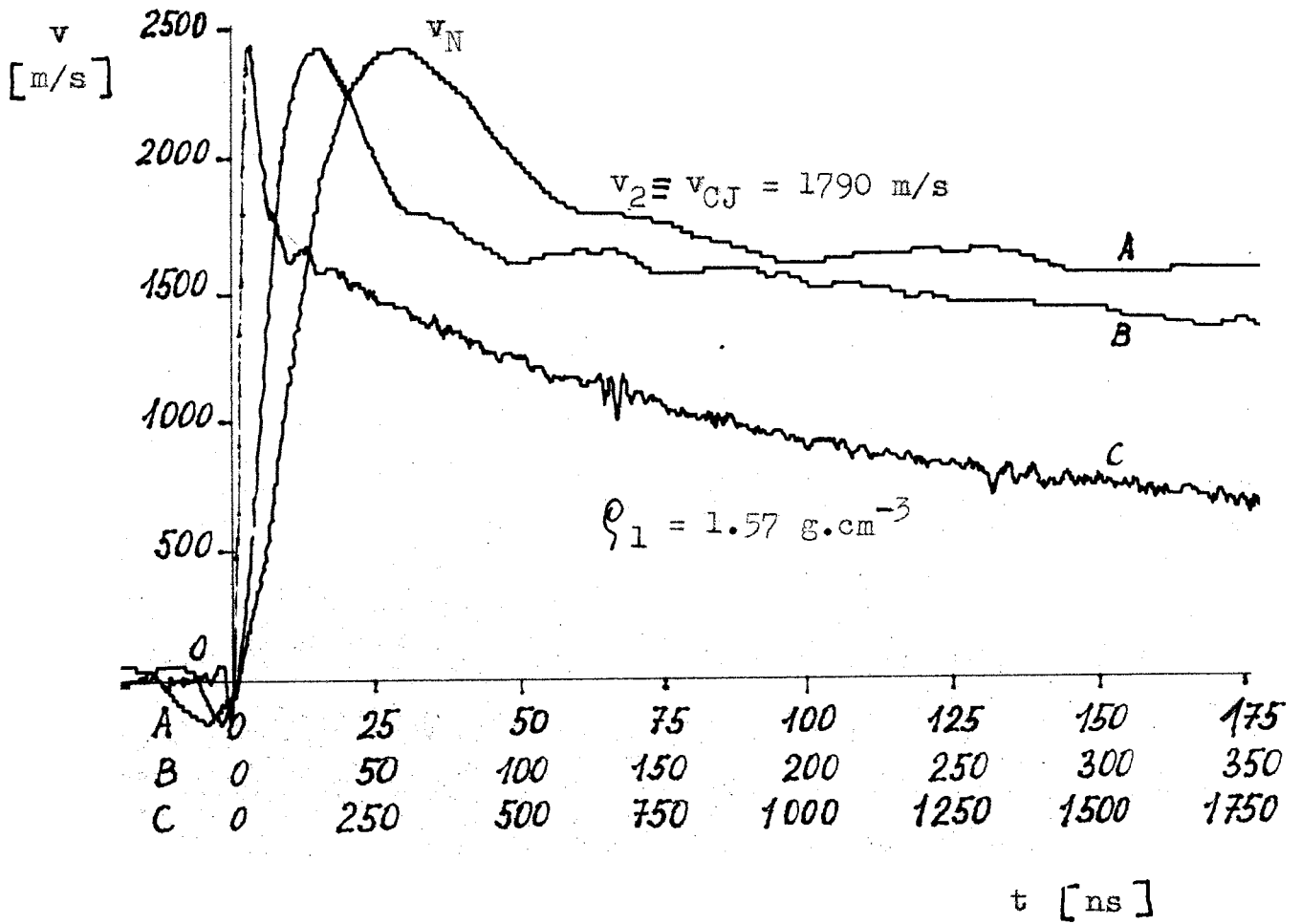
tem detonační rychlosti.



Obr.5.7 Geometrický model detonační vlny v nálož
bez obalu a v nálož v trubce při ideální
detonaci

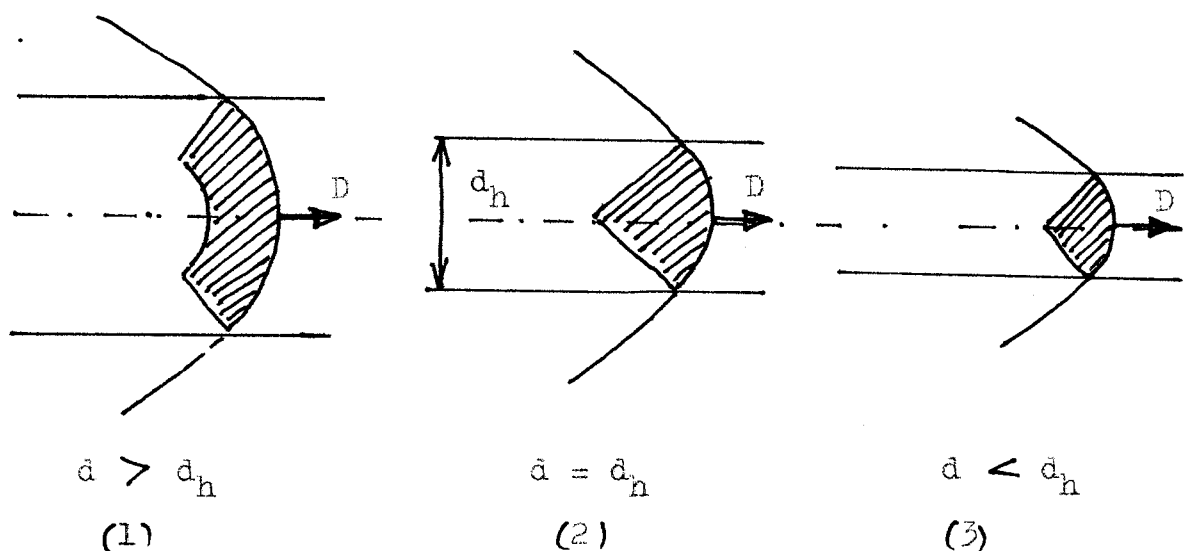
V modelu detonace uvedeném na obr.5.8 se předpokládá, že tlak takřka okamžitě stoupne z počáteční hodnoty p_1 na hodnotu p_N a klesá na hodnotu $p_2 \equiv p_{CJ}$. Tato perioda trvá několik mikrosekund. Chemické reakce startují při teplotách 1500 -2000 K a v průběhu reakce rostou až na 5000 K. Původní objem komprimované výbušniny expanduje na objem odpovídající tlaku p_2 a ten je asi o 20 % menší, než původní objem výbušniny.

Hydrodynamická teorie detonace neřeší strukturu detonace a nevyplývá z ní velikost reakční zóny a poloha CJ bodu resp. roviny je závislá pouze na množství energie, která se uvolní mezi čelem detonační vlny a CJ rovinou.



Obr. 5.8 Struktura detonační vlny - záznam rychlosti částic v závislosti na čase. (trhavina A - IX - 1 s obsahem RDX . . . měřeno elektromagnetickou metodou, J. Majzlík, VÚPCH)

Na druhé straně uvolní se v tomto prostoru jen část energie, dokončují se chemické reakce za CJ rovinou t.j. v expanzní oblasti /Taylorovy vlny/. Nakonec je možné připomenout, že i v rázové vlně, která se šíří inertním prostředím existuje obdoba N a CJ roviny a to i v případě, že v něm probíhají disociační reakce t.j. endotermní pochody snižující energii rázové vlny. Přinejmenším je nepřesné ztotožňovat vzdálenost CJ roviny od čela detonační vlny s délkou reakční zóny, i když tak pro jednoduchost konáme. Vyjdeme-li však např. z názorného Cookova geometrického modelu ideální a neideální detonace, pak můžeme v hrubých rysech tvrdit, že při detonaci se blížíme stavu, kdy se délka reakční zóny chemické reakce rovná vzdálenosti $a = t(D_{\max} - v)$ a to při horním mezním průměru nálože d_h . Reakční zóna při různém průměru nálože podle Cooka²³ je uvedena v následujícím obr. 5.9



Obr. 5.9 Reakční zóna v geometrickém modelu detonace při různém průměru²³

5.4 Projevy reálné detonace ve výbušninách

Je známo, že v náložích konečného průměru je detonační čelo zakřivené. Podle Cooka²³ lze ve válcových náložích s dostatečnou přesností považovat čelo detonační vlny za sférické. Při tom pro poloměr křivosti čela je splněna nerovnost $0,5 \leq R_{\max}/d \leq 3,5$. R_{\max} je maximální poloměr zakřivení, d je průměr nálože. Hodnota $R_{\max}/d = 0,5$ se již blíží k hodnotám kritických průměrů/.

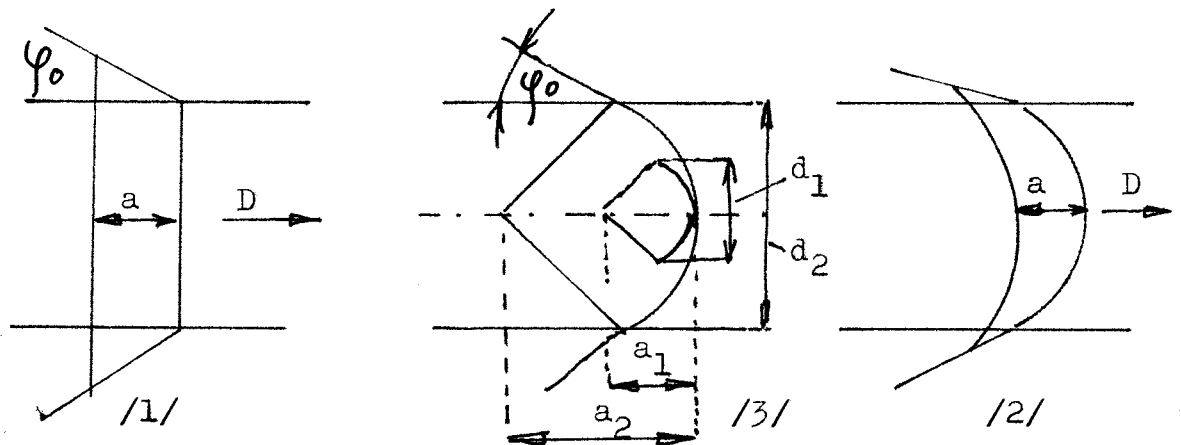
Klasická hydrodynamická teorie detonace jak byla vyložena vychází z idealizovaných předpokladů, které v reálných podmínkách nejsou nikdy splněny. Proto při měření detonačních parametrů docházíme často k závěru, že naměřené hodnoty se navzájem liší, nebo se liší od hodnot určených teoreticky. Například takovou idealizací je rovinná detonační vlna.

Hydrodynamická teorie detonace ve své nejjednodušší podobě neuvažuje s vlivem viskozity a odvodem tepla do okolí, a proto i Chapman- Jouguetova podmínka neplatí přesně.

Ačkoliv závislost detonační rychlosti na průměru nálože byla známa již před I. světovou válkou teoretické představy byly publikovány mnohem později Jonesem¹²³, Eyringem¹³⁹, Cookem²³ a Kirkwoodem^{124, 144}.

Podle Jonese začíná reakce v určité rovině kolmé na osu nálože a končí v jiné rovině, přičemž vzdálenost a je šířka reakční zóny. / Obr.5.10/1//

Jestliže zavedeme pohyblivé souřadnice, jejichž počátek je v čele detonační vlny, pak se nám expandující zplodiny jeví jakoby vytékaly z trysky /Nozzle theory/- Obr. 5 .10 /1/.



Obr. 5 .10 Reálná detonace podle 123, 139, 23
 /1/ Jonese, /2/Eyringa, /3/Cooka

Eyring na rozdíl od Jonese při hledání závislosti detonační rychlosti na průměru nálože vychází z představy zakřiveného čela detonační vlny /Curved front theory/. Jejich výsledky je možné vyjádřit vzorci:

$$\text{Jones } D/D_i^2 = 1 + \gamma^2/z^4 - 1/, \text{ kde}$$

$$z = 1 + 0,85 /1 - 2\text{acotg } \varphi_0/d /$$

φ_0 představuje úhel, pod kterým postupuje expanzní vlna od okraje nálože do středu.

$$\text{Eyring } D/D_i = 1 - a/d$$

Naproti tomu Cook vychází z faktu, že délka reakční zóny není konstantní, ale mění se s průměrem nálože. Podle něj je detonační rychlost určena energií uvolněnou v určité kritické oblasti za čelem vlny, která je dána průchodem expanzní vlny do středu nálože / Obr. 5.10/3//. Tato kri-

tická oblast, někdy se jí říká "detonační hlava", může obecně ležet buď uvnitř skutečné reakční zóny v případě reálné detonace, anebo může souhlasit, resp. být větší, než je reakční zóna, t.j. případ ideální detonace. Vliv délky reakční zóny je pak následující. Skutečná Chapman-Jouguetova rovina ve válcové náložce souhlasí vždy s oblastí příchodu expanzní vlny. Jestliže je délka reakční zóny a menší nebo rovna této vzdálenosti je detonace ideální. Avšak je-li větší než tato vzdálenost je neideální, neboť pro podporu detonační vlny se uvolní pouze část energie. Poměr D/D_i závisí v Cookově modelu na efektivním průměru náložce d' , detonační rychlosti D a průměrné době uhořívání částic trhaviny τ . Cookův model detonace zahrnuje i vývoj tvaru čela detonační vlny od místa iniciace, kdy poloměr zakřivení R čela detonace vzrůstá až do vzdálenosti $L_{\max} \sim 3,5 d'$.

Mohou nastat tyto případy:

- a/ $a \ll d'$, pak $D/D_i = 1$ a přechodná detonační zóna se na začátku náložce neprojevuje.
- b/ $a < d'$, pak v oblasti $0 < L < L_{\max}$ se šíří detonační vlna přechodovou rychlostí a na konci přechodné oblasti $D \rightarrow D_i$.
- c/ $a > d'$, v oblasti $0 < L < L_{\max} = 3,5 d'$ probíhá formování čela detonace a na konci této zóny je $D < D_i$. Touto neideální rychlostí se šíří stabilní detonační vlna.

Přestůže Charitonova koncepce kritického průměru a schema toků reagujícího prostředí znázorněného na obr. /5.5/ znamenala velký pokrok v chápání podstaty kritického rozměru nálože je fyzikálně neudržitelná. Rozpor spočívá v tom, že charakteristiky bočních expanzních vln /vln zředění/ ve kterých dochází k rozptylu zplodin se nacházejí za čelem rázové vlny, kde je tok látky podzvukový. Z tohoto důvodu schema na obr. /5.5/ nemůže být stacionární. Podobné námitky vyslovily rovněž Zeldovich a Kompanejec.¹¹ Při adiabatické expanzi zplodin detonace se zplodiny ve vlně zředění ochlazují a jestliže toto ochlazování je větší, než rozeřev látky chemickou reakcí, reakce se přeruší.

¹⁴²
Dreminem a Trofimovem byla vypracována teorie kritického průměru založená na představě o šíření stabilní, nestacionární, pulsující detonační vlně. Tyto představy o podstatě kritického průměru ^{jsou založeny} se ~~opírají~~ na předpokladu, že k uvolňování tepla v detonační vlně dochází adiabatickým tepelným výbuchem, bez autokatalytických reakcí. V souhlase s touto teorií je pro případ $RT/E \ll 1$, $RT^2 \bar{c}_v / EQ \ll 1$ je $d_{krit} = K' t_i$, kde K' veličina určená parametry toku stlačené trhaviny a rychlostí její detonace, t_i je indukční perioda za rázovým čelem, R je univerzální plynová konstanta, T je počáteční teplota, E je aktivační energie v Arrheniově zákoně, \bar{c}_v je střední specifické teplo trhaviny a zplodin výbuchu, Q je uvolněné teplo reakce.

Šířka zóny chemické reakce a není ve vzorci pro d_{krit} obsažena / $a \ll d_{krit}$ /.

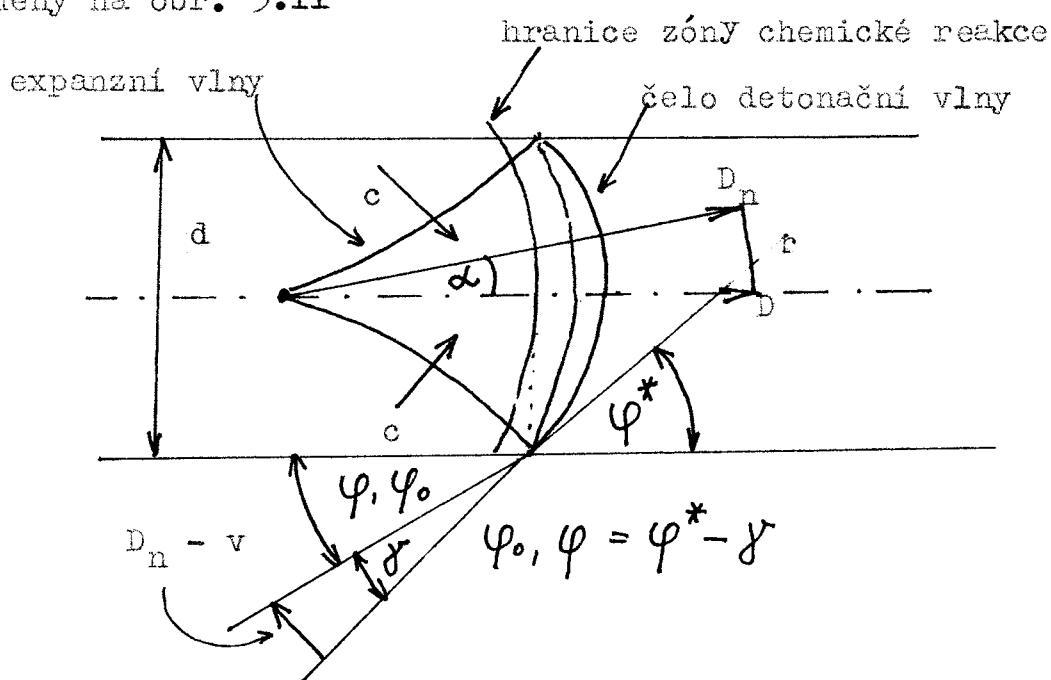
Řada autorů se pokouší vypracovat uspokojivou teorii kritického průměru, která by úspěšně vysvětlila pokusná data a mohla sloužit k předpovědím.

Jedním z mnoha autorů, jehož práce je fyzikálně názorná a stojí za pozornost je práce Kobylkina a Kol.¹⁴³

Tito autoři v teorii kritického průměru aproximují detonační čelo sférickým povrchem o poloměru R , které se šíří s normální detonační rychlostí $D_n = D \cos \alpha \approx D(1 - 1/2 \cdot r^2/R^2)$, a za předpokladu stacionárnosti toku za čelem detonační vlny odvodili pro kritický průměr vztah

$$d_{\text{krit}} = 2v c \cos \varphi^* / Q \Gamma d\lambda^* / dt,$$

kde c je rychlost zvuku bezprostředně za detonačním čelem, v je hmotová rychlost částic, Γ je Grüneisenova konstanta trhaviny, Q je zabarvení chemické reakce, $d\lambda^*/dt$ je počáteční rychlost chemické reakce za čelem rázové vlny v ose nálože, φ^* je úhel náklonu čela detonační vlny k povrchu nálože, při kterém se tok za čelem stává zvukovým. Poměry pro odvození vztahu jsou uvedeny na obr. 5.11



Obr. 5.11. Poměry v detonující náloži podle Kobylkina a kol. 143

V případě nálože uzavřené do trubky bude platit analogický vztah, avšak s úhlem $\varphi_T^* < \varphi^*$. Z toho plyne, že pokud je kritic-

ká rychlost detonace trhaviny v trubce i bez ní je přibližně stejná platí vztah

$$d_{T \text{ krit}}/d_{\text{krit}} = \cos \varphi_T^* / \cos \varphi^*$$

příčemž je-li trhavina uzavřena v trubce z méně stlačitelného materiálu dochází ke zmenšení d_{krit} v průměru o řád, což je v souhlase s pokusnými údaji, a je-li materiál trubky stlačitelnější, než je vlastní trhavina, tak přítomnost trubky nevede k podstatnému zmenšení kritického průměru.

Úhel φ^* je určen výrazem

$$\varphi^* = \text{arctg } D_n^2 / (D_n - v) [bv (2D_n - bv)]^{1/2},$$

kde b je koeficient rázové adiabata trhaviny ve tvaru uvedeném v kap. 1.7 $D = a + b \cdot v$ a analogicky φ_T^* je funkcí rychlosti rázové vlny U v materiálu trubky ve tvaru $U = a' + b' \cdot v$

Rychlost zvuku v rázově ztlačené látce je určena vtahem

$$c = a \left[\rho_2 / \rho_1 - b \left(\rho_2 / \rho_1 - 1 \right) \right] / \rho_2 / \rho_1 \left[\rho_2 / \rho_1 - b \cdot \left(\rho_2 / \rho_1 - 1 \right) \right].$$

Protože úhel náklonu čela detonační vlny k povrchu náložě φ^* je funkcí úhlu expanze φ_{max} detonačních zplodin, nebo úhlu odklonu φ utěsněné náložě / a ten je funkcí balistického poměru $r = C / M_z$, kde C je hmotnost trhaviny a M_z je hmotnost obalu/ je možné sestavit kvantitativní závislost kritického průměru na tloušťce stěny trubky.

Například pro ocelovou trubku naplněnou litým TNT o hustotě $\rho_1 = 1,62 \text{ g/cm}^3$ je $D = 2300 + 2,15 v \text{ [m/s]}$ a rázová adiabata $U = 3800 + 1,58 v \text{ [m/s]}$. Výpočty ukazují, že pro $D = 4500 - 7000 \text{ m/s}$ je $\varphi^* \sim 85-83^\circ$ a $\varphi_T^* \sim 45 - 48^\circ$. Poměr kri-

tických průměrů $d_{krit}/d_{T\ krit} = 6,1 \div 8$ pro hodnoty $Q = 11,3 \text{ GJ/kg}$ a $\rho \sim 2 \div 3$.

Výsledky jsou uvedeny v tabulce 5.3 143

Parametry		Trhavina TNT litý	TNT lisovaný
Hustota [g/cm^3]		1,62	1,62
Kritický průměr d_{krit} [mm]	pokusný	15 \div 30	2,6 \div 3,5
	výpočet	32	3,4

Práce používá k analýze detonačních polár.

Koncepce kritického průměru, nebo vrstvy je u plynů kvalitativně podobná jako u kondenzovaných trhavin: zvětšení zóny chemické reakce vede k růstu ztrát tepla a impulsu z oblasti mezi čelem detonační vlny a CJ rovinou, což vede ke snížení rychlosti vlny, dodatkovému rozšíření zóny reakce atd. Vzniká kritická situace, kdy je šíření vlny nemožné.

Dobře jsou prostudovány režimy blízké mezním v kruhových trubkách, kdy vzniká spinová detonace s jednou příčnou vlnou, která se pohybuje po spirále podél stěny. Takový režim vzniká v trubkách s $d \sim (0,5 \div 0,3) a$, kde a je délka zóny reakce. V kanálech pravouhlého průřezu se šíří detonační vlna s jednou, nebo několika příčnými vlnami, které se pohybují podél většího rozměru. Je znám také "kvazispin" v kanálu čtvercového rozměru.¹⁴⁷

Pod mezním průměrem spinové detonace může v kruhové trubce existovat nestacionární režim tzv. "galopyrojušičij"

režim detonace.¹⁴⁹ Byl pozorován v trubkách s $d \sim a/\pi$ a je charakteristický periodickými podélnými pulsacemi s délkou několika stovek průměrů. Detonací plyných směsí bez obalu, nebo s obalem v podobě tenkých gumových trubek popisují práce,^{27,147} včetně kritických vrstev a průměrů. Praxe si vyžádala rovněž studium kritických podmínek výstupu detonační vlny do většího objemu z trubky o průměru d^* . Pro řadu plyných směsí platí přibližně $d^*/a \sim (10 \div 13)$ a d^* je funkcí tlaku $d^* \sim d_1^*(p_1/p)^\alpha$, α je blízké 1 (1,05 ÷ 1,13).¹⁴⁷

Kritický průměr má rovněž vztah ke kritickému tlaku vyvolaném rázovou vlnou. Předpokládáme-li u kondenzovaných trhavin platnost vztahu $p_{CJ} = \xi_1 D^2 / (\gamma + 1)$, pak známe-li z pokusů poměr kritické detonační rychlosti D_{krit} a ideální detonační rychlosti D_i , který je např. pro TNT roven 0,95, pak $p_{CJ\ krit}/p_{CJ} = (D_{krit}/D_i)^2 = 0,9$. Coleburn a Liddiard¹⁴⁸ měřili detonační parametry trhavin a pro TNT našli $p_{CJ} \sim 18,9$ GPa a tlak v Neumannově bodě $p_N = 1,25 p_{CJ}$. Z toho pak je kritická hodnota iniciačního tlaku $p_{krit} = 0,9 p_N \sim 21,3$ GPa. Ve skutečnosti je rázová citlivost měřená tzv. GAP testem mnohem menší a pro případ TNT je pro lisovanou trhavinu 1,1 až 2,5 GPa a pro litou trhavinu 3 až 8 GPa. Je důležitou bezpečnostní charakteristikou. Předěšlé hodnoty byly stanoveny pro $d_{krit} \sim (7 \div 39)$ mm. S růstem d roste i p_{krit} .

Příklad 5.4.1

Vypočítejte kritický tlak p_{krit} iniciace pro krystalický hexogen/RDX/. K výpočtu použijte zobecněnou rázovou adiabatu.

Data pro RDX: sumární vzorec $C_3H_6O_6N_6$

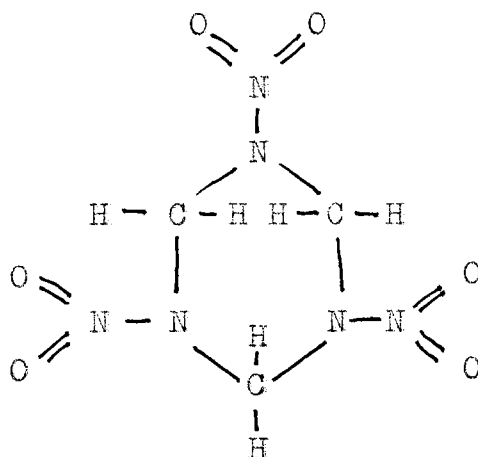
molekulová hmotnost $M' = 222,1$

koeficienty rovnice pro výpočet c_V (nelineárních molekul)

a-počet atomů v molekule = 21

n-počet chem. vazeb v molekule = 21

strukturní vzorec



hustota $\rho_1 = 1,80 \text{ g.cm}^{-3}$

Řešení:

Nejprve určíme hodnotu c_V podle rovnice ¹⁵⁰

$$c_V = k_B \left[3 + \sum_{i=1}^n \mathcal{E}'_i + (3a - 6 - n) \sum_{i=1}^n \mathcal{E}''_i / n \right], \text{ kde}$$

\mathcal{E}'_i a \mathcal{E}''_i jsou Einsteinovy funkce charakteristických teplot odpovídajících kmitům roztážení a ohybu chemické vazby.

V knize ¹⁵⁰ z tabulky uvedené níže

Tab. 1 Hodnoty funkce ϵ'_i a ϵ''_i při tepl., K

Vazba	300		500		700		900		1100	
	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''
C—H	0,000	0,171	0,000	0,496	0,080	0,690	0,193	0,790	0,322	0,856
C—N	0,193	0,690	0,528	0,870	0,712	0,930	0,811	0,958	0,870	0,972
C—O	0,180	0,140	0,518	0,450	0,700	0,655	0,801	0,770	0,862	0,840
N—N	0,193	0,260	0,528	0,590	0,712	0,758	0,811	0,848	0,870	0,890
N—O	0,085	0,460	0,370	0,747	0,586	0,860	0,712	0,910	0,800	0,940
C—C (алифатические вещества)	0,250	0,475	0,583	0,753	0,753	0,862	0,840	0,915	0,885	0,942
C—C (ароматика)	0,040	0,520	0,259	0,784	0,475	0,884	0,632	0,927	0,734	0,950
N=O	0,040	0,475	0,270	0,750	0,490	0,862	0,644	0,915	0,740	0,942
C=O	0,000	0,070	0,000	0,327	0,040	0,548	0,117	0,689	0,220	0,779
C=C	0,110	0,250	0,400	0,580	0,610	0,750	0,740	0,840	—	—
C—F	0,170	0,110	0,500	0,400	0,690	0,610	0,790	0,740	—	—

Zvolíme libovolné hodnoty teplot- např. $T = 500$ K. Podle výše uvedené tabulky nalezneme hodnoty ϵ'_i a ϵ''_i pro vazba C-N(6), C-H(6), N-N(3), a N=O(6): $\epsilon'_{C-N} = \epsilon''_{N-N} = 0,528$, $\epsilon'_{C-H} = 0$, $\epsilon'_{N=O} + 0,27$, $\epsilon''_{C-N} = 0,87$, $\epsilon''_{C-H} = 0,496$, $\epsilon''_{N-N} = 0,59$, $\epsilon''_{N=O} = 0,75$. Dosadíme-li tyto hodnoty do vztahu pro c_V dostaneme pro

$T = 500$ K	$c_V = 0,308 \text{ cal.g}^{-1}.\text{K}^{-1} = 1,289 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$T = 700$ K	0,38
$T = 800$ K	0,478
$T = 900$ K	0,528
$T = 300$ K	0,232

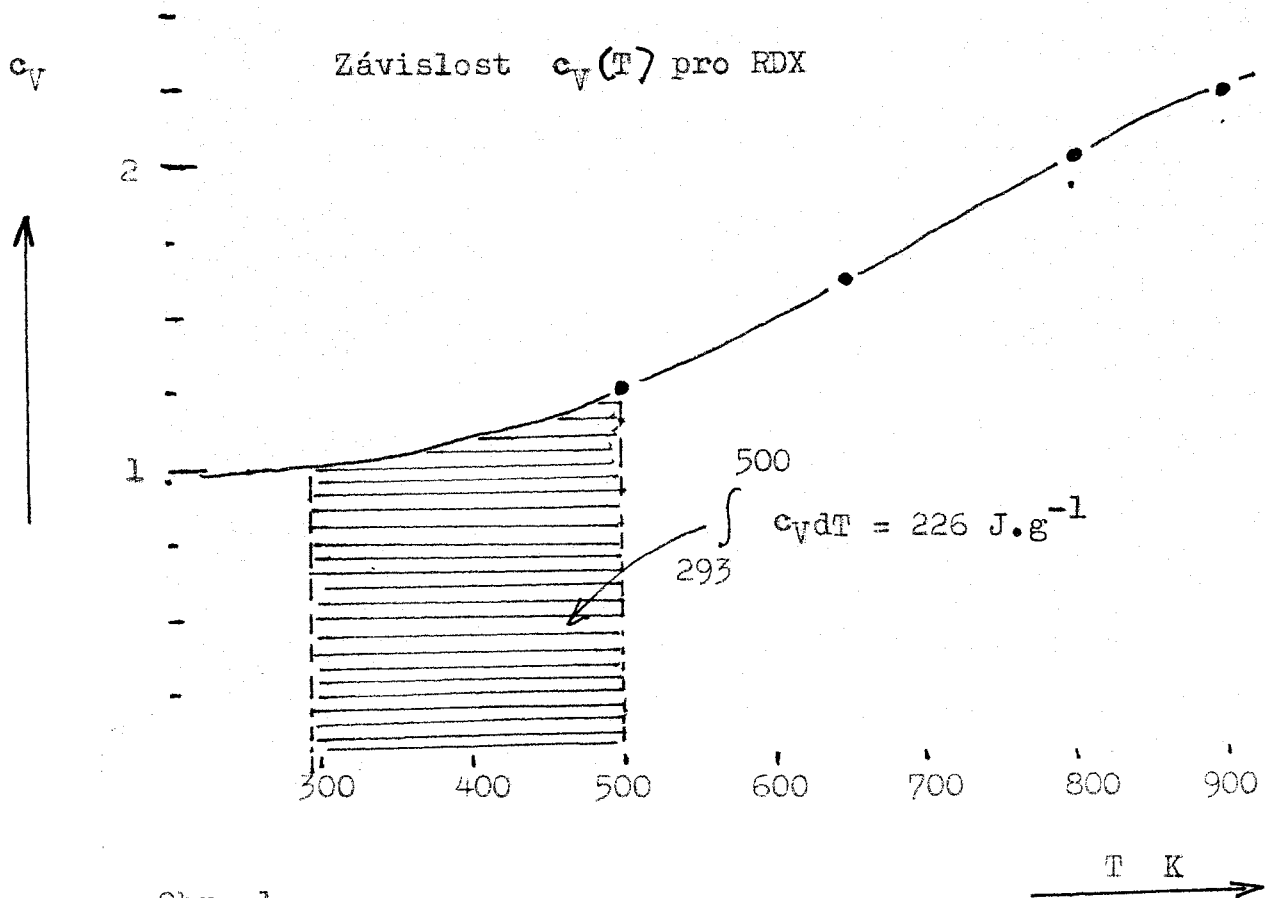
Závislost $c_V(T)$ je uvedena na obrázku. Dále pro danou teplotu /začneme s teplotou $T = 500$ K/ nalezneme integrál

$$\int_{T_1}^T c_V dT \text{ /což je plocha pod křivkou } c_V(T) \cdot \int_{293}^{500} c_V dT = 226 \text{ J.g}^{-1}.$$

Rovnici /1.56/ je možné zapsat ve tvaru

$$p = p^{(x)} + 3RT \Gamma / MV \quad \text{a} \quad e = e^{(x)} + \int_{T_1}^T c_V dT.$$

Při rázovém stlačení látky je přírůstek tepelné složky vnitřní energie roven ploše mezi Michelsonovou přímkou a nulovou

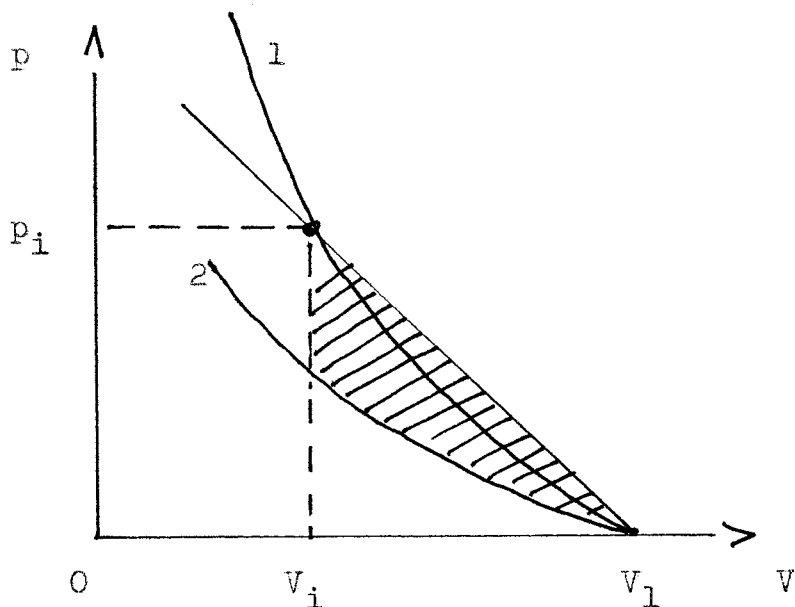


Obr. 1

izotermou. Řešili tyto rovnice spolu se stavovou rovnicí, $p/V = \text{konst}$, můžeme najít závislost tlaku na teplotě podél rázové adiabaty látky. Praktické řešení provádíme následujícím způsobem. V nulovém přiblížení považujeme, že izoterma je totožná s rázovou adiabatou t.j. $p(V) = p^{(x)}(V)$. Z dat uvedených v tabulce pro funkce e_i' a e_i'' nalezneme závislost $c_V(T)$ a s pomocí rovnice pro $\Delta e(T) = \int_{T_1}^T c_V dT$ při daném p určíme T . Veličiny \underline{v} a \underline{V} jsou zadány na rázové adiabatě. Dále použijeme rovnici izotermy

$$p^{(x)} = p(V) - 3RT \Gamma / MV, \quad /1/$$

kde Γ můžeme určit ze vztahu $\Gamma = \alpha c_1^2 M / 3R$, kde c_1 je objemová rychlost zvuku a α je koeficient objemové termické roztažnosti.



Obr. 2

1 - rázová adiabata látky

2 - izoterma látky

Hodnotu $p^{(x)}$ dosadíme do rovnice pro $\Delta e(T)$:

$$\Delta e(T) = \int_{T_1}^T c_V dT = v^2/2 - \int_{V_1}^V p^{(x)} dV \quad /2/$$

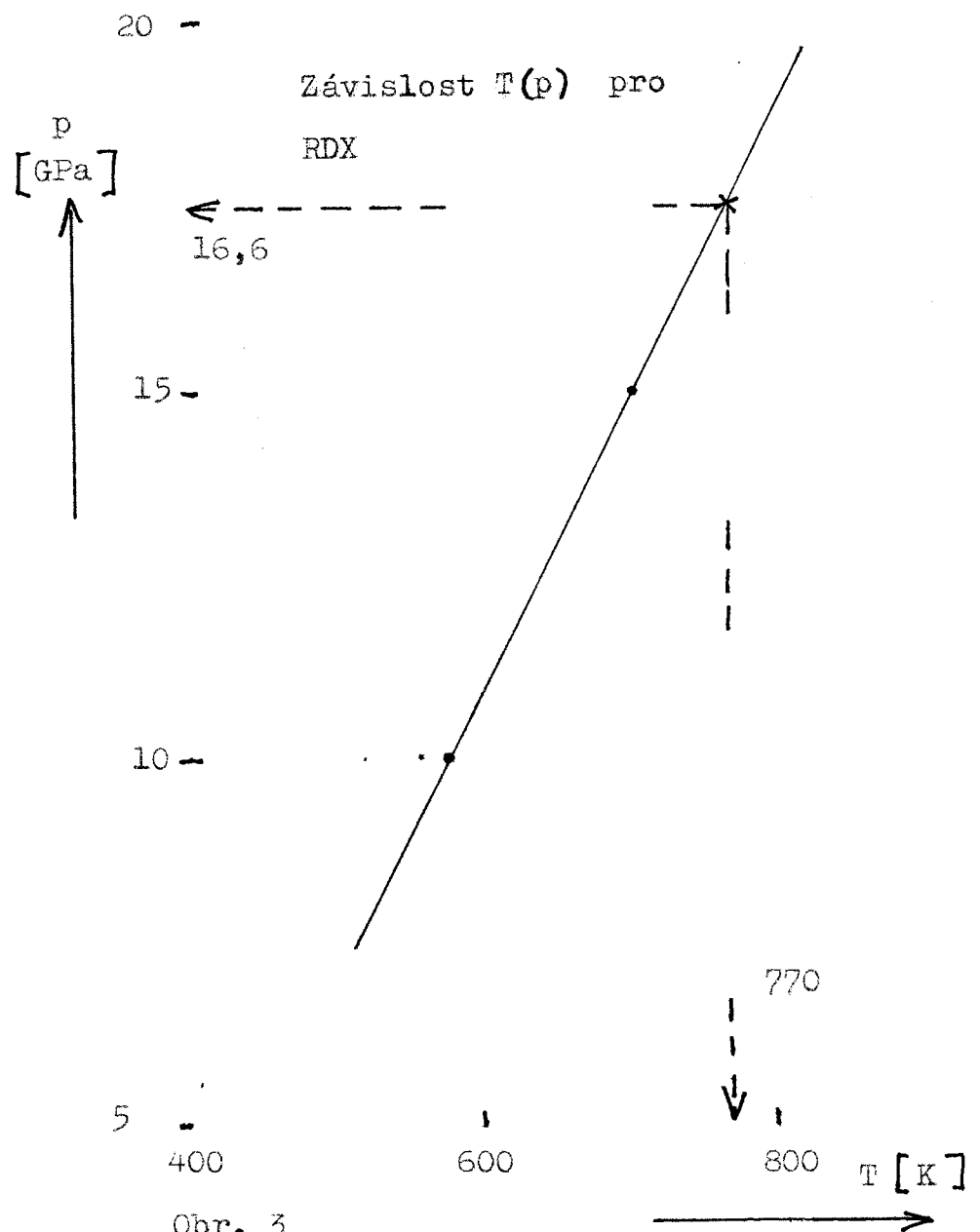
/první přiblížení/ a určíme T a tak pokračujeme dále.

V následujícím obrázku je vypočítaná závislost $T(p)$ pro RDX.

Určení p_{krit} provedeme následujícím způsobem. Pro $t_{adiab.}$ /např. $1 \mu s$ / podle rovnice¹⁵⁴

$$t_{adiab.} = c_V RT^2 \cdot \exp(E/RT) / QZE \quad /3/$$

(kde $t_{adiab.}$ je indukční perioda rozkladu výbušniny rázovou vlnou, T je teplota stlačené trhavin, c_V je měrné teplo při téže teplotě, Q je výbušné teplo, Z a E jsou parametry Arrheniovy rovnice, R je plynová konstanta. Je-li $t_{adiab.} < t_{ráz}$ /době působení rázové vlny/ k iniciaci dochází, v opačném případě nikoliv. Podmínka $t_{adiabat} = t_{ráz}$ určuje kritickou amplitudu tlaku. Tuto hodnotu určujeme pomocí GAP testu, nebo pokusy s dopadajícími destičkami.) určíme odpovídající hodno-



Obr. 3

tu T . Této hodnotě na křivce závislosti $T(p)$ nalezneme hodnotu p .

V nulovém přiblížení pro $v = 1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ pro $\Delta e(T)$ najdeme $\int c_V dT = 205 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$, neboť $v_1 = 1/\rho_1 = 1/1,8 = 0,555 \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}$.
Pomocí zobecněné adiabaty z příkladu 5.3.6D $= (2,912 + 2) \cdot 2547,9 / (2,912 + 1) + 2(2,912 + 1)v / 2,912 =$

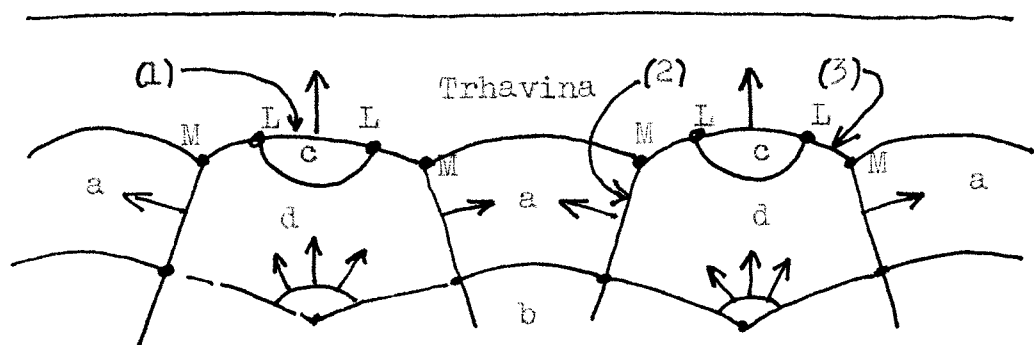
$= 3198,4 + 2,6868 \cdot v$, po dosazení $v = 1000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dostane-
me $D = 5885,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 5,8852 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Hodnota V je
 $V = V_1(1 - v/D) = 0,555(1 - 1000/5885,2) = 0,46 \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}$.
/integrál $\int p dV = \int v^2 dV / (V_1 - V) /$.

Vezmeme-li novou hodnotu $v = 1050 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ / $p = 9 \text{ GPa}$ / dostane-
me $\int c_V dT = 226 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$ a při 9 GPa bude teplota při rázovém
stlačení RDX 500 K /používáme nulového přiblížení/. Analogic-
ky určíme celou závislost $T(p)$. Pro RDX je $Z = 10^{15,5}$,
 $E = 171,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ ⁷. Nechť $T = 700 \text{ K}$, pak $c_V = 1,59 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
a $t_{\text{ad.}} = [1,59 \cdot 0,48 \cdot (700)^2 \exp(171600 / 0,48 \cdot (700/1000))] / 5792 \cdot$
 $\cdot 10^{15,5} \cdot 171,6 \cdot 10^3 \approx 10^{-5} \text{ s}$. Pro $t_{\text{ad.}} = 1 \mu\text{s}$ a pro $T =$
 770 K nalezneme $p_{\text{krit}} \approx 16,6 \text{ GPa}$. Pokusná hodnota je 17 GPa ¹⁵¹
Souhlas je uspokojivý. Při nízkorychlostním rázu je kritická
hodnota tlaku / $p'_{\text{krit}} \text{ RDX} = 0,7 \text{ GPa}$ / je mnohem menší, což se
vysvětluje jiným mechanismem iniciace/ homogenní rozeřev a
vznik horkých jader/ ⁷.

Jak jsme se již zmínili, pokusy ve všech plynných směsích, kapalných a pevných výbušninách ukázali na to, že detonační vlny jsou nestabilní a čelo detonační vlny je pulsující.

Taková struktura se kvalitativně odlišuje od zóny reakce tak jak ji chápe teorie podle Zeldoviče, Neumanna, Dörringa.

V plynech a kapalných výbušninách se nehomogenity v zóně chemické reakce vytvářejí v průběhu detonace, kdežto u pevných látek je příčinou nehomogenit výchozí trhavina. Detonace vznikající v jednotlivých místech rázem stlačené trhaviny vyvolává lokální detonační vlny, které když doběhnou čelo rázové vlny vytvoří místa překomprimované detonace. Na čele vznikají trojvlnové konfigurace /obr. 5.12 /, které jsou složeny z prvotních rázových vln (1), příčných detonačních vln (2), uskutečňujících přeměnu trhaviny na zplodiny a překomprimované detonační vlny (3). (a,c) označují zóny rázem stlačené trhaviny s absencí reakce, (b,d) je zóna zplodin detonace



Obr. 5.12 Struktura pulsující detonační vlny

Příčné vlny (2) se srážejí v zóně a a vytvářejí oblast zvýšeného tlaku. V zóně překomprimované vlny (3) dosahují parametry nejvyšších hodnot. Čím je bod v rázové vlně (1) vzdálenější od bodu trojvlnové konfigurace M, tím slabší je tato část rázové vlny. Existuje takový bod L, kde dochází k rovnováze mezi ochlazováním důsledkem adiabatické expanze a rozehřevem chemickou reakcí po zážehu trhaviny.¹⁵⁵

Tato podmínka má tvar

$$dT/dt = Q/c_V d\lambda/dt + (\partial T/\partial V)_{s,\lambda} dv/dt,$$

kde Q je zabarvení chemické reakce při konstantní teplotě a objemu, λ je zlomek zreagované látky, T je teplota, c_V je měrné teplo, V je objem, v je rychlost expanze.

Z této formule je vidět, že expanze má vliv na změnu teploty v závislosti na čase. Jakoby zmenšovala zabarvení chemické reakce na hodnotu $Q_1 = c_V (\partial T/\partial V)_{s,\lambda} dv/dt / d\lambda/dt$. Čím menší je rychlost reakce $d\lambda/dt$ a větší rychlost expanze dv/dt , tím větší bude Q_1 . Bude-li $Q_1 > Q$, pak se teplota bude zmenšovat a reakce se v zóně chemické reakce přeruší. Tento děj se řídí zákonitostmi adiabatického tepelného výbuchu. Snížení veličiny $RT^2 c_V / EQ$ vede ke zrychlení reakce a čím větší bude RT^2/E , $/E$ je aktivační energie reakce/, tím vyšší bude rychlost reakce. Při zmenšení RT/E se zvětšuje závislost reakce na teplotě. V zónách a a c se látka stlačuje, ale reakce neprobíhá, neboť rázová vlna (1) není dostatečně veliká. Při malých hodnotách rozměrů nehomogenit detonačního čela v porovnání s délkou zóny chemické reakce se tok přibližuje k laminárnímu režimu. Jsou-li však nehomogenity

srovnatelné se šířkou zóny chemické reakce, pak se toky mohou stát turbulentními.

Pro výpočet parametrů detonačních vln v případě, kdy čelo detonační vlny není hladké, byla v práci¹⁷ vypracována metoda, umožňující použít výběrová pravidla¹⁴⁵ pro detonační rychlost a zákony zachování hmoty, impulsu a energie, jako kdyby bylo čelo detonační vlny hladké. Dále bylo ve zmíněné práci poukázáno na to, že je možné vybrat veličiny charakterizující turbulentnost toku v zóně chemické reakce, které budou formálně charakterizovat chemické složení. Průběh vzniku a následující vyhasínání turbulentnosti při detonaci je možné považovat za součást průběhu chemické reakce a při tom je možné vypočítat uvolněné teplo. Z tohoto pohledu je třeba chápat pod termínem zóna chemické reakce nejenom celou oblast v jejíchž mezích se uskutečňuje chemická reakce, ale i tu, kde dochází k úplnému vymizení turbulentního toku.

Předložený způsob "zprůměrování" parametrů toku umožňuje řešit úlohu o struktuře detonační vlny s turbulentní zónou chemické reakce. V práci se uvádí, že pokud Grüneisenův koeficient pro zplodiny detonace vyhovuje nerovnosti $\Gamma = V(\partial p / \partial E)_V$

$> 2/3$, pak teplo uvolněné v chemické reakci formálními složkami je kladné. Je-li kladná také čistě chemická část uvolněného tepla, pak probíhá v normálním režimu při platnosti Chapman-Jouguetovy podmínky. Při $\Gamma < 2/3$ se bude uplatňovat v kondenzovaných, jakož i plynných výbušninách režim podkomprimované detonace.¹⁷

Příklad 5. 4.2

S pomocí představy o zhroucení krystalové mřížky při detonaci, která je provázena intenzivní chemickou reakcí a fázovým přechodem pro který platí Clausius Clapeyronova rovnice, vypočítejte teplotu v Chapman-Jouguetově rovině pro směs hexogenu/RDX/ a tritolu/TNT/ 50/50.

Řešení:

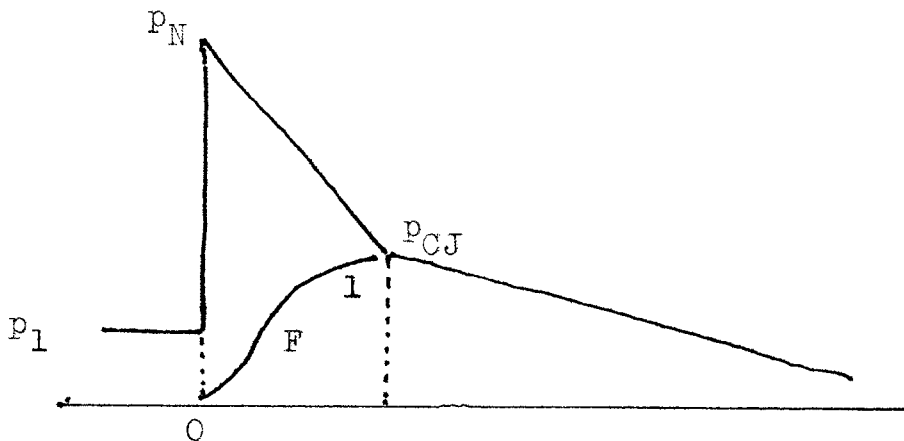
Kondenzovaná fáze trhaviny přechází do plynné fáze zplodin detonace a platí pro takový přechod Clausius-Clapeyronova rovnice

$$dp/dT = h_{\text{sublim.}} / (T \Delta V), \quad (1)$$

kde $h_{\text{sublim.}}$ je sublimační teplo trhaviny, které možné odvodit ve tvaru ¹⁵⁶

$$h_{\text{sublim.}} = - (\gamma_{\text{CJ}} + 1) p V_g / 2 \gamma_{\text{CJ}} (\gamma_{\text{CJ}} - 1), \quad (2)$$

kde V_g je objem plynných zplodin, $\Delta V = V_s - V_g$. V reakční zóně jsou přítomné plynné zplodiny označené indexem g a a reakční pevná fáze označená indexem s . Obě fáze jsou v určitém stupni termodynamické rovnováhy. Poměry při detonaci reprezentuje obrázek 1



Obr. 1

Stupeň proreagování označme F /Forest fire model detonace/, pro který platí $0 \leq F \leq 1$. Pro proreagovanou pevnou fází platí $V_S = (1 - F) V_N$ a pro plynnou fází $V_g = F \cdot V_{CJ}$. Protože na čele detonační vlny platí Neumannův limit $V_{11}/V_N = \rho_N/\rho_{11} = (\gamma_{CJ} + 1)/(\gamma_{CJ} - 1)$ a pro poměr $V_{CJ}/V_N = \rho_N/\rho_{CJ} = \gamma_{CJ}/(\gamma_{CJ} - 1)$, pak

$$V = V_g \left[1 - (1 - F)(\gamma_{CJ} - 1)/\gamma_{CJ} F \right]. \quad (3)$$

Uvažujeme-li s průměrnou hodnotou $F = 1/2$, pak ^{podle} (3) je

$V = V_g/\gamma_{CJ}$, a Clausius-Clapeyronovu rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$dT/T = - 2(\gamma_{CJ} - 1)dp / (\gamma_{CJ} + 1)p. \quad (4)$$

Označíme-li celkový objem plynné a pevné fáze V prostřednictvím vztahu $dp = - \gamma_{CJ} dV/V$ a integrujeme (4) v mezích V_{CJ} a V_N dostaneme vztah a (5)

$$\ln T/T_N = 2\gamma_{CJ}(\gamma_{CJ} - 1)/(\gamma_{CJ} + 1) \ln \gamma_{CJ}/(\gamma_{CJ} - 1), \quad (5)$$

kde jsme zaměnili mez $T_{CJ} = T$ - obecnou mezí teploty.

Ze stavové rovnice ve tvaru

$$pV = B/V^\gamma + N_A \cdot k \cdot \Gamma(V) D(\Theta/T)/M', \quad \text{plyne vztah}$$

$$\ln T_N/T_1 = (\gamma_{CJ} - 1) \ln (\gamma_{CJ} + 1)/(\gamma_{CJ} - 1) - \ln D_N(\Theta/T)/D_1(\Theta/T), \quad (6)$$

kde

$D(x = \Theta/T)$ je Debyeova funkce platná pro oblast vysokých teplot $T \gg \Theta$. $D(x) = 1 - 3x/8 + x^2/20 - x^4/1680 + \dots$

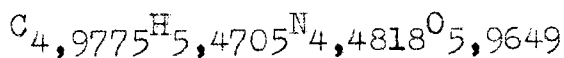
Pro odhad Debyeovy teploty platí

$$\Theta \approx 137 \left(T_{b.t.} / M' V_1^{2/3} \right)^{1/2}, \quad (7)$$

kde $T_{b.t.}$ je bod tání trhavin, M' je molekulová hmotnost

a $V_1 = 1/\rho_1$.

Sumární vzorec směsi RDX/TNT 50/50



Molekulová hmotnost směsi	$M' = 223,38$,
Hustota	$\rho_1 = 1,67 \text{ g.cm}^{-3}$,
Adiabatický exponent	$\gamma_{CJ} = 2,95$,
Bod tání TNT	$T_{b.t.} = 353 \text{ K}$,
RDX	$T_{b.t.} = 477 \text{ K}$,
Bod tání směsi TNT/RDX 50/50	$\approx (353 \cdot 477)^{1/2} = 410 \text{ K}$.
	$V_1 = 0,5988$

Neumannův limit $V_N = [(2,95 + 1)/(2,95 - 1)]0,5988 = 0,2956$.

Debyeova teplota θ_1

$$\theta_1 = 137 (410/223,38 \cdot 0,5988)^{1/2} = 220,2 \text{ K} .$$

Debyeova teplota θ_N

$$\theta_N = 137 (410/223,38 \cdot 0,2956)^{1/2} = 278,6 \text{ K} .$$

Hodnoty $x = \theta/T$

$$x_1 = \theta_1/T = 220,2/293,15 = 0,7512 ,$$

$$x_N = \theta_N/T = 278,6/293,15 = 0,9504 .$$

Debyeova funkce

$$D_1 = 1 - 3 \cdot 0,7513/8 + 0,7512^2/20 \doteq 0,7465 ,$$

$$D_N = 1 - 3 \cdot 0,9504/8 + 0,9504^2/20 \doteq 0,6888 .$$

Teplota v bodě CJ / z(6)

$$T_{CJ} = \exp [A + (\ln T_1 + B)] , \text{ kde} \quad (8)$$

$$A = 2\gamma(\gamma - 1)/(\gamma + 1) \ln \rho / (\gamma - 1) ,$$

$$B = (\gamma - 1) \ln (\gamma + 1)/(\gamma - 1) - \ln D(\theta_N/T_1)/D(\theta_1/T_1) .$$

$$A = 2 \cdot 2,95(2,95 - 1)/(2,95 + 1) \ln 2,95/(2,95 - 1) = \\ = 1,2057,$$

$$B = (2,95 - 1) \ln(2,95 + 1)/(2,95 - 1) - \ln 0,6888/0,7465 = \\ = 1,3845,$$

$$T_{CJ} = \exp(1,2057 + (\ln 293,15 + 1,3845)) = 3908,4 \text{ K}.$$

Teplota v Neumannově bodě: Podle /5/ je

$$\ln 3908,4/T_N = 2 \cdot 2,95(2,95 - 1)/(2,96 + 1) \ln 2,92/(2,95 - \\ - 1) = 1,2057,$$

$$T_N = \exp(7,0652) = 1170,5 \text{ K}.$$

Za CJ bodem mohou doreagovávat pomalejší reakce a výbu-
chová /kalorimetrická/ teplota může být vyšší než T_{CJ} .

5.5 DETONAČNÍ VLNY VYVOLANÉ SVĚTLEM

Vznik a rozvoj laserové plazmy je charakterizován řadou zvláštností. Laserová plazma se vytváří při soustředění mohutného laserového záření v plynu, nebo na povrchu kondenzovaných látek. Velká intenzita laserového záření je nutná pro vznik plazmy a závisí na mnoha parametrech/vlnové délce, tlaku plynu, druhu látky, délce laserového impulsu atd./, ale tok energie je vždy vyšší, než 10^6 W/cm^2 .

Ke vzniku laserové plazmy v plynu dochází vlivem optického výboje. K výboji dochází tehdy, když intenzita laserového záření F dosahuje prahové hodnoty F_p , která je úměrná veličině $I \omega^2 / \tau p_0$, kde I je potenciál ionizace, τ je délka impulsu, ω je kruhová frekvence záření laseru, p_0 je počáteční tlak plynu. Pro vzduch při atmosferickém tlaku je práh optického výboje v případě rubinového laseru 10^{11} W/cm^2 a v případě CO_2 laseru 10^9 W/cm^2 . Optický výboj v plynech studovali Maker a kol.¹⁵⁸

Poznamenejme, že podobné děje nalézáme při menších hodnotách F . Nízkoprahový výboj byl popsán Prochorovem a kol.¹⁶¹

Pokud jednou plazma vznikla, začne absorbovat laserové záření, čemuž obvykle odpovídá teplota 5000-12000 K/. Absorbce v plazmě je způsobena inverzním brzdícím efektem, při kterém volný elektron pohlcuje foton. Elektron přechází do vyššího energetického stavu spojitého spektra. Ze zákona zachování impulsu musí jev probíhat v poli iontu, atomu, nebo molekuly. V počátečních stadiích výboje je počet iontů malý a rovněž je malá teplota. Kvzájemnému působení elektronu se zářením dochází v tomto případě v poli neutrálního atomu, nebo mo-

lekuly. Koeficient absorpce k_{ω} spojený s inverzním brzdňým efektem v systému neutrální atom a volný elektron vypočítaný např. pro vodík má tvar / v jednotkách CGS/ ¹⁵⁷

$$k_{\omega} = 14,5 \cdot e^2 \sigma N_e N_n kT^{1/2} / m^{3/2} c \omega^2 ,$$

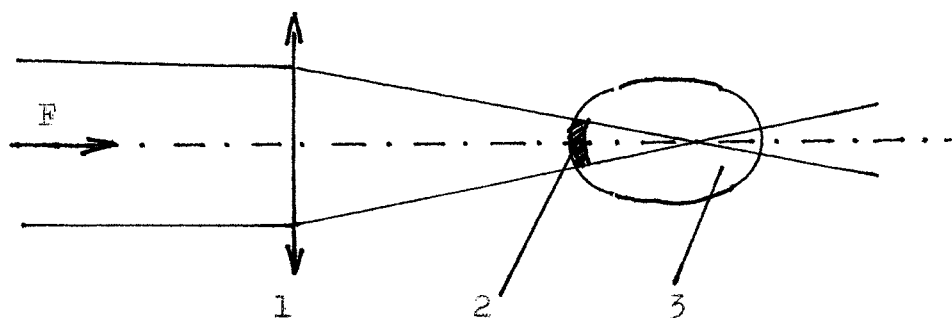
kde e je náboj elektronu, m je hmotnost elektronu, c je rychlost světla, σ je průřez pružného rozptylu, k je Boltzmannova konstanta, T je teplota, N_e a N_n je hustota elektronů a molekul. Číselná hodnota koeficientu absorpce je při 5000 K a frekvenci rubinového laseru: $k_{\omega} \approx 10^{-38} N_e N_n \text{ cm}^{-1}$. Jestliže jsou hustoty neutrálních atomů a iontů srovnatelné, pak převládá absorpce v poli iontu. S růstem teploty se tvar závislosti $k_{\omega}(N_e)$ mění, jednak s růstem hustoty elektronů vyvolané vzrůstem teploty roste i hodnota k_{ω} . Tak např. u vodíku při $T \sim 10^5$ K bude $k_{\omega} \approx 40 \text{ cm}^{-1}$ při počáteční hustotě $N_n \approx 10^{19} \text{ cm}^{-3}$. To znamená, že laserové světlo se takřka všechno absorbuje ve vrstvě o tloušťce 0,025 cm.

Tak jak frekvence plazmy $\omega_p \sim N_e^{1/2}$ roste pouze do hodnoty optické frekvence, plazma začne záření odrážet a začne být pro světlo neprostupná. To odpovídá tzv. kritické hustotě elektronů N_{krit} . Pro rubinový laser je $N_{\text{krit}} = 2,4 \cdot 10^{21} \text{ cm}^{-3}$. Při expanzi plazmy její hustota rychle klesá pod kritickou hodnotu.

Každou ze složek plazmy/iontovou, elektronovou, nebo neutrální/ je možné charakterizovat vlastní teplotou. Teplota iontů T_i a neutrálních částic T jsou si obvykle blízké. Teplota elektronů T_e v plazmě při optickém výboji se může podstatně lišit od zmiňovaných teplot, neboť zejména elektrony pohlcují energii laserového záření. Doba absorpce energie,

která se rozděluje rovnoměrně mezi ionty a elektrony je většinou malá. Např. ve vodíkové plazmě s hustotou $N_n = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ a teplotou $T = 10^6 \text{ K}$ je tato doba pouze 10^{-11} s . Z toho plyne, že při délce laserového impulsu $\tau \gg 10^{-11} \text{ s}$ je možné předpokládat, že $T_e = T_i = T$.

Při studiu dynamiky plazmy optického výboje Ramsden a Davis pozorovali zajímavý jev.⁵⁸ Čelo plazmy se vytváří z počátku v ohnisku čočky, tam kde dochází k průniku plynu,^{upak} se rychle pohybuje podél světelného kanálu vstříic paprsku /obr. 5.13 / .



Obr. 5.13 Vznik laserové plazmy

- 1 - optická čočka
- 2 - čelo absorbní vlny
- 3 - hranice plazmy

Pokusné dohledání rychlosti čela představovalo $\sim 10^2 \text{ km/s}$. Vzdálenost od bodu výboje k hranici plazmy byla úměrná veličině $t^{0,6}$.

Pro objasnění pozorovaných jevů Ramsden a Gavič zavedli představu o detonační vlně vyvolanou světlem.¹⁶⁴ Spočívá v následujícím: od místa optického výboje se plynem šíří silná rázová vlna. Plyn se v této vlně ohřívá, ionizuje a nabývá rovněž schopnosti absorbovat laserové záření. K absorpci do-

cházi v tenké vrstvě plazmy, hned za čelem rázové vlny. Tímto způsobem se uvnitř kanálu světelného paprsku udržuje energie laseru, která se uvolňuje za čelem rázové vlny. Energie záření se vesměs pohlcuje v tenké vrstvě plazmy, která se pohybuje naproti paprsku, boční části čela rázové vlny se šíří s menší rychlostí. Tento jev má mnoho společných rysů s detonací v plynech. Rozdíly spočívají v tom, že při detonaci se rázová vlna udržuje energií chemických reakcí probíhajících za jejím čelem, kdežto při detonaci vyvolané světlem s pomocí energie laserového záření pohlcovaného plazmou za rázovou vlnou.

Dosud jsme předpokládali, že čelo rázové vlny je totožné s čelem absorpce laserového záření. Možný je i případ, kdy se čelo vlny absorpce laserového záření šíří plynem i bez rázové vlny/např. vedením/. To nás přivádí k hlubší analogii mezi hořením a procesy spojenými s šířením absorpční vlny laserového záření v plynu. Podobnost spočívá v tom, že rychlost $d\alpha/dt$ chemické reakce je dána Arrheniovým zákonem $d\alpha/dt = A \exp / - E/kT /$, kde E je aktivační energie vztažená k molekulové přeměně. Rychlost chemické reakce a stupeň ionizace α s jejím růstem roste i absorpce laserového záření, koeficient k_a a tím i uvolňovaná energie za čelem vlny/ roste se zvyšováním teploty, přičemž stupeň ionizace /při $\alpha \ll 1$ / je roven $\alpha \sim \exp / - I/2kT /$.

Děj šíření absorpční vlny tepelnou vodivostí je podobný pomalému hoření a deflagraci. Vhodné je však připomenout, že při chemické reakci se v dané hmotě látky může uvolnit pouze omezené množství energie Q , kdežto v absorpční vlně

uvolněná energie roste s růstem intenzity laserového záření. Kromě toho u chemického paliva resp. výbušniny dochází k jedné přeměně, kdežto plazma je schopna absorbovat energii záření při odpovídajícím odvodu tepla po neomezenou dobu.

V kap. 5.3 jsme se zmínili, že v plyných a kondenzovaných výbušninách byla pozorována pulsující detonace, při které tok v zóně chemické reakce má turbulentní charakter. Výsledky pokusů svědčí o tom, že čelo laserového hoření má rovněž strukturu podobnou popsané v práci¹⁶¹. Je známé, že turbulence zvyšuje rychlost chemického hoření v plynech, neboť se při tom zvětšuje povrch reagujících vrstev. Při hoření plazmy nepozorujeme vzrůst rychlosti uvolňované energie při zvětšení povrchu čela absorbce. Příčina spočívá v tom, že se tok záření nerozděluje na povrchu čela a celková intenzita impulsu se zachovává. V režimu laserového hoření vede turbulence k větší intenzitě přenosu hmoty, což vede ke zvětšení rychlosti čela hoření. Rozsahem velké turbulentní pulsace jsou schopné přemísťovat rázově stlačený vzduch a plazmu.

V závislosti na mechanismu regulující pohyb absorpční vlny, hovoříme o různých režimech jejího šíření. Můžeme je rozdělit na dvě skupiny: podzvukové/rychlost šíření absorpční vlny je menší, než rychlost zvuku v plynu/ a nadzvukové /rychlost šíření absorpční vlny je větší, než rychlost zvuku v plynu/. Při radiačním mechanismu přenosu čela plazmy, záření plazmy ionizuje přiléhající vrstvu plynu do takového stupně, že se v něm absorbuje podstatná část laserového záření. Spolu s ionizační vlnou se pohybuje i absorpční zóna laserového záření.

Podzvuková vlna záření vzniká v případě, pokud je rázová vlna průzračná pro laserové záření absorbované plynem. Pohyb čela plazmy v plynu, pohybující se za čelem rázové vlny je umožněn radiačním mechanismem s rychlostí menší, než je místní rychlost zvuku. Výsledkem je stav, kdy absorpční vlna zůstává pozadu za rázovou vlnou vpředu a tlak se vyrovnává po celém ohřátém objemu plynu. Nadzvuková radiační vlna nahrazuje detonační vlnu vyvolanou světlem při velkých hodnotách intenzity laserového záření, kdy radiační mechanismus posuvu absorpční zóny laserového záření je efektivnějším, ve srovnání s hydrodynamickým. V tom případě rychlost radiační převyšuje místní rychlost zvuku v plazmě, důsledkem čehož, čelo radiační předbíhá rázovou vlnu.

Pro CO_2 laser platí mezi jednotlivými režimy meze :

- a/ $F \approx 10^6 \text{ W/cm}^2$ vnik plazmy na povrchu terče,
- b/ $F \approx 10^6 - 10^7 \text{ W/cm}^2$ podzvuková radiační vlna,
- c/ $F \approx 10^7 - 10^8 \text{ W/cm}^2$ detonační vlna vyvolaná světlem,
- d/ $F > 8 \cdot 10^8 \text{ W/cm}^2$ nadzvuková radiační vlna .

Při přesném soustředění záření/poloměr paprsku $10^{-1} - 10^{-2}$ cm/ se častěji realizuje detonační vlna vyvolaná světlem.

Jestliže zanedbáme vnitřní strukturu absorpční vlny, pak si ji můžeme představit jako hydrodynamickou nespojitost šířící se plynem rychlostí D . Vybereme systém souřadnic, ve kterém je diskontinuita nepohyblivá. Při průchodu nespojitosti chladným plynem se vlivem absorpce záření mění plyn na plazmu. Plyn s hustotou ρ_1 , tlakem p_1 a specifickou vnitřní energií e_1 vtéká k nespojitosti rychlostí D , t.j. rychlostí

šíření vlny plynem ve stavu klidu. Při absorpci laserového záření o intenzitě F nespojitostí, nabude plyn hodnot ρ_2 , p_2 , e_2 a relativní rychlost vůči nespojitosti v_2 . Obecné vztahy vyjadřující známé zákony zachování hmoty, impulsu a energie mají tvar

$$\rho_1 D = \rho_2 v_2, \quad /5.25/$$

$$p_1 + \rho_1 D^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad /5.26/$$

$$e_1 + p_1/\rho_1 + D^2/2 + F/\rho_1 D = e_2 + p_2/\rho_2 + v_2^2/2. \quad /5.27/$$

Uvažujme jeden mezní případ. Předpokládejme že $\rho_2 \approx \rho_1$. To je možné, jestliže existuje mechanismus rychlého nehydrodynamického přenosu ionizačního stavu, který zabezpečuje pohyb nespojitosti nadzvukovou rychlostí v ohřátém plynu. Plyn v absorpční vlně je při tom možné považovat za nehybný. Za těchto podmínek tok laserového záření F dopadající na 1 cm^2 povrchu čela se absorbuje hmotou plynu $\rho_1 D$, která proniká nespojitostí po dobu působení laserového záření. Pak

$$\rho_1 D e_2 = F. \quad /5.28/$$

Předpokládáme, že ohřev je velký / $e_2 \gg e_1$ /.

Vraťme se k zákonům zachování /5.25/-/5.27/. Vyloučíme-li z /5.27/ rychlost D a v_2 s pomocí vztahů /5.25/, /5.26/ dostaneme rázovou adiabatu pro obě strany nespojitosti 1 a 2:

$$e_2 - e_1 = (p_1 + p_2)(1/\rho_1 - 1/\rho_2)/2 + F[(\rho_2 - \rho_1)/(p_2 - p_1) \cdot \rho_1 \rho_2]^{1/2} \quad /5.29/$$

Při známé termodynamické závislosti $e/p, p/\rho$ rovnice /5.29/ vyjadřuje vztah tlaku a hustoty za nespojitostí. Tok F je parametr. Tak jako je při nadzvukovém režimu správný výraz

/5.28/, pak zanedbáme-li počáteční tlak $p_2 \gg p_1$ a specifickou vnitřní energii $e_2 \gg e_1$, a s použitím vztahu $e = p(\gamma - 1) / \rho$, dostaneme ze vztahů /5.25/ a /5.27/ výraz pro rázovou adiabatou ve tvaru ²⁰:

$$p_2 = 2F \left[\rho_2 (1 - \epsilon)^{1/2} / (\gamma + 1) (\gamma - 1) \epsilon - 1 \right]^{3/2}, \quad /5.30/$$

$$\epsilon = \rho_1 / \rho_2,$$

kde γ je efektivní adiabatický exponent pro plazmu za čelem vlny.

Bilance energie upřesňující /5.28/ má tvar

$$\rho_0 D e_2(T, \epsilon) = F \cdot \beta, \quad /5.31/$$

kde
$$\beta = \left[1 - (\gamma - 1) / 2 \cdot (1 - \epsilon) / \epsilon \right]^{-1},$$

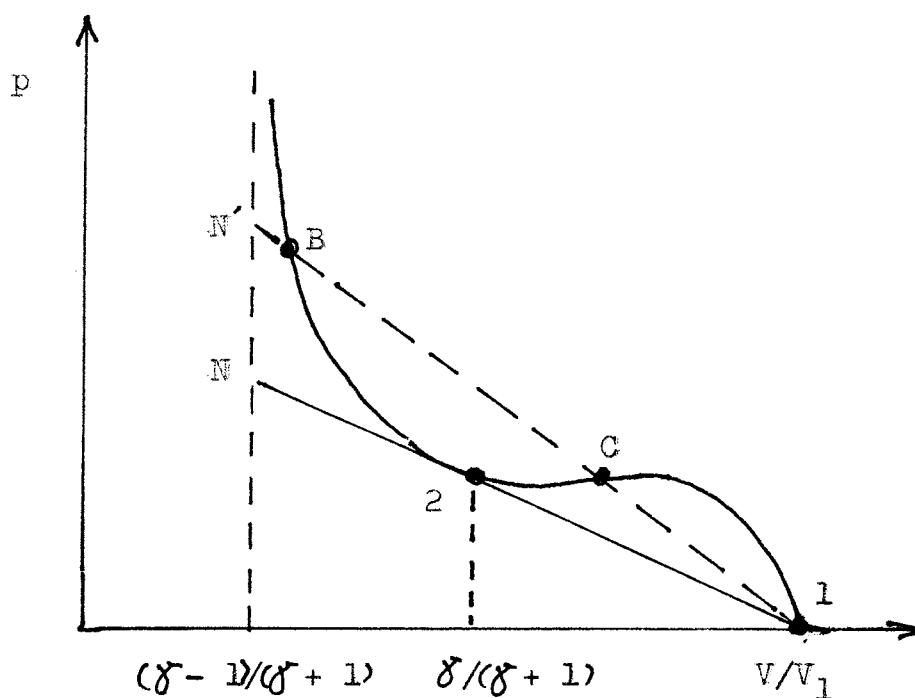
je koeficient blízký k jedničce a který zahrnuje pohyb plynu a změnu hustoty za čelem vlny.

Veličinu ϵ je možné upřesnit s pomocí rovnice

$$e_2(\gamma - 1) / D^2 = \epsilon(1 - \epsilon). \quad /5.32/$$

Na obr. 5.14 je znázorněna adiabatata /5.29/ odpovídající určitým parametrům F a ρ_1 . Vychází z bodu 1 /stav $p_1 = 0$, $\rho_1 = 0$ / a při p_2 se asymptoticky přibližuje k přímce $\epsilon = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$, odpovídající limitnímu stlačení rázovou vlnou. Čím vyšší je hodnota F a ρ_1 , tím výše leží na obrázku křivka $p(\epsilon)$. Rozdíl rázové adiabataty absorbční vlny od rázové adiabataty trhaviny spočívá v tom, že v případě absorbce daného vnějšího toku F je uvolněná energie vztažená na jednotku hmoty $F / \rho_0 D$ nepřímo úměrná rychlosti vlny, kdežto pro trhavinu je uvolněné výbuchové teplo konstantní.

Jestliže vyloučíme hodnotu v_2 z /5.25, /5.26/ dostaneme



Obr. 5.14 Rázová adiabata detonační vlny
vyvolané světlem

/při $p_1 = 0$ / $p_2 = \rho_1 D^2 (1 - \varepsilon)$. Z toho vyplývá, že rychlost absorpční vlny D je tím větší, čím větší je sklon přímky procházející bodem 1 počátečního stavu do bodu konečného stavu $/p_2, \varepsilon /$, který leží na rázové adiabatě.

Jako v případě normální detonace zde existuje při daném toku záření F minimální možná rychlost šíření absorpční vlny ve které dochází ke stlačení látky. Tato rychlost odpovídá Chapman-Jouguetovu bodu 2 konečného stavu látky. Šíření vlny menší rychlostí odpovídá podzvukovému režimu, ve kterém dochází k expanzi plynu $\varepsilon > 1$ a která popisuje větev adiabaty ležící napravo od bodu 1 / není na obr. uvedena/

V souhlase s Chapman - Jouguetovou podmínkou je rychlost šíření detonační vlny vyvolané světlem vůči plynu za jejím čelem rovna místní rychlosti zvuku:

$$D = c_2 = \sqrt{\gamma p_2 / \rho_2}$$

/5.33/

V detonačním režimu se plyn stlačuje a ohřívá rázovou vlnou do stavu N, který leží na rázové adiabatě. Záním plyn, který získal přídavnou energii absorbcí tokem F expanduje podél přímky N2 a dosahuje CJ bodu v momentě uvolnění energie. Přejít ze stavu N do stavu 2 může být studován pouze při znalosti vnitřní struktury nespojitosti.

S použitím CJ podmínky /5.33/ a systém rovnic /5.25/-/5.27/, /5.30/ najdeme pro rychlost detonační vlny vyvolané světlem a parametry plynu za jeho čelem:

$$D = [2(\gamma^2 - 1) F/\rho_1]^{1/3}, \quad /5.34/$$

$$p_2 = [2(\gamma^2 - 1)]^{2/3} \cdot \rho_1^{1/3} \cdot F^{2/3} / (\gamma - 1), \quad /5.35/$$

$$\rho_2 = (\gamma + 1)\rho_1 / \gamma, \quad /5.36/$$

$$e_2 = \gamma/(\gamma + 1) \cdot (4/\gamma^2 - 1)^{1/3} \cdot F/\rho_1^{2/3}, \quad /5.37/$$

Koeficient v energetické bilanci /5.31/ má v tomto případě tvar

$$\beta = 2\gamma/(\gamma + 1).$$

Nalezneme závislost poloměru R sférické rázové vlny pohybující se v režimu detonace vyvolané světlem v závislosti na t od doby počátku trvání laserového impulsu. Nechť výkon w laserového impulsu nezávisí na čase t . Pak tok záření je

$$F = w / A(R, \Omega) = \xi' w / R^2,$$

kde $A(R, \Omega)$ je plocha čela rázové vlny osvětlené laserem, ξ' je konstanta, která závisí na úhlu soustředění paprsku v ohnisku čočky. Dosadíme-li hodnotu F do rovnice /5.43/, dostaneme

$$D = dR/dt = (\alpha \xi' w / \rho_1 R^2)^{1/3},$$

kde $\alpha = 2(\gamma^2 - 1)$. Po integraci nalezneme

$$R = (\beta w / \rho_1)^{1/5} \cdot t^{3/5}, \text{ kde } \beta = \beta(\Omega, \gamma) = \beta' \cdot \alpha \quad /5.38/$$

Z tohoto vzorce vyplývá závislost $R \sim t^{0,6}$, při konstantních hodnotách β , w a ρ_1 . Skutečně byla ověřena v práci.¹⁶⁰

Výrazy /5.34/ - /5.37/ byly získány bez přihlédnutí k závislosti adiabatického exponentu na teplotě. V detonační vlně vyvolané světlem může být tato změna podstatná. Tak např. při teplotě $T \sim 10000 - 50000$ K, γ slabě závisí na teplotě a je rovna $\gamma = 1,18$ a při teplotách $T \leq 1000$ K je $\gamma = 1,4$.

Hydrodynamický režim šíření absorpční vlny vyvolaný ionizací za rázovou vlnou s rychlostí větší než odpovídá normální detonaci /5.34/ je nemožný. Takovému případu by odpovídalo stlačení za rázovou vlnou do stavu N' na rázové adiabatě s následující expanzí plynu, v době absorpce laserového záření, podle úseku přímky $N'1$ do bodu B, na rázové adiabatě absorpční vlny. Ale ve stavu B je rychlost šíření vlny ohřátým plynem podzvuková. Expanze ohřátého plynu by se za takovou vlnou postupně oslabila a zpomalila, až do režimu normální detonace / z bodu B do bodu 2/. Takový režim by byl podobný režimu překomprimované detonace. Proto, aby se detonační vlna vyvolaná světlem šířila rychlostí větší, než může zabezpečit absorpce laserového záření musíme mít doplňující zdroj energie. Avšak v podmínkách pokusů takové doplňující zdroje zpravidla nemáme, a proto odchylky od normálního režimu detonace jsou prakticky nemožné.

Předpokládejme, že existuje nehydrodynamický mechanismus ionizace, mnohem efektivnější, než je rázová vlna a že tento mechanismus zabezpečuje velkou rychlost šíření absorpční vlny, než je detonace vyvolaná světlem. Takovým mechanismem

při velkých hodnotách F může být radiační mechanismus a při velkých teplotách / větších než je 100 eV/ bude tímto mechanismem elektronová vodivost.

Stlačení ve vlně bude přitom probíhat nepřerušovaně / bez skoků/ podél přímky 1 C z počátečního stavu 1 do stavu C.

Taková vlna se bude šířit plynem nadzvukovou rychlostí. Žádné hydrodynamické vzruchy, včetně rázové vlny ji nedohoní. Stlačení v takové vlně je menší, než ve vlně detonační a ve vzorci /5.31/ bude koeficient $\beta < 2\gamma/(\gamma + 1)$. V limitě při $D \rightarrow \infty$ se plyn nestačí dát do pohybu a hustota zůstává beze změny / $\epsilon \sim 1, \beta \sim 1$ /.

Při zvětšení intenzity laserového záření se zmenšuje i teplota a stupeň ionizace plazmy za čelem rázové vlny. Z těchto důvodů roste volná dráha záření v plazmatu. /tloušťka absorpční vrstvy/ Z analogie s teorií detonace výbušnin, můžeme určit prahovou hodnotu pro intenzitu laserového záření, při kterém je ještě možný režim detonační vlny vyvolané světlem. Je přirozené považovat, že absorpční vrstva plazmy expanduje nejenom ve směru pohybu rázové vlny, ale i do stran /boční expanze/. Vztah ztrát energie bočními expanzemi k expanzi ve směru šíření rázové vlny charakterizujeme vztahem bočního povrchu zóny reakce $2\pi r l$ k ploše čela πr^2 , t.j. veličině l/r . Detonace vyvolaná světlem může existovat při podmínce $l \ll r$. Při poloměru světelného kanálu $r \sim 10^{-2} - 10^{-1}$ cm je střední volná dráha laserového záření srovnatelná s r při teplotě $T \approx 20\ 000$ K, čemuž odpovídá prahový světelný tok $F_{CD} \ll 10^8$ W/cm². Při intenzitě laserového záření pod prahovým režimem je detonace nemožná. Protože $F_{CD} \ll F_n$, je mož-

né režim detonace vyvolané světlem udržet s pomocí menších světelných toků, než je zapotřebí pro prvopočáteční vznik plazmy a rázové vlny.

Předpokládejme, že rychlost toku plynu bočním povrchem válcové absorpční zóny je rovna rychlosti zvuku ohřátého plynu $c = \sqrt{\beta g - 1} e$, nalezneme obecné rovnice bilance energie v absorpční zóně vlny, upřesňující /5.28/

$$\rho_1 D e \pi r^2 + \rho_1 c e 2 \pi r l = F \pi r^2 \quad /5.39/$$

Druhý člen v levé části /5.39/ zahrnuje ztráty energie zářením boční expanzí plazmy. Z předchozího vztahu máme

$$\rho_1 D e = F / \delta, \quad \delta = 1 + 2.1 c / r D. \quad /5.40/$$

Protože při detonačním režimu $c = D/2$, pak $\delta = 1 + 1/r$. Zavedeme-li do rovnic /5.35/ -/5.37/ veličinu $F^* = F/\delta$, pak tím stanovíme vliv bočních expanzí na ztráty energie.

Předcházející výklad byl proveden bez znalosti struktury absorpční vlny laserového záření. Současné pokusné možnosti neumožňují určit tuto strukturu, kdežto teoretické představy jsou v tomto směru neomezené.¹⁶³

Velmi složitá je struktura detonační vlny vyvolané světlem, neboť v tomto případě je čelo absorpční vlny v podstatě totožné s rázovou vlnou.

Uvažujme ustálený pohyb rázové vlny šířící se proti laserovému záření. Intenzita laserového záření F bude konstantní. Plyn před vlnou je v klidu a je charakterizován počáteční hustotou částic N_0 . Tepelné záření plazmy ionizuje vrstvu plynu před čelem detonační vlny vyvolané světlem. Při hodnotách F_0 a N_0 odpovídající detonaci vyvolané světlem je počáteční ionizace plynu bezprostředně před čelem $\alpha_{e1} < 10^{-2}$.

Dosah ionizujících kvant nepřevyšuje milimetr, proto není plyn ve vzdálenosti několika milimetrů od čela ionizován. Teplota elektronového plynu před čelem T_{el} je určena rovnováhou mezi absorpcí laserového záření a ztrátami energie při srážkách. V režimu detonace vyvolané světlem je tato hodnota pro H_2 , Ar, Ne rovna $T_{el} \approx 1 - 2$ eV. Doba od počátku fotoionizace nejbližší vrstvy plynu až do průchodu čela vlny touto vrstvou je řádově 10^{-8} s. Přenos energie z elektronů na atomy zanedbáme/rozdíl mezi hmotnostmi elektronů a atomů je velký/, proto je pro teplotu atomů/iontů/ před čelem správná relace $T_1 \ll T_{el}$.

Rovnici kontinuity, pohybu vícesložkové, dvouteplotní plazmy zapíšeme ve tvaru

$$1/\rho \quad d\rho/dt + \partial v_k/\partial x_k = 0,$$

$$\rho \quad dv_k/dt = - \partial p/\partial x_k - \partial p_e/\partial x_k,$$

$$\rho \quad de/dt = - (p + p_e) \partial v_k/\partial x_k - \partial q_k/\partial x_k + j_m E_m,$$

$$\rho_e = 3/2 NkT, \quad p = NkT, \quad p_e = N_e kT_e.$$

k je Boltzmannova konstanta, e je vnitřní energie, N je hustota atomů a iontů, p , T je tlak a teplota atomů a iontů, N_e je hustota elektronů, p_e , T_e je tlak a teplota elektronů, j_m je hustota toku, E_m je elektrické pole, které vzniká důsledkem rozložení nábojů, q je tepelný tok.

První rovnice je zákon zachování hmoty, druhá rovnice představuje zákon zachování impulsu a třetí zákon zachování energie. V případě jednorozměrného stacionárního pohybu je

$$d(\rho v)/dx = 0,$$

$$\rho v \cdot dv/dx = - dp/dx - dp_e/dx,$$

$$\rho v \, de/dx = -(p + p_e) \, dv/dx - dq/dx + jE.$$

Zanedbáme-li inercií elektronů je

$$jE = - N_e eE = dp_e/dx,$$

kde e je náboj elektronu.

Budeme-li uvažovat jenom elektronovou vodivost, která je mnohem větší než iontová a atomová pak

$$q = \chi_e \, dT_e/dx,$$

kde χ_e je koeficient elektronové vodivosti. Přihlédneme-li také k výměně energie mezi ionty a elektrony

$$\psi_{ei} = 3mN_e \omega_p (T_e - T) / m_a,$$

kde $\omega_p = \omega_{ea} + \omega_{ei}$ je frekvence pružných srážek elektronu s atomy a ionty. m_a je hmotnost atomu.

Označíme-li Q_m energii potřebnou k vytvoření m -tého iontu $/Q_m = \sum_m I_m$, kde I_m je odpovídající potenciál ionizace/ a w_m je rychlost změny počtu m -tých iontů. Doplňme těmito členy energetickou rovnici a rovněž zahrneme absorpci energie laserového záření v plazmě.

$$dF/dx = - k_\omega F.$$

Rovnice jednorozměrného stacionárního toku vícesložkové, dvouteplotní plazmy v systému souřadnic spojených s čelem rázové vlny ^{pak} jsou:

$$Nv = N_1 D, \quad /5.41/$$

$$MNv^2 + p + p_e = MN_1 D^2 + p_1 + p_{e1}, \quad /5.42/$$

$$d/dx (5/2 kT_e n_e v + \chi_e T_e) = v dp/dx - \psi_{ei} + k_\omega F - Q_m w_m, \quad /5.43/$$

$$d/dx [Nv (5/2 kT + 1/2 Mv^2)] = - v dp_e/dx + \psi_{ei}, \quad /5.44/$$

$$d/dx(Nev) = w_e, \quad /5.45/$$

$$d/dx(N_i v) = w_i. \quad /5.46/$$

D je rychlost šíření vlny, w_e je rychlost vzniku elektronu. Řád systému rovnic /5.43/, /5.44/ snížíme integrací jejich součtu k přihlédnutím k /5.41/, /5.42/, /5.46/

$$\begin{aligned} N_0 D [m_a v^2/2 + 5/2 k(T + \alpha_e T_e) + Q_j \alpha_j] + F - \mathcal{J}_e dT_e/dx = \\ = N_0 D [m_a D^2/2 + \alpha_{e1}(T_1 + 5/2 T_{e1}) k + F_0], \quad /5.47/ \end{aligned}$$

α_e a α_j představuje koncentraci elektronu, atomu $j = a$ i iontů:

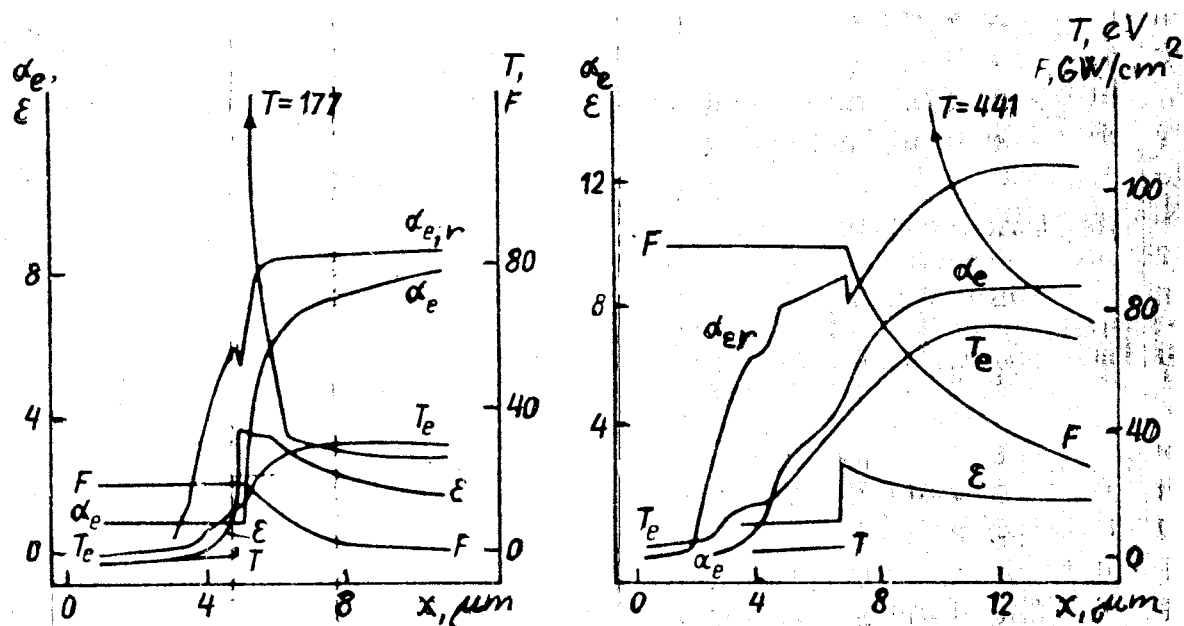
$$\alpha_e = n_e/N, \quad \alpha_j = n/N, \quad N = N_e + N_a + N_j \quad /5.48/$$

Konečný rovnovážný stav plazmy za nespojitostí odpovídá Chapman-Jouguetovu bodu na adiabatě absorbní vlny. Rychlost toku je rovna místní rychlosti zvuku. c. Na obr.5.15 jsou uvedeny výpočty struktury detonační vlny vyvolané světlem v argonu. Výpočty byly provedeny při počáteční hustotě molekul v argonu $N_0 = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ pro záření neodymového laseru $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$. Jak je vidět z obrázku, základem struktury detonační vlny vyvolané světlem je rázový skok.

V zóně mezi čelem rázové vlny a bodem na ose x , kde elektronová teplota T_e vykazuje maximum, dochází k silné absorpci laserového záření.

S růstem intenzity laserového záření F_0 roste teplota i stupeň ionizace plazmy v zóně absorpce. Současně roste i tepelný tok z plazmy, ve směru nespojitosti. Před nespojitostí se vytváří prohřátá zóna. Při rovnovážné teplotě plazmy vzniká za čelem detonační vlny vyvolané světlem, větší než je 10 eV, oddělení elektronové teploty T_e před čelem vlny od teploty

T chladného plynu.



Obr.5.15. Struktura detonační vlny vyvolané světlem v argonu 163

a/ $F_0 = 2 \cdot 10^9 \text{ W/cm}^2$, b/ $F_0 = 10^{10} \text{ W/cm}^2$

T rovnovážná teplota, T_e elektronová teplota,

α_e koncentrace elektronů, α_{er} rovnovážná koncentra-

ce elektronů podle Saha, $\epsilon = \rho / \rho_1$.

V prohřáté zóně s růstem elektronové teploty T_e exponenciálně roste rychlost rázové ionizace atomů a plyn se rovněž částečně ionizuje před průchodem rázové vlny, t.j. rázová vlna se pohybuje plazmou. Silná závislost rychlosti rázové ionizace na elektronové teplotě vede k tomu, že stupeň ionizace plazmy \underline{z} v nespojitosti silně závisí na F_0 . Pro libovolný plyn můžeme určit prahovou hodnotu intenzity laserového záření F^* , při které se vytváří plazma před rázovou vlnou. Pro argon je F asi $1,9 \cdot 10^{10} \text{ W/cm}^2$.

Elektronový tlak je úměrný relativní koncentraci elektronů α_e , proto při $F_0 \geq F^*$ se před čelem vlny vytváří oblast zvýšeného tlaku a plyn před vlnou se začne stlačovat. Pro-

fil hustoty je uveden rovněž na obr. 5.15. Je vidět, že vedle silného stlačení při průchodu rázovou vlnou může dojít k do-
datečnému stlačení plazmy za čelem /obr. 5.15 a//. To se objas-
ňuje tím, že plazma za rázovou vlnou expanduje a s interakcí
s absorpční zónou se znovu stlačuje.

Při zvětšení hodnoty F_0 expanze plazmy začíná z čela rá-
zové vlny /obr. 5.15 b//.

Skok iontové teploty plynu T v nespojitosti souvisí se
změnou kinetické energie nabíhajícího toku v teplo,
 $\Delta T = T_2 - T_1 \sim m_a D^2 / 2$, ^{kte} T_2, T_1 jsou hodnoty bezprostředně za če-
lem a před čelem vlny.

Je vidět, že teplota iontů je maximální hned za čelem rázové
vlny. V našem případě je vyšší, než elektronová teplota. Vel-
ké účinné průřezy Coulombovské interakce a silné stlačení plaz-
my vede k tomu, že teploty T a T_e se začnou přibližovat v dů-
sledku výměny energie při průžných srážkách atomů a iontů s
elektrony. Když se teploty vyrovnají, hodnota T_e je poněkud
vyšší, než T . To je spojeno s tím, že se elektrony ohřívají
při absorpci laserového záření a ionty se ochlazují při ex-
panzi. Výměna energie mezi ionty a elektrony vede k vyrovnáva-
ní jejich teplot.

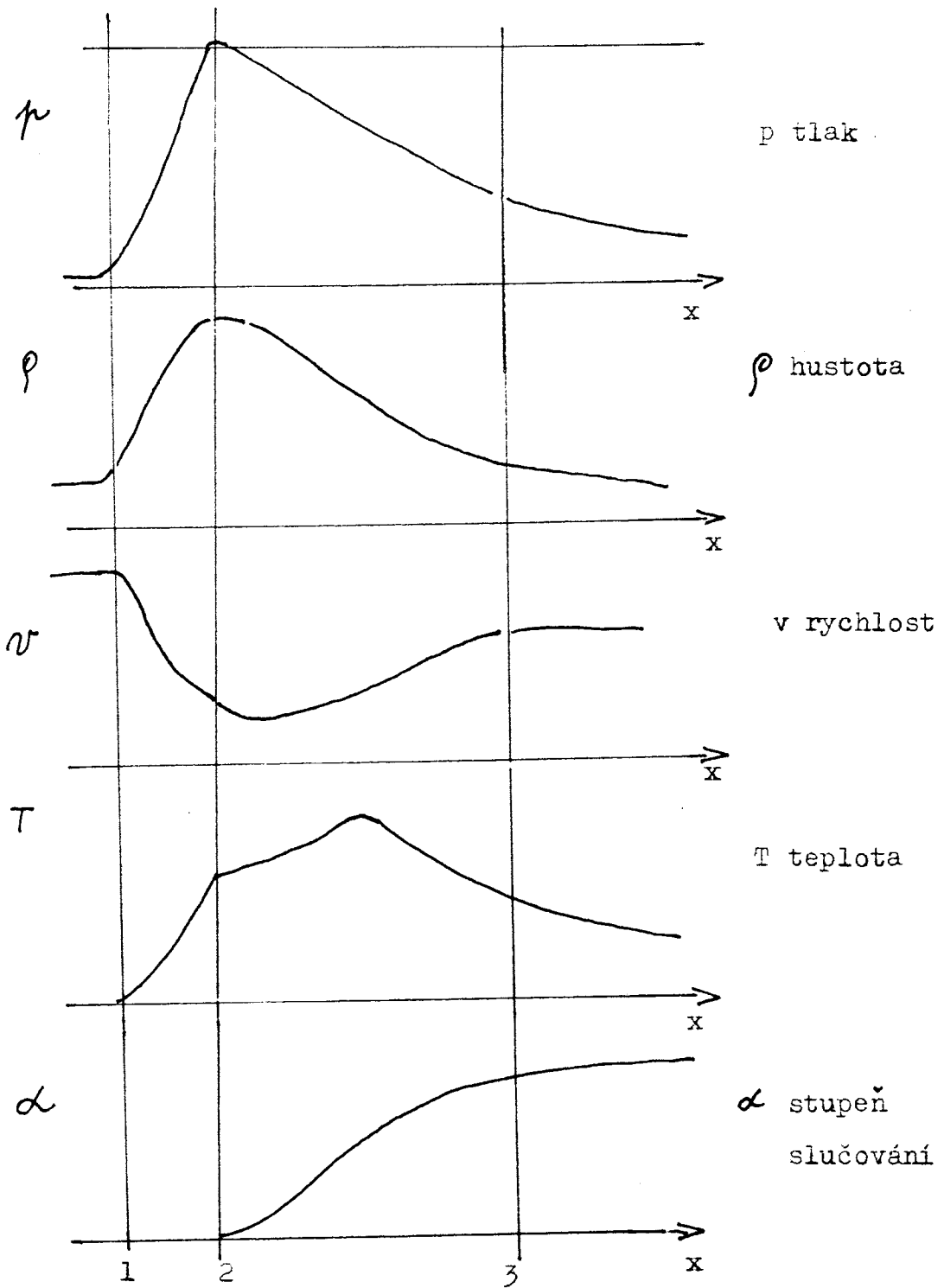
^{2.} ^{1.}
Nutné je poznamenat, že část energie laserového záření je
pohlčena v prohřáté zóně; musí být taková, aby jí bylo možné
považovat za průzračnou pro laserové záření. V popsaném vý-
počtu absorpce v prohřáté zóně představuje asi 5 % celkové-
ho toku záření.

5.6 TERMOJADERNÁ DETONAČNÍ VLNA

Silná rázová vlna pohybující se plynem jej stlačuje a ohřívá. Jestliže tento plyn představuje termojadernou výbušninu jako je T,D, směs T-D, nebo Li^6D a teplota je dostatečně vysoká $10^8 - 10^9$ K, pak v plynu dochází k termojaderným reakcím. Rychlou přeměnu termojaderné výbušniny doprovází termojaderná detonační vlna.¹⁶⁶

Jestliže se tato vlna šíří rychlostí 10^7 m/s a vyhovuje Chapman-Jouguetově podmínce, pak teplota za čelem dosahuje řádově 10^{10} K. Tloušťka čela takové vlny je velmi veliká, neboť při $T = 10^{10}$ K je pravděpodobnost reakce $\langle\sigma v\rangle$ rovna 10^{-16} cm^3/s . Při hustotě částic 10^{15} cm^{-3} je střední doba termojaderné reakce 10 s a tloušťka detonačního čela je řádově 10^{10} cm. Jestliže počáteční hustota odpovídá pevnému vodíku $N \sim 5 \cdot 10^{22}$ cm^{-3} , pak tloušťka je řádově 0,2 m /při takové vzdálenosti převážná většina částic vstupuje do reakce/.

Poměr střední doby pro dvoučásticovou Coulombovskou srážku / s rozptylem o úhel $\pi/2$ / k střední době termojaderné reakce za čelem rázové vlny je mnohem menší, než jedna. $\tau_c / \tau_R \ll 1$ při $T \sim 10^9 - 10^{10}$ K /. Proto je možné předpokládat, že se nejprve formuje rázový skok a ten můžeme uvažovat odděleně od zóny termojaderné reakce. Takový model ve kterém se rázová vlna uvažuje odděleně od zóny hoření /chemické reakce/ známe již z kapitoly 5.16 a jde o známý model detonace ZND /Zeldovič, Neuman, Döring/. Tento model je použitelný i pro termojadernou detonaci. Autoři práce¹⁶⁶ ukázali, že u termojaderných reakcí podobně jako u chemických reakcí můžeme viskozitu, vodivost a difuzi zanedbat, neboť



Obr. 5.16 **ZND** model detonace

pro potřeby termojaderné detonace

jsou malé. Doba výměny energie mezi elektrony a ionty je rovna řádově době reakce syntézy $\tau_e/\tau_R \approx 2.4 \cdot 10^{-2}$ při $T = 10^9 - 10^{10}$ K /, a proto elektrony nejsou v rovnováze s ionty. Mezi neutrony a ionty existuje přibližná rovnováha, neboť účinné průřezy rozptylu neutronů jsou řádově 10^{-24} cm^{-2} /1 barn/. Všechny druhy brzděného záření vycházejí ze zóny termojaderné reakce, která je opticky průzračná a to způsobuje, že plazma chladne.

Uvedeme základní rovnice potřebné pro odvození struktury termojaderné detonace.

Především jsou to zákony zachování

$$d/dx(\rho v) = \sum_i m_i w_i, \quad /5.49 /$$

nebo

$$d/dx(N_i v) = w_i, \quad /5.50 /$$

kde $\rho = \sum_i N_i m_i$ je hustota plynu, v je rychlost toku ve směru x , m_i je hmotnost i -té částice a w_i je rychlost produkce i -té složky. Jestliže elementární částice jako je např. neutron opustí plyn a zanedbáme^{-li} hmotový úbytek při reakci, pak $\sum_i m_i w_i = 0$. Hmotový úbytek Δm při nukleární reakci je

$$\Delta m = \sum m_r - \sum m_p,$$

kde m_r a m_p jsou hmotnosti reaktantů a produktů - jader. Pro termojaderné reakce je $\Delta m / \sum m_r < 0,01$. Proto můžeme hmotový úbytek v rovnici /5.49 / zanedbat, avšak energii uvolněnou v důsledku tohoto úbytku musíme zahrnout do energetické bilance.

Zákon zachování impulsu pro nevazský plyn má tvar

$$d/dx(\rho v^2) = - dp/dx, \quad /5.51 /$$

kde

$$p = \sum_i N_i kT \text{ nebo } p = \rho RT/M', \quad /5.52 /$$

je tlak plynu, T teplota, k Boltzmannova konstanta, R universální plynová konstanta, M' je molekulová hmotnost plynu.

Rovnice zachování energie v termojaderné vlně s vyzařujícím plynem je

$$d/dx [\rho v (h + 1/2v^2 - q_T)] + dq/dx = 0, \quad /5.53 /$$

kde $h(T)$ je měrná entalpie plynu, q_T je termojaderná energie zdroje vztažená k jednotce hmoty, q je radiační tok energie. Zanedbáme-li radiační tlak v rovnici /5.51/ a hustotu energie záření v rovnici /5.53/, neboť jsou zanedbatelné ve srovnání s ostatními členy rovnic, dostaneme: po integraci /5.49/, /5.51/ : /5.53/:

$$\rho v = A, \quad /5.54/$$

$$p + v^2 = B, \quad /5.55/$$

$$h + v^2/2 - q_T + 1/A \int_0^x dq/dx' dx' = C, \quad /5.56/$$

kde integrační konstanty A, B, C určíme z počátečních podmínek na čele vlny a za ní.

$$A = \rho_1 v_1 = \rho_3 v_3, \quad /5.57/$$

$$B = p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_3 + \rho_3 v_3^2, \quad /5.58/$$

$$C = h_1 + v_1^2/2 = h_3 + v_3^2/2 - Q, \quad /5.59/$$

kde Q je energie vztažená na jednotku hmoty za předpokladu **úplného zreagování plynu**.

Výraz dq/dx můžeme získat z rovnice pro radiační přenos. Pro tenké vrstvy plynu jsou emisní děje důležitější, než absorpční procesy. Zanedbáme-li absorpci a integrujeme-li rovnici pro radiační přenos přes všechny frekvence a úhly, pak

$$dq/dx = 4\pi \int_0^{\infty} \rho_{j\nu} d\nu,$$

kde $\rho_{j\nu}$ je objemový emisní koeficient při frekvenci ν .

Tento koeficient představuje zářivý výkon vztažený na jednotku objemu a všechny frekvence P_{BR}

$$P_{BR} = 1.57 \cdot 10^{-27} N_e \sum_i (N_i Z_i^2) T^{1/2}, \quad (\text{K}) \text{erg/cm}^3 \cdot \text{s},$$

kde Z je atomové číslo. Radiační člen v rovnici /5. 59 /

je totožný s $1/A \int_0^x P_{BR} dx$:

Zdrojový term v rovnici kontinuity je definován pro binární reakci jako

$$w = N_1 N_2 \langle \sigma v \rangle / (1 + \delta_{A_1, A_2}), \quad /5. 60 /$$

kde N_1 a N_2 jsou počty reagujících jader a δ je Kroneckerův symbol vylučující možnost, že částice jsou totožné

$/A_1 = A_2/$, Jestliže se každá částice řídí Maxwellovým rozdě-

lovacím zákonem, pak pravděpodobnost reakce je dána vztahem

$$\langle \sigma v \rangle = 4/\sqrt{\pi} (\mu/2kT)^{3/2} \int_0^{\infty} \sigma v \exp(-\mu v^2/2kT) v^2 dv, \quad /5. 61 /$$

kde μ je redukovaná hmota, σ je účinný průřez binární reakce, v je rychlost reagujících jader.

Doba termojaderné reakce je

$$\tau_R = 1/N \langle \sigma v \rangle \cdot \quad /5. 62 /$$

Výkon termojaderné reakce je součin reakční rychlosti a energie uvolněné při reakci

$$P_T = N_1 N_2 \langle \sigma v \rangle Q_R / (1 + \delta_{A_1, A_2}), \quad /5. 63 /$$

kde

$$Q_R = \Delta mc^2 \quad /c \text{ je zde rychlost světla/}$$

Například pro reakci $D + T \rightarrow He^4 + n_0^1$ je tlak dán rovnicí

$$p = (N_T + N_D + N_N + N_\alpha + N_e) kT,$$

kde N_T , N_D , N_N , N_α , N_e označují tritium, deuterium, neutron, α -částice, elektrony. S pomocí zákona zachování náboje můžeme stanovit počet elektronů $N_e = N_T + N_D + 2N_\alpha$, a zákon zachování toku pro elektron /elektron nevstupuje do reakcí/ $N_e v = 2N_T v_1$. Zákon zachování hmoty má tvar:

$$\rho v = (N_T m_T + N_D m_D + N_N m_N + N_\alpha m_\alpha) v = 5/3 \cdot N_T \cdot m_T \cdot v_1$$

Počáteční hustoty tritia a deuteria jsou

$$/5.64 /$$

stejně $N_T = N_D$. Rovněž plyne z výrazu pro N_e

a /5.64/, že $N_N = N_\alpha$. Tritium a deuterium se přeměňuje se stejnou rychlostí $w_T = w_\alpha$. Vzhledem k zachování hmoty při reakcích, kdy $\sum_i m_i w_i = 0$ je také $w_N = -w_T$. Rychlost přeměny tritia a deuteria je rovna rychlosti vzniku neutronů a α -částice.

Definujme stupeň přeměny $\alpha(x)$ jako poměr hustot reakčních zplodin k celkové hustotě.

$$\alpha(x) = (N_N m_N + N_\alpha m_\alpha) / \rho \quad /5.65 /$$

Na počátku reakce je $N_N = N_\alpha = 0$ a $\alpha = 0$,

na konci reakce je $N_D = N_T = 0$ a $\alpha = 1$.

S pomocí rovnic /5.64/ a /5.65/ s přihlédnutím k $N_D = N_T$, $N_N = N_\alpha$, získáme vztah pro neutronovou a tritiovou hustotu

$$N_N = 3/5 \rho \alpha / m_T, \quad N_T = 3/5 \rho (1 - \alpha) / m_T. \quad /5.66 /$$

S těmito vztahy má stavová rovnice tvar

$$p = 12/5 \cdot \rho \cdot kT / m_T. \quad /5.67 /$$

Nyní přepíšeme rovnici kontinuity pro tritium s pomocí parametru α s použitím vztahu /5.66 / :

$$3/5 \cdot A/m_T \cdot d\alpha/dx = 3/5^2 \rho^2/m_T^2 (1-\alpha)^2 \langle \sigma v \rangle \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$$

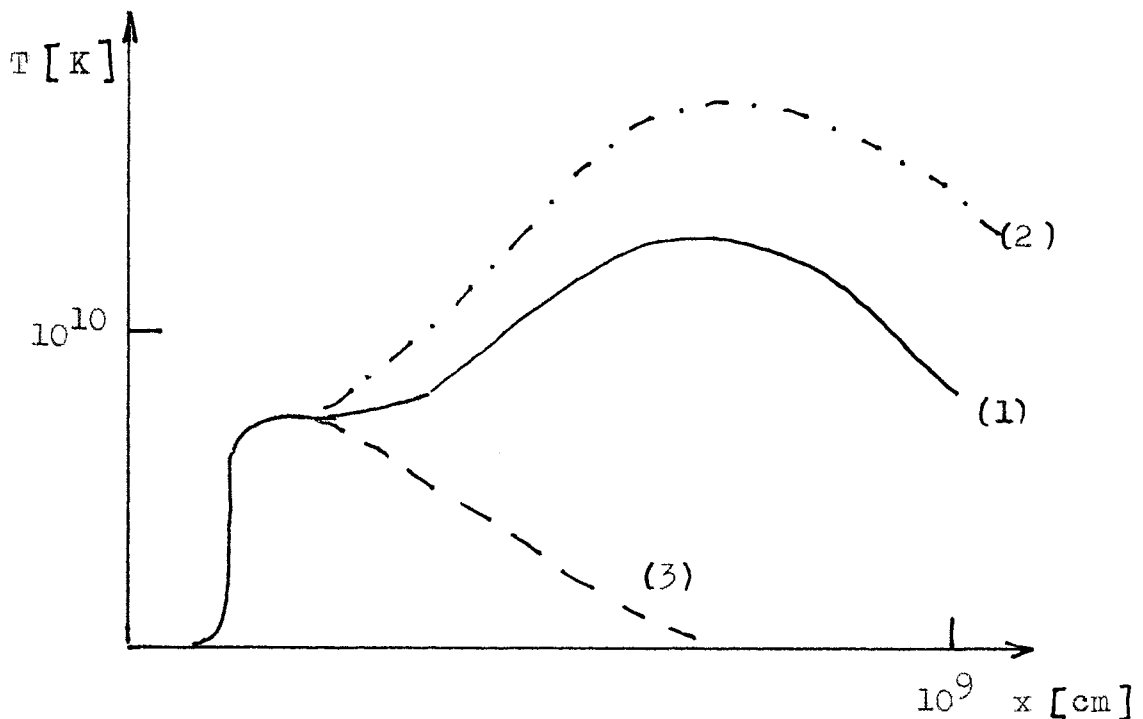
Termojaderný term q_T popisující uvolnění energie /5.68 / má tvar

$$\begin{aligned} q_T &= \int_0^x dq_T/dx' \cdot dx' = 3/5 \cdot Q_R/m_T \int_0^x d\alpha/dx' \cdot dx' = \\ &= 3/5 \alpha Q_R/m_T = \alpha Q. \end{aligned} \quad /5.69 /$$

Tím máme sestavený úplný systém rovnic popisujících termojadernou detonační vlnu.

Podobné rovnice lze sestavit pro termojadernou výbušninu Li^6D .

Na obr.5.17 je znázorněna struktura termojaderné detonační vlny.



Obr.5.17 Struktura termojaderné detonační vlny
v plazmě s hustotou $N = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ 166

Při $x = 10^9$ představuje stupeň vyhoření 60 %. (1) označuje řešení s radiačními ztrátami, (2) řešení bez radiačních ztrát a (3) řešení s radiačními ztrátami, bez termojaderné reakce.

Jestliže se silná vlna šíří rychlostí 10^8 cm/s ve směsi deuteria a tritia, pak v plazmě s hustotou 10^{16} cm⁻³ dosahuje neutronový tok hodnoty 10^{17} cm⁻².s⁻¹. a specifický výkon, který se uvolní při syntéze dosahuje hodnoty 2kW/cm³. Pro takové vlny velikost radiačních ztrát převyšuje termojadernou produkci energie o 25 %. Nejmenší délka zóny termojaderné reakce je při rychlosti vlny $4 \cdot 10^8$ cm/s / $T_2 \sim 40$ keV/.

5.7 RÁZOVÉ VLNY VYVOLANÉ DETONACÍ

Jedním ze způsobů generace silných rázových vln je použití výbušnin. Za čelem silné rázové vlny při dostatečně velkých Machových číslech, v důsledku prudkého zvýšení teploty /plyn se při explozi nachází při atmosferickém tlaku a teplotě se desetinásobně stlačí a ohřeje na teplotu $10^4 - 10^5$ K/, dojde k vybuzení vnitřních stupňů volnosti molekul, k chemickým reakcím, k vyzařování světla a jiným jevům. V prostředí je vyvolán složitý neustálený tok, ve kterém spolu s rázovou vlnou jsou přítomné i jiné povrchové nespojitosti jako např. druhotné rázové vlny, kontaktní povrchy a pod.

Těžkosti spojené s faktem, že je nutné řešit nelineární rovnice ^{2. o} plynové ^{1.} dynamiky spolu s relaxačními rovnicemi, rovnicemi chemické kinetiky vedly k tomu, že tyto složité problémy jsou řešeny přibližnými, nebo numerickými metodami.

Teoreticky je nejvíce prozkoumané šíření rázových vln pro případ tzv. bodového výbuchu. ^{10,3} Při bodovém výbuchu je hmotnost zplodin výbuchu malá a množství uvolněné energie E velmi velké. Přesné analytické řešení automodelové úlohy o silném bodovém výbuchu ¹⁶⁸ prvně vypracoval ^{167, 169} Sedov a Taylor .

Zákonitosti s nimiž se setkáváme v teorii a praxi můžeme vždy vyjádřit ve tvaru

$$a = f / a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n / ,$$

kde $a_1 \dots a_n$ jsou určující parametry, přičemž argumenty $a_1 \dots a_k$ mají nezávislé rozměry a rozměry argumentů $a_{k+1}, \dots a_n$ jsou vyjádřeny pomocí rozměrů, určujících parametrů $a_1 \dots a_k$:

$$[a_{k+1}] = [a_1]^{p_{k+1}} \dots [a_k]^{r_{k+1}},$$

$$a_n = a_1^p \dots a_k^r .$$

Rozměr určující veličiny a vyjadřujeme pomocí rozměrů určujících parametrů a_1, \dots, a_k ,

$$a = a_1^p \dots a_k^r$$

a existují taková čísla p, \dots, r , vyhovující předchozímu.

Kombinace

$$\pi_1 = a_{k+1} / a_1^{p_{k+1}} \dots a_k^{r_{k+1}}, \dots, \pi_{n-k} = a_n / a_1^{p_n} \dots \dots a_k^{r_n} ,$$

$\pi = a / a_1^p \dots a_k^r$ jsou bezrozměrné a při přechodu od jednoho systému jednotek k druhému uvnitř dané třídy se nezmění. Závislost $a = f(a_k)$ je možné pomocí kombinací π přepsat do tvaru $\nearrow = f(a_k^n)$

$$\pi = f(a_1, \dots, a_n) / a_1^p \dots a_k^r = 1 / (a_1^p \dots a_k^r) f(a_1, \dots, a_k, \pi_1 a_1^{p_{k+1}} \dots a_k^{r_{k+1}}, \dots, \pi_{n-k} a_1^{p_n} \dots \dots a_k^{r_n}) = F(a_1, \dots, a_k, \pi_1 \dots \pi_{n-k}) .$$

Je možné přejít k takovému systému jednotek, pro který se libovolný z parametrů $a_1 \dots a_k$ může změnit libovolně a ostatní zůstávají nezměněné. Při takové změně se v předchozím výrazu může změnit první argument a všechny ostatní argumenty funkce F zůstanou beze změny, neboť jde o hodnoty π . Z toho vyplývá, že $\partial F / \partial a_1 = 0, \dots, \partial F / \partial a_k = 0$. Můžeme tuto závislost vyjádřit pomocí funkce $(n - k)$ argumentů $\pi = F(\pi_1, \dots, \pi_{n-k})$, nebo což je totožné, funkce f má speciální tvar

$$f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) = a_1^p \dots a_k^r F(a_{k+1} / a_1^{p_{k+1}} \dots a_k^{r_{k+1}}, \dots, a_n / a_1^{p_n} \dots a_k^{r_n}) .$$

To je vyjádření tzv. \mathcal{P} -teorému /E. Buckingham/. Počet všech bezrozměrných veličin /proměnných i konstant/, které určují fyzikální děj se rovná počtu n -rozměrových veličin zmenšených o k nezávislých rozměrů. Intuitivně je \mathcal{P} -teorem zřejmý a používal se počínaje Galileem a konče Rayleighem, ještě před tím, než byl zformulován.

Pro bodový výbuch platí pro závislost čela rázové vlny na energii E , čase t a hustotě vzduchu ρ_1 závislost

$$R = F(E, t, \rho_1).$$

V našem případě je $n = 3$. Rozměry určujících parametrů v třídě MLT odpovídají rozměrům $[E] = ML^2T^{-2}$, $[t] = T$, $[\rho_1] = ML^{-3}$. Vidíme, že $k = 3$ a $n - k = 0$ a funkce F nezávisí ani na jednom argumentu, t.j. $F = \text{konst.}$ Není obtížné zjistit, že

$$\mathcal{P} = R \cdot Et^2 / \rho_1^{-1/5} \quad \text{odkud}$$

$$R = \text{konst.} \cdot Et^2 / \rho_1^{1/5} \quad /5.70/$$

Tento vztah ukazuje, že pokud změříme nějakým způsobem poloměr rázové vlny v různých časových odstupech, pak v logaritmických souřadnicích $5/2 \ln R$ a $\ln t$ leží pokusné body na přímce

$$5/2 \ln R = 5/2 \ln \text{konst.} E^{1/5} \rho_1^{-1/5} + \ln t.$$

Tato přímka má směrnici rovnu jedné. To potvrdil Taylor, který zpracoval kinofilm o šíření ohnivé koule z pokusného amerického atomového výbuchu.¹⁶⁷ Jak ukazuje detailnější rozbor konstanta je ve výše uvedených vztazích blízká jedné. Známeli R a t z experimentů, můžeme určit energii výbuchu. Taylorova publikace této veličiny 10^{14} J vyvolala svého času smu-

tek ve vládních kruzích USA, neboť se tato veličina považovala za tajnou, přestože film o pokusném atomovém výbuchu s časovým rozvojem ohnivé koule a rázové vlny se promítal po celém světě v kinech. Konstanta se v monografiích o bodovém výbuchu označuje ξ . Poloze čela rázové vlny bude odpovídat určitá hodnota $\xi = \xi_0$.

Rychlost šíření rázové vlny bude vzhledem k /5.70/

$$U = dR/dt = 2/5 \xi_0 (E/\rho_1)^{1/5} t^{-3/5} = 2/5 \xi_0^{5/2} E^{1/2} R^{-3/2} \quad /5.71/$$

V určitém čase t vlna poloměru R zasáhne hmotu plynu $m = 4\pi R^3 \rho_1/3$. Tlak na čele vlny bude úměrný střední energii objemové jednotky:

$$p_2 \sim \rho_1 U^2 \sim \rho_1 (E/\rho_1)^{2/5} t^{-6/5} \sim E/R^3. \quad /5.72/$$

Výraz demonstruje zákon podobnosti při přechodu od jedné energie výbuchu k druhé, t.j. tlak na čele má stejné hodnoty času, nebo ve vzdálenostech úměrných $E^{1/3}$.

Forma rozložení parametrů plynu za čelem rázové vlny podél souřadnice bude v důsledku automodelnosti děje v různých časech autopodobná.

Charakteristickou zvláštností toku plynu při silném výbuchu je velký pokles hustoty od čela rázové vlny do centra výbuchu. Tlak se za čelem vlny zpočátku několikrát zmenší a pak zůstává konstantní. Teplota se zmenšuje se vzdáleností od středu podle zákona $T \sim R^{-2-\gamma}$.

Automodelové řešení je nepoužitelné při šíření výbuchove vlny v pozdních stádiích, kdy tlak na čele je srovnatelný s počátečním tlakem plynu. Tento faktor narušuje autopodobnost pohybu a energetický zákon podobnosti.

Úlohu o bodovém výbuchu s přihlédnutím k protitlaku a shrnutí řady základních úloh je možné nalézt v monografii Korobejnikova.¹⁰ Získané vztahy slouží k přibližným odhadům působení sférických rázových vln při explozích výbušnin, jaderných a termojaderných výbuších.

Teorie bodového výbuchu dobře popisuje expanzi laserového oblaku, který se vytváří při dopadu fokuzovaného laserového záření na kondenzovanou látku. Pohyb hranic oblaku ve směru laserového záření při detonaci vyvolané světlem popisuje zákon /5.38/. Po přerušení laserového impulsu se rázová vlna v jistém úseku pohybuje podle zákona $R \sim t^{2/5}$, v soulase se vztahem /5.70/.

Při výbuchu nálože kondenzované výbušniny konečného rozměru ve vzduchu, obraz výbuchu je mnohem složitější, než v případě výbuchu bodového. Když detonační vlna dosáhne povrchu nálože, v okolním vzduchu se vytvoří rázová vlna a zplodiny výbuchu expandují adiabaticky do okolí. Pokles tlaku ve zplodinách výbuchu bude mnohem rychlejší, než v rázové vlně, neboť exponent isentropy zplodin výbuchu je značně vyšší, než pro vzduch. V případě jednorozměrného výbuchu se po několika interakcích vln zředění vytvoří druhotná rázová vlna, šířící se v opačném směru. Při sférickém výbuchu /obr.5.18 / se taková druhotná nespojitost šíří do centra výbuchu, vytváří se po vzniku základní vlny na konci vlny zředění a objeví se v čase, kdy tok přestane být jednorozměrný. Objev druhotných vln byl uskutečněn při numerických výpočtech /Brode/.¹⁷⁰

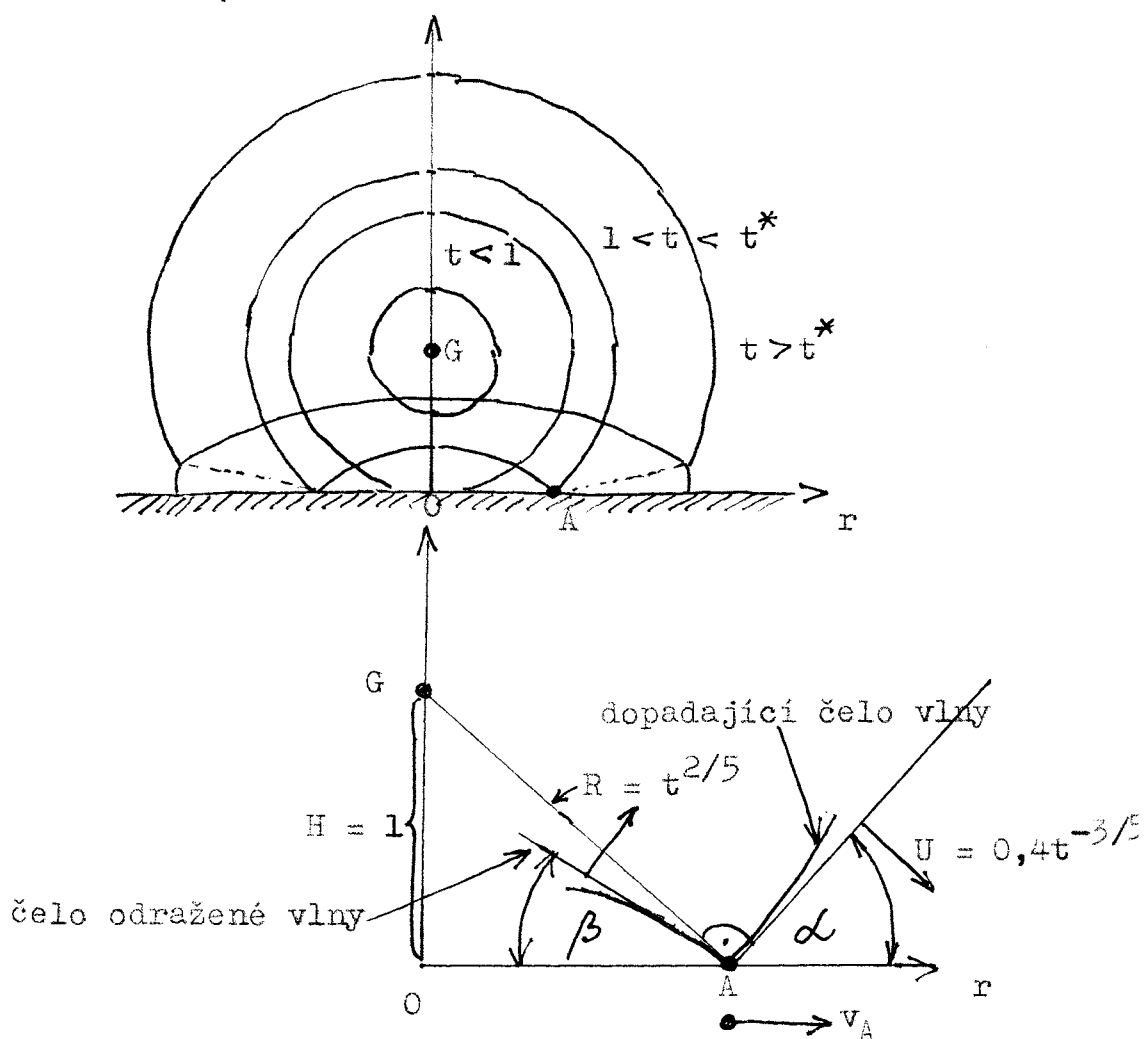
Intenzita druhotné rázové vlny nepřetržitě vzrůstá, a při šíření zplodinami výbuchu v nich vyrovnává tlak. Po dosažení centra výbuchu, druhotná vlna za určitý čas dohoní

Příklad 5.7.1

Pomocí zákonů podobnosti při silném výbuchu formulujte přechod od regulárního odrazu k odrazu Machovu, silné sférické vlny dopadající na absolutně pevnou rovinu.

Řešení:

Exploze začíná v bodě G , v čase $t = 0$ a výšce $H = 1$ nad absolutně pevnou rovinou /viz. obr. 1/ Poloprostor nad rovinou je vyplněn polytropickým plynem, jehož adiabatický exponent je γ a hustota $\rho = 1$.



Obr. 1 Silná sférická vlna v interakci s pevnou stěnou s regulárním odrazem rázové vlny

Čelo se šíří rychlostí

$$R = t^{2/5},$$

kde R je vzdálenost čela rázové vlny od bodu G. Čelo dosáhne bodu O povrchu v čase $t = 1$ a odráží se. Odraz je regulární až do času t^* , který může být určen. Pro $t > t^*$ se formuje Machova vlna. Dráha bodu A trojvlnové konfigurace je vyjádřena vztahem

$$r_A(t) = (t^{4/5} - 1)^{1/2} \quad /1/$$

Rychlost U rázové vlny a úhel dopadu jejího čela na rovinu je dán výrazy

$$U = dr/dt = 2/5 \cdot t^{-3/5}, \quad /2/$$

$$\tau_1 = \cotg \alpha = [t^{4/5} - 1]^{-1/2}. \quad /3/$$

Rychlost bodu A se monotonně snižuje až do konečné hodnoty $t = 1$ v souhlase se vzorcem

$$v_A = dr_A/dt = 2/5 t^{-1/5} [t^{4/5} - 1]^{-1/2}. \quad /4/$$

Označíme-li

$$\chi = (\gamma + 1) / (\gamma - 1), \quad \text{je}$$

úhel odrazu rázové vlny od roviny vyjádřen vztahem, který uvádí Mises ⁴:

$$\tau_2 = \cotg \beta = -(\tau_A \pm \sqrt{A^2 - 4BC}) / 2B, \quad /5/$$

kde

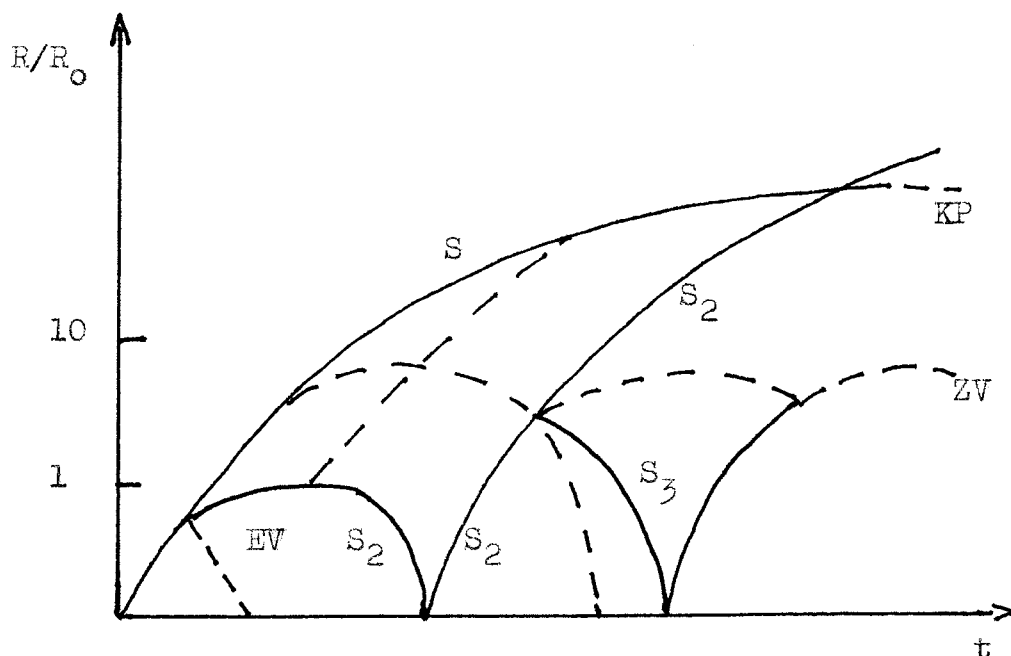
$$A = -\tau_1 [\chi^2 \tau_1^2 + (2\chi - 1)],$$

$$B = 2\chi \tau_1^2 + \chi + 1,$$

$$C = \chi(\chi \tau_1^2 + 1).$$

Fyzikální smysl má u výrazu pro τ_2 znaménko (-). V uvedeném vztahu má smysl $A - 4BC \geq 0$. Pro úhly α větší než α_D , kde α_D je kořen rovnice $A^2 - 4BC = 0$ je regulární odraz nemožný. Poslední podmínka představuje matematické vyjádření von Neumannova podmínky přechodu regulárního odrazu na Machův a naopak. Seznamte se s prací Neumann⁶ a promyslete výpočet parametrů v kritickém bodě přechodu regulárního odrazu na Machův podle jeho teorie. Vypočet proveďte pro hodnoty $\kappa = 4$ ($\gamma = 1,4$) a $\kappa = 2$ ($\gamma = 3$).

základní rázovou vlnu a jejich interakcí se vytvoří nová rázová vlna a kontaktní povrch.



Obr. 5.18 Schema výbuchu sférické náložky ve vzduchu

S - rázová vlna

ZV - zplodiny výbuchu

EV - expanzní vlna

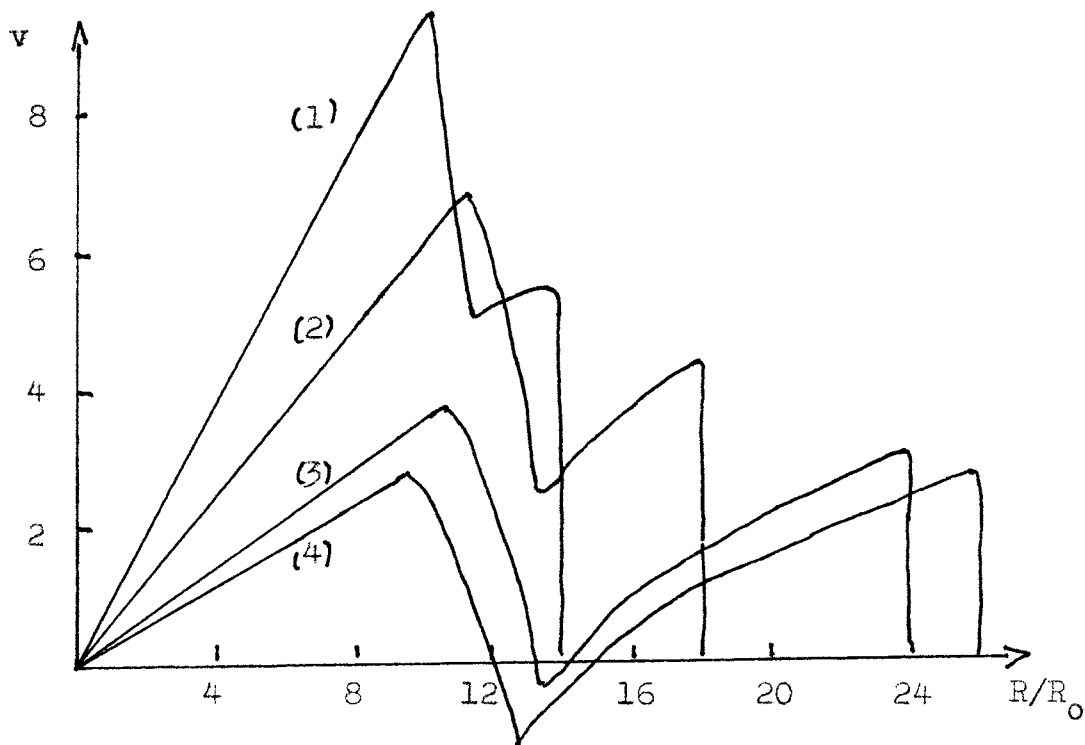
KP - kontaktní povrch

Ve vzdálenosti 10 - 15 poloměrů náložky zplodiny detonace zaujmou mezní objem, který odpovídá tlaku rovnému tlaku okolí. V důsledku nestacionárnosti děje, zplodiny výbuchu dosáhnou mezní hodnoty expanze utlumením řady oscilací v blízkosti této hranice. Při tom je na počátku expanze zplodin výbuchu tato mez zřetelná, ale s postupem času se ztrácí v turbulentním toku.

Rázová vlna se oddělí od zplodin detonace ve vzdálenosti asi $\sim 8R_0$ / R_0 je poloměr náložky/. Při explozi vzniká druhotná rázová vlna, která v interakci s prvotní rázovou vlnou

vede ke vzniku dalších rázových vln a kontaktních povrchů.

Na obr. 5.19 jsou uvedeny výsledky pokusů /body/ a výpočtů /křivky/ rozložení rychlosti ^{toku} plynu pro 4 polohy čela rázové vlny.¹⁷²



Obr. 5.19 Rozložení rychlosti toku plynu za sférickou rázovou vlnou $v = v_2 (\rho_1 / \rho_2)^{1/2}$
 (1) - $R/R_0 = 14$, (2) - $R/R_0 = 18$, (3) - $R/R_0 = 24$,
 (4) - $R/R_0 = 26$.¹⁷²

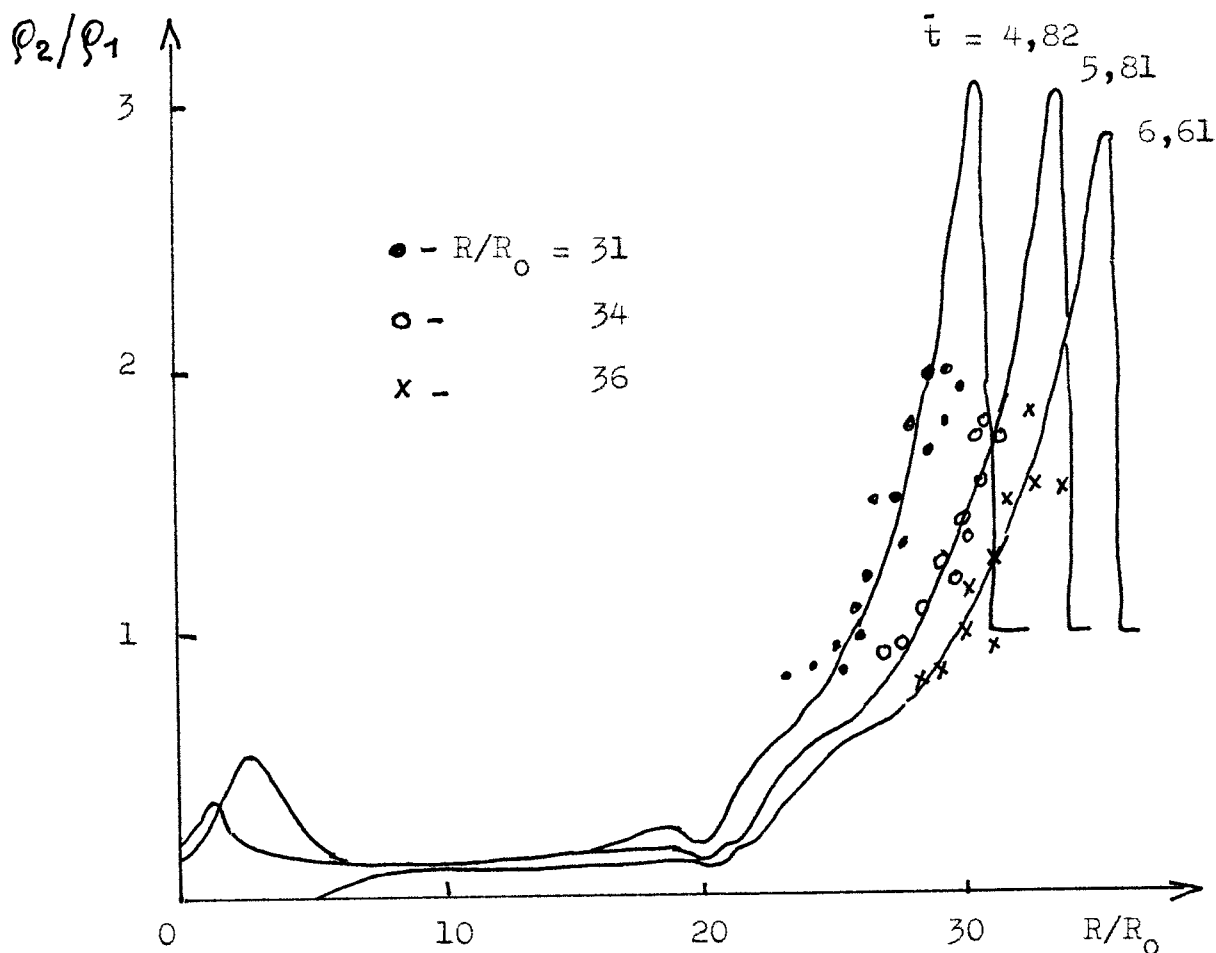
Jak je známé, rychlost toku plynu v_2 za čelem rázové vlny souvisí s rychlostí rázové vlny U vztahem

$$v_2 = 2U \left[1 - (c_1/U)^2 \right] / (\gamma + 1), \quad /5.73/$$

kde c_1 je rychlost zvuku plynu v klidu. Rychlost toku plynu se v oblasti mezi hranicí zplodin a rázovou vlnou zvětšuje lineárně. Na pole toku má vliv tvar nálože, zejména v blízkosti nálože. Ve větší vzdálenosti se tento rozdíl stírá a rozho-

duje pouze hmotnost nálože.

Na obr. 5.20 jsou uvedeny pokusné a vypočítané hodnoty hustoty plynu za čelem rázové vlny pro tři časy. Je zřejmé, že hustota plynu silně klesá od čela rázové vlny k centru výbuchu a stává se menší, než ve stavu klidu. Velká část hmoty plynu se soustřeďuje v poměrně tenké vrstvě bezprostředně za čelem rázové vlny.



Obr. 5.20 Rozložení hustoty za výbuchovou rázovou vlnou
/ body- pokusné hodnoty, souvislá křivka-výpočet/

Na základě zjednodušujícího předpokladu, že veškerá hmota plynu ohraničená výbuchovou vlnou je soustředěna v tenké vrstvě u povrchu čela Černyj předložil jednoduchou přibližnou metodu k popisu silného výbuchu. Hustota plynu ve vrstvě se předpokládá konstantní a rovná hustotě na čele rázové vlny $\rho_2 = \rho_1(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$. Tloušťka vrstvy $4r$ nalezneme z podmínky zachování hmoty

$$4\pi R^2 \Delta r \rho_2 = 4\pi R^3 \rho_1 / 3,$$

$$\Delta r = R \rho_1 / 3 \rho_2 = R(\gamma - 1) / 3(\gamma + 1).$$

Rychlost plynu ve vrstvě se předpokládá, že je rovna rychlosti plynu na čele vlny v_2 . Tlak na vnitřní straně vrstvy p_v představuje jistý zlomek α tlaku na čele vlny $p_v = \alpha p_2$. Druhý Newtonův zákon pro hmotu plynu M ohraničeného rázovou vlnou můžeme zapsat ve tvaru

$$d/dt (mv_2) = 4\pi R^2 p_v = 4\pi R^2 \alpha p_2.$$

Použijeme-li limitní výrazy pro silnou rázovou vlnu

$$p_2 = 2 \rho_1 U^2 / (\gamma + 1), \quad v_2 = 2U / (\gamma + 1), \quad /5.74/$$

které vyjádříme pomocí rychlosti čela $U = dR/dt$, dostaneme

$$d/dt (UR^3/3) = \alpha U^2 R^2$$

a po integraci máme

$$U = a R^3 (1 - \alpha), \quad /5.75/$$

kde a je integrační konstanta. Ze zákona zachování energie získáme

$$E = 4\pi/3 \cdot \rho_1 a^2 \left[2\alpha/(\gamma^2 - 1) + 2/(\gamma + 1)^2 \right] R^3 - 6(1 - \alpha) \quad /5.76/$$

Protože je energie výbuchu veličina konstantní, je také mocninitel nulový u proměnné veličiny R . To znamená, že $\alpha = 1/2$

a konstanta

$$a = \left[\frac{3}{4} \pi (\gamma - 1) (\gamma + 1)^2 / (3\gamma - 1) \right]^{1/2} (E/\rho_1)^{1/2} \quad /5.76/$$

Z rovnice /5.76/ a vzorců /5.74/ obdržíme známé zákonitosti z teorie bodového výbuchu

$$U \sim R^{-3/2}, \quad p_2 \sim R^{-3}, \quad v_2 \sim R^{-3/2}, \quad R \sim t^{2/5}.$$

S pomocí vztahu /5.75/ nalezneme koeficient proporcionálnosti zákona $R \sim t^{2/5}$:

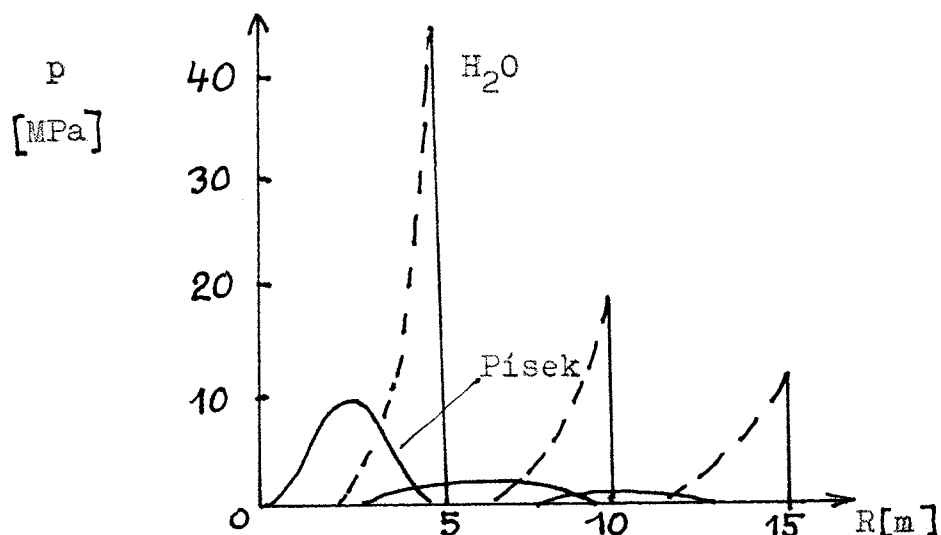
$$R = (5a/2)^{2/5} t^{2/5} = \left[\frac{75}{16} \pi (\gamma - 1) (\gamma + 1)^2 / (3\gamma - 1) \right]^{1/5} \cdot (E/\rho_1)^{1/5} t^{2/5} = \beta_0 (E/\rho_1)^{1/5} t^{2/5}.$$

Souhlas tohoto přibližného řešení s přesným je dobrý. Takový přibližný postup byl využit při řešení ulohy o silném výbuchu v nehomogenní atmosféře. Na tomto příkladu vidíme, že k popisu reálného výbuchu nálože kondenzované trhaviny s přihlédnutím k nestacionárním jevům je možné úspěšně používat přibližné metody, pokud mají reálný fyzikální základ.

Šíření zplodin detonace ve vodě bude mnohem pomalejší, než ve vzduchu, neboť odpor vody ke stlačení je mnohem větší, než u vzduchu. Pole toku za výbušnou vlnou ve vodě se rovněž podstatně odlišuje od vlny ve vzduchu, neboť malá stlačitelnost vody způsobuje pouze nevelký růst entropie. Proto se energie podvodního výbuchu bude spotřebovávat šířením vlny a nikoliv na ohřívání prostředí a růst jeho teploty. Rozložení parametrů za čelem rázové vlny je rovněž rozdílné od vzdušné rázové vlny. Ve vodě za čelem vlny vznikají velmi velké gradienty tlaku, hustoty a rychlosti. Nehledě na velké počáteční tlaky za čelem rázové vlny, řádově 15 - 20 GPa ve srovnání se vzduchem 0,1 kPa, působení výbuchu trhavinové nálože se proje-

vuje do vzdáleností určených mezí šíření zplodin detonace, kdežto tlak ve vodě rychle klesá a již ve vzdálenosti $10R_0$ od epicentra kulové nálože představuje $1/100$ hodnoty počátečního tlaku, což dává jistou šanci osádkám ponorek zasypávaných hlubinnými náložemi. Rychlost šíření rázové vlny také rychle klesá na rychlost zvuku.

Šíření zplodin výbuchu ve vodě vede ke vzniku plynové bubliny, která uskutečňuje řadu pulsací vůči střednímu průměru .



Obr. 5.21 Profily tlaků ve vodě a písku za čelem rázové vlny při výbuchu trhavinové nálože 100 kg TNT ¹⁷⁵

Ve fázi stlačení se uvnitř bubliny šíří kompresní vlny, které způsobí vznik konvergentní sférické vlny, která se odráží v centru a přechází v rázovou vlnu pohybující se od centra. Při každém stlačení se vytváří nová vlna a podvodní výbuchy se vyznačují velkým počtem takto vzniklých rázových vln. Výbuchová bublina ovšem nemá tvar kulový, ale je podobný ledvině a pohybuje se s pulsacemi k hladině.

Při jaderných podvodních výbuších uvolnění energie pro-

bíhá tak rychle, že je možné fázi jaderné detonace zanedbat. Bublina v tomto případě obsahuje páru a disociovanou vodu a radioaktivní zplodiny. Bublina je ohraničená povrchem fázového přechodu a nikoliv povrchem rozhraní voda-plyn.

K analýze podvodních výbuchů se rovněž s úspěchem používá teorie podobnosti a úlohy o bodovém výbuchu ve vodě, ale musí se použít stavová rovnice platná pro vodu /nejjednodušší je Taitova rovnice ve tvaru $p_2/p_1 = B[(p_2/\rho_1)^n - 1]$, kde $n \approx 7$ /.

Podrobnosti je možné nalézt ve starší monografii Coleho,¹⁷⁶ přehledu Snaye¹⁷⁷ a Holta.¹⁷⁴ Nehledě na to, že maximální tlak je v první kompresní vlně mnohem menší, než v základní rázové vlně, jejich impulsy jsou srovnatelné a proto je nutné působení toku kapaliny a vliv pulsací na překážku zahrnout do celkového účinku.

Při výbuchu nálože v zemině v hloubce, daleko od volného povrchu, působení výbuchu je rovněž určeno expanzí zplodin do vymezeného objemu. Rázová vlna v zemině je svými vlastnostmi podobná rázové vlně ve vodě. Působení výbuchu v neohraničeném kovovém prostředí se projevuje v objemech, určených hodnotou tlaku zplodin detonace, které způsobují podstatné plastické deformace v kovu. Na obr. 5.21 jsou uvedeny profily tlaku ve vodě a písku při výbuchu 100 kg nálože TNT v různých vzdálenostech od centra výbuchu. V těchto mezích tlaků se v zemině šíří kompresní vlny.¹⁷⁵

Příklad 5.7.2

Znáte-li parametry pro vzdušnou rázovou vlnu ve velkých vzdálenostech od místa výbuchu^{179,5} napište bezprostředně vztahy pro parametry rázové vlny ve vodě ve velké vzdálenosti od místa výbuchu.

Řešení:

Pro sferickou vzdušnou rázovou vlnu ve velkých vzdálenostech od místa výbuchu platí asymptotické vztahy, které prvně odvodil Landau¹⁷⁹. Pro sférickou rázovou vlnu v kapalině ve velkých vzdálenostech od místa výbuchu platí stejná asymptotika, avšak rozdílné stavové rovnice.

VZDUCH

KAPALINA

Položíme $p = p_1 + \Delta p$ a dostaneme pro malé hodnoty $\Delta p/p_1$ s použitím rovnice adiabaty se závislostí změny Δp na hustotě $\Delta p = p_1 (\rho/\rho_1)^\gamma - 1$. Tato závislost je stejná jako stavová rovnice platná pro vodu ve tvaru $p = B (\rho/\rho_1)^n - 1$. Ve vztazích stačí zaměnit pouze p_1 na B , γ na n a Δp na p :

$$c_1 = \sqrt{\gamma p_1 / \rho_1},$$

$$c_1 = \sqrt{Bn / \rho_1},$$

$$v = c_1 \Delta p / \gamma p_1,$$

$$v = c_1 (p - p_1) / Bn,$$

$$R/R_0 = \frac{C \left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{\Delta p}{p_1} \ln \frac{\Delta p_1}{\Delta p} \right)}{\Delta p \sqrt{\ln \frac{\Delta p_1}{\Delta p} - 1/2}}, \quad R/R_0 = \frac{C \left(1 + \frac{(n+1)p}{2n} \ln \frac{p_1}{p} \right)}{p \sqrt{\ln \frac{p_1}{p} - 1/2}},$$

kde C je konstanta trhaviny a $R_0 = \text{konst} \sqrt[3]{G}$, kde G je hmotnost nálože.

5.8 GENERÁTORY DETONAČNÍCH VLN

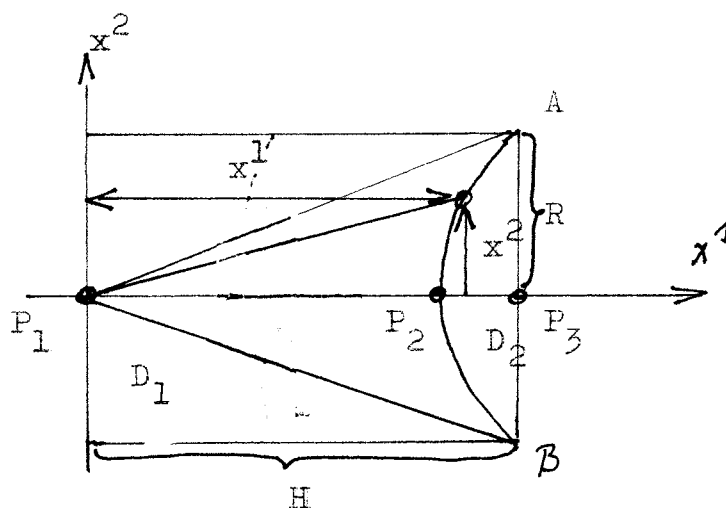
Pro teorii generátorů detonačních /rázových/ vln je důležitý Fermatův princip známý z optiky: v isotropním prostředí se detonační vlna šíří z bodu $P_1(x_1^1, x_1^2)$ do bodu $P_2(x_2^1, x_2^2)$ po dráze ds za čas T , který je dán integrálem

$$T = \int ds / V(x^1, x^2) = \text{minimum},$$

kde V je rychlost.

V praxi se často používají generátory rovinného detonačního čela, generátory kulových a válcových detonačních vln jsou vyhrazeny k výzkumu hmoty za vysokých tlaků a k výrobě určitých typů jaderných náloží.

Na obr. 5.22 je uvedeno schema generátoru detonační vlny, využívající trhaviny s rozdílnou detonační rychlostí, přičemž $D_1 > D_2$. Iniclace je v bodě P_1 .



Obr. 5.22 Schema generátoru detonační vlny

$$D_1 > D_2$$

Čelo detonační vlny musí dospět k povrchu AP_2B současně, t, j , musí být splněna podmínka⁷

$$\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} / D_1 + (H - x^1) / D_2 = \sqrt{(H^2 + R^2)} / D_1 = \text{konst},$$

což je tvar křivky AP_2B a /5.81/

$$T_{\min} = x_2^1 / D_1 + (H - x_2^1) / D_2$$

Rovnici /5.81/ je možné zapsat ve tvaru křivky 2. stupně /kvadriky/

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{13}x^1 + a_{33} = 0,$$

kde

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 - D_1^2 / D_2^2, & a_{22} &= 1, \\ a_{13} &= a_{31} = H D_1^2 / D_2^2 - D_1 \sqrt{(H^2 + R^2)} / D_2, \\ a_{33} &= - [H D_1 / D_2 - \sqrt{(H^2 + R^2)}]^2. \end{aligned}$$

Při $D_1 > D_2$ je $a_{11} < 0$ a křivka AP_2B je hyperbola v P_2

$$x_2^1 = D_1 / D_2 - \sqrt{(1 + R^2 / H^2)} H / (D_1 / D_2 - 1).$$

V případě $D_1 / D_2 = \sqrt{(1 + R^2 / H^2)}$ je $a_{11} = -R^2 / H^2$, $a_{22} = 1$, $a_{13} = a_{33} = 0$ a /5.81/ se redukuje na

$$(x^2) = \pm R x^1 / H$$

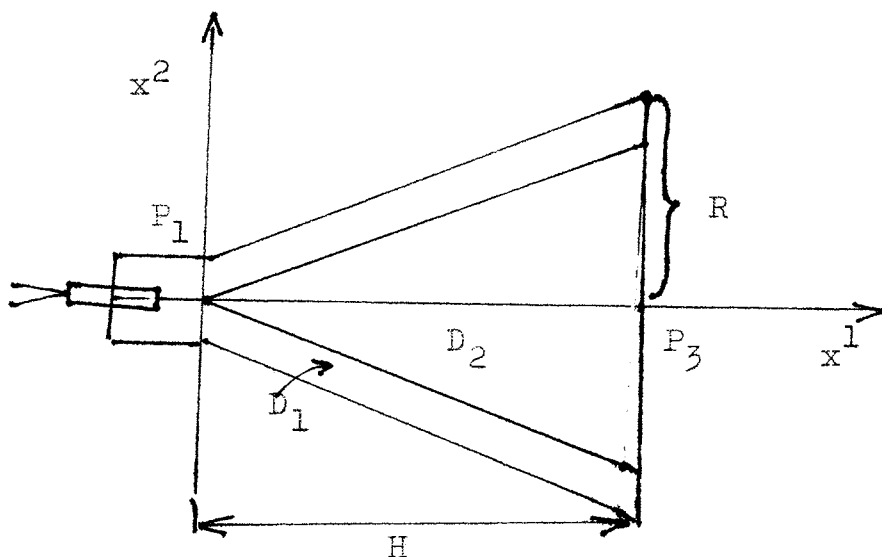
a v tomto případě jde o generátor rovinného detonačního čela /viz. obr. 5.23/.

Známe-li poměr detonačních rychlostí trhavin D_2 / D_1 můžeme určit geometrické parametry generátoru

$$R/H = \sqrt{(D_1^2 / D_2^2 - 1)}. \quad /5.82/$$

Pro RDX/TNT $D_1 = 7,6$ km/s a Baratol $Ba(NO_3)_2$ / TNT 76/24

$D_2 = 4,87$ km/s je tento poměr 1,2.



Obr. 5.23 Generátor rovinného detonačního čela

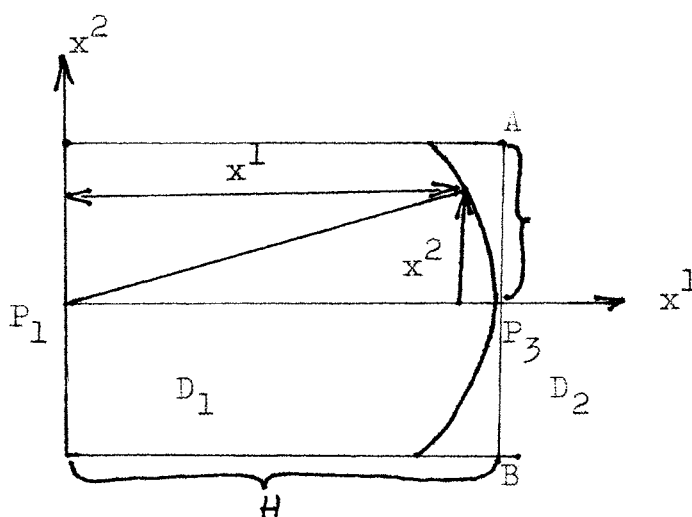
Je-li $D_1 < D_2$, pak

$$\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} / D_1 + (H - x^1) / D_2 = H / D_2 = \text{konst} \quad /5.83/$$

t.j.

$$(x^2)^2 / D_1^2 + (1 / D_1^2 - 1 / D_2^2)(x^1)^2 = 0$$

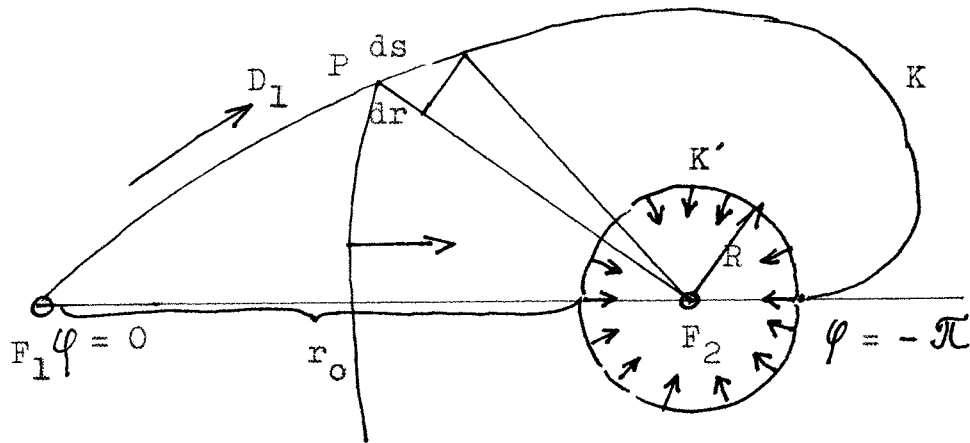
Křivkou styku je elipsa a jde o povrch rotačního elipsoidu.



Obr. 5.24 Schema generátoru detonační vlny

$$D_1 < D_2$$

Implozi lze provést s pomocí geometrie, kterou představuje povrch rotační logaritmické spirály podle obr. 5.25



Obr. 5.25 Schema implozního generátoru konvergentní detonální vlny⁷

Doba, která uplyne, přemístí-li se čelo detonální vlny z bodu iniciace F_1 do bodu P při zadané poloze ohniska F_2 je dána vztahem

$$T = 1/D_1 \int_{-\pi}^0 \sqrt{r^2 + dr/d\varphi} d\varphi + r/D_2 = r_0/D_2 = \text{konst},$$

z čehož /5.84/

$$dT/d\varphi = \sqrt{r + dr/d\varphi}^2 = D_1 dr/D_2 d\varphi = 0 \quad \text{a}$$

$$dr/r = d\varphi / \sqrt{(D_1/D_2)^2 - 1},$$

což po integraci dává

$$R = r_0 \exp \left[\varphi / \sqrt{(D_1/D_2)^2 - 1} \right].$$

Pro $D_1/D_2 \rightarrow \infty$ je $R/r_0 \rightarrow 1$ a pro $D_1/D_2 \rightarrow 1$ je $R/r_0 \rightarrow 0$.

Pro reálná systém například s poměrem $D_1/D_2 = 1,5$ bude poměr $R/r_0 = 1/16$ a poměr ohraničený křivkou K a K' bude

$$\begin{aligned} \pi R^2 / 2 \cdot 1/2 \int_{-\pi}^0 r^2 d\varphi &= \pi R^2 / \int_{-\pi}^0 r_0 \exp \left[2\varphi / \sqrt{(D_1/D_2)^2 - 1} d\varphi \right] = \\ &= \pi R / r_0^2 \sqrt{[(D_1/D_2)^2 - 1]} \cdot [1 - R/r_0] / 2, \end{aligned}$$

což pro numerickou hodnotu bude 0,016.

Podobně lze určit poměr objemů mezi objemem koule $\frac{4}{3}\pi R^3$ a objemem vzniklým rotací logaritmické spirály. Tento způsob provádění implozí se zdá být poněkud rozmarný.

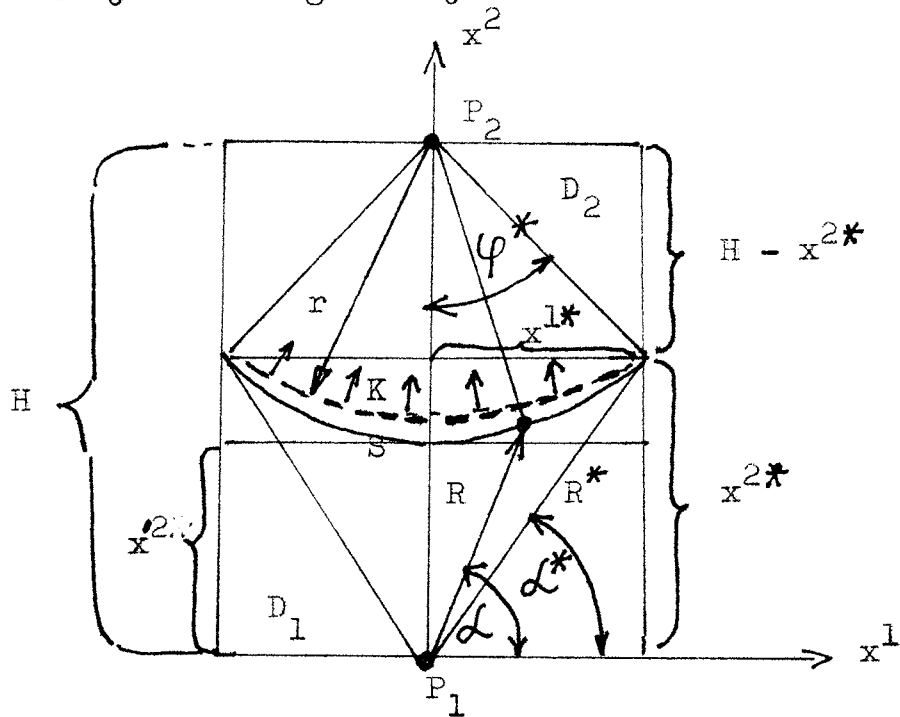
K demonstraci jevu pro výukové účely je možné provádět s bleskovicí, nebo malogramáží bleskovicí a tlakovým snímačem^m umístěným do ohniska F_2 zjišťovat zvýšené pole tlaku.

Příklad 5.8.1

Navrhněte použitelný generátor konvergentní sférické detonační vlny, který je tvořený ze 6 segmentů s trhavinami, jejichž detonační rychlosti jsou $D_1 > D_2$.

Řešení:

Geometrie jednoho segmentu je znázorněna na obr. 1



Obr. 1 Schema jednoho segmentu generátoru konvergentní kulové detonační vlny

Podmínka , aby čelo detonační vlny šířící se z bodu iniciace P_1 dosáhlo povrchu S současně je analogicky předchozímu v výkladu

$$\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} / D_1 + \sqrt{(x^1)^2 + (H - (x^2))^2} / D_2 = \dot{x}^2 / D_1 + (H - \dot{x}^2) / D_2 , \quad / 1 /$$

nebo v bezrozměrném tvaru

$$\sqrt{a^2 + b^2} + d\sqrt{a^2 + (1 - b)^2} = (1 - d)b' + d, \quad / 2 /$$

kde $a = (x^1)/H$, $b = (x^2)/H$, $b' = (\dot{x}^2)/H$, $d = D_1/D_2$.

Zavedeme-li polární souřadnice a položíme

$$a = \rho \cos \alpha, \quad b = \rho \sin \alpha, \\ \rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \rho = R/H, \quad / 3 /$$

pak / 1 / nabude tvaru

$$\rho + d\sqrt{\rho^2 + 1 - 2\rho \sin \alpha} = c, \quad / 4 /$$

kde $c = (1 - d)b' + d$.

Výraz / 4 / přepíšeme na tvar

$$(d^2 - 1)\rho^2 + 2(\rho - d^2 \sin \alpha)\rho + d^2 - c^2 = 0 \quad / 5 /$$

s diskriminantem $\mathcal{D} = 4d^2(d^2 \sin^2 \alpha - 2c \sin \alpha + c^2 - d^2 + 1)$,

který je nezáporný, jestliže

$$d^2 \sin^2 \alpha - 2c \sin \alpha + c^2 - d^2 + 1 \geq 0,$$

a z toho vyplývají nerovnosti

$$\sin \alpha \geq \sin \alpha_1,$$

$$\sin \alpha \leq \sin \alpha_2, \quad / 6 /$$

$$\begin{aligned} \text{kde } \sin \alpha_1 &= [c + \sqrt{(d^2 - 1)(d^2 - c^2)}] / d^2, & / 7 / \\ \sin \alpha_2 &= [c - \sqrt{(d^2 - 1)(d^2 - c^2)}] / d^2, & / 7' / \end{aligned}$$

Z nerovnosti $\sin \alpha_1 \leq 1$ vyplývá, že výraz / 7 / má smysl pouze pro $d > 1$ a rovnost / 7' / platí pro $d > \sqrt{2}$ a

$$b \leq d - \sqrt{d^2 - 1} / (d - 1).$$

Nerovnost $\sin \alpha \leq \sin \alpha_2$ neodpovídá geometrii podle obr. 1, a proto ji nebudeme uvažovat.

Pro $\sin \alpha^*$ máme vzorec, který určuje rozměry kulového vrchlíku

$$\sin \alpha^* = [c + \sqrt{(d^2 - 1)(d^2 - c^2)}] / d^2, \quad d > 1, \quad / 8 /$$

kde α^* je mezní úhel v geometrii segmentu a je funkcí poměru $d = D_1/D_2$ a parametru b .

Z rovnice / 5 / a faktu, že pro $\alpha = \pi/2$ musí platit

$\rho = b$, nalezneme

$$\rho = [d^2 \sin \alpha - c - d \sqrt{d^2 \sin^2 \alpha - 2c \sin \alpha + c^2 + d^2 + 1}] / (d^2 - 1). \quad / 9 /$$

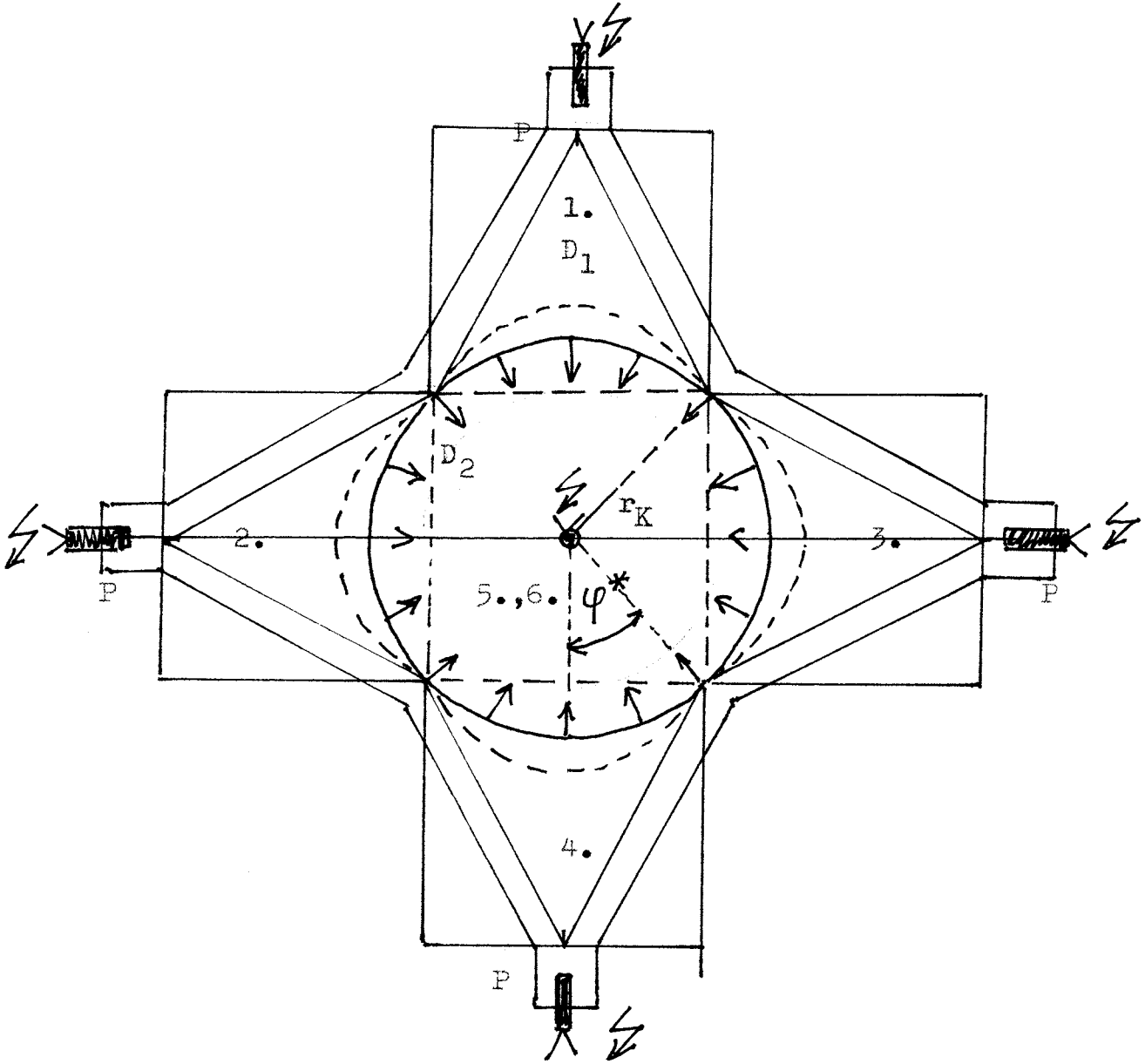
platí pro $d > 1$, $\alpha^* \leq \alpha \leq \pi - \alpha^*$.

Limitní souřadnic pro kulový/válcový/ sektor vypočítáme pomocí vzorců

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \arcsin [c + \sqrt{(d^2 - 1)(d^2 - c^2)}] / d^2, \\ \rho^* &= (d^2 \sin \alpha^* - c) / (d^2 - 1) = \sqrt{(d^2 - c^2) / (d^2 - 1)}, \quad / 10 / \\ a &= \rho^* \cos \alpha^*, \quad b = \rho^* \sin \alpha^*. \end{aligned}$$

Realizovatelný generátor kulové konvergentní detonační vlny je uveden na následujícím obr. 2 a je tvořen 6 segmenty, jejíž vrcholové body P musí být odpáleny pomocí 6 speciálních detonátorů synchronizovaných, nebo může být použito obvodových

mikrobleskovic, odpálených například ze středu systému.

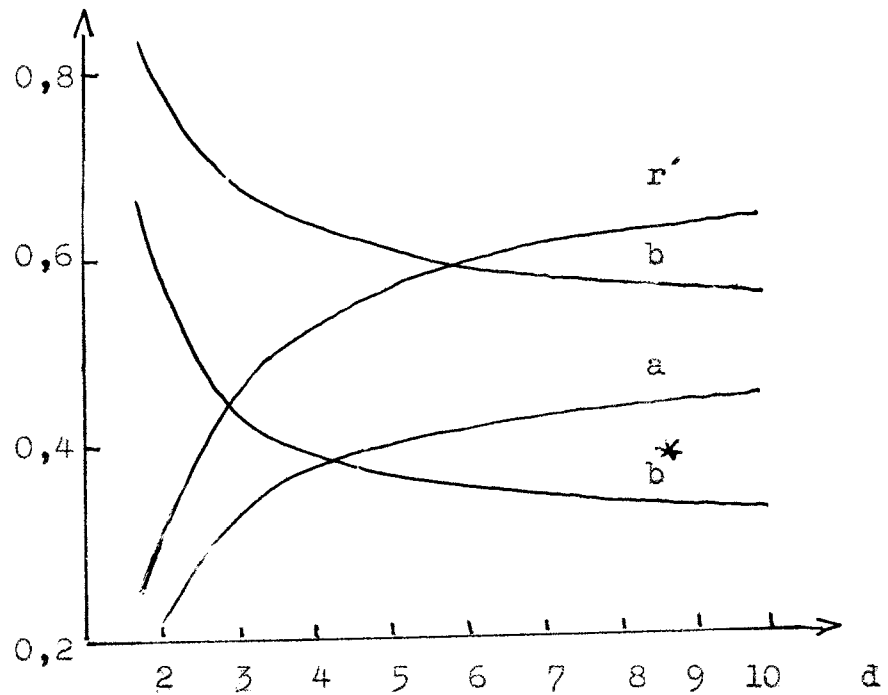


Obr. 2 Generátor kulové konvergentní detonační vlny. ($\varphi^* = \pi/4$)

Maximální bezrozměrný poloměr kulové detonační vlny je

$$r' = \sqrt{2} a, \quad r' = r_K / H.$$

Na obr. 3 jsou uvedeny parametry r' , a , b , b^* jako funkce d . Je vidět, že maximální poloměr kulové konvergentní vlny



Obr.3 Závislost parametrů r' , a , b , b^* jako funkce d

roste s růstem poměru $d = D_1/D_2$, přičemž největší přírůstek nastává při $d < 6$. $b^* = (c - 2,83)/(d - 1)$

$$\varrho = (d^2 \sin \alpha - c - d \sqrt{d^2 \sin^2 \alpha - 2c \sin \alpha + c^2 - d^2 + 1}) / (d^2 - 1),$$

Pro $d \geq \sqrt{3}$, $\sin \alpha^* \leq \sin \alpha \leq 1$, a

$$\alpha^* = \arcsin(1 + \sqrt{2\varrho^{*2} - 1})/2, \quad \alpha^* = \arccos \sqrt{1 - \sin^2 \alpha^*},$$

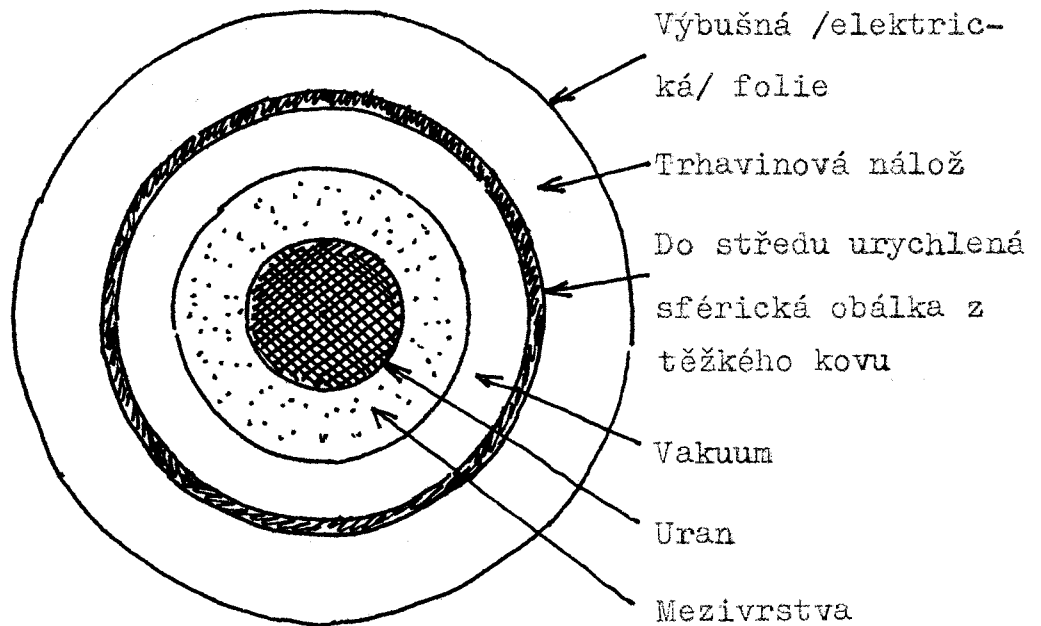
$$\varrho^* = \sqrt{(d^2 - c^2)/(d^2 - 1)}, \quad a = \varrho^* \cos \alpha^*, \quad b = \varrho^* \sin \alpha^*,$$

$$\varphi^* = a/(1 - b) = \varrho^* \sqrt{1 - \sin^2 \alpha^*} / (1 - \varrho^* \sin \alpha^*).$$

Příklad 5.8.2

Formulujte fyzikální model hyperkomprese jaderných výbušnin U-235, resp. Pu-239 s cílem snížit kritickou hmotnost systému. Implozi popište podle uvedeného obrázku, stanovte počáteční podmínky řešení a uvěďte vstupní data pro U-235. Napište numerické schema řešení metodou konečných diferencí a umělé vizkozity, která vstupuje do diferenciálních rovnic formou dodatkového tlaku . K řešení použijte knihu³⁴

Řešení:



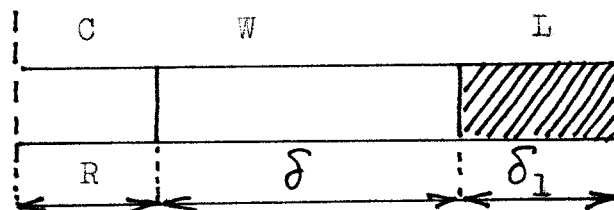
Obr. 1 Implozní systém umožňující hyperkompresi jaderných výbušnin

Systém na výše uvedeném obr. je nárazový, kdy je výbušninou těžká sférická obálka urychlena detonací trhaviny.

Tato úloha je lehce řešitelná v případě jednorozměrného pohybu kontinua s válcovou nebo kulovou symetrií, slo-

cho

žen ze tří vrstev s rozdílnými počátečními parametry:



Obr.2 Počáteční parametry úlohy

R je poloměr koule jaderné výbušniny

δ je tloušťka mezivrstvy

δ_1 je tloušťka urychlované obálky

K popisu úlohy použijeme obecné rovnice hydrodynamiky v Eulerově, nebo Lagrangeově formě spolu se stavovou rovnicí:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \quad / 1 /$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \text{grad}) v = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

$$de/dt + p d(1/\rho)/dt = 0$$

$$p = f(e, \rho).$$

V Lagrangeových souřadnicích mají tyto rovnice pro jedno-rozměrný případ tvar:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_1} \cdot x^{\nu-1} / a^{\nu-1} \cdot \frac{\partial p}{\partial a}, \quad / 2 /$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v,$$

$$\rho = \rho_1 \cdot a^{\nu-1} / x^{\nu-1} \cdot \frac{\partial x}{\partial a},$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - p \frac{\partial(1/\rho)}{\partial t},$$

$$p = f(e, \rho),$$

kde x je Eulerova souřadnice, a je Lagrangeova souřadnice, ρ_1 je počáteční hustota, γ 1,2,3 je index pro rovinnou, válcovou a kulovou geometrii.

Rovnice doplňují mezní a počáteční podmínky

$$p|_{R+\delta} + \delta_1 = p_m = 0, \quad / 3 /$$

$$\rho(a, 0) = \rho_1,$$

$$p(a, 0) = p_1,$$

$$v(a, 0) = v_1,$$

$$x(a, 0) = a$$

odpovídají příslušným vrstvám.

Na rozhraní vrstev jsou slučitelné podmínky pro tlaky a posuny vyjádřeny ve tvaru

$$x|_{R^+} = x|_{R^-}, \quad p|_{R^+} = p|_{R^-}. \quad / 4 /$$

Stavovou rovnici $p = f(e, \rho)$ vezmem pro jednoduchost pro ideální plyn

$$p = (\gamma - 1) e, \quad / 5 /$$

kde γ je adiabatický exponent, a odchylky od tohoto zákona jsou eliminovány volbou počátečního tlaku.

Numerické řešení je založeno na metodě konečných diferencí. Podmínky na čele rázové vlny byly přizpůsobeny řešení zavedením umělé viskozity, která vstupuje do rovnic ve tvaru dodatkového tlaku

$$p' = c' L^2 \rho \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2, \text{ jestliže } \frac{\partial v}{\partial x} < 0, \quad / 6 /$$

$$p' = 0, \quad \text{jestliže } \frac{\partial v}{\partial x} \geq 0,$$

kde c' je bezrozměrná konstanta, L je rozměr v /cm/, $L = \Delta a$.

Jako mezivrstvu uvažujeme ⁶LiD. Počáteční podmínky jsou:

$$\rho(a,0) = 18,6 \text{ g/cm}^3,$$

$$p(a,0) = 30 \text{ GPa} = 3 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2,$$

$$v(a,0) = v_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ cm/s},$$

pro $R + \delta < a \leq R + \delta + \delta_1$ a $\gamma = 4$,

$$\rho(a,0) = 0,891 \text{ g/cm}^3,$$

$$p(a,0) = 8 \cdot 10^{10} \text{ dyn/cm}^2,$$

$$v(a,0) = 0,$$

pro $R < a \leq R + \delta$ a $\gamma = 3$,

$$\rho(a,0) = 18,6 \text{ g/cm}^3,$$

$$p(a,0) = 3 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2,$$

$$v(a,0) = 0,$$

pro $0 \leq a < R$, a $\gamma = 4$.

Tloušťka urychlované obálky $\delta_1 = 0,5 \text{ cm}$,

Tloušťka mezivrstvy $\delta = 0,9 \text{ cm}$,

Poloměr uranu $R = 1,0 \text{ cm}$,

Pokud se vám podařilo stanovit diferenční schemata a správný algoritmus, včetně programu na PC, což představuje asi 1 rok práce dospě-li jste k výsledkům, že je možné stlačit jaderné výbušniny U^{235} a Pu^{239} 2 krát? To by ovšem znamenalo redukcí kritické hmotnosti dokonce o jeden řád. Nárazový systém imploze podle uvedeného obrázku umožňuje stlačit těžký kov o min. 50 % větším efektem, než při klasickém způsobu trhavinou.

Rychlost implodující sférické obálky můžeme vypočítat v rámci Gurneovy koncepce urychlování, kdy použijeme vztah publikovaný E. Hirschem:¹⁸¹

$$v_1 = \sqrt{2E} / \left[A \left\{ \left(\frac{M}{C} + \frac{\beta^2 + 3\beta + 6}{10\beta^2 + \beta + 1} \right) / A + A \left(\frac{N}{C} + \frac{6\beta^2 + 3\beta + 1}{10\beta^2 + \beta + 1} \right) - \frac{3\beta^2 + 4\beta + 3}{10\beta^2 + \beta + 1} \right\} \right]^{1/2}$$

$$\text{kde } A = v_0/v_1 = \left[\frac{M}{C} + a \left(\frac{M}{C} \right) (\beta^2 - 1) + \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{4(\beta^2 + \beta + 1)} \right] : \left[\frac{N}{C} + \frac{3\beta^2 + 2\beta + 1}{4(\beta^2 + \beta + 1)} \right], \quad / 7 /$$

a $\beta = R_0/R_1$, $a \approx 1$, Gurneyova rychlost $(2E)^{1/2} \approx 3 \text{ km/s}$ např. pro trhavinu LX - 14.

Pro obě obálky srovnatelné s hmotností nálože C je $A = \beta^2 M/N$. V případě $N = 0$ a $a = 1$ je $A = [\beta M + (\beta + 2) / (\beta + 1) / 3 \cdot C] / [N + (2\beta + 1) / (\beta + 1) / 3 \cdot C]$.

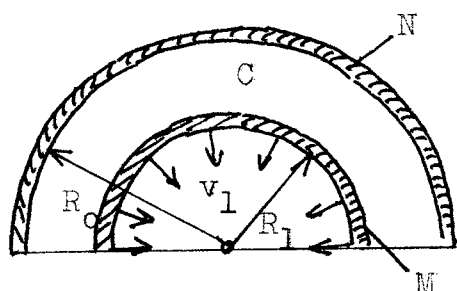
N je hmotnost obálky vnější

M je hmotnost vnitřní obálky

C je hmotnost trhavinové nálože

R_1 je poloměr vnitřní obálky

R_0 je poloměr vnější obálky



Obr. 3

Příklad 5.8.3



Proveďte odhad komprese U-235 v implozní geometrii z příkladu 5.8.2 a na rozdíl numerického schématu řešení použijte analytické výrazy z teorie silných detonačních a rázových vln.

Řešení:

Maximální stlačení deuteridu lithného je

$$\alpha_{\text{LiD}}^6 = \rho_{2,\text{LiD}} / \rho_{1,\text{LiD}} = (\gamma_{\text{LiD}} + 1) / (\gamma_{\text{LiD}} - 1) = \\ = (3 + 1) / (3 - 1) = 2.$$

Stlačení U^{235} bude

$$\alpha_U = \rho_{2,U} / \rho_{1,U} = (\gamma_U + 1) / (\gamma_U - 1) = (4 + 1) / (4 - 1) = \\ = 1,67.$$

Jestliže rychlost obálky z uranu U^{238} o hmotnost M , bude v_1 /viz Gurneyovo schéma urychlování/ a rychlost rázové vlny v LiD bude $U_{2,\text{LiD}}$ pak

$$U_{2,\text{LiD}} = (\gamma_{\text{LiD}} + 1)v_1/2 = (3 + 1)v_1/2 = 2v_1, \text{ a tlak} \\ p_{2,\text{LiD}} = 2\rho_{1,\text{LiD}} U_{2,\text{LiD}}^2 / (\gamma_{\text{LiD}} + 1) = \rho_{1,\text{LiD}} v_1^2 (\gamma_{\text{LiD}} + 1)/2 \\ = (3 + 1)\rho_{1,\text{LiD}} v_1^2 / 2 = 2\rho_{1,\text{LiD}} v_1^2.$$

Pro odraženou vlnu U_2 odr. obdržíme parametry

$$\rho_{2,\text{LiD}} = \rho_{1,\text{LiD}} \cdot \gamma_{\text{LiD}} / (\gamma_{\text{LiD}} - 1) = \rho_{1,\text{LiD}} \cdot 3 / (3 - 1) = \\ = 3/2 \rho_{1,\text{LiD}}.$$

$$p_{2,\text{LiD}} = (3\gamma_{\text{LiD}} - 1)p_{1,\text{LiD}} / (\gamma_{\text{LiD}} - 1) = (3 \cdot 3 - 1)p_{1,\text{LiD}} / \\ / (3 - 1) = 4 p_{1,\text{LiD}}.$$

Dále se rázová vlna šíří směrem k uranu U^{235}

$$p_{2,\text{LiD}} = p_{1,\text{LiD}} \rho_{2,\text{LiD}} / \rho_{1,\text{LiD}} = 3/2 p_{1,\text{LiD}}$$

a postupně odražená vlna

$$p_{3,\text{LiD}} \approx 4 p_{2,\text{LiD}} = 4 \cdot 3/2 p_{1,\text{LiD}} = 6 p_{1,\text{LiD}}.$$

Dvě vlny $U_{1,U}$ a $U_{2,U}$ se šíří uranem U^{235} s rychlostmi

$$U_{1,U} = \sqrt{\rho_{1,U} (\gamma_U + 1) / \rho_{1,U} \cdot 2} = \sqrt{\rho_{1,\text{LiD}} (\gamma_U + 1) / 2 \rho_{1,U}} =$$

$$= \sqrt{p_{1, \text{LiD}} \cdot 4 \cdot (\gamma_U + 1) / \rho_{1, \text{U}} \cdot 2} = \sqrt{2(\gamma_U + 1) p_{1, \text{LiD}} / \rho_{1, \text{U}}}$$

$$U_{2, \text{U}} = 2U_{1, \text{U}}(\gamma_U + 1) + \sqrt{p_{3, \text{LiD}}(\gamma_U + 1) / \rho_{\text{U}} \alpha_{1, \text{U}} \cdot 2},$$

kde $\alpha_U \doteq 1,67$ a stlačení na čele druhé rázové vlny $U_{2, \text{U}}$

bude

$$\begin{aligned} \alpha_{2, \text{U}} &= [(\gamma_U + 1) p_{3, \text{LiD}} + (\gamma_U - 1) p_{1, \text{LiD}}] / [(\gamma_U - 1) p_{3, \text{LiD}} + \\ &+ (\gamma_U + 1) p_{1, \text{LiD}}] = (5.6 + 3.4) / (6.6 + 5.4) = 42/38 = \\ &= 1,1052 \end{aligned}$$

$$p_{2, \text{U}} = p_{2, \text{LiD}} = 4 p_{1, \text{LiD}},$$

$$p_{3, \text{U}} = p_{3, \text{LiD}} = 6 p_{1, \text{LiD}},$$

Celkové stlačení U 235 je

$$\alpha_{c, \text{U}} \doteq \alpha_{1, \text{U}} \cdot \alpha_{2, \text{U}} = 1,67 \cdot 1,105 = 1,845.$$

Odražená vlna z tuhého uranu vyvolá stlačení

$$\alpha_{\text{odr.}} \doteq \alpha_c \cdot \gamma_U / (\gamma_U - 1) = 1,845 \cdot 4 / (4 - 1) = 2,46.$$

Kdybychom snad chtěli vyrobit neutronovou bombu, pak vzhledem k dobrému proreagování termonukleární reakce by bylo účelné umístit pro výkon zhruba ~ 1 kt TNT asi 35 g Li^6D do středu štěpné rozbušky z U^{235} , nebo Pu^{239} .

Aproximativní formule pro stlačení ve sférické konvergentní vlně je¹⁸⁶

$$\alpha_k \doteq \alpha_c^{2,4} = 1,845^{2,4} = 4,349.$$

Odražená vlna ze středu bude stlačovat LiD na hodnotu

$$\alpha_{\text{LiD, odr}} = \alpha_k \cdot \gamma_U / (\gamma_U - 1) = 4,349 \cdot 1,33 = 5,784.$$

Výsledná komprese LiD

$$\alpha_{\text{LiD}} = \alpha_{\text{LiD, odr}} \cdot \rho_{\text{U}} / \rho_{\text{LiD}} = 5,784 \cdot 18,6 / 0,891 = \underline{\underline{121}}.$$

Pozamenejme, že nárazový systém provádění implozí je mnohem efektivnější, než původní ^WNedemeyerův systém používající pouze trhavinu z r. 1943, používaný v prvních konstrukcích jaderné zbraně.* Konstrukčně je nutné eliminovat různé typy nestabilit / Rayleigh-Taylorova, Kelvin-Helmholtzova/ a dodržet vysokou symetrii imploze,¹⁸³ což je v případě nárazového systému obtížnější.

* FAT MAN 6,4 kg Pu
Composition B / Baratol Explosive System

6. PŘÍLOHA

Nechť jsou zadány křivočaré souřadnice u^1, u^2 na povrchu, nebo křivočaré souřadnice a^1, a^2, a^3 v Euklidovém prostoru. Zavedeme pravoúhlý systém souřadnic x^1, x^2, x^3 . Indexy z řeckých písmen nabývají hodnoty 1, 2 a indexy označené latinkou nabývají hodnot 1, 2, 3.

Pišeme

$$dx^i = \partial x^i / \partial u^\alpha \cdot du^\alpha \quad \text{nebo} \quad dx^i = \partial x^i / \partial a^j \cdot da^j.$$

Čtverec vzdálenosti mezi dvěma body na povrchu nebo v prostoru je

$$dl^2 = dx^i dx^i = \partial x^i / \partial u^\alpha \cdot \partial x^i / \partial u^\beta \cdot du^\alpha du^\beta = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta,$$

$$g_{\alpha\beta} = \partial x^i / \partial u^\alpha \cdot \partial x^i / \partial u^\beta,$$

$$dl^2 = dx^i dx^i = \partial x^i / \partial a^j \cdot \partial x^i / \partial a^k \cdot da^j da^k = g_{jk} da^j da^k,$$

$$g_{jk} = \partial x^i / \partial a^j \cdot \partial x^i / \partial a^k.$$

Tenzor $g_{\alpha\beta}$ nebo g_{ij} je metrický tenzor a $g_{\alpha\beta}$ jsou jeho kovariantní složky. Kontravariantní složky metrického tenzoru $g^{\alpha\beta}$ jsou rovny algebraickým doplňkům elementu $g_{\alpha\beta}$ v determinantu $\|g_{\alpha\beta}\|$, děleným determinantem.

Kontravariantní složky metrického tenzoru je možné také zapsat ve tvaru

$$g^{ij} = \partial a^i / \partial x^k \cdot \partial a^j / \partial x^k \quad (1)$$

Při přechodu od souřadnic a^i k jiným souřadnicím \bar{a}^i platí rovnosti

$$\bar{g}_{ij}(\bar{a}^1, \bar{a}^2, \bar{a}^3) = g_{km}(a^1, a^2, a^3) \partial a^k / \partial \bar{a}^i \cdot \partial a^m / \partial \bar{a}^j,$$

$$\bar{g}^{ij}(\bar{a}^1, \bar{a}^2, \bar{a}^3) = g^{km}(a^1, a^2, a^3) \partial \bar{a}^i / \partial a^k \cdot \partial \bar{a}^j / \partial a^m$$

(2)

Rovnost (2) vyplývá ze vztahu transformace tenzoru druhého řádu

$$\bar{A}_{ij} = A_{km} \partial a^k / \partial \bar{a}^i \cdot \partial a^m / \partial \bar{a}^j, \quad A^{ij} = A^{km} \partial \bar{a}^i / \partial a^k \cdot \partial \bar{a}^j / \partial a^m. \quad (2)$$

Chceme-li získat vztahy (1) použijeme tvar metrického tenzoru v pravoúhlém systému

$$g^{ij}(x^1, x^2, x^3) = \delta^{ij}, \quad \text{nebo} \quad g_{ij} g^{jk} = g_i^k = \delta_{ik}.$$

Pak

$$\begin{aligned} g_{ij} g^{jk} &= \partial x^m / \partial a^i \cdot \partial x^m / \partial a^j \cdot \partial a^j / \partial x^s \cdot \partial a^k / \partial x^s = \\ &= \partial x^m / \partial a^i \cdot \partial a^k / \partial x^s \cdot \partial x^m / \partial x^s = \partial x^m / \partial x^i \cdot \partial a^k / \partial x^s \delta_{ms} = \\ &= \partial x^m / \partial a^i \cdot \partial a^k / \partial x^m = \partial a^k / \partial a^i = \delta_{ik}. \end{aligned}$$

V tenzorové analýze se zavádí pojem kovariantní derivace, která je tenzorem. Kovariantní derivace kovariantního vektoru A_i je

$$A_{i,k} = \partial A_i / \partial a^k - A_m \Gamma_{ik}^m,$$

kde Γ_{ik}^m označuje Christoffelův symbol. Ten se vyjadřuje pomocí derivací metrického tenzoru

$$\Gamma_{ik}^m = g^{ms} / 2 (\partial g_{si} / \partial a^k + \partial g_{sk} / \partial a^i + \partial g_{ik} / \partial a^s).$$

Analogicky se zavádí pojem kovariantní derivace podle kovariantního vektoru

$$A_k^i = \partial A^i / \partial a^k + A^s \Gamma_{sk}^i.$$

Kovariantní derivace podle projekce jednotkové normály k povrchu se vyjadřuje pomocí složek druhé kvadratické formy povrchu $b_{\alpha\beta}$ vztahem Weingartena

$$\nu_\alpha^i = -g^{\beta\sigma} b_{\alpha\beta} \partial a^i / \partial u^\sigma.$$

Pro střední křivost H povrchu a Gaussovu křivost K platí vztahy

$$H = \frac{g^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}}{2}, \quad K = \frac{(g^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} b_{\gamma\delta} - g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta})}{2}.$$

Skalární součin dvou vektorů A a B je

$$g^{ij} A_i B_j = g_{ij} A^i B^j = A_i B^i = A^i B_i.$$

Nechť $x^i = x^i(a^1, a^2, a^3)$, $F = F(a^1, a^2, a^3)$. 36,187

V prostoru $a^1 a^2 a^3$ je derivace $\partial F / \partial x^i = g^{jk} \partial F / \partial a^j \cdot \partial x^i / \partial a^k$.

7. LITERATURA

1. Courant R., Friedrichs K.O.: Supersonic Flow and Shock waves, New York 1948 427 s.
2. Landau L.D., Livšic E.M.: Gidrodinamika, Teor. fizika, Tom VI, M., Nauka 1986 736 s.
3. Sedov L.I.: Metody podobija i rozmernosti v mehanike, M., 1967 438 s.
4. Mises R.: Mathematical theory of compressible fluid flow, N.Y. Acad. Press, 1958, XIII, 514 s.
5. Staňukovič K.P.: Neustanovivšiesja dviženija splošnoj sredy, M., 1971 854 s.
6. Neumann J.: Collected works, Vol. 6, Pergamon Press 1963 s.
7. Baum F.K. a kol.: Fizika vzryva, M., 1975 704 s.
8. Baženova T.B., Gvozděva L.G.: Něstacionarnyje vzajimodějsvija udarnych voln, M., Nauka, 1977 274 s.
9. Stupočenko E.V., Losev S.A., Osipov A.I.: Relaksacionnyje procesy v udarnych volnach, M., Nauka, 1965 s.
10. Korobejnikov V.P.: Zadači teori točečnovo vzryva, M., Nauka, 1985 400 s.
11. Zeldovič Ja. B., Kompanějec A.S.: Těoria detonacii, M., Gostěchizdat, 1965 s.
12. Penner S.S., Mullins B.P.: Explosions, detonations, flammability and ignition, London, N.Y., Paris, Los Angeles, Pergamon Press, 1959 287 s.
13. Fickett W., Davis W.C.: Detonation, University of California Press, Berkeley 1979 386 s.
14. Taylor J.: Detonation in Condensed Explosives, Clarendon Press, Oxford 1952 s.

15. Fickett W.: Introduction to Detonation Theory, University of California Press, Berkeley, Los Angeles, London 1985 216 s.
16. Ščelkin K.I., Trošin Ja.K.: Gazodinamika gorenija, M., 1963 255 s.
17. Dremin A.N., Savrov S.D., Trofimov V.S., Švedov K.K.: Detonacionnyje volny v kondensirovannyh sredach, M., Nauka 1970 171 s.
18. Ed. Caldirola P.: Physics of High Energy Density, Varenna on Lake Como 14 - 26 th July 1969, Academic Press, N.Y., London 1971 484 s.
19. Meržijevskij L.A.: Udarnyje volny v kondensirovannyh sredach, Novosibirsk, izd. Novosib. un-ta, 1982 s.
20. Zeldovič Ja. B., Rajzer Ju. P.: Fizika udarnych voln i vysokotemperaturnych gidrodinamičeskich javlenij, M., Nauka, 1966 632 s.
21. Šugajev F.V.: Vzaimodějstvie udarnych voln s vozmuščeniem, M., izd. Mosk. un-ta, 1983 s.
22. Žigalko E.F.: Dinamika uadarnych voln, Leningrad, izd. Lenin. un-ta, 1987 264 s.
23. Cook M.A.: The Science of High Explosives, Reinhold Publ. Corp. N.Y., 1958 s
24. Mader CH.L.: Numerical Modeling of Detonation, University of California Press, Berkeley, Los Angeles, London 1979 384 s.
25. Baker W.E., Cox P.A., Westine P.S., Kulesz J.J., Strehlow R.A.: Explosion Hazards and Evaluation, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, N.Y., 1983 s.

26. Whitham G.B.: Linear and Nonlinear Waves, N.Y., Wiley
1974 636 s.
27. Nettleton M.: Gaseous detonation, London, New York
Chapmann and Hall 1979 278 s.
28. Ščelkin K.I.: Detonacija, M., Nauka 1968 s.
29. Glass I.I.: Shock Waves & Man, University of Toronto
Institute fo Aerospace Stdiies, Toronto 1974 190 s.
30. Černyj G.G.: Tečeniye gaza s bolšej sverchzvukovoj sko-
rostju, M., Fimatgiz 1959 s.
31. Glasstone S. ed.: Effects of Nuclear Weapons, Washington,
U.S. Atomic Energy Commission, Superintendant of Docu-
ment, U.S. Government Printing Office 19 s.
32. Prandtl L.: Essentials of Fluids Dynamics, Blackie and
Sons Ltd. , Glasgow 1952 s.
33. Samarskij A.A., Popov Ju. P.: Raznostnyje metody rešenija
zadač gazovoj dinamiki, M., Nauka 1980 352 s.
34. Richtmeyer R.D., Morton K.W.: Difference Method for
Initial-value Problems, N.Y., London, Interscience 1967
35. Meyer R.: Explosivstoffe, Verlag Chemie, Weinheim 1979
s. 407
36. Thomas T.Y.: Concepts from tensor analysis and diferenti-
al geometry, N.Y., L., AP, 1961
37. RiemanDB.: Sočinenija, Gostechizdat M. - L., 1948
O rasprostraneniji ploskich voln konečnoj amplitudy.
38. Earnshaw S.: On the mathematical theory of sound,
Transactions of the Royal Society of London, 150, 133
/1850/
39. Griffith W.C.: Shock wave, J.Fluid Mech. 106, 81 /1981/
40. Mikiguichi M., Kavada H.: An experimental study on shock
wave in liquid, Bull. JSME 20, 139, 57 /1977/

41. Rankin W.J.M.: On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance, Transactions of the Royal Society of London, 160, 277 /1870/
42. Hugoniot H.: Sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits, Journal de l'école polytechnique, 58, 1 /1889/
43. Guderley G.: Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse, Luftfahrtforschung, 19, 9, 302 /1943/
44. Landau L.D.: Ob udarnych volnach, AN SSSR, Fizičeskij žurnal, 6, 229 /1942/
45. Landau L.D., Livšic E.M.: Teoria uprugosti, VII, M. Nauka 1987 246 s.
46. Rolsten R.F.: A study of the shock loading of materials, Transactions New York Academy of Science, 36, 5, 416 /1974/
47. Grüneisen E.: Theorie des festen Zustandes einatomiger Elemente, Ann. Phys. /4/, 39, 257 /1912/
48. Landau L.D., Livšic E.: Statističeskaja fizika, V, část 1, M. Nauka, 1976 583 s.
49. Slater I.C.: Introduction to Chemical Physics, N.Y. - London, 1939
50. Dugdal I.S., McDonald D.: The Thermal Expansion of Solids, Phys. Rev., 89, 832 /1953/
51. Zubarev V.N., Vaščenko V.Ja.: O koeficiente Grjunajzena, Fizika tverdogo tela, T.5, vypusk 3, 886 /1963/
52. Tamm I.E.: O širině udarnych voln bolšoj intenzivnosti, Sobranije naučnych trudov, Tom I s. 424 M. Nauka 1975

53. Landau L.D., Livšic E.M.: *Mechanika*, I. M., Nauka 1965 204 s.
54. Pekárek V.: Vtah mezi lineárním modulem pružnosti, specifickým teplem, Poissonovým číslem, lineárním koeficientem roztažnosti a hustotou kovů, *Strojnický časopis*, 41, 4, 379 /1990/
55. Chisnell R.F.: The motion of shock wave in a channel, with applications to cylindrical and spherical shock waves, *J. Fluid. Mech.*, 2, 286 /1957/
56. Whitham G.B.: On the propagation of shock waves through regions of non-uniform area or flow, *J. Fluid. Mech.*, 2, 3, 337 /1957/
57. Chester W.: The quasi-cylindrical shock tube, *Phil. Mag.* 45, 7, 1293 /1954/
58. LASL Shock Hugoniot data , S. P. Marsh Ed., University of California Press, Berkeley-Los Angeles-London 1980 658 s.
59. Walsh J.M., Christian R.H.: Equation of state of metals from shock measurements, *Phys.Rev.* 97, 1544 /1955/
60. Ed. Caldirola P., Knoepfel H.: *Physics of High Energy Density*, Academic Press N.Y., London 1971
61. Tyl J., Włodarczyk E.: An analysis of the concentric shock wave fronts in a nonhomogenous polytropic gas, *J. Tech. Physics*, 26, 3 /1985/
62. Stupočenko E.V., Losev S.A., Osipov A.I.: *Relaksacionnye procesy v udarnych volnach.* Moskva, Nauka, 1965
63. Polachek H., Seeger R.J.: On shock-wave phenomena, refraction of shock waves at a gaseous interface, *Phys. Review*, 84, 5 /1951/

64. Kočin N.E.: Udarnye volny v židkosti. Sobranie sočinений, T. II. s. 5, Moskva-Leningrad, Izd-Mo AN SSSR, 1949
65. Rožděnstvenskij B.L., Janenko N.N.: Systemi kvazilinejnyh uravněnij i ich priloženija k gazovoj dinamike, Moskva, Nauka 1978
66. Gion E.J.: Plane shock interacting with thermal layer, Phys. Fluids 20, 4, 700 /1977/
67. Kaliski S.: Homogenizing a jump-inhomogeneous medium by a reflectionless shock-wave, J.Tech.Phys. 18,4,455 /1977/
68. Mach E.: Über den Verlauf der Funkenwellen in der Ebene und im Raum, Vienna Academy, Sitzungsberichte, 1878, Bd 78
69. Ben-Dor G., Glass I.I.: Domains and boundaries of non-stationary oblique shock-wave reflexions 1. Diatomic gas. J. Fluid Mech., 92, part 3, 459 /1979/
70. Ben-Dor G., Takayama K.: Application of steady shock polars to unsteady shock wave reflection, AIAA Journal, 24, 4, 1986
71. Ben-Dor G., Takayama K., Kawaouchi T.: The transition from regular to Mach reflexion and from Mach to regular reflexion in truly non-stationary flows, J.Fluid Mech., 100, part 1, 147 /1980/
72. Ikui T., Matsuo K., Aoki T., Kondoh N.: Investigation of Mach Reflection of a Shock Wave / Part 1, Configurations and Domains of Shock Reflection/ Bull. JSME, 25, 268, October, 1513 /1982/
73. Hornung H.G., Oertel H., Sandeman R.J.: Transition to Mach reflexion of shock waves in steady and pseudosteady flow with and without relaxation, J.Fluid Mech., 90, part 3, 541 /1979/

74. Heilig W.: Diffraction of a shock wave by a cylinder, Phys. Fluids suppl. 12, 5, I-154 /1969/
75. Henderson L.F., Lozzi A.: Further experiments on transition to Mach reflexion, J. Fluid Mech. 94, part 3, /1979/
76. Henderson L.F., Lozzi A.: Experiments on transition of Mach reflexion. J. Fluid Mech. 68, part 1, 139 /1975/
77. Hornung H.G., Taylor J.R.: Transition from regular to Mach reflection of shock waves Part 1 The effect of viscosity in pseudosteady case, J. Fluid Mech. 123, 143 /1982/
78. Legowski Z., Włodarczyk E.: Oddziaływanie skosnych fal uderzeniowych ze sztywną płaską powierzchnią odbijającą, Biuletyn Wojskowej Akad. Techn. 37, 10, 434 /1988/
79. Jahn R.G.: The refraction of shock waves at a gaseous interface, J. Fluid Mech. 1, 457 /1956/, 2, pt 1, 33 /1957/
80. Takayama K., Ben-Dor G.: The inverse Mach reflection, AIAA Journal 23, 12, 1853 /1985/
81. Bleakney W., Taub A.H.: Interaction of shock waves, Reviews Mod. Phys. 21, 4, 584 /1949/
82. Aslam S., Rjazin A.P.: Eksperimentalnoje izučenje struktury silnych udarnych voln v argone, Vestnik Moskovskogo Universiteta Ser. 3, T. 25. No. 1, 94 /1984/
83. Djakov S.P.: Ob ustojčivosti udarnych voln, ŽETF T.27, Vypusk 3/9/, 288 /1954/
84. Djakov S.P.: Vzaimodejstvie udarnych voln s malymi vozmuščenijami 1, ŽETF T. 33, Vypusk 4/10/ 948-961, 962-974 /1957/
85. Kuzněcov N.M.: Ustojčivost udarnych voln, Uspechi fiz. nauk T.159m vypusk 3, 493 /1989

86. Jordanskij S.V.: Ob ustojčivosti ploskoj stacionarnoj udarnoj volny, PMM T.21, No.4, 465 /1957/
87. Pekurovskij L.E., Ter-Minasjanc S.M.: Difrakcija ploskoj volny na kline, dvižuščimsja so sverchzvukovoj skorostju, pri nereguljarnom udarnom vzaimodejstvii, PMM T.38, vypusk 3, 484 /1974/
89. Korotkov P.F.: O machovskom otryaženii udarnych voln, PMTF 1, 114 /1964/
90. Sysojev N.N., Šugajev F.V.: Nestacionarnoe otryaženije v vzravnoj udarnoj volny ot sfery, Vestnik Mosk. un-ta ser. 3, fizika, astronomija, T. 20, No 5, 121 /1979/
91. Taub A.H.: Relativistic Rankine-Hugoniot Equations, Phys. Rev. 74, 3, 328 /1948/
100. Gross R.A.: Strong ionizing shock wave, Rev.Mod. Phys. 37, 4, 724 /1965/
101. Busemann A.: Hodographenmethode der Gasdynamik, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 17, 73-79 /1937/
102. Prandtl L., Busemann A. : Näherungsverfahren zur zeinerischen Ermittlung von ebenen Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit, Zürich - Leipzig 1929
103. Meyer Th.: Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt, Dissertation, Göttingen 1908.
104. Dunne B.: Mach reflection of detonation waves in condensed high explosives. II, Phys. Fluids 7, 10, 1707 /1964/
105. Kamarád J.: Fyzika pevných látek za vysokých tlaků, Českoslov. čas. pro fyz., Sekce A, Svazek 36, 6, 545 /1986/

106. Berthelot M.: Sur la vitesse de propagation des phénomènes explosifs dans les gaz, C.R.A.S., t 93, p. 18 /1881/
107. Berthelot M., Vielle P.: Sur la vitesse de propagation des phénomènes explosifs dans les gaz, C.R.A.S. t. 94, p. 101 et p. 802 /1882/
108. Nobel A.: Brit. pat. 1345 /1867/
109. Mallard E., Le Chatelier H.: Sur les vitesses de propagation de l'inflammation dans les mélanges gazeux explosifs, C.R.A.S., t. 93, p. 145 /1881/
110. Mallard E., Le Chatelier H.: Recherches sur la combustion des mélanges gazeux explosifs, Ann. des Mines, 8^e série, t. 4, p. 274 /1883/
111. Dixon H.B.: The rate of explosion in gases, Philos. Trans A 184, 97 /1893/
112. Michelson V.A.: O normalnoj skorosti vosplamenenija gremučich gazovych smesej, Učenyje zapiski imperatorskogo Moskovskogo universiteta, Otdel fiziko-matematičeskij, vypusk 10 M., str. 1-92 /1893/ a Sobranije sočiněnij, T. 1 M., Izd. Novyj agronom, 1930
113. Chapman D.L.: On the rate of explosion in gases, Phil. Magas. 47, 90 /1889/
114. Rayleigh J.: Aerial plane waves of finite amplitude, Proceedings of the Royal Society of London, 84, 247 /1910/, Scientific Papers, V, Cambridge, 573 /1912/
115. Jouguet E.: Sur la propagation des discontinuités dans les fluides, C.R.A.S., t. 132, p. 673 /1901/ a La Mécanique des Explosifs, Ed. O. Doin et fils, Paris, 1917

116. Becker R.: Zur Theorie de Detonation, Zs, für Elektrochemie, 23, 40 /1917/
117. Becker R.: Stosswelle und Detonation, Zs. für Physik, 8, 321 /1922/
118. Campbell C., Woodhead D.W.: The ignition of gases by an explosion wave, J. Chem. Soc. 4, 1572 /1927/, 3010 /1926/
119. Zeldovič Ja. B.: K teorii rasprostraneniya detonacii v gazoobraznykh sistemach, ŽETF 10, 542 /1940/
120. Neumann J.: Theory of stationary detonation wave, O.S.R.D. Rept., no. 549 /1942/
121. Döring W.: Detonationvorgänge in Gasen, Ann. der Phys., 43, 421 /1943/
122. Rozing V.S., Chariton Ju.B.: Prekraščenje detonacii vzryvčatych veščestv pri malych diametrach zarjada, DAN SSSR T.26, No. 4, 360 /1940/
123. Jones H.: A theory of the dependence of the rate of detonation of solid explosives on the diameter of the charge, Proc. R. Soc. London Ser. A 189, 415 /1947/
124. Kirkwood L.G., Wood W.W.: Structure of a steady-state plane detonation wave with finite reaction rate, J. Chem. Phys. 22, 1915 /1954/
125. Fay J.A.: Mechanical theory of spinning detonation, J.Chem. Phys. 20, 6,942 /1952/
126. Solouchin R.I.: Multiheaded structure of gaseous detonation, Comb. Flame, 9 51 /1965/
127. Openheim A.K., Smolen J.J., Kwak D., Urtiew P.A.: On the dynamics of shock intersection, In: Ninth Symp. /Inter./ on Detonation, str. 119, /1970/ Washington D.C.

128. Bdzil J.B. : Steady-state two-dimensional detonation,
J. Fluid Mech., 108, 195 /1981/
129. Manson N.: Sur la structure des ondes explosives dites
helicoidales dans les melanges gazeux,
C.R. A.S.. t. 222, p.46 /1946/ a
Propagation des detonations et des deflagration dans les
melanges gazeux, in: L'office National d'Etudes et des
Recherches Aeronautiques et L'Institut Francais des Pe-
troles, Paris 1947
130. Openheim A.K., Solouchin R.I.: Experiments in gasdyna-
mics of explosions, Ann. Rev. Fluid Mech. 5 , 31
/1973/
131. Solouchin R.I.: Detonacionnyje volny v gazach, Uspechi
fiz, nauk, t. LXXX, vypusk 4, 525 /1963/
132. Solouchin. R.I.: Udarnyje volny i detonacija v gazach,
M., Fizmatgiz 1963
133. Jones H.: The dynamics of spinning detonation waves,
Proc. R.Soc. Lond. A. 348, 299 /1976/
134. Wlodarczyk E.: Hydrodynamiczna interpretacja detonacji
powrotnej-retonacji, Biul. Wojskowej Akad. Techn. Rok
XL, nr 1 /461/, 3 /1991/
135. Kozak G.D., Kondrikov B.N., Oblomskij V.B.: Spinovaja
detonacija v tverdyh veščestvach, Fiz. gorenija i vzry-
va, 25, 4, 86/1989/
136. Wu Xiong : The detonation parameters of new powerful e
explosive compounds predicted with a revised VLW equa-
tion of state, in: Ninth Symp./international/ on Detona-
tion, Portland, Oregon, August 28-September 1, 1989,
Vol. I str. 435

137. Kamlet M.J., Jacobs S.J.: Chemistry of detonation I. A simple method fo calculating detonation properties of C-H-N-O Explosives, J.Chem Phys., 48, 23 /1968/
138. Kamlet M.J., Hurwitz H.: The chemistry of detonation V. A simplified method fo calculating of pressures of C-H-N-O explosives on K-W isentropes, Isrrael Journal of technology, 7, 6, 431 /1969/
139. Eyring H. Powell R.E., Duffy G.H., Parlin R.B.: The stability of detonation, Chem. Rev, 45, 69 /1949/
140. Alemasov V.E., Dregalin A.F., Tišin A.P., Chudjakov V.A.: Termodinamičeskije i teplofizičeskije svojstva produktov sgoranija, Tom I Metody rasčota, Moskva 1971
141. Kamlet M.J., Finger H.: An alternative method for calculating Gurney velocities, Combustion an Flame 34, 213 /1979/
142. Dremín A.N., Trofimov V.S.: O prirodě kritičeskogo diametra detonacii kondenzsirivannyh vzryvčatych veščestv, Fizika gorenija i vzryva, 5, 3, 304 /1969/
143. Kobylkin I.F., Solovjev V.S., Bojko M.M.: Kritičeskij diametr stacionarnoj detonacii vysokoplotnyh VV, vlijanije oboločky, Fizika gorenija i vzryva, 4, 120/1983/
144. Wood W.W., Kirwood J.G.: Diameter effect in condensed explosives. The relation between velocity and radius of curvature of the detonation wave, J.Chem. Phys. 22, 11, 1920 /1954/
145. Trofimov V.S., Dremín A.N.: K obosnovaniju pravila otbora dlja skorosti detonacii, Fizika gorenija i vzryva 3, 19 /1966/
146. Gubkin K.E.: Zavisimost skorosti sferičeskoi volny detona-

- ciji ot radiusa fronta, Fizika gorenija i vzryva, 3, 116/1978/
147. Vasiljev A.A., Mitrofanov V.V., Topčijan M.E.: Detonacionnyje volny v gazach, Fizika gorenija i vzryva, 5, 109 /1987/
148. Coleburn N.L., Liddiard T.P.: Hugoniot equations of state of several unreacted explosives, J. Chem Phys. 44, 5, 1929/1966/
149. Uljanickij V.Ju.: Issledovanije galopirujuščego režima gazovoj detonacii, Fizika gorenija i vzryva, 17, 1, 118 /1981/
150. Cjan S jue-seň: Fizičeskaja mehanika, Moskva, Izd-vo Mir, 1965
151. Voskobožnikov I.M., Margolin A.D., Bogomolov V.M.: Opređenje vremeni razloženiija vzryvčatych veščestv v udarnoj volně, Dokl. AN SSSR, T. 167, No. 3, 610 /1966/
152. Voskobožnikov I.M., Afanasenkov A.N., Bogomolov V.M.: Obobščennaja udarnaja adiabatata organičeskich židkostěj, Fizika gorenija i vzryva 3, 4, 585 /1967/
153. Wu Xiong : A simple method for calculating detonation parameter of explosives, J. Energ. Materials 3, 263 /1985/
154. Hubbard H.W., Jonson M.H.: Initiation of detonation, J. Appl. Phys. 30, 4, 765 /1959/
155. Dremin A.N.: Pulsirujuščij detonacionnyj front, Fizika gorenija i vzryva 4, 159 /1983/
156. Shuttleworth R.: The surface energies of inert-gases and ionic crystals, Proc. Phys. Soc., London, Sect. A 62 /1949/

157. Redi Dž.: Dejstvije moščnogo lazernogo izlučenija,
Moskva, Mir 1974
158. Maker P.D., Terhune R.W., Savage C.M.:

In: 3 International congress on quantum electronic,
Paris 1963
159. Barčukov A.I., Bunkin F.V., Konov V.I., Prochorov A.M.:
Nizkoporogovyyj probroj vozducha blizi mišeni izlučenijem
CO₂ - lasera i svjazannyj s nimi vysokij impuls otdači,
Pisma v ŽETF T.17, vypusk 77, 413 /1973/
160. Ramsden S.A., Davies W.E.: Radiation scattered from the
plasma produced by a fokused ruby laser beam,
Phys. Rev. Lett. 13, 7, 227 /1964/
161. Berčenko E.A. a kol.: Ustojčivost vol poglošenija lazerno-
go izlučenija i mehanizmy ich turbulizacii.
Kvantovaja elektronika T. 10, No. 12, 2456 /1983/
162. Raizer Ju.P.: Lazernaja iskra i rasprostraneniye
razrjadov, Moskva, Nauka 1974/
163. Fišer V.I.: O svetovoj detonacii v gazach,
ŽTF, T. 53, 2148 /1983/
164. Ramsden S.A., Savič P.: A radiative detonation model
for the development of laser-induced spark in air,
Nature 203, N 4951, 1217 /1964/
165. Gross R.A.: Continuum Radiation behind a blast wave,
Phys. of Fluids., 7, 1078 /1964/
166. Fuller A.L., Gross R.A.: Thermonuclear detonation wave
structure, Phys. Fluids, 11, 3, 534 /1968/
167. Taylor G.I.: The formation of a blast wave by a very in-
tense explosion I.Theoretical discussion.,II. The atomic
Proc. Roy. Soc. /A/ 201, 159 /1950/ explosion of 1945,

168. Sedov L.I.: Rasprostranenie silnyh vzryvnyh voln,
Prikladnaja matematika i mehanika T.10, No.2, 241 /1946/
Doklady AN SSSR T.52, No.1, 17 /1946
169. Taylor G.I.: The air wave surrounding an expanding sphere,
Proc. Roy. Soc. /A/, 186, 273 /1946/
170. Brode H.L.: Blast wave from a spherical charge,
Phys. Fluids, 2, 2, 217 /1959/
171. Galkowski A.: Some remarks on the theory of irregular
reflection of a shock wave from a surface,
Arch. Mech., 41, 6, 837 /1989/
172. Markin V.T., Sysojev N.N., Šugajev F.V.: Raspredelenie
skorosti i struktura potoka za nestacionarnoj udarnoj
volnoj, obrazujuščejsja pri vzryve sferičeskogo zarjada
v vozduche, Vestnik Moskovskogo un-ta, ser. 3, T. 20,
No. 4, 114 /1979/
173. Černyj G.G.: Zadača o točečnom vzryve,
Doklady AN SSSR, T. 112, No. 2, 213 /1957/
174. Holt M.: Underwater explosions, Ann. Rev. Fluid. Mech.,
9, 187 /1977/
175. Schall R.: Detonationsphysik, in: Vollrath K., Thomer G.:
Kurzzeitphysik, Springer Verlag, Wien, New York 1967
s. 854 /880/
176. Cole R.L.: Underwater explosions, N.Y., Dover 1965 437 s.
177. Snay H.G.: Hydrodynamics of underwater explosions,
Proc. Symp. Naval Hydrodyn. 1st, Washington D.C., 1956
pp. 325 -352
178. Christianovič S.A.: Udarnaja volna na značitelnom rass-
tojanii ot mesta vzryva, PMM T.XX. 598/1956/

179. Landau L.D.: Ob udarnych volnach na dalekikh rasstojanijach ot mesta ich vozniknovenija, PMM, T. IX. vypusk 4, 286 /1945/
180. Aveillé J., Baconin J., Carion N., Zoé J.: Experimental study of spherically diverging detonation waves, 12th Symposium /international/ on Explosives and Pyrotechnics - March 13-15, 1984 San Diego Calif.
181. Hirsch E.: Simplified and Extended Gurney Formulas for Imploding Cylinders and Spheres, Propellants, Explosives, Pyrotechnics 11, 6 /1986/
182. Butler D.S.:
ARDE Rept. No. 18/56 /1956/
183. Hawkins D.:
LASL N LAWS Rept. No. 2532 /1961/
184. Kistiakowsky G.: The folly of the neutron bomb,
Bull. of the atomic Scient. 34, 7, 25 /1978/
185. Fedoroff B.T., Kaye S.M. ed.: Encyclopedia of explosives and related items, Vol. I /1960/- X. /1983/, Picatinny arsenal, large caliber weapons laboratory Dover, New Jersey
186. Kaliski S. : A simple approximate method for assessment of density in reflected concentric shock -waves,
Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Tech. 23, 3, 99 /1975/
187. Sokolnikoff I.S.: Tensor analysis , theory and applications to geometry and mechanics of continua,
Univers. of Calif. Press, Calif. 1965 373 s.
188. Mader Ch.: Fortran BKW: A code for computing the detonation properties of explosives, Rept.LA 3704 /1967/
Los Alamos sci. lab., Univers. of Calif.

Název	Základy teorie rázových a detonačních vln (učební text)
Autor	Ing. Karel Hel, CSc.
Vydavatel	Univerzita Pardubice
Určeno pro	studenty Fakulty chemicko-technologické Univerzity Pardubice
Odpovědný redaktor	doc. Ing. Martin Adam, Ph.D.
Vydáno	únor 2019
Stran	300
Vydání	druhé
Výroba	Polygrafické středisko Univerzity Pardubice

ISBN 978-80-7560-201-5 (pdf)