

Univerzita Pardubice  
Dopravní fakulta Jana Pernera

POHON DVOJKOLÍ  
KLOUBOVÝM DUTÝM HŘÍDELEM

Martin Jeřábek

Bakalářská práce

2018



Univerzita Pardubice  
Dopravní fakulta Jana Pernera  
Akademický rok: 2017/2018

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Martin Jeřábek**

Osobní číslo: **D14231**

Studijní program: **B3709 Dopravní technologie a spoje**

Studijní obor: **Dopravní prostředky: Kolejová vozidla**

Název tématu: **Pohon dvojkolí kloubovým dutým hřídelem**

Zadávací katedra: **Katedra dopravních prostředků a diagnostiky**

### Z á s a d y p r o v ý p r a c o v á n í :

Vypracujte:

1. Rešerše technického řešení individuálního pohonu dvojkolí kloubovým dutým hřídelem.
2. Vybrané problémy tohoto typu pohonu.
  - 2.1 Vypracujte metodiku výpočtu vlastních tvarů kmitů náhradní torzní soustavy.
  - 2.2 Vypracujte ukázkový příklad řešení.

Rozsah grafických prací: podle pokynů vedoucího BP

Rozsah pracovní zprávy: 40 stran

Forma zpracování bakalářské práce: tištěná

Seznam odborné literatury:


- [1] LATA, M.: Konstrukce kolejových vozidel II. Skriptum. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2005. ISBN 80-7194-696-6.
- [2] LATA, M., VOLTR, P.: Konstrukce hnacích kolejových vozidel. Soubor prezentací. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2011.
- [3] HELLER, P., DOSTÁL, J.: Kolejová vozidla I. Plzeň: ZČU v Plzni, 2007. ISBN 978-80-7043-520-5.
- [4] HELLER, P., DOSTÁL, J.: Kolejová vozidla II. Plzeň: ZČU v Plzni, 2007. ISBN 978-80-7043- 641-7.
- [5] HELLER, P., DOSTÁL, J.: Kolejová vozidla III. Plzeň: ZČU v Plzni, 2007. ISBN 978-80-261-0028-7.
- [6] ŠÍBA, J.: Konstrukce vozidel II - pojezd. Praha: ČVUT v Praze, 1991. ISBN 80-01-00615-8.

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Michael Lata, Ph.D.


Katedra dopravních prostředků a diagnostiky

Datum zadání bakalářské práce: 19. února 2018

Termín odevzdání bakalářské práce: 18. května 2018

  
doc. Ing. Libor Švadlenka, Ph.D.  
děkan

L.S.

  
Ing. Jakub Vágner, Ph.D.  
vedoucí katedry

V Pardubicích dne 19. února 2018

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti, vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 9/2012, bude práce zveřejněna v Univerzitní knihovně a prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 18. 5. 2018

Martin Jeřábek

Rád bych poděkoval vedoucímu této bakalářské práce doc. Ing. Michaelu Latovi, PhD. za cenné rady, vstřícnost při konzultacích a poskytnutí doplňujících studijních materiálů. Dále děkuji Ing. Milanu Jičínskému a Bc. Jiřímu Šlapákovi za jejich rady při práci s MATLABem.

V Pardubicích dne 18. 5. 2018

Martin Jeřábek

## **Anotace**

Práce se zabývá rozborem pohonu dvojkolí kloubovým dutým hřídelem. Náplní práce je zařazení tohoto pohonu do kontextu s ostatními typy individuálních pohonů dvojkolí, popis jednotlivých částí pohonu a jeho typických konstrukčních provedení. V další části práce je vypracována metodika výpočtu vlastních tvarů kmitů náhradní torzní soustavy pohonu s uvedením dvou ukázkových příkladů a ukázkou vlivu volby modelu a změny některých parametrů na vypočtená data.

## **Klíčová slova**

Individuální pohon dvojkolí, kloubový dutý hřídel, plně odpružený pohon, vlastní tvary kmitů

## **Title**

Wheelset drive by hollow joint shaft

## **Annotation**

This bachelor thesis is alinged to analysis of wheelset drive by hollow joint shaft. The content of the work is classify this drive in context with other types of individual wheelset drives, description of particular parts of the drive and its typical design. In the next part of the work is elaborated methodology of calculating the own shapes of oscilations of a replacement torsion drive system with two sample examples and an example of influence of model selection and change of some parameters on the calculated data.

## **Keywords**

Individual wheelset drive, hollow joint shaft, fully suspended drive, own shapes of oscilations

# OBSAH

Seznam obrázků.....	8
Seznam symbolů.....	8
Seznam zkratek.....	12
1 Úvod.....	13
1.1 Cíle práce.....	13
1.2 Uvedení do problematiky.....	13
2 Rešerše technického řešení individuálního pohonu dvojkolí kloubovým dutým hřídelem 14	
2.1 Individuální pohon dvojkolí.....	14
2.1.1 Pohony s trakčním motorem ložiskovaným na nápravě.....	14
2.1.2 Pohony částečně vypružené.....	15
2.1.3 Pohony plně vypružené.....	16
2.2 Komponenty pohonu dvojkolí kloubovým dutým hřídelem.....	18
2.2.1 Trakční motor.....	18
2.2.2 Převodovka.....	19
2.2.3 Kloubové spojky.....	19
2.2.4 Dutý hřídel.....	21
2.2.5 Dvojkolí.....	22
2.2.6 Součásti brzdy.....	22
2.3 Používaná konstrukční řešení pohonu dvojkolí kloubovým dutým hřídelem.....	23
2.3.1 Integrovaná jednotka IGA.....	23
2.3.2 ICE 1, 2.....	25
2.3.3 Bombardier 2QIH a Mitrac DR 3700F.....	27
2.3.4 HAB (Siemens Taurus).....	28



2.3.5	Škoda 471 .....	30
2.3.6	Škoda 109E .....	31
2.3.7	Pohon kloubovým dutým hřídelem s podélně umístěnými TM .....	31
3	Vybrané problémy tohoto typu pohonu .....	33
3.1	Metodika výpočtu vlastních tvarů kmitů náhradní torzní soustavy .....	33
3.1.1	Dynamický model torzní soustavy pohonu .....	34
3.1.2	Torzní tuhost válcového tělesa .....	35
3.1.3	Zápis pohybových rovnic.....	36
3.1.4	Sestavení pohybových rovnic pro soustavu hmotných bodů.....	38
3.1.5	Vlastní frekvence .....	40
3.1.6	Vlastní tvary kmitání .....	42
3.1.7	Metodika výpočtu vlastních tvarů kmitání .....	43
3.1.8	Návrh vlastní aplikace pro výpočet pro vyšetření vlastních kmitů.....	44
3.2	Ukázkový příklad řešení .....	47
3.2.1	Pohon lokomotiv BR 120 a Siemens ES64P .....	47
3.2.2	Pohon elektrické jednotky Škoda 471 .....	59
3.2.3	Porovnání vlivu počtu hmot modelu.....	66
3.2.4	Porovnání vlivu změny hodnoty některých parametrů .....	70
4	Závěr .....	74
	Literatura.....	75

## Seznam obrázků

Obr. 1 Pohon tlapovým motorem. ....	14
Obr. 2 Pohony částečně vypružené.....	15
Obr. 3 Pohony plně vypružené. ....	16
Obr. 4 Ojničkový mechanismus typu Alstom.....	17
Obr. 5 Trakční motory Škoda ML 4550 K/6 s nasazeným pastorkem. ....	18
Obr. 6 Dvojkolí s dutým hřídelem a prstencovými klouby Jacquemin. Autor: Puodou. ....	20
Obr. 7 Pružná spojka z šípovitých pryžových bloků použitá u lokomotiv SBB 460. ....	21
Obr. 9 Uspořádání pohonu integrované jednotky IGA.....	24
Obr. 10 Integrovaná jednotka IGA. ....	25
Obr. 11 Řez pohonem ICE1.....	26
Obr. 12 Pohonná jednotka rychlovlaku ICE1.....	26
Obr. 13 Pohon Mitrac DR 3700F pro duální lokomotivy ALP-45DP.....	27
Obr. 14 Řez pohonem Bombardier 2QIH s brzdovými kotouči na kloubovém dutém hřídeli. ....	28
Obr. 15 Pohon HAB lokomotivy Taurus s brzdovým hřídelem.....	29
Obr. 16 Řez pohonem HAB.....	29
Obr. 17 Schéma pohonu EJ 471. ....	30
Obr. 18 Model podvozku lokomotivy 109E. ....	31
Obr. 19 Podvozek britské lokomotivy řady 91 s podélně uloženými TM.....	32
Obr. 20 Příklady náhradních modelů torzní soustavy pohonu. ....	34
Obr. 21 Zkrut válce.....	35
Obr. 22 Mechanický oscilátor.....	40
Obr. 23 Pracovní prostředí aplikace pro vyšetření vlastních kmitů.....	44
Obr. 24 Vykreslené tvary kmitání pro zadané hodnoty. ....	46
Obr. 25 Snímek lokomotivy 120 207-6 .....	47
Obr. 26 Lokomotiva 127 001-6 továrního typu Siemens ES64P .....	47
Obr. 27 Pohon lokomotivy BR 120. ....	48
Obr. 28 Odvození náhradního 6hmotového modelu pohonu.....	49
Obr. 29 Náhradní model pohonu pro sestavení pohybových rovnic. ....	49
Obr. 30 Výkmitová čára 6hmotového modelu pohonu BR 120 pro $f_1 = 0$ Hz. ....	53

Obr. 31	Výkmitová čára 6hmotového modelu pohonu BR 120 pro $f_2 = 21,28$ Hz. ....	55
Obr. 32	Výkmitová čára 6hmotového modelu pohonu BR 120 pro $f_3 = 50,76$ Hz. ....	55
Obr. 33	Výkmitová čára 6hmotového modelu pohonu BR 120 pro $f_4 = 181,80$ Hz. ....	56
Obr. 34	Výkmitová čára 6hmotového modelu pohonu BR 120 pro $f_5 = 238,34$ Hz. ....	56
Obr. 35	Výkmitová čára 6hmotového modelu pohonu BR 120 pro $f_6 = 307,24$ Hz. ....	57
Obr. 36	Porovnání zjištěných vlastních tvarů kmitání pohonu BR 120. ....	58
Obr. 37	Elektrická jednotka 471 035-6 v Ostravě. ....	60
Obr. 38	Sestavení náhradního modelu podle schématu pohonu. ....	61
Obr. 39	Náhradní model torzní soustavy pohonu EJ 471 ....	63
Obr. 40	Uvolnění hmoty 1. ....	63
Obr. 41	Uvolnění obecné hmoty i. ....	63
Obr. 42	Výkmitové čáry pro 5hmotový model pohonu EJ 471. ....	66
Obr. 43	Porovnávané modely s 6 a 5 hmotami. ....	67
Obr. 44	Porovnání vlastních tvarů pro model s 6 a 5 hmotami. ....	68
Obr. 46	Porovnání vlastních tvarů pro model s 2 a 3 hmotami. ....	70
Obr. 47	Vliv tuhosti dutého hřídele na vlastní tvary kmitání. ....	71
Obr. 48	Vliv tuhosti kloubových spojek na vlastní tvary kmitání. ....	72
Tab. 1	Porovnání parametrů trakčních motorů lokomotiv Škoda 109E a Siemens Taurus. ....	19
Tab. 2	Základní parametry lokomotivy BR 120 DB. ....	47
Tab. 3	Parametry torzní soustavy pohonu BR 120. ....	48
Tab. 4	Vlastní frekvence 6hmotového modelu pohonu DB 120. ....	52
Tab. 5	Amplitudy 2. vlastního tvaru kmitání 6hmotového modelu pohonu DB 120. ....	55
Tab. 6	Amplitudy 3. vlastního tvaru kmitání 6hmotového modelu pohonu DB 120. ....	55
Tab. 7	Amplitudy 4. vlastního tvaru kmitání 6hmotového modelu pohonu DB 120. ....	56
Tab. 8	Amplitudy 5. vlastního tvaru kmitání 6hmotového modelu pohonu DB 120. ....	56
Tab. 9	Amplitudy 6. vlastního tvaru kmitání 6hmotového modelu pohonu DB 120. ....	56
Tab. 10	Základní parametry jednotky 471 ....	59
Tab. 11	Parametry torzní soustavy pohonu EJ 471. ....	60

Tab. 12 Hodnoty pro výpočet torzní tuhosti dutého hřídele. ....	63
Tab. 13 Vypočítané vlastní frekvence 5hmotového modelu pohonu EJ 471 .....	65
Tab. 14 Vypočítané hodnoty normovaných amplitud pro 5hmotový model pohonu EJ 471 ...	65
Tab. 15 Vstupní parametry 5 hmotového modelu .....	67
Tab. 16 Porovnání vlastních frekvencí obou modelů. ....	67
Tab. 17 Vstupní parametry porovnávaných modelů.....	69
Tab. 18 Porovnání vlastních frekvencí obou modelů. ....	69
Tab. 19 Vliv tuhosti dutého hřídele na vlastní frekvence. ....	70
Tab. 20 Vliv tuhosti kloubových spojek na vlastní frekvence.....	72

Seznam symbolů

Symbol	Jednotka	Název veličiny
$E_k$	[J]	kinetická energie
$E_p$	[J]	potenciální energie
$f_j$	[Hz]	vlastní frekvence soustavy
$G$	[MPa]	modul pružnosti ve smyku
$i$	[-]	index hmoty náhradního modelu
$i_{i,i+1}$	[-]	převodový poměr mezi hmotami $i$ a $i+1$
$Im$	[-]	imaginární část komplexně sdruženého čísla
$j$	[-]	index vlastní frekvence soustavy
$J_i$	[kg·m <sup>2</sup> ]	moment setrvačnosti hmoty $i$
$k_{i,i+1}$	[Nm·rad <sup>-1</sup> ]	torzní tuhost pružné vazby mezi hmotami $i$ a $i+1$
$l$	[m]	délka hřídele
$M_{i,i+1}$	[Nm]	moment ve vazbě mezi hmotami $i$ a $i+1$
$R$	[m]	vnější průměr hřídele
$r$	[m]	vnitřní průměr hřídele
$r_{i,i+1}$	[rad]	rozdíl natočení amplitud hmot $i$ a $i+1$
$Re$	[-]	reálná část komplexně sdruženého čísla
$\varphi_i$	[rad]	natočení hmoty $i$
$\dot{\varphi}_i$	[rad]	úhlová rychlost hmoty $i$
$\ddot{\varphi}_i$	[rad]	úhlové zrychlení hmoty $i$
$\varphi_{j,i}$	[rad]	amplituda hmoty $i$ při $j$ -té vlastní frekvenci
$\varphi_{Nj,i}$	[rad]	normovaná amplituda hmoty $i$ při $j$ -té vlastní frekvenci
$\lambda$	[-]	vlastní číslo matice
$\omega_j$	[m]	vlastní kruhová frekvence soustavy
$\varphi_{Nj,i}$	[rad]	normovaná amplituda hmoty $i$ při $j$ -té vlastní frekvenci
$\lambda$	[-]	vlastní číslo matice
$\Omega_j$	[m]	vlastní kruhová frekvence soustavy

## Seznam zkratek

<b>Zkratka</b>	<b>Význam</b>
BR	Baureihe
ČD	České dráhy
DB	Deutsche Bahn
DB AG	Deutsche Bahn AG
EJ	Elektrická jednotka
FS	Ferrovie dello Stato Italiane
HAB	HochleistungAntrieb mit Bremswelle (vysoce výkonný pohon s brzdo- vým hřídelem)
ICE	Intercity-Express
IGA	Integrierter Gesamtantrieb (integrovaný celkový pohon)
LG	Lietuvos geležinkeliai
ÖBB	Österreichische Bundesbahnen
SBB	Schweizerische Bundesbahnen
TM	trakční motor
UZ	Ukrzaliznycja
ZSSK	Železničná spoločnosť Slovensko

# 1 Úvod

## 1.1 Cíle práce

Cílem této bakalářské práce popsat technické řešení individuálního pohonu dvojkolí hnacích kolejových vozidel kloubovým dutým hřídelem a vypracovat metodiku výpočtu vlastních tvarů kmitů náhradní soustavy pohonu.

V první části je přehled hlavních konstrukčních skupin individuálních pohonů dvojkolí rozdělených s ohledem na jejich nevypružené hmoty, následuje výčet komponentů soustavy pohonu dvojkolí dutým kloubovým hřídelem a popis jeho nejčastějších provedení.

Druhá část práce je zaměřena na problematiku vlastních kmitů pohonu dvojkolí kloubovým dutým hřídelem. V práci je představen postup výpočtu vlastních frekvencí a zjišťování vlastních tvarů kmitání, a to nejprve teoreticky s připomenutím použitých metod. Následně je metodika předvedena na dvou vzorových příkladech.

Závěr druhé části je věnován práci s vypočítanými daty. Je zde ukázáno, jak výsledný tvar kmitání ovlivní zjednodušení modelu nebo změna některých parametrů.

## 1.2 Uvedení do problematiky

Pohon dvojkolí kloubovým dutým hřídelem v současné době představuje jediný perspektivní plně odpružený pohon. Jeho hlavní předností jsou malé nevypružené hmoty, což teoreticky znamená i nízké dynamické účinky na trať. Proto je pohon vhodný pro výkonné lokomotivy konstruované pro rychlost nad 200 km/h a lze uplatnit i u vysokorychlostních jednotek.

Typickým řešením pohonu dutým kloubovým hřídelem je připojení kloubového hřídele přímo k disku jednoho kola, přes které je pak výkon přenášen nápravou i na druhé kolo. Jde o tzv. nesymetrický pohon, u kterého dochází k výraznému kmitání kola proti kolu (wheel to wheel).

Vlastní kmitání, jehož vyšetřováním se tato práce zabývá, je kmitání, kterým se soustava hmot rozkmitá, dojde-li k jejímu vychýlení z rovnovážné polohy (tzv. napružení) a náhlému uvolnění. V případě pohonu železničního dvojkolí tento jev nastává například při náhlém překročení meze adheze.

## 2 Rešerše technického řešení individuálního pohonu dvojkolí kloubovým dutým hřídelem

### 2.1 Individuální pohon dvojkolí

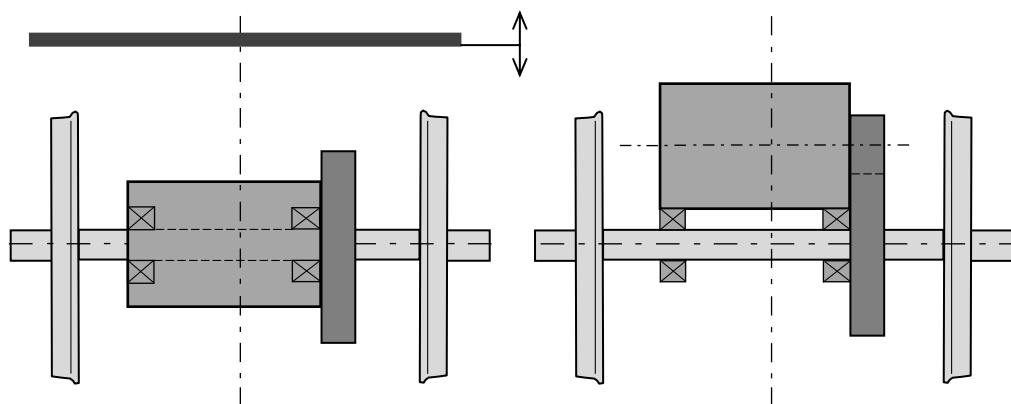
U moderních podvozkových elektrických a dieselelektrických lokomotiv se pro vývin tažné síly ve většině případů používá individuální pohon dvojkolí, při kterém je každé hnací dvojkolí poháněno samostatným trakčním motorem. Toto řešení má na rozdíl od skupinového a ústředního pohonu dvojkolí řadu výhod:

- Jednoduchá konstrukce bez komplikovaných převodových systémů
- Menší rozměry podvozku a jeho menší zasahování do skříně vozidla
- Možnost individuální regulace výkonu [1]

Podle podílu nevypružených hmot můžeme individuální pohony rozdělit do tří základních skupin.

#### 2.1.1 Pohony s trakčním motorem ložiskovaným na nápravě

Při tomto konstrukčním řešení je hmota TM uložena na nápravě pomocí kluzných nebo valivých ložisek. Díky tomu nedochází při činnosti primárního vypružení k žádným vzájemným posuvným pohybům mezi osou nápravy a osou trakčního motoru, což činí toto řešení konstrukčně velmi jednoduché a levné na výrobu i údržbu. Většina hmotnosti (u některých řešení dokonce celá hmotnost) trakčního motoru spočívá přímo na nápravě bez jakéhokoliv vypružení, z čehož vyplývají velké dynamické účinky na trať, které limitují použití tohoto řešení nízkou maximální rychlostí.



Obr. 1 Pohon tlakovým motorem, vlevo pohled z čela, vpravo pohled shora.

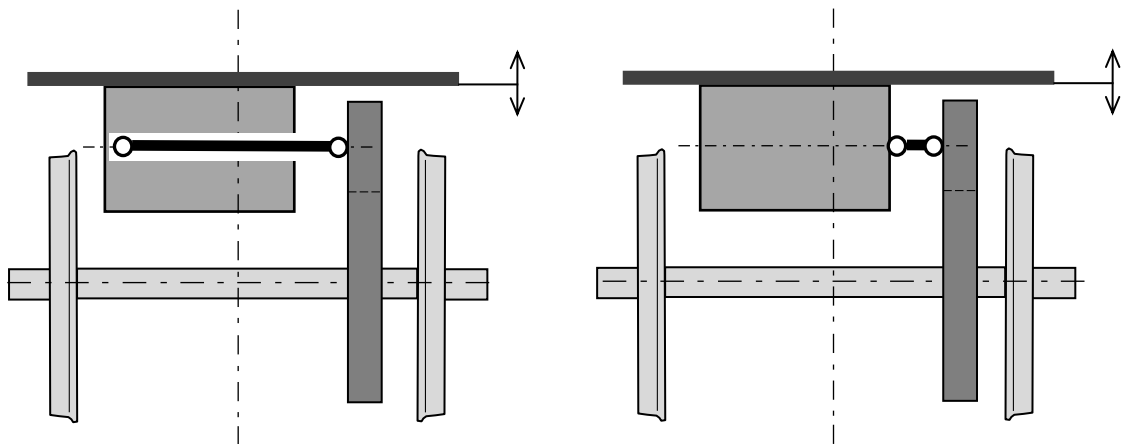


U traťových lokomotiv je nejrozšířenější aplikací této skupiny pohonů tzv. **pohon tlapovým motorem**. Tlapový TM je uložen na nápravě pomocí dvou tlapových ložisek na jedné straně a na druhé straně je zavěšen za rám podvozku. Podíl nevypružené hmoty motoru dosahuje až 80 %. Od svého patentu v roce 1885 [2] tento pohon prošel řadou vylepšení jako např. tangenciální vypružení ve velkém ozubeném kole nebo přesnější uložení pomocí valivých ložisek. V současné době při použití lehčích asynchronních motorů tento způsob pohonu vyhovuje pro použití do rychlosti 140 km/h. [1]

### 2.1.2 Pohony částečně vypružené

U druhé skupiny pohonů je již celá hmotnost trakčních motorů nesena rámem podvozku, a tedy vypružena primárním vypružením. Nápravová převodovka je ložiskovaná na nápravě a ta tak nese většinu její hmotnosti. Jelikož osa nápravy a osa TM při činnosti primárního vypružení navzájem konají posuvný pohyb, musí být kroutící moment z TM na nápravovou převodovku přenášen kloubovým hřídelem nebo naklápěcí spojkou.

U starších lokomotiv s velkými stejnosměrnými motory bývá **kloubový hřídel** zpravidla umístěn **v dutině rotoru**. Kloubový hřídel uvnitř rotoru může být připojen lamelovou spojkou (např. spojka *Sécheron* u lokomotiv Škoda 12E), křížovým kloubem (např. lokomotivy Škoda 71E), či zubovými a pryžovými spojkami.



Obr. 2 Pohony částečně vypružené.

Vlevo pohon kloubovým hřídelem v dutině rotoru, vpravo pohon kloubovým hřídelem vně rotoru.

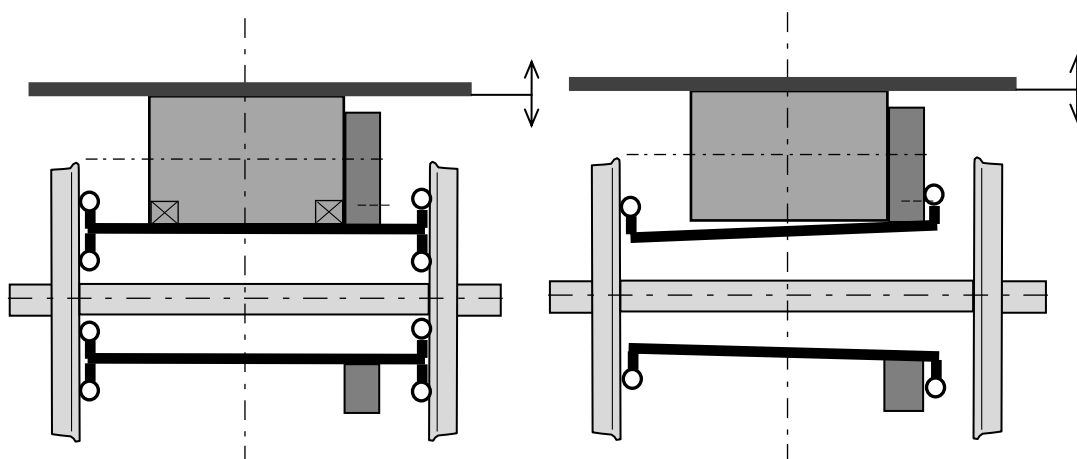
Menší rozměry moderních asynchronních motorů umožňují zástavbu **kloubového hřídele vně rotoru** (vedle TM). Typickým příkladem je pohon Siemens RHA (*Ritzelhohlwellenantrieb*) u

kteřého kloubový hřídel prochází uvnitř dutého pastorku nápravové převodovky. Tento pohon je použit u lokomotiv třídy Siemens Vectron a Hercules.

U vysokorychlostních elektrických jednotek, které díky distribuci pohonu na více podvozků mohou mít TM ještě menší, je mezi TM a nápravovou převodovkou dostatek prostoru pro **naklápěcí spojku**. Příkladem takových jednotek jsou ICE3 a Šinkansen, které používají spojku *Sumitomo*. [1]

### 2.1.3 Pohony plně vypružené

U plně vypružených pohonů jsou TM i nápravová převodovka navzájem pevně spojeny a uloženy na rámu podvozku a nutnost vyrovnání relativních pohybů je řešena až mezi převodovkou a nápravou. K tomu se využívá dutý hřídel obepínající nápravu, který může být spojkami připojen buďto k oběma kolům nápravy, nebo kloubově jen k jednomu kolu.



Obr. 3 Pohony plně vypružené.

Vlevo pohon dutým hřídelem obepínajícím nápravu, vpravo kloubovým dutým hřídelem.

#### a) Pohon dutým hřídelem obepínajícím nápravu.

V tomto případě je dutý hřídel připojen k oběma kolům pomocí ojníčkových nebo pružinových spojkových mechanismů, které umožňují přenos hnacího momentu při současné vzájemné pohyblivosti ve svislém i příčném směru. Příkladem takové spojky je mechanismus Alstom, předzídvaný též „*mechanismus s tančícím kroužkem*“.

Motor s trakční převodovkou tvoří jeden celek, na který je dutý hřídel pevně ložiskován. Jednou nevypruženou hmotou pohonu tedy zůstává dvojkolí se spojkovými mechanismy. Díky

tomu dosahuje ještě menší hmotnosti nevypružených částí než pohon kloubovým dutým hřídelem. Dalšími výhodami tohoto pohonu je symetričnost pohonu, který přivádí hnací moment na každé kolo současně, a sčítání torzních tuhostí dutého hřídele a nápravy, které jsou řazeny paralelně.

Přesto je tato konstrukce kvůli vysoké komplikovanosti spojkových mechanismů a nedosažitelnosti dokonale plynulého přenosu hnacího momentu při vzájemných svislých pohybech v dnešní době považován za slepou uličku a k jejím aplikacím u nových vozidel nedochází.



Obr. 4 Ojničkový mechanismus typu Alstom. [3]

#### **b) Pohon kloubovým dutým hřídelem**

Pohon kloubovým dutým hřídelem se od předchozího liší tím, že dutý hřídel je ke dvojkolí (zpravidla desce kola nebo samostatnému kotouči) připojen jen na jedné straně a na druhé straně je připojen k velkému ozubenému kolu nápravové převodovky. Spojkové mechanismy se tedy vyrovnávají pouze s nerovnoběžností osy dutého hřídele s osou nápravy a osou velkého ozubeného kola, proto jsou jednodušší a prakticky neovlivňují plynulost přenášeného momentu. [1]

Hlavní slabinou pohonu kloubovým dutým hřídelem je nutnost vždy vyvazovat z podvozku celý pohon najednou, neboť náprava volně prochází uvnitř velkého ozubeného kola a pro demontáž pohonu (např. při výměně dutého hřídele) je nutné vždy rozlisovat dvojkolí.

Z hlediska nevypružených hmot a dynamických účinků se jedná o nejsložitější pohon, přesto není vhodný pro celoplošné použití. Kvůli jeho vysokým pořizovacím nákladům a složitě

údržbě jsou často upřednostňovány jednodušší pohony a pohon dutým kloubovým hřídelem bývá využíván jen v nezbytných případech. Moderní pohony tlakovými motory jsou při použití asynchronních motorů využitelné pro rychlosti do 140 km/h a pohony s kloubovým hřídelem vně rotoru jsou i u vysoko výkonových lokomotiv použitelné pro rychlost 200 km/h (pohon RHA u Siemens Vectron).

## 2.2 Komponenty pohonu dvojkolí kloubovým dutým hřídelem

Tato podkapitola obsahuje popis a nejčastější možnosti provedení jednotlivých součástí pohonu.

### 2.2.1 Trakční motor

Zdrojem mechanické práce je v případě pohonu dvojkolí kloubovým dutým hřídelem třífázový asynchronní motor. Použití asynchronního motoru není nezbytnou podmínkou, ale vzhledem k jeho vysokému poměru výkonu a hmotnosti i dobré prostorové efektivity se v dnešní době jiné elektromotory používají jen ve výjimečných případech. Navíc u lokomotiv konstruovaných pro rychlosti nad 200 km/h, u kterých je použití plně vypruženého pohonu nejpřínosnější, jsou pro dosažení potřebné jízdní dynamiky jízdy nutné TM s výkonem alespoň 1,5 MW. Požadavku takového výkonu a zároveň rozměrů umožňujících zástavbu do podvozku nejsou ostatní druhy TM schopny dosáhnout (pro srovnání nejvýkonnější TM firmy Škoda *AL 4741 Flt* použitý například na lokomotivách řady 151 má maximální výkon 1,05 MW [4])



Obr. 5 Trakční motory Škoda ML 4550 K/6 s nasazeným pastorkem.

Autor: Škoda Transportation [5]

Třífázové asynchronní motory jsou plynule řízeny trakčními střídači (frekvenční měniče), které umožňují plynulou regulaci výkonu. Kotva motorů bývá obvykle zapojena nakrátko a statorové vinutí do hvězdy případně dvojitě hvězdy. [6]

Tab. 1 Porovnání parametrů trakčních motorů lokomotiv Škoda 109E a Siemens Taurus. [6] [7] [8]

Trakční motor	Škoda ML 4550 K/6	Siemens 1TB 2824
Železniční vozidlo	ČD 380 (Škoda 109E)	ÖBB 1216 (Taurus)
Jmenovitý výkon [kW]	1 600	1 600
Napětí [V]	1 130	2 027
Maximální fázový proud [A]	647	690
Zapojení statorového vinutí	dvojitá hvězda	hvězda
Jmenovité otáčky [ $\text{min}^{-1}$ ]	1 825	
Maximální otáčky [ $\text{min}^{-1}$ ]	3 700	3 900
Hmotnost [kg]	2 480	

### 2.2.2 Převodovka

Trakční převodovka je spojená s motorem a spolu s ním pevně uložená na rámu podvozku. V podstatě nejde o samostatně uloženou převodovku v pravém slova smyslu, ale pouze o trakční převod opatřený krytem. Ve skříni (plášti) převodu je otvor pro zasunutí nápravy a dutého hřídele, díky tomu může být dělicí rovina krytu kolmá k ose hřídele, což je výhodné z hlediska přesnosti uložení ložisek ozubených kol. [1]

Malé ozubené kolo (pastorek) je nalisován přímo na hřídeli rotoru a zabírá šikmým nebo šípovým ozubením do velkého dutého ozubeného kola, které je ložiskované přímo na převodové skříni. Na vnější straně převodovky často bývá více prostoru pro kloubovou spojku, proto dutinou v ozubeném kole v mnoha případech prochází nejen náprava, ale i dutý hřídel.

V případě kuželového převodu se jedná o samostatnou plnohodnotnou převodovku zavěšenou za rám podvozku. Vzhledem k rozměrům kuželového ozubeného kola není v dutině převodovky dost místa pro dutý hřídel, a proto musí být připojen na její vnitřní straně.

### 2.2.3 Kloubové spojky

Spojky a mechanismy které připojují dutý hřídel k převodovce i kolu musí umožňovat vzájemné posuny a natáčení os nápravy, dutého hřídele a převodovky. Existuje několik technických řešení přenosu hnacího momentu se zachováním potřebných volností.

a) Systém *Jacquemin*

Podvozek *Jackquemin* byl patentován v roce 1952 a použit na francouzských lokomotivách řad BB 9003 a BB 9004, která v roce 1955 dosáhla rychlostního rekordu 331 km/h. K přenosu kroutícího momentu používal *Jacquemin* prstencové klouby založené na principu Hookeova kříže. [9]



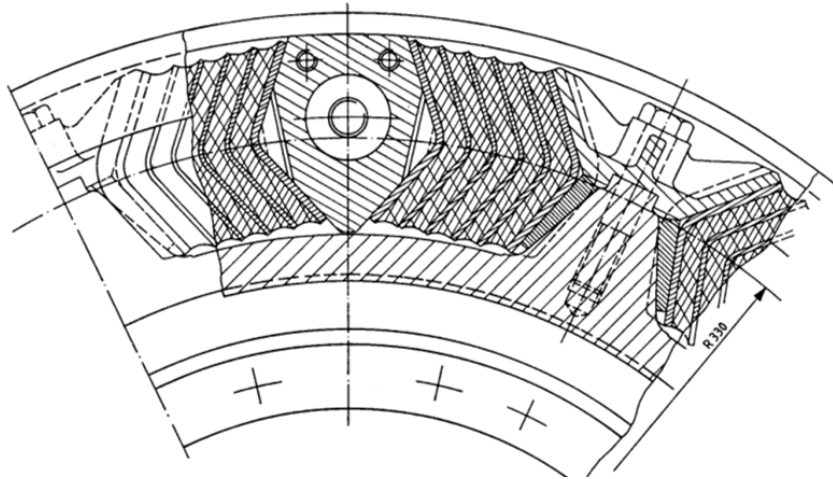
Obr. 6 Dvojkolí s dutým hřídelem a prstencovými klouby *Jacquemin*. Autor: **Puodou**. [12]

b) Ojničkový mechanismus

Nejčastějším způsobem připojení dutého hřídele je pomocí mechanismu s šesti ojnicemi. Ty jsou se zbytkem pohonu spojeny čepy s pryžovými pouzdry, které svojí deformací umožňují prostorový pohyb ojnic. [1]

c) Pryžové elastické spojky

Tato konstrukce použitá např. u švýcarských lokomotiv Re 460 používá pro přenos momentu vulkanizovaných šípových bloků po obvodu kola. [1]



Obr. 7 Pružná spojka z šípovitých pryžových bloků použitá u lokomotiv SBB 460. [1]

d) Zubová spojka

Nepříliš rozšířeným řešením je použití zubové naklápěcí spojky se sférickým ozubením. [10]

#### 2.2.4 Dutý hřídel

Dutý hřídel má obvykle podobu ocelové trubky s přírubami pro připojení kloubových spojek na obou stranách. Tvar dutého hřídele nemusí být nutně čistě válcovitý, ale může se na straně převodovky rozšiřovat nebo být po celé délce kónický.



Obr. 8 Kompozitový dutý hřídel lokomotivy Škoda 109E, vlevo je patrná příruba zubové spojky a brzdový kotouč, napravo nápravová převodovka. Autor: JPB. [10]

Alternativním materiálem pro výrobu dutých hřídelů jsou vláknové kompozity. Výhodou kompozitových hřídelů je nízká hmotnost, malý moment setrvačnosti a vysoká torzní tuhost. [11]

### 2.2.5 Dvojkolí

U hnacích vozidel s pohonem kloubovým dutým hřídelem se standardně používají dvojkolí s monoblokovými koly, kvůli požadavku připojení dutého hřídele k jednomu kolu. Monobloková kola jsou navíc vhodnější pro vyšší rychlosti než kola obručová.

Náprava nepotřebuje žádnou zvláštní konstrukci. Ve výjimečných případech je opatřena sedlem pro disk unašeče dutého hřídele, jinak je celá schovaná v dutém hřídeli a nelze na ni nic nasadit. Kvůli umožnění ultrazvukové defektoskopické kontroly mohou být použity nápravy duté. [13]

### 2.2.6 Součásti brzdy

Přestože se brzdová výstroj přímo nepodílí na přenosu hnacího momentu z TM na dvojkolí, je vhodné ji na tomto místě zmínit, neboť při pohonu dutým kloubovým hřídelem mnohdy nezbyvá na klasickou brzdovou výstroj dostatek místa a problematiku brzdy a pohonu je nutno řešit komplexně. Existuje několik možností brždění dvojkolí s tímto pohonem:

#### a) Špalíková brzda

Tento, dnes už zastaralý druh brzdy, lze požit univerzálně u všech typů pohonů. Nalezeme jej u prvních konstrukcí pohonů s kloubovým dutým hřídelem, ale s ohledem na požadavky na moderní vysokorychlostní vozidla je v dnešní době nepoužitelný. Mezi hlavní nevýhody špalíkové brzdy patří tepelné zatěžování disku, výrazné snížení součinitele tření (a tím i účinnosti brždění) při vysokých rychlostech a možnost snížení součinitele adheze důsledkem oleštění jízdní plochy. [13]

#### b) Brzdové kotouče v discích kol

U hnacích vozidel, kde kvůli pohonu není dostatek místa na klasické brzdové kotouče nasazené na nápravě, se rozšířila konstrukce brzdových segmentů vložených do disku kola. Jejich použití u pohonu dutým kloubovým hřídelem je komplikováno nutností připojení dutého hřídele k disku kola. Problém nedostatku místa v disku kola na umístění brzdového kotouče a připojení dutého hřídele lze řešit zvětšením průměru kol, nebo přidáním dalšího disku na nápravu, který slouží jako unašeč dutého hřídele.



c) Brzdové kotouče na pohonném hřídeli

Alternativním řešením nedostatku místa pro brzdové kotouče na nápravě je jejich umístění na jiný hřídel pohonu. Může to být přímo kloubová dutý hřídel, nebo prodloužený hřídel velkého ozubeného kola.

d) Brzdové kotouče na brzdovém hřídeli

Zvláštní konstrukcí je umístění brzdových kotoučů na speciální brzdový kotouč, který je s dvojkolím spojen přes převodovku. Díky odnímatelnému brzdovému hřídeli není zapotřebí při údržbě brzdových jednotek demontovat z podvozku žádné části pohonu, což je velká výhoda oproti předchozímu řešení. Nevýhodou může být zvýšení hmotnosti podvozku a přidání setrvačných hmot do oblasti čelníku. [13]

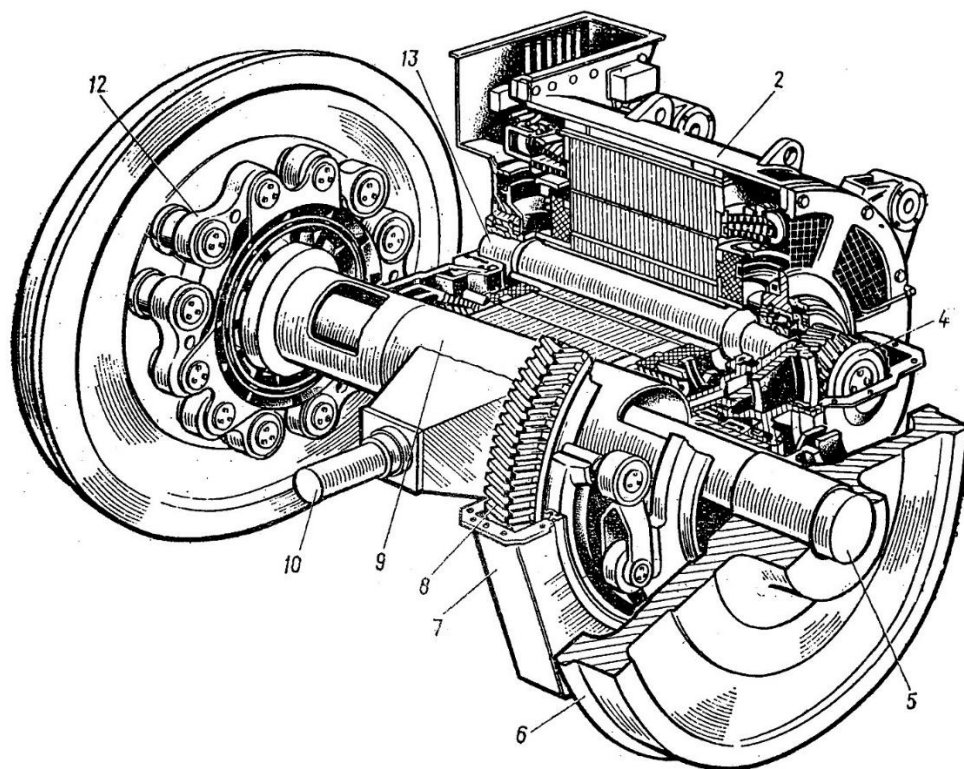
## 2.3 Používaná konstrukční řešení pohonu dvojkolí kloubovým dutým hřídelem

V této podkapitole jsou popsána některá konstrukční řešení tohoto pohonu použitelná při konstrukci moderních lokomotiv.

### 2.3.1 Integrovaná jednotka IGA

Integrovaná jednotka IGA (*Integrierter Gesamtantrieb*) švýcarského výrobce BBC (později ABB a ADtrans, dnes součást koncernu Bombardier) představuje první pokus o komplexně řešený pohon kloubovým dutým hřídelem, který se stal vzorem pro ostatní výrobce. Poprvé byl koncept tohoto pohonu aplikován na přelomu 70. a 80. let u lokomotiv BR 120 DB AG. Smyslem integrované jednotky je spojení všech částí pohonu do jednoho montážního celku. Minimalizací dělicích rovin a rozebíratelných spojů je dosaženo přesného vzájemného uložení dílů a minimálních vůlí.

V současné době je modernizovaná verze tohoto pohonu zařazena do nabídky modulárních pohonů Bombardier Mitrac pod označením DR 3600 F. [14]

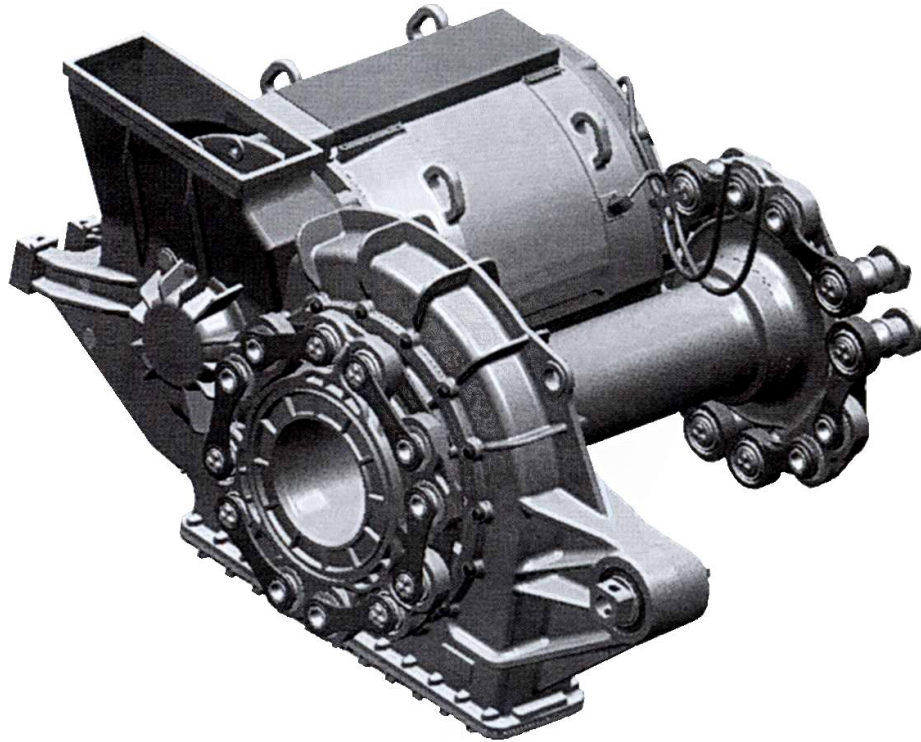


Obr. 9 Uspořádání pohonu integrované jednotky IGA.

Popis: 2 – TM, 4 – pastorek, 5 – náprava, 6 – věnec kola, 7 – kryt převodovky, 8 – velké ozubené kolo, 9 – dutý hřídel, 10 – konzola k uchycení pohonu za čelník, 12 – ojníčkový mechanismus. [22]

Zdrojem mechanické práce je třífázový asynchronní motor o výkonu 1,6 MW. Na prodloužený hřídel rotoru je nalisován pastorek s šikmým ozubením (u lokomotivy BR 120 ozubení šípové), které přímo zapadá do ozubení velkého ozubeného kola. Velké ozubené kolo je ložiskováno v převodové skříni (krytu převodu) a z jeho vnější strany je k němu připojen ojníčkový mechanismus. Trakční motor je s převodovkou pevně spojen a tento celek je ve dvou místech přes silentbloky přípojek k příčníku a na druhé straně je zavěšen pomocí konzoly za čelník. [13], [15]

Otvorem v převodovce prochází ocelový dutý hřídel, který je ke kolu i převodovce připojen pomocí mechanismu s šesti tangenciálně orientovanými ojníčkami. Ty jsou pomocí čepů v pryžokovových pouzdrech připojeny na střídačku k dutému hřídeli a kolu (ozubenému kolu).



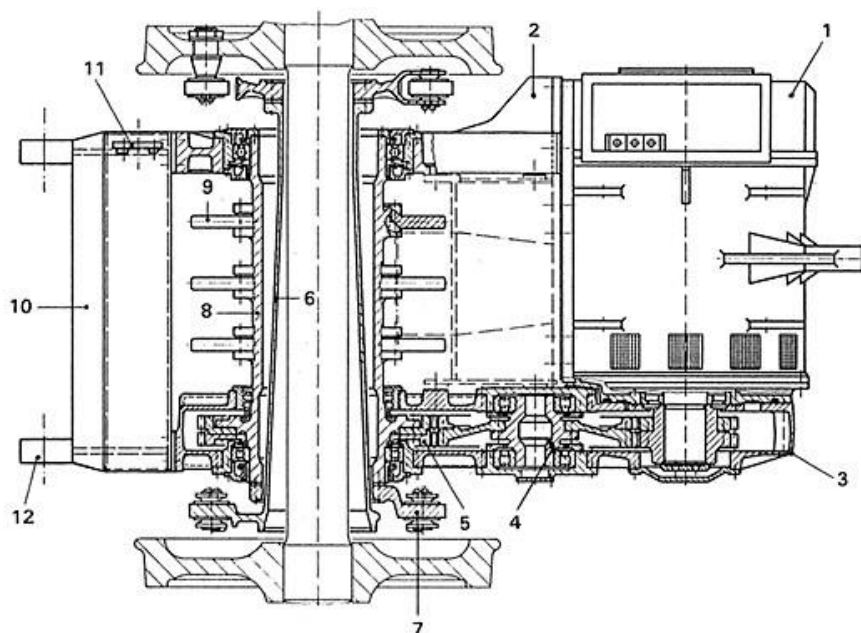
Obr. 10 Integrovaná jednotka IGA. [1]

Připojení brzdové výstroje v prvním provedení integrované jednotky nebylo nijak řešeno, k brzdění bylo použito klasické špalíkové brzdy.

### 2.3.2 ICE 1, 2

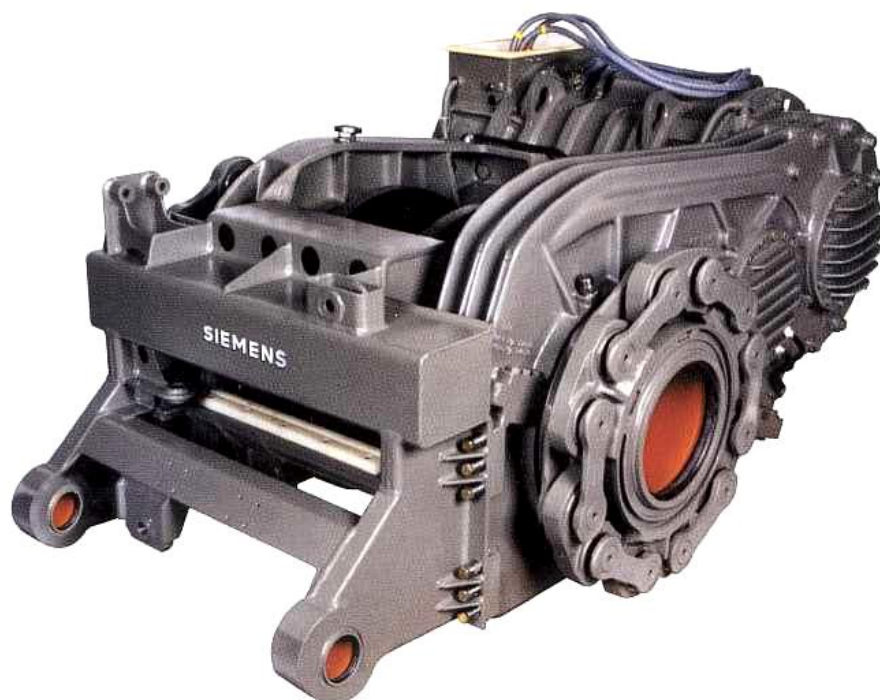
Rychlovlaky Intercity-Express první a druhé generace vyrábělo konsorcium firem Siemens, ABB, AEG, Krauss-Maffei a další pro DB AG v letech 1989–1993, resp. 1995–1997. Díky přímému zapojení firmy ABB do vývoje bylo možné pro pohon využít koncept integrované jednotky. Pro použití ve vysokorychlostní jednotce prošla původní integrovaná jednotka několika úpravami.

Revoluční technologií vyvinutou pro ICE je systém UmAn (*Umkoppelbarer Antriebsmasse*). Jedná se o pneumaticky ovládaný systém pro změnu uložení pohonu. Při nízkých rychlostech je celá hmotnost pohonu nesena rámem podvozku a je tedy vypružena primárním vypružením. Ve vysokorychlostním režimu je TM na jedné straně zavěšen přímo za skříň hnacího vozu, takže část hmotnosti pohonu je vypružena i sekundárním vypružením. Pohyblivost podvozku je v tomto režimu ovšem omezená. [16]



Obr. 11 Řez pohonem ICE1 [1]

Druhá úprava souvisí s požadavkem na vyšší brzdový účinek a nemožností použití špalíkové brzdy, kvůli tepelným účinkům na věnec kola. Řešením je použití tří klasických brzdových kotoučů na prodloužený dutý hřídel velkého ozubeného kola. Pro vytvoření dostatečného prostoru pro brzdové jednotky mezi dutým hřídelem a TM je do převodovky vloženo třetí ozubené kolo.



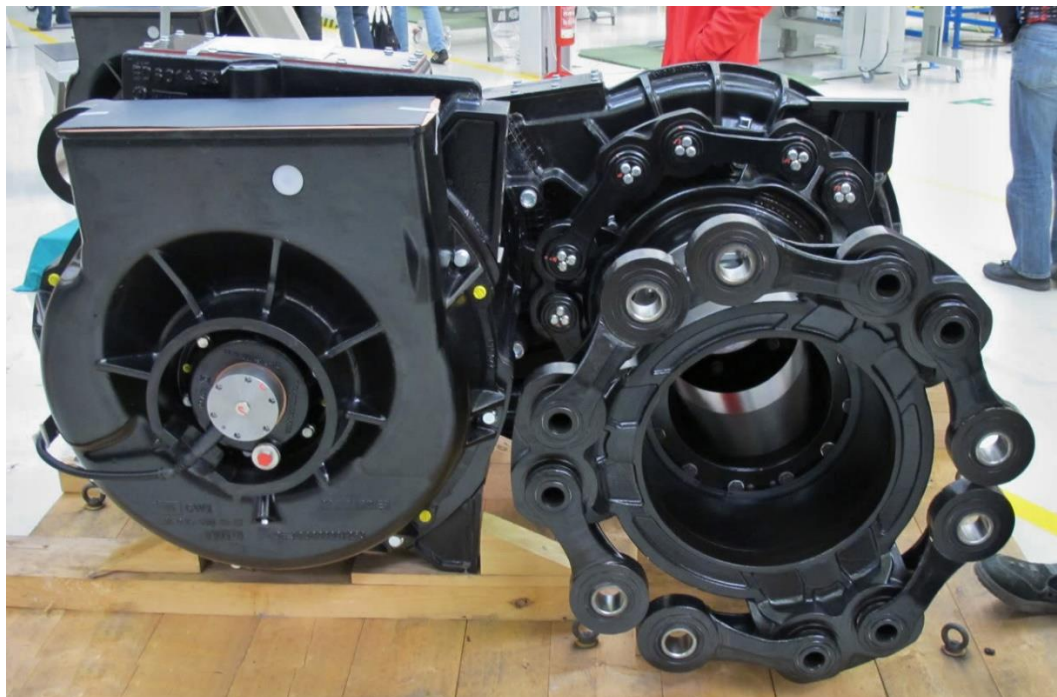
Obr. 12 Pohonná jednotka rychlovlaku ICE1. [23]

Třetí generace ICE koncept toho pohonu dále nerozvíjí, ale využívá distribuce pohonu na 50 % dvojkolí jednotky. Díky tomu mohou být jednotlivé pohony dimenzovány na menší zátěž (= nižší hmotnost), a proto lze požadavky na dynamické účinky splnit i s pohonem naklápěcí spojkou *Sumitomo* (viz kap. 2.1.2). [1]

### 2.3.3 Bombardier 2QIH a Mitrac DR 3700F

Tento pohon pod celým označením 2QIH 5018 byl použit u lokomotiv řady E 412 a E 464 FS vyráběných v letech 1998–2015. Stejně uspořádání pohonu je použito také u lokomotiv BR 101 DB AG z let 1996–1999. Pohonná jednotka Bombardier 2QIH v podstatě představuje nástupce původní integrované jednotky IGA. Původní koncept byl upraven s ohledem na zvyšujícími se nároky na brzdny výkon. [1], [17], [18]

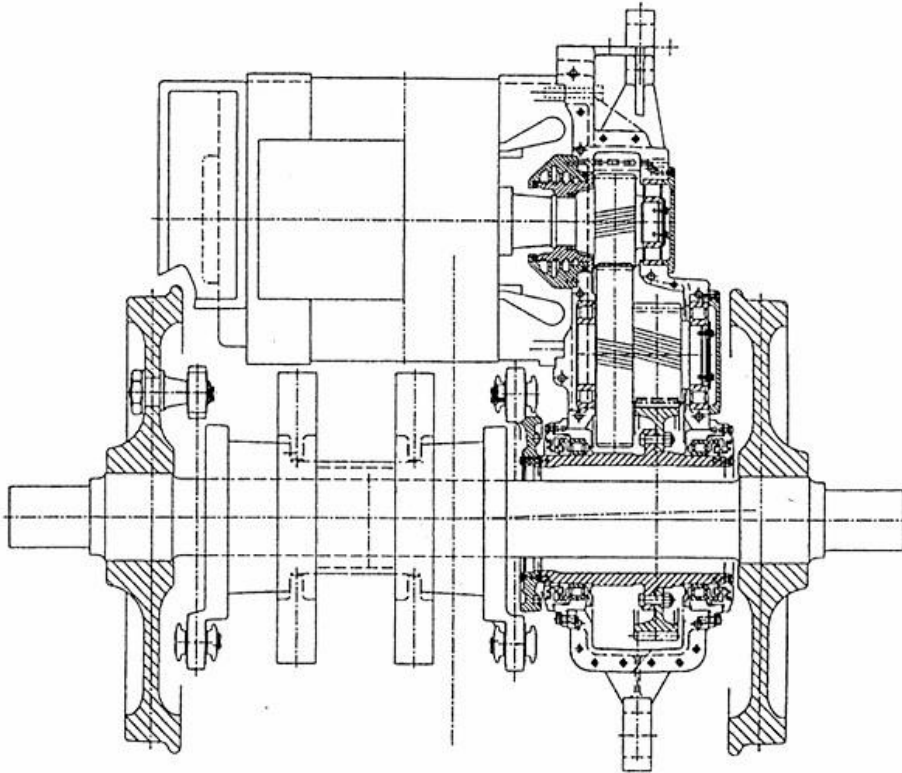
Stejný typ pohonu již pod novým označením Mitrac DR 3700F byl použit u amerických duálních lokomotiv ALP-45DP vyráběných v letech 2010 – 2012. Maximální rychlost lokomotiv je 201 km/h (125 mph) v elektrickém režimu a 161 km/h (100 mph) v dieslovém režimu. [39]



Obr. 13 Pohon Mitrac DR 3700F pro duální lokomotivy ALP-45DP. Pohon na fotce je bez nasazených brzdových kotoučů, ty jsou dělené a k pohonu se montují až po zástavbě do podvozku. [40]

Díky vložení předlohového hřídele mezi pastorek a velké ozubené kolo bylo docíleno zvětšení osové vzdálenosti TM a dvojkolí, čímž vznikl dostatečný prostor pro brzdové kotouče. Zároveň vznikla možnost zmenšit průměr velkého ozubeného kola, díky čemuž klesl minimální průměr

kol, pro který lze pohon použít. S tím souvisí i skutečnost, že kloubový dutý hřídel nyní již neprochází otvorem ve velkém ozubeném kole, ale je k němu připojen ojníčkovým mechanismem z vnitřní strany. Dva brzdové kotouče jsou nasazené přímo na kloubový dutý hřídel a jsou dělené pro možnost výměny bez rozlisování dvojkolí.

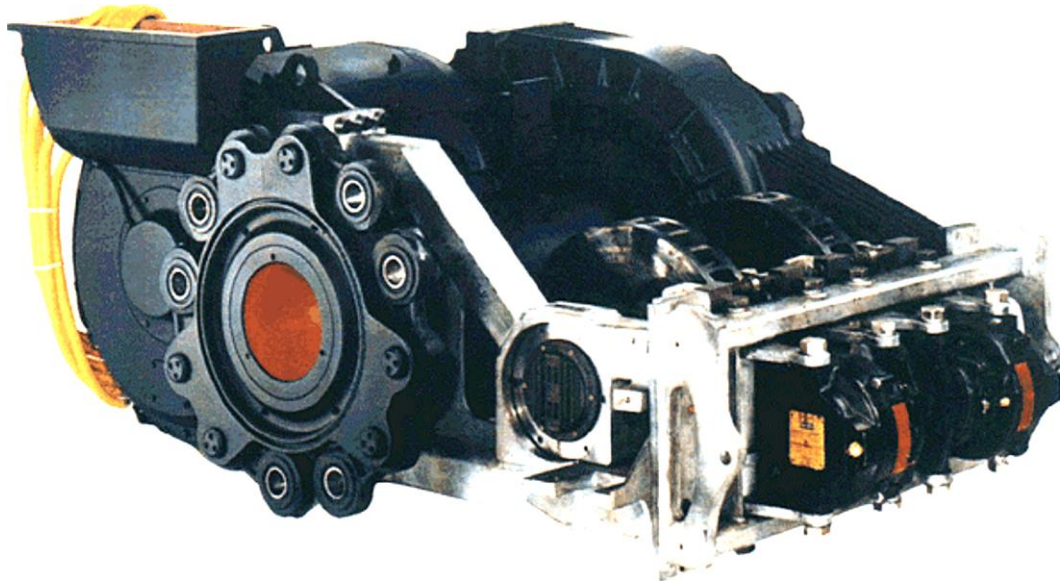


Obr. 14 Řez pohonem Bombardier 2QIH s brzdovými kotouči na kloubovém dutém hřídeli. [1]

#### 2.3.4 HAB (Siemens Taurus)

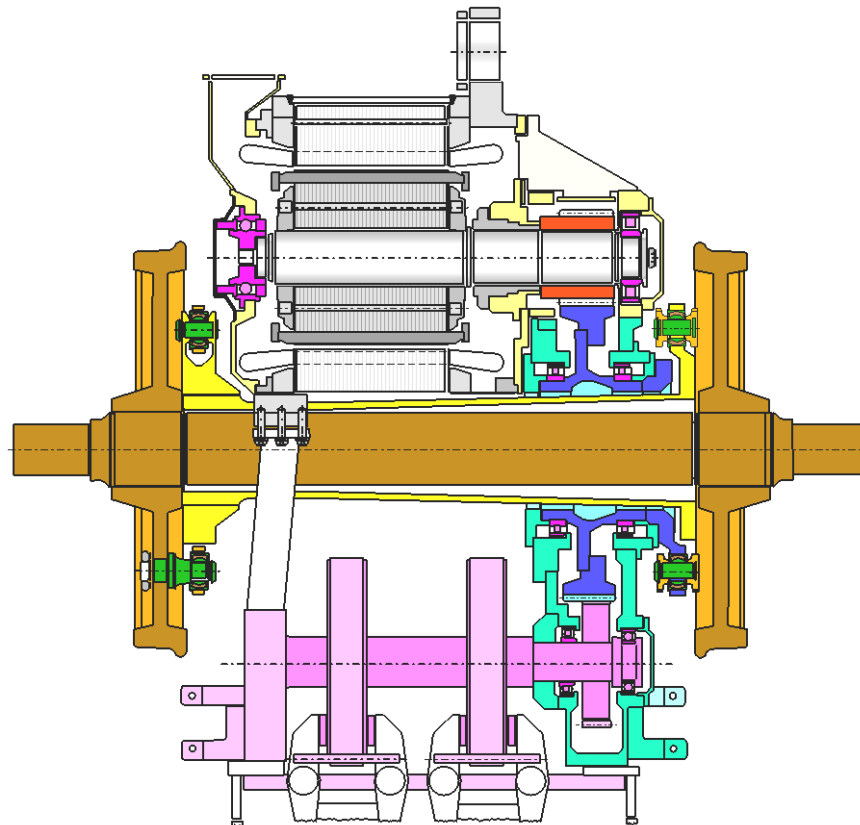
Pohonná jednotka HAB (*HochleistungAntrieb mit Bremswelle*) je použita na typizovaném podvozku SF1 pro lokomotivy EuroSprinter druhé generace. Vyvinuta byla speciálně pro splnění vysokých požadavků ÖBB na brzdny výkon mechanické brzdy při výběrovém řízení na lokomotivy řady 1016 a 1116. [13]

Přenos kroutícího momentu probíhá jako u původního pohonu BBC z pastorku nalisovaného přímo na hřídeli rotoru na velké ozubené kolo, kterým prochází dutý kloubový hřídel. Ten je ke dvojkolí i velkému ozubenému kolu připojen pomocí ojníčkových mechanismů se šesti ojníčkami.



Obr. 15 Pohon HAB lokomotivy Taurus s brzdovým hřídelem [23]

Z druhé strany do velkého ozubeného kola zapadá další ozubené kolo, kterým je k pohonu připojen zvláštní brzdový hřídel se dvěma brzdícími kotouči. Pro usnadnění jejich výměny je celý brzdový hřídel konstruován jako snadno vyjímatelný. Díky připojení brzdového hřídele přes převod se brzdové kotouče otáčejí více než dvojnásobnou rychlostí oproti dvojkolí, což má příznivý vliv na jejich chlazení. [13]

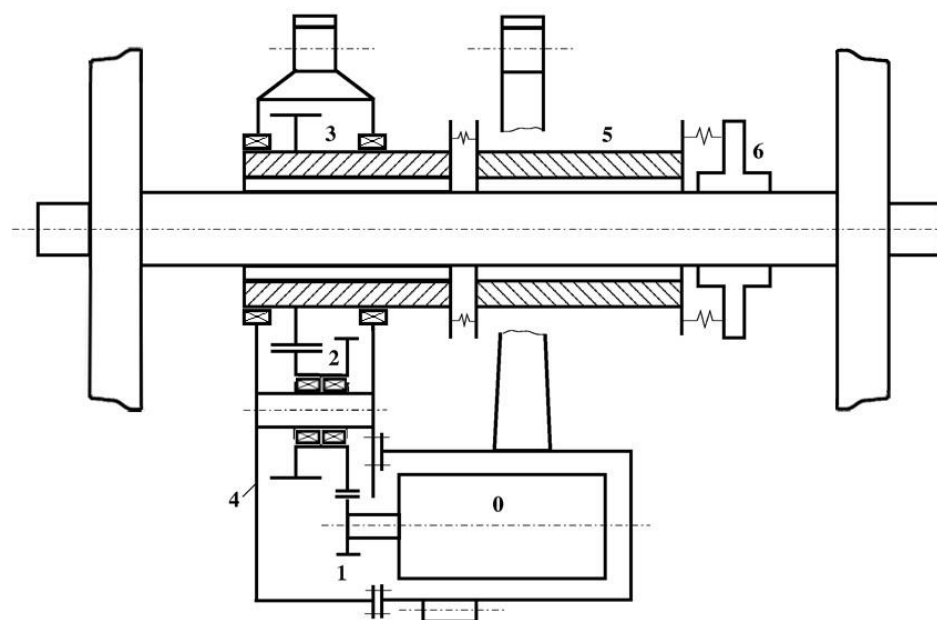


Obr. 16 Řez pohonem HAB. [23]

Celý pohon je připojen na straně TM v jednom bodě k hlavnímu příčnicku podvozku a na druhé straně pomocí převodovky k čelníku podvozku. Paralelně s převodovkou probíhá konzola, která kromě zbývajících třetího bodu uložení pohonu (taktéž k čelníku podvozku) zajišťuje i ložiskování volného konce brzdového hřídele a mezi ní a převodovkou je vložen rám nesoucí brzdové jednotky.

### 2.3.5 Škoda 471

Řešení pohonu podvozků 1 EV, které byly použity pro elektrické jednotky řad ČD 471, ZSSK 671, LG 575 a UZ 675, představuje v podstatě první konstrukci pohonu kloubovým dutým hřídelem v České republice.[19]



Obr. 17 Schéma pohonu EJ 471.

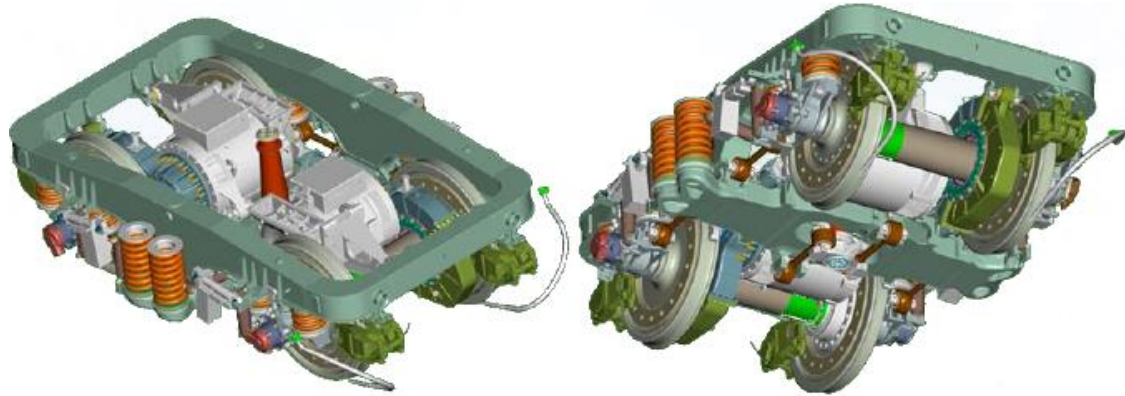
Popis: 0 – rotor TM, 1 – pastorek, 2 – předlohový hřídel, 3 – dutý hřídel převodovky s velkým ozubeným kolem, 4 – kryt převodovky, 5 – kloubový dutý hřídel, 6 – disk unášecí kloubového hřídele

Zdrojem mechanické práce v případě hnacího podvozku pro jednotku 471 je relativně malý asynchronní motor o výkonu 500 kW. S ním je pevně spojena převodovka s vloženými ozubenými koly na předlohovém hřídeli. Kloubový dutý hřídel je na jednom konci připojen k vnitřní straně převodovky a na druhé straně k disku unášecí kloubového hřídele. Obě kloubová spojení jsou realizovaná pomocí mechanismů se čtyřmi ojnicemi. Díky připojení dutého hřídele k speciálnímu disku jsou desky kol volné pro montáž brzdových kotoučů. [13]



### 2.3.6 Škoda 109E

Pohon společnosti Škoda Transportation vyvinutý pro lokomotivu továrního označení 109E je použit v lokomotivách ČD 380, ZSSK 381 a DB 102. Výroba těchto pohonů začala v roce 2005 a i v současné době tvoří vrchol nabídky plzeňského výrobce. [20]



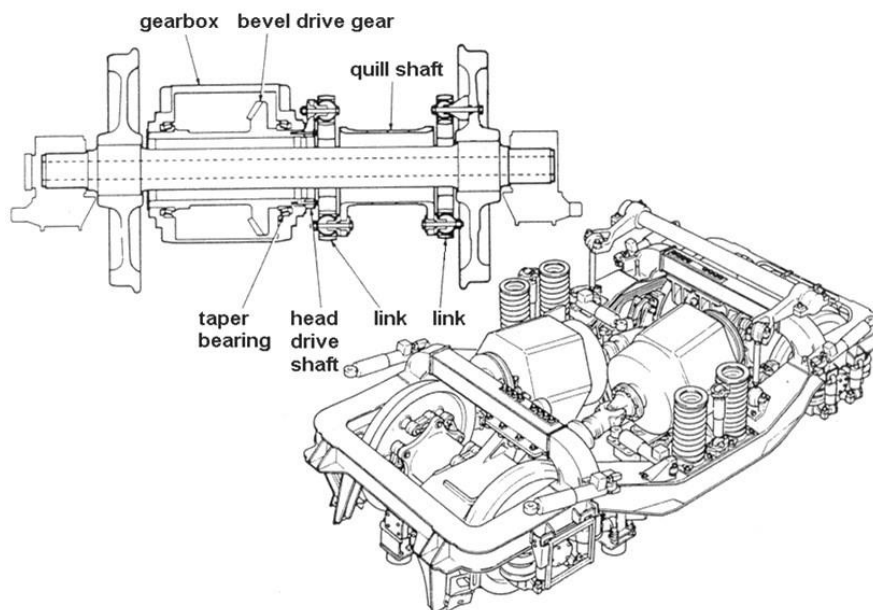
Obr. 18 Model podvozku lokomotivy 109E. [10]

Třífázový asynchronní motor je pevně spojen s převodovkou a na rám podvozku uchycen jako jeden celek. Dutý kloubový hřídel z vláknového kompozitu prochází otvorem v převodovce a k velkému ozubenému kolu je připojen z vnější strany. K připojení dutého hřídele k převodovce i dvojkolí je použito zubové spojky se sférickým ozubením. Díky menším rozměrům zubové spojky oproti ojníčkovému mechanismu a zvolení kol s relativně velkým průměrem (nové 1250 mm) je v disku kol dostatek prostoru pro montáž brzdových kotoučů. [10]

### 2.3.7 Pohon kloubovým dutým hřídelem s podélně umístěnými TM

Nepříliš rozšířenou verzi pohonu s podélně uloženými TM nalezneme například u britských lokomotiv řady 91. Tyto lokomotivy vyráběné v letech 1988–1991 firmou Alstom jsou určeny pro vedení souprav IC s řídicím vozem a konstruované na rychlost 225 km/h. [1], [21]

Z podélně orientovaných TM je kroutící moment přenášen klasickým kloubovým hřídelem (slouží k vyrovnání nesouososti) do duté kuželové převodovky Voith, která je pevně uchycena rámu podvozku. Kloubový dutý hřídel je připojen k vnitřní straně převodovky i kolu pomocí ojníčkových mechanismů. Brzdění těchto pohonů bývá nejčastěji kombinací špalíkové brzdy a brzdového kotouče na kloubovém hřídeli nebo prodloužené hřídeli TM.



Obr. 19 Podvozek britské lokomotivy řady 91 s podélně uloženými TM. [1]

### 3 Vybrané problémy tohoto typu pohonu

Pohon kloubovým dutým hřídelem patří mezi tzv. nesymetrické pohony, u kterých je celý výkon trakčního motoru přiveden na jedno kolo dvojkolí a teprve přes nápravu se jeho část dostane i na druhé kolo. Kvůli tomu jsou nesymetrické pohony náchylnější na kmitání kola proti kolu než jiné pohony. Soustavu pohonu dutým kloubovým hřídelem navíc tvoří několik sériově řazených konstrukčních částí s různou torzní tuhostí, proto je potřeba při konstrukci takového pohonu brát v potaz jeho vibrační vlastnosti.

Protože jednotlivé části pohonu a vazby mezi nimi nejsou dokonale tuhé, dochází při zatížení pohonu hnacím momentem na straně TM a adhezními momenty s opačným smyslem na kolech k jejich zkrutu. Tyto pružné deformace v sobě akumulují potenciální energii. Při překročení meze adheze jsou adhezní momenty nahrazeny třecími momenty o řádově nižší velikosti. Důsledkem toho dojde k uvolnění značné části akumulované potenciální energie a soustava se rozkmitá vlastními kmity.

Takto vzniklé vlastní kmitání není pro soustavu nebezpečné, neboť je vyvoláno jednorázovou změnou silových poměrů a účinkem vnitřního tlumení v materiálu samo postupně zanikne. Pokud ovšem na soustavu začne působit síla (silová dvojice) o stejné frekvenci jako je vlastní frekvence soustavy, dojde k rezonanci a amplitudy kmitů mohou teoreticky růst až do nekonečna (platí pro soustavu bez žádného tlumení). [32]

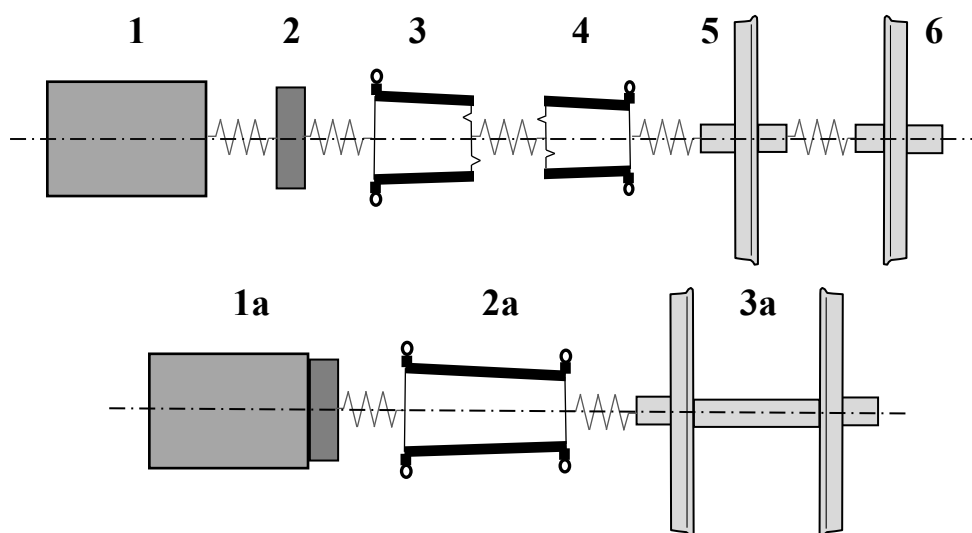
Stav na pomezí lpění a prokluzu se nazývá přechodový děj. Analýza a modelování torzního systému pohonu během přechodového děje má navíc uplatnění při řešení problematiky výkonového řízení vozidla s maximálním využitím meze adheze a „dokonalého protiskluzového řízení“. [24]

#### 3.1 Metodika výpočtu vlastních tvarů kmitů náhradní torzní soustavy

V následující podkapitole je představen postup vyšetřování vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitání náhradní torzní soustavy pohonu dvojkolí dutým kloubovým hřídelem. Nejprve je třeba uvést některé základní pojmy a připomenout některé metody a postupy klasické mechaniky a matematiky.

### 3.1.1 Dynamický model torzní soustavy pohonu

Pro účely vyšetření vlastních kmitů budeme pohon dvojkolí považovat za konzervativní soustavu, ve které jsou jednotlivé rotační hmoty spojeny kinematickými a pružnými vazbami. Přítomnost tlumení (tlumící vlastnosti pryžových bloků a vnitřní útlum materiálu) pro zjednodušení zanedbáme.



Obr. 20 Příklady náhradních modelů torzní soustavy pohonu.

Popis: 1 TM (rotor), 2 převodovka, 3 a 4 polovina dutého hřídele, 5 a 6 polovina dvojkolí,  
1a TM s převodovkou, 2a dutý hřídel, 3a dvojkolí.

Vlastní frekvence a vlastní tvary kmitání soustavy závisí pouze na její vnitřní struktuře (na velikosti hmot a tuhostí) a nesouvisí s vnějším silovým působením (hnací moment na rotoru, adhezní momenty na kolech). Proto pro vyšetření těchto charakteristik vnější působení zanedbáme a soustavu považujeme za izolovanou.

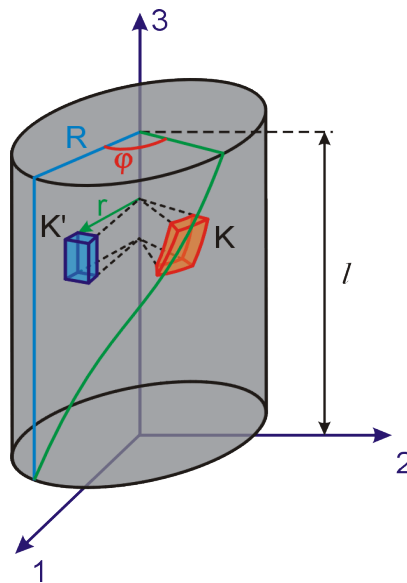
Počet hmot v náhradním modelu můžeme zvolit stejný, jako je počet rotačních hmot ve skutečném pohonu (rotor TM, ozubená kola převodovky, dutý hřídel, dvojkolí), nebo jej můžeme zjednodušit sloučením některých hmot dohromady, či rozšířit. Nejjednodušší základní model má pouze 2 hmoty – rotor TM a dvojkolí. Rozšíření modelu je vhodné provést zejména vyčleněním všech hmot mezi kterými jsou pružné vazby a rozdělením dlouhých hřídelů (dutý hřídel, náprava) na 2 hmoty. Tím můžeme v modelu zohlednit i vliv torzní tuhosti hřídelů na celkovou torzní charakteristiku modelu.

### 3.1.2 Torzní tuhost válcového tělesa

Torzí neboli zkrutem rozumíme deformaci obecně válcového tělesa, při níž dochází k vzájemnému stáčení průřezů kolmých k jeho podélné ose. Každý element hmoty válce (na obr. 21) označen jako  $K'$  a  $K$ ) je při torzi posunut, otočen a deformován smykem, proto pro elastickou torzní deformaci platí Hookův zákon pro smyk

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (1)$$

kde  $\gamma$  [rad] je úhel smyku,  $\tau$  [Pa] tečné napětí a  $G$  [Pa] modul pružnosti ve smyku.



Obr. 21 Zkrut válce. [25]

Moment potřebný ke zkrutu válce lze vyjádřit vztahem

$$M = \int_S r \tau dS, \quad (2)$$

ze kterého po dosazení z rovnice (1), integraci a další úpravě dostaneme

$$M = \frac{G\pi R^4}{2l} \varphi, \quad (3)$$

kde  $R$  [m] je poloměr válce,  $l$  [m] délka válce a  $\varphi$  [rad] úhel stočení jedné podstavy vůči druhé.

Pro dutou trubku má rovnice (3) tvar

$$M = \frac{G\pi(R^4 - r^4)}{2l} \varphi, \quad (4)$$

kde  $r$  [m] je vnitřní průměr trubky. [25]

V analogii s rovnicí pro tuhost pružiny

$$k = \frac{F}{\Delta l}, \quad (5)$$

můžeme pro torzní tuhost napsat

$$k = \frac{M}{\varphi}. \quad (6)$$

Dosazením rovnice (3) do rovnice (6) získáme vztah pro torzní tuhost  $k$  [Nm·rad<sup>-1</sup>] válcového tělesa

$$k = \frac{G\pi R^4}{2l}, \quad (7)$$

respektive dutého válcového tělesa

$$k = \frac{G\pi(R^4 - r^4)}{2l}. \quad (8)$$

Tímto způsobem, můžeme provést výpočet tuhosti nápravy – vztah (7) – a dutého hřídele – vztah (8). U kloubových spojek, další poddajné části pohonu, je situace složitější. Metodika výpočtu jejich tuhosti závisí na typu kloubové spojky (viz kap.2.2.3). Obecně platí, že přesné hodnoty tuhostí kloubových spojek se s ohledem na jejich složitou stavbu určují experimentální cestou.

### 3.1.3 Zápisy pohybových rovnic

Pohybová rovnice vyjadřuje vztah mezi veličinami pohybu a silovými veličinami a představuje matematický model pro vyšetřování dynamických poměrů daného bodu. [26] V případě bodu uvolněného ze soustavy musíme působící síly rozdělit na síly vnější  $\vec{F}^E$  a síly vnitřní  $\vec{F}^I$ . Pro výslednice všech sil působících na  $i$ -tý bod uvolněného bodu pak platí

$$\vec{F}_i = \sum_k \vec{F}_{ki}^E + \sum_j \vec{F}_{ji}^I, \quad (9)$$

kde  $k$  je index jednotlivých vnějších sil a  $j$  index jednotlivých vnitřních sil, které současně působí na bod  $i$ . V případě torzní soustavy můžeme zapsat analogickou rovnici pro působící momenty.

Protože je soustava izolovaná, žádné vnější momenty na ni nepůsobí a vektor výslednice všech momentů působící na bod  $i$  je totožný s vektorem výslednice všech vnitřních momentů

$$\vec{M}_i = \sum_j \vec{M}_{ji}^I. \quad (10)$$

Pohybové rovnice hmotného bodu můžeme zapsat ve dvou základních tvarech:

- a) Podle Newtona
- b) Podle D'Alemberta

### Pohybové rovnice podle Newtona

Newtonův zápis pohybových rovnic vychází z II. Newtonova pohybového zákona. Podle něj se každé těleso, na které působí síla, pohybuje se zrychlením, jehož velikost je přímo úměrná působící síle a nepřímo úměrná jeho hmotnosti. Tuto formulaci lze vyjádřit vztahem

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i, \quad (11)$$

kde  $\vec{F}_i$  [N] je výslednice všech sil působících na hmotný bod  $i$ ,  $\vec{a}_i$  [m·s<sup>-2</sup>] je vektor zrychlení bodu  $i$  a  $m_i$  [kg] hmotnost bodu, kterou při řešení úloh klasické mechaniky můžeme považovat za časově konstantní.

Pro rotační pohyb můžeme napsat analogickou rovnici ve tvaru

$$J_i \cdot \vec{\varepsilon}_i = \vec{M}_i, \quad (12)$$

kde  $\vec{M}_i$  [N·m] je výslednice všech silových dvojic působících na bod  $i$ ,  $\vec{\varepsilon}_i$  [rad·s<sup>-2</sup>] je vektor úhlového zrychlení bodu  $i$  a  $J_i$  [kg·m<sup>2</sup>] moment setrvačnosti.

### Pohybové rovnice podle D'Alemberta

D'Alebertův princip lze formulovat tak, že síly působící na (uvolněný) bod jsou v rovnováze se silou setrvačnou.

$$\vec{F}_i - \vec{D}_i = \vec{0}. \quad (13)$$

Setrvačná síla  $\vec{D}_i$  je jen jiné označení pro veličinu  $-m_i \cdot \vec{a}_i$ , není to tedy skutečná síla působící na bod a lze ji označit jako fiktivní. Pomocí ní dostává pohybová rovnice anulovaný tvar, připomínající statickou rovnováhu působících sil. Zavedení setrvačných sil umožňuje převést úlohu sestavování pohybových rovnic v dynamice na úlohu sestavování rovnovážných rovnic fiktivní „dynamické rovnováhy“ a pracovat se systémem působících sil rozšířeným o síly setrvačné podle pravidel statiky.

Pohybové rovnice sestavené Newtonovým a d'Alembertovým způsobem se liší z matematického hlediska jen formálně. [26]

Soustavu diferenciálních pohybových rovnic pro soustavu hmotných bodů můžeme přepsat do maticového tvaru:

$$M\ddot{x} + Kx = f, \quad (14)$$

kde  $M$  je diagonální matice hmot,  $K$  je matice tuhostí a  $f$  vektor budících sil.

Pro základní dvouhmotový model torzní (rotační) izolované soustavy pohonu bude maticový zápis pohybových rovnic:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

### 3.1.4 Sestavení pohybových rovnic pro soustavu hmotných bodů

Náhradní torzní model pohonu je příkladem soustavy vzájemně vázaných hmotných bodů. Pro jednotlivé hmoty soustavy můžeme sestavit pohybové rovnice jako pro volný hmotný bod následujícími způsoby:

- a) Metoda postupného uvolňování
- b) Metoda redukce
- c) Pomocí Lagrangeových rovnic 2. druhu

#### Metoda postupného uvolňování

Tato metoda převádí vyšetřování pohybů soustavy těles na řešení pohybu jednotlivých těles. Jde o univerzální metodu, umožňující celkové dynamické řešení mechanické soustavy. [27]

Uvolnit těleso znamená pomyslně odstranit vazby a nahradit je příslušnými vazbovými účinky (silami a momenty), které vazba přenáší. [28]



Následně sestavíme pohybové rovnice pro uvolněná tělesa, které však musíme doplnit kinematickými rovnicemi a rovnicemi vazeb, tak aby počet rovnic byl roven počtu neznámých. Vyloučením všech závislých veličin ze soustavy rovnic dostaneme vlastní pohybové rovnice.

### Metoda redukce

Metoda redukce spočívá v náhradě složité dynamické soustavy (nebo její části) dynamikou jednoho tělesa. Podstatou metody redukce je shodnost řešení úlohy redukovaného tělesa s řešením úlohy původní soustavy. Toho je dosaženo, pokud platí následující podmínky:

$$E_{k\ red} = E_{k\ skut}, \quad (16)$$

$$P_{red} = P_{skut}. \quad (17)$$

V případě, že všechny působící síly jsou konzervativní, lze vycházet z rovnosti potenciálních energií skutečné a redukované soustavy [27]

$$E_{p\ red} = E_{p\ skut}. \quad (18)$$

Metodu redukce je výhodné použít, pokud se hmoty soustavy pohybují různými úhlovými rychlostmi  $\omega_i$ .

### Lagrangeovy rovnice 2. druhu

Lagrangeovy rovnice 2. druhu byly zavedeny proto, abychom nemuseli vyšetřovat rozklady sil a mohli pracovat pouze se skalárními veličinami (kinetická energie). Přesto je ale v Lagrangeových rovnicích druhého druhu pravá strana rovna zobecněné síle a tím jsou tedy i Lagrangeovy rovnice stále závislé na působících silách. [29]

Základní tvar Lagrangeovy pohybové rovnice pro konzervativní soustavy je

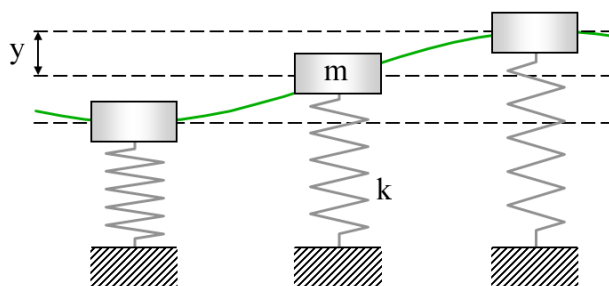
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta E_k}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta E_k}{\delta q_j} + \frac{\delta E_p}{\delta q_j} = Q_j, \quad (19)$$

kde  $E_k$  je pohybová energie soustavy,  $E_p$  potenciální energie soustavy,  $q_j$  všeobecná souřadnice bodu,  $\dot{q}_j$  všeobecná rychlost bodu a  $Q_j$  zobecněná síla. V případě inerciální (izolované) soustavy je zobecněná síla  $Q_j$  rovna nule

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta E_k}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta E_k}{\delta q_j} + \frac{\delta E_p}{\delta q_j} = 0. \quad (20)$$

### 3.1.5 Vlastní frekvence

„Vlastní kmity jsou kmity soustav, na které nepůsobí buzení. Vlastní kmity jsou vlastní čísla získaná řešením diferenciální rovnice popisující dané kmitání. Frekvence vlastních kmitů se označuje jako vlastní frekvence (kmitočet).“ [30]



Obr. 22 Mechanický oscilátor. [31]

Kmitání netlumeného oscilátoru vlastní frekvencí je stav, kdy se pohybová energie tělesa cyklicky mění na potenciální a zase zpět. Vyjádření vztahu pro vlastní frekvenci lze jednoduše určit na modelu mechanického oscilátoru.

$$\Delta E_k = -\Delta E_p \quad (21)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ky^2, \quad (22)$$

přičemž pro rychlost  $v$  platí

$$v = 2\pi f y, \quad (23)$$

kde  $f$  je frekvence kmitání a  $y$  amplituda kmitů.

Po dosazení do vztahu (22) dostaneme

$$\frac{1}{2}m \cdot 2^2\pi^2 f^2 y^2 = \frac{1}{2}ky^2, \quad (24)$$

odkud

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (25)$$

Ze vztahu vyplývá, že velikost vlastní frekvence kmitajícího tělesa se zvyšuje s rostoucí tuhostí anebo s klesající hmotností. [31]

Počet vlastních frekvencí soustavy je rovný počtu stupňů volnosti. V našem případě, kdy každá hmota modelu má 1 stupeň volnosti (může se pouze otáčet okolo osy pohonu), je počet vlastních frekvencí shodný také s počtem hmot náhradního modelu.

Pro soustavy více kmitajících hmot lze teoreticky velikosti vlastních frekvencí jednotlivých hmot přibližně odhadnout zafixováním ostatních hmot k základnímu rámu nebo jejich zanedbáním a vlastní frekvenci počítat z výsledné tuhosti  $k_c$ . Takovéto řešení pro soustavy s více než třemi hmotami však dává pouze hrubou představu o velikosti vlastní frekvence a jeho výsledky jsou pro další řešení nepoužitelné.

Vlastní kmitání budeme brát jako harmonický pohyb všech hmot soustavy se stejnou vlastní frekvencí. Hledané řešení rovnice má tvar

$$x = u \cdot e^{i\Omega_0 t}, \quad (26)$$

kde  $\Omega$  je úhlová frekvence systému a  $u$  je neznámý vektor amplitud. Uvažujeme, že

$$\ddot{x} = -\Omega_0^2 u e^{i\Omega_0 t}. \quad (27)$$

Dosazením předpokládaného řešení (26) a (27) do rovnice (25), dostaneme po úpravě

$$(K - \Omega_0^2 M) \cdot u = 0. \quad (28)$$

Rovnice (28) představuje soustavu homogenních rovnic pro neznámé amplitudy  $u$ . Pro netriviální řešení ( $u \neq 0$ ) musí být determinant soustavy nulový.

$$\det|K - \Omega_0^2 M| = 0. \quad (29)$$

Rozvinutím *frekvenčního determinantu* (29) obdržíme polynom neznámé  $\Omega_0^2$  takového stupně, jako je počet stupňů volnosti soustavy:

$$a_n \Omega^{2n} + a_{n-1} \Omega^{2(n-1)} + \dots + a_1 \Omega^2 + a_0 = 0. \quad (30)$$

Pro pozitivně definitivní matice  $M$  a  $K$  jsou kořeny této rovnice – vlastní kruhové frekvence reálné, nezáporné hodnoty, které uspořádáváme vzestupně. [26]

Vlastní frekvence  $f$  lze potom ze získaných vlastních kruhových frekvencí získat jako

$$f_j = \frac{\Omega_j}{2\pi}. \quad (31)$$

Výpočet vlastních čísel můžeme provést i jinou metodou než pomocí frekvenčního determinantu - např. Jacobiho metodou, nebo pomocí QR algoritmu.

Další úpravou vhodnou i pro tlumené kmitání je snížení řádu pohybové rovnice. To provedeme přidáním soustavy rovnic

$$M\dot{x} - M\dot{x} = 0. \quad (32)$$

Celá soustava pak bude mít tvar

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & K \\ -M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

zkráceným zápisem

$$\bar{M}\dot{\bar{x}} + \bar{K}\bar{x} = 0. \quad (34)$$

Horní podtržítka označuje rozšířené veličiny. [33]

Rovnici (34) můžeme vynásobit inverzní maticí  $\bar{M}^{-1}$ . Při předpokládaném řešení

$$\bar{x} = \bar{u} \cdot e^{\lambda t} \quad (35)$$

bude mít frekvenční determinant tvar

$$\det|A - \lambda E| = 0, \quad (36)$$

kde  $E$  je jednotková matice a

$$A = -\bar{M}^{-1} \cdot \bar{K}. \quad (37)$$

Touto úpravou úloha přejde na problém vlastních čísel  $\lambda$  matice  $A$ , které mají tvar komplexně sdružených čísel.

$$\lambda_j = Re_j \pm i \cdot Im_j, \quad (38)$$

kde imaginární část  $Im_j$  odpovídá vlastní kruhové frekvenci  $\Omega_{0j}$  a reálná složka  $Re_j$  odpovídá případnému tlumení.

### 3.1.6 Vlastní tvary kmitání

Vyšetřením vlastních tvarů kmitání se rozumí sestavení křivek výkmitů - tzv. výkmitových čar pro každou vlastní frekvenci  $\Omega_j$ . Výkmitová čára zobrazuje poměrné (normované) amplitudy

kmitání jednotlivých hmot, jejich absolutní velikost totiž závisí na míře počátečního vychýlení soustavy z rovnovážného stavu, poměry amplitud jsou však konstantní. Body, ve kterých křivka výkmitů protíná vodorovnou osu, označujeme jako uzly kmitání. Je-li kmitání uzlové, části soustavy na opačnou stranu od uzlového bodu kmitají v protifázi.

K sestavení výkmitové čáry můžeme použít například Holzerovu metodu. Ta spočívá ve zjišťování velikosti výkmitu každé hmoty zvlášť a jejich postupnému přičítání.

Pro výpočet musíme nejdříve zvolit počáteční výchylku první hmoty. Pomocí ní určíme moment, kterým působí na následující hmotu

$$M_{j,i,i+1} = \varphi_i \cdot J_i \cdot \Omega_j^2. \quad (39)$$

Výchylku mezi dvěma sousedními hmotami  $r_{i,i+1}$  pak určíme jako podíl součtu všech předcházejících momentů a příslušné torzní tuhosti

$$r_{j,i,i+1} = \frac{\sum_{k=1}^i M_{j,k,k+1}}{k_{j,i,i+1}}. \quad (40)$$

Odečtením této výchylky od amplitudy hmoty  $i$  dostaneme amplitudu hmoty  $i+1$

$$\varphi_{j,i+1} = \varphi_{j,i} - r_{j,i,i+1}. \quad (41)$$

Protože hodnoty vypočítaných amplitud závisí na zvolené velikosti amplitudy první hmoty a neodpovídají velikosti skutečných amplitud, normujeme je podle maximální hodnoty

$$\varphi_{Nj,i} = \frac{\varphi_{j,i}}{-|\varphi_{j,max}|}. \quad (42)$$

Z normovaných amplitud  $\varphi_{Ni}$  již můžeme sestavit výkmitové čáry pro každou z vlastních frekvencí. [32]

### 3.1.7 Metodika výpočtu vlastních tvarů kmitání

Vyšetření vlastních tvarů kmitání provedeme podle výše uvedených teorií. Obecně lze postup shrnout do následujících bodů:

- 1) Sestavení  $n$ -hmotového náhradního modelu torzní soustavy pohonu

- 2) Přiřazení hmotových momentů setrvačnosti  $J_i$  k jednotlivým hmotám a tuhostí  $k_{i,i+1}$  k vazbám mezi hmotami a jejich případný přepočít při zjednodušování a rozšiřování modelu.
- 3) Redukce všech hmot a tuhostí na společnou osu rotace.
- 4) Sestavení soustavy pohybových rovnic, rovnic deformací a rovnic momentů ve vazbách.
- 5) Výpočet  $n$  vlastních kruhových frekvencí  $\Omega_j$  řešením soustavy rovnic.
- 6) Přepočít vlastních kruhových frekvencí  $\Omega_j$  na vlastní frekvence  $f_j$ .
- 7) Výpočet normovaných amplitud  $\varphi_{Nji}$
- 8) Sestrojení křivek výkmitů

Při řešení úlohy je potřeba řadu výpočtů provádět opakovaně pro různé hmoty a frekvence, proto je výhodné jej algoritmizovat. Použití výpočetního softwaru usnadní zejména práci s maticemi.

### 3.1.8 Návrh vlastní aplikace pro výpočet pro vyšetření vlastních kmitů

Pro usnadnění výpočtu vlastních frekvencí a vykreslení vlastních tvarů kmitání soustav pohonů jsem v prostředí MATLAB naprogramoval následující aplikaci.

Hmotové momenty setrvačnosti [kg m <sup>2</sup> ]		Torzní tuhosti [kN m rad <sup>-1</sup> ]		Vlastní frekvence [Hz]
J1 (rotor TM)	<input type="text" value="1"/>	k12	<input type="text" value="1"/>	
J2 (velké ozubené kolo)	<input type="text" value="1"/>	k23	<input type="text" value="0"/>	
J3 (polovina DH)	<input type="text" value="0"/>	k34	<input type="text" value="0"/>	
J4 (polovina DH)	<input type="text" value="0"/>	k45	<input type="text" value="0"/>	
J5 (polovina dvojkolí)	<input type="text" value="0"/>	k56	<input type="text" value="0"/>	
J6 (polovina dvojkolí)	<input type="text" value="0"/>	Převodový poměr i12	<input type="text" value="1"/>	

Přednastavené hodnoty

DB 120 EJ 471

Vynulovat

Výpočet vlastních frekvencí

Vykreslení vlastních tvarů

Obr. 23 Pracovní prostředí aplikace pro vyšetření vlastních kmitů.

Aplikace umožňuje práci s náhradními modely torzního systému pohonu o 2–6 hmotách. V zadávacím formuláři jsou pro orientaci uvedeny názvy hmot odpovídající náhradnímu modelu na Obr. 28. Při práci se zjednodušeným modelem hodnoty momentů setrvačnosti a torzních tuhostí vyplňujeme postupně podle indexů.

Na začátku výpočtu aplikace nejprve analyzuje počet hmot soustavy a zadané hodnoty uspořádá do matice hmot  $Jm$  a matice tuhostí  $Km$ . Následně je řád diferenciálních rovnic snížen zavedením dalších  $n$  proměnných a přidáním jejich rovnic do soustavy. Řešená soustava má tvar

$$\bar{J}\dot{\bar{\varphi}} + \bar{K}\bar{\varphi} = 0, \quad (43)$$

kde

$$\bar{J} = J_p = \begin{bmatrix} J_m & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}, \quad (44)$$

$$\bar{K} = K_p = \begin{bmatrix} 0 & K_m \\ -E & 0 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

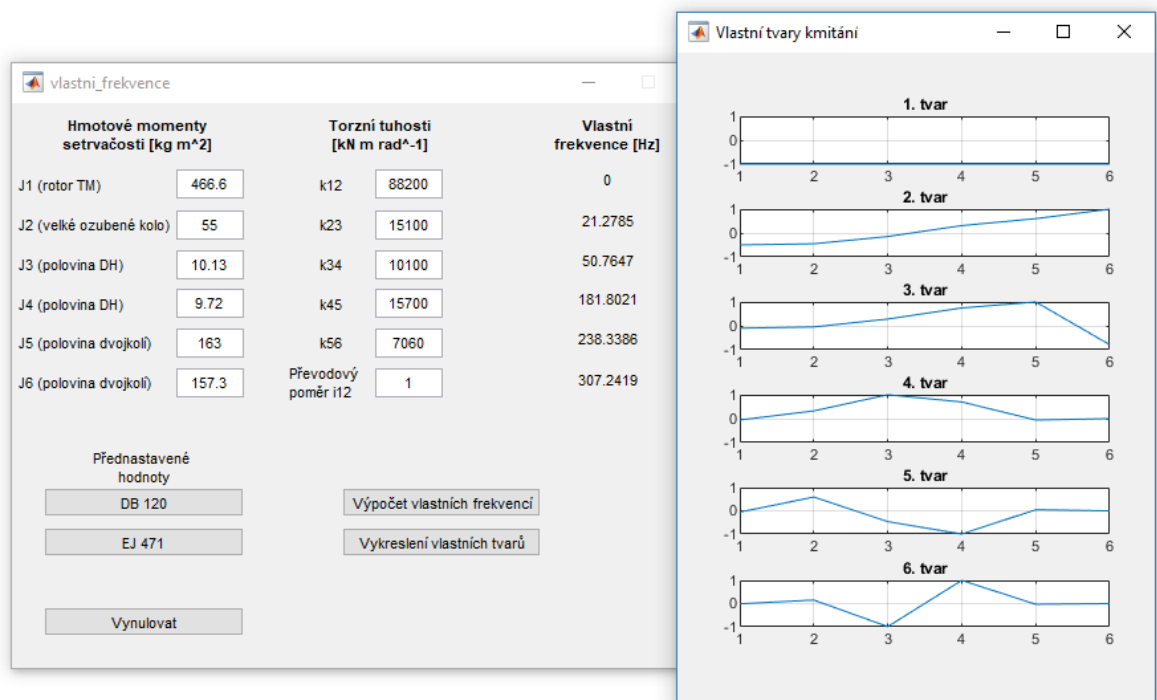
Uvažujeme řešení ve tvaru rovnice (35), potom

$$\det|A - \lambda E| = 0, \quad (46)$$

kde

$$A = -J_p^{-1} \cdot K_p. \quad (47)$$

Pomocí funkce **eig()** jsou vypočítány vlastní čísla matice  $A$ , pomocí funkce **imag()** jsou vybrány jejich imaginární části, které představují vlastní kruhové frekvence a pomocí funkce **sort()** jsou seřazeny podle velikosti. Následně jsou podle vzorce  $x$  velikosti vlastních frekvencí vypočítány a zobrazeny v uživatelském prostředí.



Obr. 24 Vykreslené tvary kmitání pro zadané hodnoty.

Výpočet normovaných amplitud kmitání pokračuje podle postupu v kap. 3.1.6 a jsou uloženy do souboru *Normovane\_amplitudy.txt*. Z hodnot jsou také zároveň sestrojeny grafy výkmitových čar.

Vstupní hodnoty k oběma příkladům počítaným v kap. 3.2 jsou v aplikaci uloženy jako přednastavené hodnoty.

Pokud je mezi 1. a 2. hmotou nějaký převod, není nutné redukovat hodnoty momentu setrvačnosti  $J_1$  a torzní tuhosti  $k_{12}$  redukovat na společnou osu rotace, ale stačí zadat převodový poměr do příslušného pole. V opačném případě musí být v editačním poli pro převodový poměr zadána hodnota 1.



## 3.2 Ukázkový příklad řešení

V této podkapitole je postup vyšetřování vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitání názorně demonstrován na dvou vzorových příkladech.

### 3.2.1 Pohon lokomotiv BR 120 a Siemens ES64P

Německé lokomotivy řady 120 jsou považovány za vzor moderních elektrických lokomotiv, jsou to první sériově vyráběné lokomotivy konstruované pro rychlost nad 200 km/h s výkonem 1 400 kW na nápravu. Těchto parametrů bylo docíleno použitím třífázových asynchronních motorů a pohonu dvojkolí kloubovým dutým hřídelem. Díky spolupráci železničních výrobců na německém trhu byl tento pohon firmy BBC (později ABB, ADtranz, dnes součást Bombardier Transportation) použit u první generace lokomotivy Siemens EuroSprinter a stal se základem pro podvozky rychlovlaků ICE a rozšířené lokomotivní řady DB 101.



Obr. 25 Snímek lokomotivy 120 207-6 odjíždějící s patrovou soupravou typu push-pull ze stanice Betzdorf 12. 04. 2014. Autor: **Armin Schwarz**. [34]



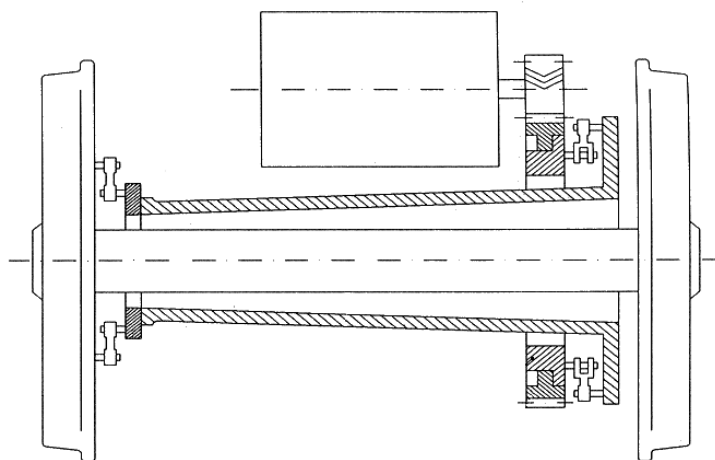
Obr. 26 Lokomotiva 127 001-6 továrního typu Siemens ES64P, který používá stejný typ pohonu. Autor: **Volker Stöckmann**. [36]

Tab. 2 Základní parametry lokomotivy BR 120 DB. [15]

Uspořádání pojezdu	Bo'Bo'
Maximální rychlost	200 km/h
Trvalý výkon	5 600 kW
Rozjezdová tažná síla	340 kN
Hmotnost	84 t

Pohon lokomotivy BR 120 DB je v podstatě prototypem integrované pohonné jednotky IGA a liší se jen v detailech. Pastorek převodovky nalisovaný přímo na hřídel rotoru přenáší hnací

moment na duté ozubené kolo, kterým prochází dutý hřídel. Ten je ke kolu i velkému ozubenému kolu připojen spojkovými mechanismy s šesti ojnicemi.



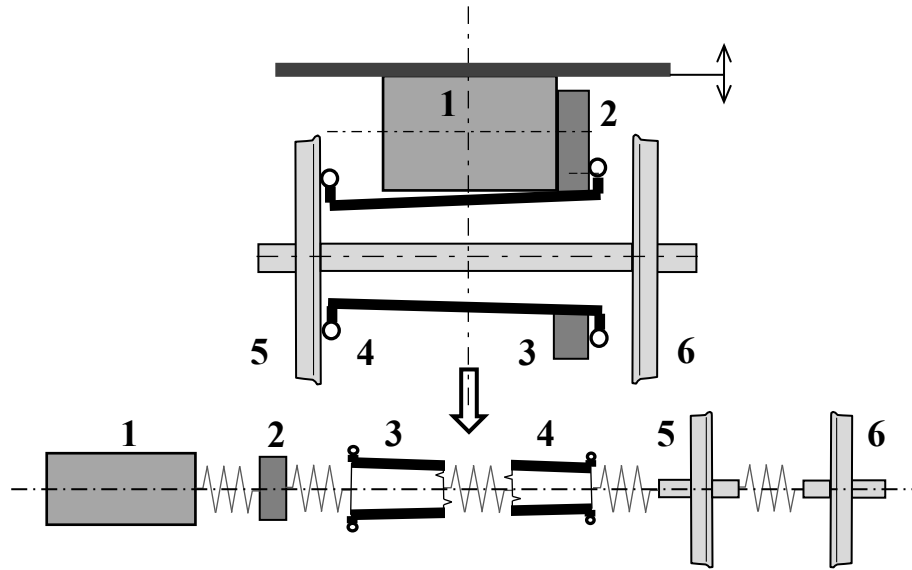
Obr. 27 Pohon lokomotivy BR 120. [35]

Tento pohon byl pro řešení prvního ukázkového příkladu vybrán, protože všechny potřebné vstupní parametry jsou veřejně dostupné z knihy Michaela Buschera *Radschlupfregelung zur maximalen Kraftschlußausnutzung*, která zabývá problematikou řízení výkonu asynchronního trakčního motoru v blízkosti meze adheze. Navíc také umožňuje srovnání výsledků vlastních tvarů kmitání s německým autorem.

Tab. 3 Parametry torzní soustavy pohonu BR 120. [35]

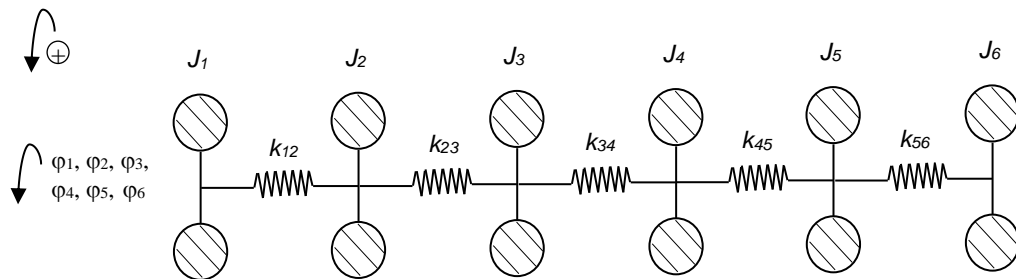
Moment setrvačnosti rotoru $J_1$ [kg·m <sup>2</sup> ]	466,6
Moment setrvačnosti převodovky $J_2$ [kg·m <sup>2</sup> ]	55,0
Moment setrvačnosti 1. poloviny dutého hřídele $J_3$ [kg·m <sup>2</sup> ]	10,13
Moment setrvačnosti 2. poloviny dutého hřídele $J_4$ [kg·m <sup>2</sup> ]	9,72
Moment setrvačnosti 1. poloviny nápravy $J_5$ [kg·m <sup>2</sup> ]	163,0
Moment setrvačnosti 2. poloviny nápravy $J_6$ [kg·m <sup>2</sup> ]	157,3
Torzní tuhost vazby rotor TM – převodovka $k_{12}$ [Nm·rad <sup>-1</sup> ]	$88,2 \cdot 10^6$
Torzní tuhost vazby převodovka – dutý hřídel $k_{23}$ [Nm·rad <sup>-1</sup> ]	$15,1 \cdot 10^6$
Torzní tuhost dutého hřídele $k_{34}$ [Nm·rad <sup>-1</sup> ]	$10,1 \cdot 10^6$
Torzní tuhost vazby dutý hřídel – kolo $k_{45}$ [Nm·rad <sup>-1</sup> ]	$15,7 \cdot 10^6$
Torzní tuhost nápravy $k_{56}$ [Nm·rad <sup>-1</sup> ]	$7,06 \cdot 10^6$

Získané vstupní parametry přímo odpovídají 6hmotovému modelu pohonu na Obr. 29. Tento model zohledňuje kmitání dvojkolí i dutého hřídele. Všechny hodnoty jsou zadané už ve stavu redukováném na společnou osu rotace.



Obr. 28 Odvození náhradního 6hmotového modelu pohonu.

Popis: 1 TM (rotor), 2 převodovka, 3 a 4 polovina dutého hřídele, 5 kolo s připojením pro dutý hřídel a polovina nápravy, 6 druhé kolo a polovina nápravy.



Obr. 29 Náhradní model pohonu pro sestavení pohybových rovnic.

K sestavení pohybových rovnic můžeme použít např. Lagrangeovy rovnice II. druhu. Základní tvar rovnice, se kterou budeme dále pracovat je

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta E_k}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta E_k}{\delta q_j} + \frac{\delta E_p}{\delta q_j} = 0, \quad (48)$$

kde  $E_k$  je kinetická energie soustavy,  $E_p$  potenciální energie soustavy,  $q_j$  zobecněná souřadnice hmoty  $j$  a  $\dot{q}_j$  zobecněná rychlost hmoty  $j$ .

Kinetická energie  $E_k$  je rovna součtu kinetických energií všech hmot soustavy

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot J_3 \cdot \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} \cdot J_4 \cdot \dot{\varphi}_4^2 + \frac{1}{2} \cdot J_5 \cdot \dot{\varphi}_5^2 + \frac{1}{2} \cdot J_6 \cdot \dot{\varphi}_6^2. \quad (49)$$

Potenciální energie  $E_p$  je rovna součtu energií konzervovaných ve všech pružinách náhradního modelu

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_{23} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_{34} \cdot (\varphi_3 - \varphi_4)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_{45} \cdot (\varphi_4 - \varphi_5)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_{56} \cdot (\varphi_5 - \varphi_6)^2. \quad (50)$$

Za obecné souřadnice a rychlosti dosadíme

$$q_j = \varphi_i, \quad \dot{q}_j = \dot{\varphi}_i. \quad (51)$$

Provedení parciálních derivací:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = \frac{d}{dt} (J_1 \cdot \dot{\varphi}_1) = J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 \quad (52)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = \frac{d}{dt} (J_2 \cdot \dot{\varphi}_2) = J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 \quad (53)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_3} \right) = \frac{d}{dt} (J_3 \cdot \dot{\varphi}_3) = J_3 \cdot \ddot{\varphi}_3 \quad (54)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_4} \right) = \frac{d}{dt} (J_4 \cdot \dot{\varphi}_4) = J_4 \cdot \ddot{\varphi}_4 \quad (55)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_5} \right) = \frac{d}{dt} (J_5 \cdot \dot{\varphi}_5) = J_5 \cdot \ddot{\varphi}_5 \quad (56)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_6} \right) = \frac{d}{dt} (J_6 \cdot \dot{\varphi}_6) = J_6 \cdot \ddot{\varphi}_6 \quad (57)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_3} = \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_4} = \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_5} = \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_6} = 0 \quad (58)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left[ \frac{1}{2} \cdot k_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \right] = k_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_2} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \left[ \frac{1}{2} \cdot k_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_{23} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3)^2 \right] \\ &= k_{23} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) - k_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_3} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_3} \left[ \frac{1}{2} \cdot k_{23} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_{34} \cdot (\varphi_3 - \varphi_4)^2 \right] \\ &= k_{34} \cdot (\varphi_3 - \varphi_4) - k_{23} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_4} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_4} \left[ \frac{1}{2} \cdot k_{34} \cdot (\varphi_3 - \varphi_4)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_{45} \cdot (\varphi_4 - \varphi_5)^2 \right] \\ &= k_{45} \cdot (\varphi_4 - \varphi_5) - k_{34} \cdot (\varphi_3 - \varphi_4)\end{aligned}\quad (62)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_5} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_5} \left[ \frac{1}{2} \cdot k_{45} \cdot (\varphi_4 - \varphi_5)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_{56} \cdot (\varphi_5 - \varphi_6)^2 \right] \\ &= k_{56} \cdot (\varphi_5 - \varphi_6) - k_{45} \cdot (\varphi_4 - \varphi_5)\end{aligned}\quad (63)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_6} = \frac{\partial}{\partial \varphi_6} \left[ \frac{1}{2} \cdot k_{56} \cdot (\varphi_5 - \varphi_6)^2 \right] = -k_{56} \cdot (\varphi_5 - \varphi_6)\quad (64)$$

Dosazením parciálních derivací (52)–(64) do základního tvaru rovnice (48) a jednoduchou úpravou dostaneme následující diferenciální pohybové rovnice v homogenním tvaru:

$$J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + \varphi_1 \cdot k_{12} - \varphi_2 \cdot k_{12} = 0\quad (65)$$

$$J_1 \cdot \ddot{\varphi}_2 - \varphi_1 \cdot k_{12} + \varphi_2 \cdot (k_{12} + k_{23}) - \varphi_3 \cdot k_{23} = 0\quad (66)$$

$$J_3 \cdot \ddot{\varphi}_3 - \varphi_2 \cdot k_{23} + \varphi_3 \cdot (k_{23} + k_{34}) - \varphi_4 \cdot k_{34} = 0\quad (67)$$

$$J_4 \cdot \ddot{\varphi}_4 - \varphi_3 \cdot k_{34} + \varphi_4 \cdot (k_{34} + k_{45}) - \varphi_5 \cdot k_{45} = 0\quad (68)$$

$$J_5 \cdot \ddot{\varphi}_5 - \varphi_4 \cdot k_{45} + \varphi_5 \cdot (k_{45} + k_{56}) - \varphi_6 \cdot k_{56} = 0\quad (69)$$

$$J_6 \cdot \ddot{\varphi}_6 - \varphi_5 \cdot k_{56} + \varphi_6 \cdot k_{56} = 0\quad (70)$$

Po vzoru maticové rovnice (14) můžeme soustavu pohybových rovnic přepsat do tvaru

$$J\ddot{\varphi} + K\varphi = 0,\quad (71)$$

kde:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_6 \end{bmatrix},\quad (72)$$

$$\ddot{\varphi} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{\varphi}_4 \\ \ddot{\varphi}_5 \\ \ddot{\varphi}_6 \end{bmatrix},\quad (73)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{12} & -k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{12} & k_{12} + k_{23} & -k_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{23} & k_{23} + k_{34} & -k_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{34} & k_{34} + k_{45} & -k_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{45} & k_{45} + k_{56} & -k_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{56} & k_{56} \end{bmatrix}, \quad (74)$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{bmatrix}. \quad (75)$$

Pro výpočet vlastních čísel předpokládáme řešení ve tvaru

$$\varphi = \varphi_0 \cdot e^{i\Omega t}. \quad (76)$$

Dosazením rovnice (76) do (71) dostaneme

$$(K - \Omega^2 J) \cdot \varphi_0 = 0. \quad (77)$$

Pro netriviální řešení ( $\varphi_0 \neq 0$ ) musí být frekvenční determinant roven nule

$$\det|K - \Omega^2 J| = 0. \quad (78)$$

Řešením problému vlastních čísel dostaneme vlastní kruhové frekvence  $\Omega_j$  a z nich podle vzorce (31) vypočítáme vlastní frekvence kmitání  $f_j$ .

Tab. 4 Vlastní frekvence 6hmotového modelu pohonu DB 120.

Vlastní kruhové frekvence	[rad·s <sup>-1</sup> ]	Vlastní frekvence	[Hz]
$\Omega_1$	0,00	$f_1$	0,00
$\Omega_2$	133,70	$f_2$	21,28
$\Omega_3$	318,96	$f_3$	50,76
$\Omega_4$	1142,30	$f_4$	181,80
$\Omega_5$	1497,53	$f_5$	238,34
$\Omega_6$	1930,46	$f_6$	307,24

Nyní provedeme výpočet normovaných výchylek pro všechny hodnoty vlastní kruhové frekvence. Velikost výchylky  $\varphi_{11}$  zvolíme 1 rad a vypočítáme výchylky ostatních hmot pro vlastní úhlovou frekvenci  $\Omega_l = 0$ .

Začneme výpočtem momentu, který v náhradní pružině  $k_{12}$  vyvolá vychýlení hmoty 1

$$M_{112} = \varphi_{11} \cdot J_1 \cdot \Omega_1^2 = 1 \cdot 466,6 \cdot 0^2 = 0 \text{ Nm.} \quad (79)$$

Podle vzorce (36) spočítáme rozdíl amplitud (výchylek)  $r_{12}$

$$r_{112} = \frac{M_{112}}{k_{12}} = \frac{0}{88,2 \cdot 10^6} = 0 \text{ rad.} \quad (80)$$

Odečtením této výchytky od amplitudy první hmoty dostaneme amplitudu hmoty 2  $\varphi_{12}$

$$\varphi_{12} = \varphi_{11} - r_{112} = 1 - 0 = 1 \text{ rad.} \quad (81)$$

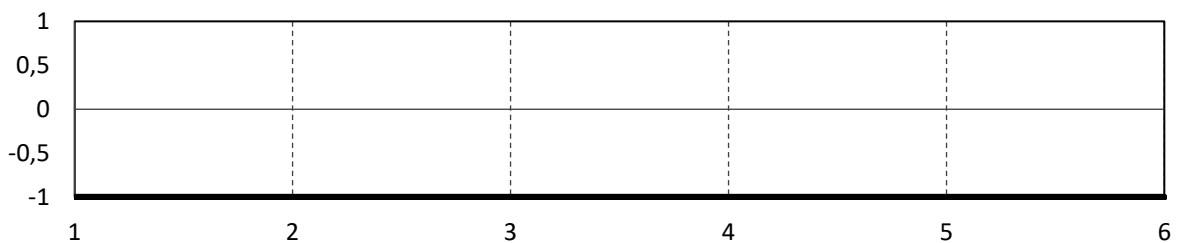
Z rovnic (79) a (80) vidíme, že při vlastní kruhové frekvenci  $\Omega_l = 0$  budou i zbývající rozdíly amplitud sousedních hmot  $r_{li,i+1} = 0$ . Potom tedy i amplitudy všech hmot budou stejné

$$\varphi_{11} = \varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{14} = \varphi_{15} = \varphi_{16} = 1 \text{ rad.} \quad (82)$$

Normování amplitud provedeme podle záporné hodnoty největší amplitudy

$$\varphi_{N11} = \varphi_{N12} = \varphi_{N13} = \varphi_{N14} = \varphi_{N15} = \varphi_{N16} = \frac{\varphi_{11}}{-\varphi_{1i \max}} = \frac{1}{-1} = -1. \quad (83)$$

Z hodnot normalizovaných amplitud sestojíme křivku výkmitů 1. vlastního tvaru kmitání.



Obr. 30 Výkmitová čára 6hmotového modelu pohonu BR 120 pro  $f_l = 0$  Hz.

Vyšetřování druhého vlastního tvaru začneme opět výpočtem momentu, který v náhradní pružině  $k_{12}$  vyvolá vychýlení hmoty 1

$$M_{212} = \varphi_{21} \cdot J_1 \cdot \Omega_2^2 = 1 \cdot 466,6 \cdot 133,7^2 = 8,341 \cdot 10^6 \text{ Nm.} \quad (84)$$

Podle vzorce (36) spočítáme rozdíl amplitud (výchylek)  $r_{212}$

$$r_{212} = \frac{M_{212}}{k_{12}} = \frac{8,341 \cdot 10^6}{88,2 \cdot 10^6} = 0,095 \text{ rad.} \quad (85)$$

Odečtením tohoto rozdílu výchylek od amplitudy první hmoty dostaneme amplitudu hmoty 2

$\varphi_{22}$

$$\varphi_{22} = \varphi_{21} - r_{212} = 1 - 0,095 = 0,905 \text{ rad.} \quad (86)$$

Pokračujeme výpočtem momentu  $M_{223}$

$$M_{223} = \varphi_{22} \cdot J_2 \cdot \Omega_2^2 = 0,905 \cdot 55,0 \cdot 133,7^2 = 8,902 \cdot 10^5 \text{ Nm.} \quad (87)$$

Rozdíl amplitud (výchylek)  $r_{223}$

$$r_{223} = \frac{M_{212} + M_{223}}{k_{23}} = \frac{8,341 \cdot 10^6 + 8,902 \cdot 10^5}{15,1 \cdot 10^6} = 0,611 \text{ rad.} \quad (88)$$

Amplitudu hmoty 3  $\varphi_{23}$

$$\varphi_{23} = \varphi_{22} - r_{223} = 0,905 - 0,611 = 0,294 \text{ rad.} \quad (89)$$

Stejným postupem vypočítáme i amplitudu  $\varphi_{24}$

$$M_{234} = \varphi_{23} \cdot J_3 \cdot \Omega_2^2 = 0,294 \cdot 10,13 \cdot 133,7^2 = 5,326 \cdot 10^4 \text{ Nm,} \quad (90)$$

$$r_{234} = \frac{M_{212} + M_{223} + M_{234}}{k_{34}} = \frac{8,341 \cdot 10^6 + 8,902 \cdot 10^5 + 5,326 \cdot 10^4}{10,1 \cdot 10^6} \quad (91)$$

$$= 0,919 \text{ rad,}$$

$$\varphi_{24} = \varphi_{23} - r_{234} = 0,294 - 0,919 = -0,625 \text{ rad.} \quad (92)$$

Výpočet amplitudy  $\varphi_{25}$

$$M_{245} = \varphi_{24} \cdot J_4 \cdot \Omega_2^2 = -0,625 \cdot 9,72 \cdot 133,7^2 = -1,086 \cdot 10^5 \text{ Nm,} \quad (93)$$

$$r_{245} = \frac{M_{212} + M_{223} + M_{234} + M_{245}}{k_{45}} \quad (94)$$
$$= \frac{8,341 \cdot 10^6 + 8,902 \cdot 10^5 + 5,326 \cdot 10^4 - 1,086 \cdot 10^5}{15,7 \cdot 10^6}$$

$$= 0,584 \text{ rad,}$$

$$\varphi_{25} = \varphi_{24} - r_{245} = -0,625 - 0,584 = -1,209 \text{ rad.} \quad (95)$$

Výpočet amplitudy  $\varphi_{26}$

$$M_{256} = \varphi_{25} \cdot J_5 \cdot \Omega_2^2 = -1,209 \cdot 163,0 \cdot 133,7^2 = -3,524 \cdot 10^6 \text{ Nm,} \quad (96)$$



$$r_{256} = \frac{M_{212} + M_{223} + M_{234} + M_{245} + M_{256}}{k_{45}}$$

$$= \frac{8,341 \cdot 10^6 + 8,902 \cdot 10^5 + 5,326 \cdot 10^4 - 1,086 \cdot 10^5 - 3,524 \cdot 10^6}{7,06 \cdot 10^6} \quad (97)$$

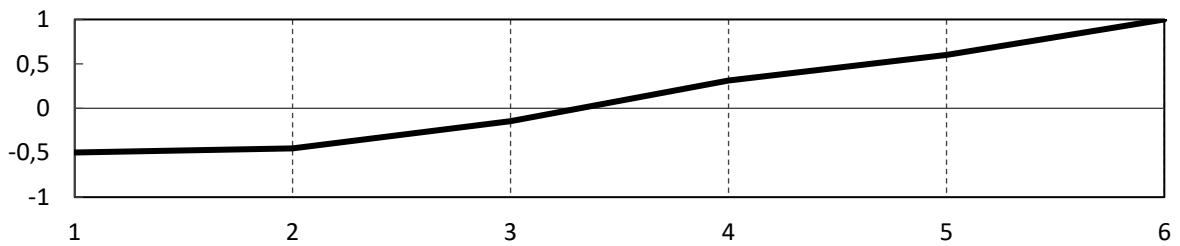
$$= 0,801 \text{ rad,}$$

$$\varphi_{26} = \varphi_{25} - r_{256} = -1,209 - 0,801 = -2,010 \text{ rad.} \quad (98)$$

Získané hodnoty amplitud pro lepší přehled zapíšeme do tabulky a znormujeme podle vzorce (42) a sestrojíme z nich křivku výkmitů 2. vlastního tvaru kmitání.

Tab. 5 Amplitudy 2. vlastního tvaru kmitání 6hmotového modelu pohonu DB 120.

Hmota $i$ [-]	1	2	3	4	5	6
Amplituda $\varphi_{2i}$ [rad]	1,000	0,905	0,294	-0,625	-1,209	-2,010
Normovaná amplituda $\varphi_{N2i}$ [-]	-0,498	-0,451	-0,146	0,311	0,602	1,000

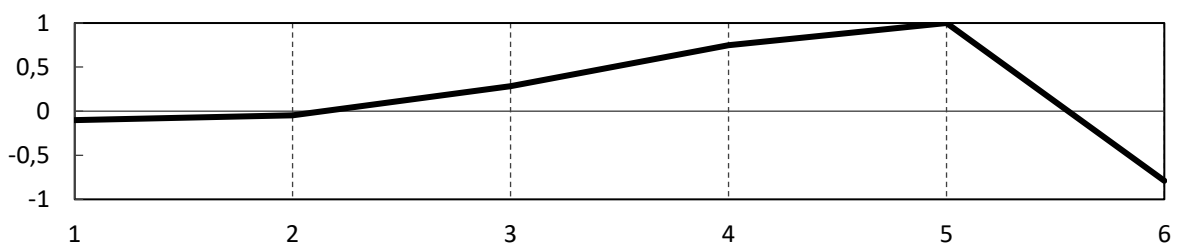


Obr. 31 Výkmitová čára 6hmotového modelu pohonu BR 120 pro  $f_2 = 21,28$  Hz.

Zbývající vlastní tvary určíme stejným způsobem, proto uvádím už jen tabulky amplitud a křivky výkmitů.

Tab. 6 Amplitudy 3. vlastního tvaru kmitání 6hmotového modelu pohonu DB 120

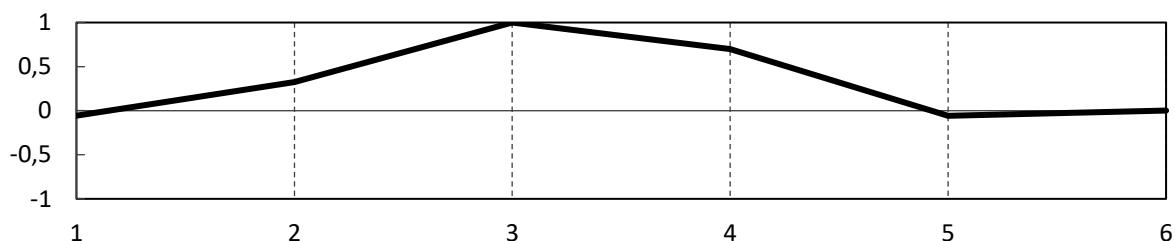
Hmota $i$ [-]	1	2	3	4	5	6
Amplituda $\varphi_{3i}$ [rad]	1,000	0,462	-2,853	-7,518	-10,045	7,929
Normovaná amplituda $\varphi_{N3i}$ [-]	-0,100	-0,046	0,284	0,748	1,000	-0,789



Obr. 32 Výkmitová čára 6hmotového modelu pohonu BR 120 pro  $f_3 = 50,76$  Hz.

Tab. 7 Amplitudy 4. vlastního tvaru kmitání 6hmotového modelu pohonu DB 120

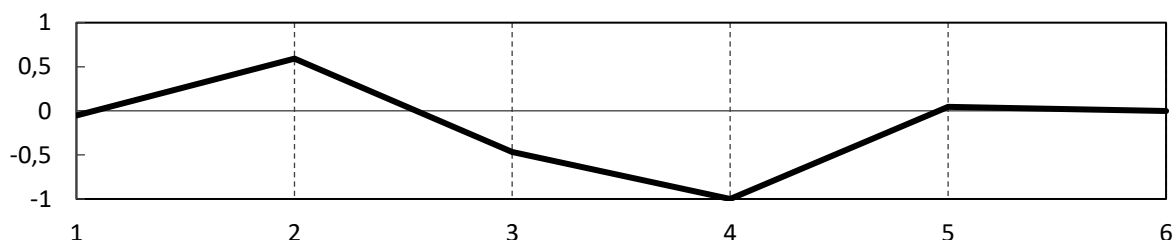
Hmota $i$ [-]	1	2	3	4	5	6
Amplituda $\varphi_{4i}$ [rad]	1,000	-5,903	-18,168	-12,728	1,054	-0,046
Normovaná amplituda $\varphi_{N4i}$ [-]	-0,055	0,325	1,000	0,701	-0,058	0,003



Obr. 33 Výkmitová čára 6hmotového modelu pohonu BR 120 pro  $f_4 = 181,80$  Hz.

Tab. 8 Amplitudy 5. vlastního tvaru kmitání 6hmotového modelu pohonu DB 120

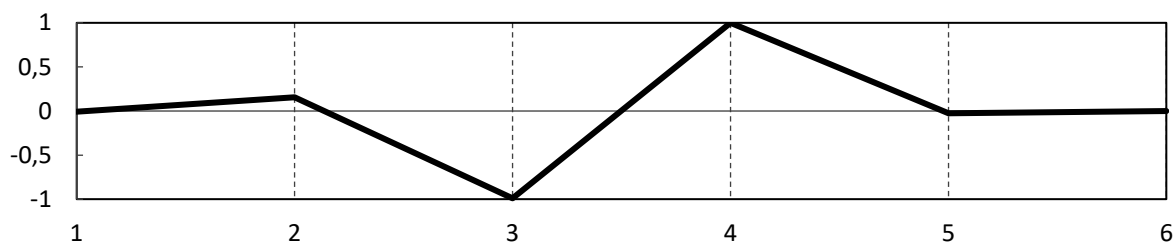
Hmota $i$ [-]	1	2	3	4	5	6
Amplituda $\varphi_{5i}$ [rad]	1,000	-10,864	8,579	18,351	-0,841	0,041
Normovaná amplituda $\varphi_{N5i}$ [-]	-0,054	0,592	-0,486	-1,000	0,046	-0,002



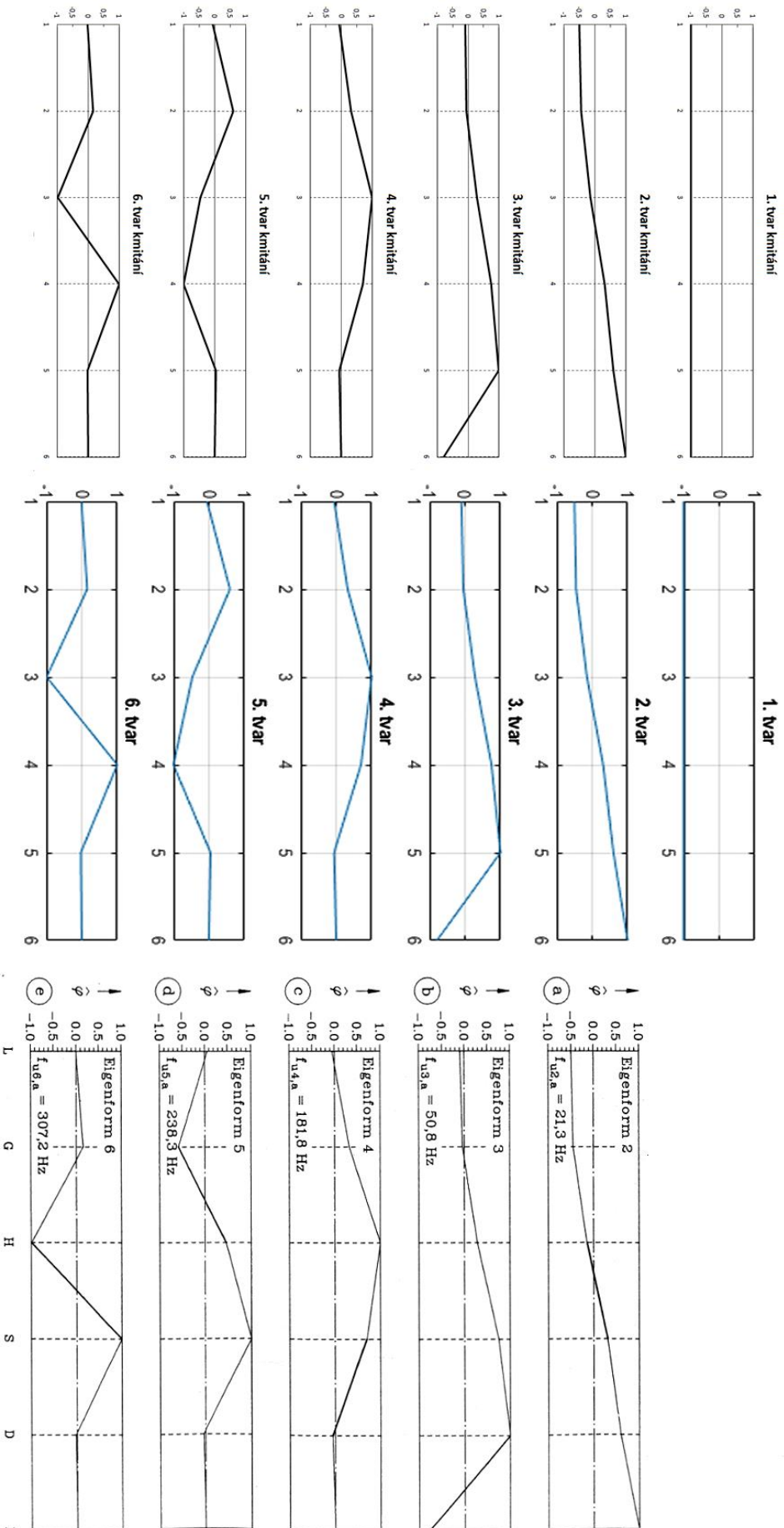
Obr. 34 Výkmitová čára 6hmotového modelu pohonu BR 120 pro  $f_5 = 238,34$  Hz.

Tab. 9 Amplitudy 6. vlastního tvaru kmitání 6hmotového modelu pohonu DB 120

Hmota $i$ [-]	1	2	3	4	5	6
Amplituda $\varphi_{6i}$ [rad]	1,000	-18,715	120,166	- 121,350	3,260	-0,157
Normovaná amplituda $\varphi_{N6i}$ [-]	-0,008	0,154	-0,990	1,000	-0,027	0,001



Obr. 35 Výkmitová čára 6hohntového modelu pohonu BR 120 pro  $f_6 = 307,24$  Hz.



Obr. 36 Porovnání zjištěných vlastních tvarů kmitání pohonu BR 120.

Vlevo grafy vytvořené ručními výpočty v MS Excel.

Uprostřed grafy vytvořené pomocí vlastní aplikace v prostředí MATLAB.

Vpravo grafy pro 2. – 6. tvar vlastního kmitání podle M. Buschera. [35]

První vlastní tvar představuje bezuzlové kmitání. Technicky vzato při frekvenci 0 Hz ani o kmitání nejde a tento vlastní tvar lze chápat jako vyjádření setrvačnosti soustavy pohonu vůči vnějším momentům. V každém dalším tvaru přibývá 1 uzlový bod. Při frekvenci 50,76 Hz (3. vlastní tvar) dochází k výraznému rozkmitání kol (hmoty 5 a 6), které vůči sobě kmitají v protifázi. Podobně tak 6. vlastnímu tvaru dominuje kmitání obou konců dutého hřídele (hmoty 3 a 4) v protifázi, kmitání ostatních hmot je při této frekvenci minimální. V 5. vlastním tvaru kmitá dutý hřídel jako celek (byť na každém konci s jinou amplitudou) v ojníčkových spojkách.

Křivky výkmitů (souhrnně zobrazené na Obr. 36 **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** vlevo) byly vytvořené v tabulkovém procesoru MS Excel, ve kterém byly vypočítány i velikosti amplitud. Na Obr. 36 uprostřed jsou křivky výkmitů pro stejný model pohonu vytvořené pomocí vlastní aplikace v MATLABu. Tvary křivek vlastních kmitů vlevo i uprostřed jsou totožné, což potvrzuje, že aplikace funguje správně.

Pro úplnost jsou do porovnání přidány i grafy s křivkami pro 2. až 6. tvar vlastních kmitů podle M. Buschera uvedené v publikaci, odkud jsou čerpány vstupní hodnoty. Kromě 5. vlastního tvaru kmitání jsou opět všechny stejné. Křivka pro 5. tvar má také stejný tvar, ale je překlopená okolo vodorovné osy. Německý autor v tomto případě pravděpodobně normoval hodnoty amplitud jiným způsobem. Smyslem vyšetřování vlastních tvarů kmitání je zjištění poměrů mezi amplitudami jednotlivých hmot a ty jsou stejné bez ohledu na znaménko hodnot v grafu. Nalezená odchylka má tedy pouze estetický význam a na platnosti výkmitových čar nic nemění.

### 3.2.2 Pohon elektrické jednotky Škoda 471

Elektrická jednotka ČD 471 je dvoupodlažní jednotka pro příměstskou dopravu, složená z hnacího vozu 471, vloženého vozu 071 a řídicího vozu 971. V letech 1997 až 2013 bylo vyrobeno celkem 83 těchto souprav, které tvoří základ příměstské dopravy v Praze a Ostravě. Dalších 25 jednotek odvozených typů bylo exportováno do tří evropských států (Slovensko, Litva a Ukrajina). [37]

Tab. 10 Základní parametry jednotky 471 [37]

Uspořádání pojezdu	Bo'Bo' + 2'2' + 2'2'
Maximální rychlost	140 km/h
Trvalý výkon	2 000 kW
Rozjezdová tažná síla	180 kN
Hmotnost	155,4 t
Míst k sezení/stání	310/333

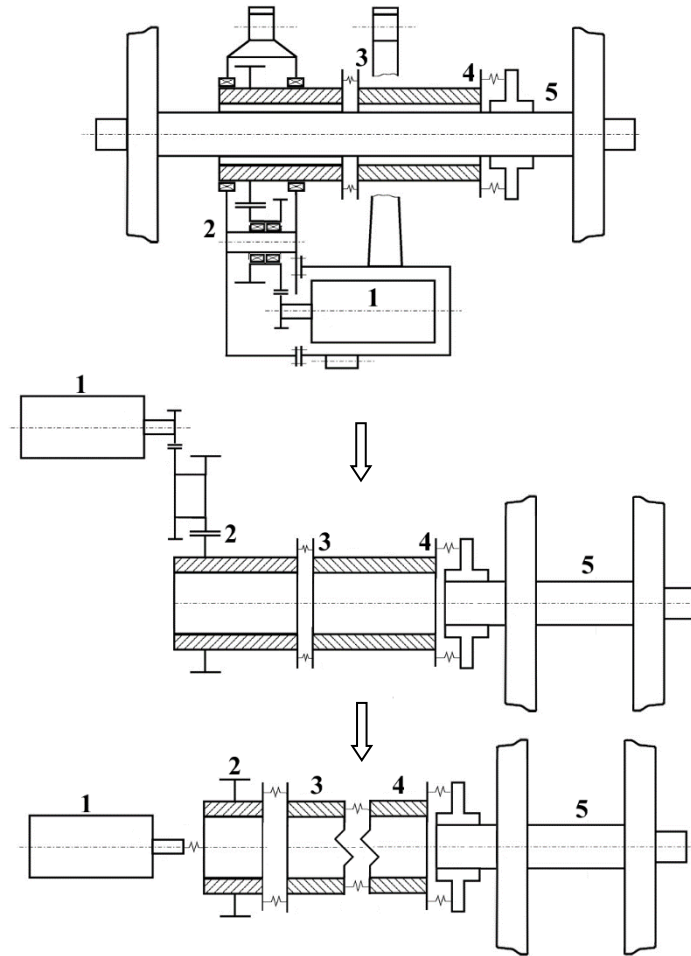


Obr. 37 Elektrická jednotka 471 035-6 v Ostravě. Autor: Petr Štefek. [37]

Pohon jednotky 471 (viz kap 2.3.5) se od předchozího příkladu liší připojením dutého hřídele k disku unašeče (namísto kola). Z toho důvodu můžeme dvojkolí považovat za tuhé a zahrneme jej do modelu jako jednu hmotu. Další odlišností, kterou musíme při návrhu náhradního modelu brát v potaz, je vložení předlohového hřídele s ozubenými koly 2 a 3 do převodovky.

Tab. 11 Parametry torzní soustavy pohonu EJ 471.

Moment setrvačnosti rotoru $J_1$ [kg·m <sup>2</sup> ]	6,85
Moment setrvačnosti pastorku $J_{p1}$ [kg·m <sup>2</sup> ]	0,064
Moment setrvačnosti předlohového hřídele $J_{p2}$ [kg·m <sup>2</sup> ]	1,73
Moment setrvačnosti velkého ozubeného kola $J_{p3}$ [kg·m <sup>2</sup> ]	13,23
Moment setrvačnosti 1. poloviny dutého hřídele $J_3$ [kg·m <sup>2</sup> ]	2,87
Moment setrvačnosti 2. poloviny dutého hřídele $J_4$ [kg·m <sup>2</sup> ]	2,87
Moment setrvačnosti 1. poloviny nápravy $J_5$ [kg·m <sup>2</sup> ]	47,7
Moment setrvačnosti 2. poloviny nápravy $J_6$ [kg·m <sup>2</sup> ]	47,7
Torzni tuhost vazby rotor TM – pastorek $k_{12}$ [Nm·rad <sup>-1</sup> ]	$2,6 \cdot 10^6$
Torzni tuhost vazby velké ozubené kolo – dutý hřídel $k_{23}$ [Nm·rad <sup>-1</sup> ]	$4,42 \cdot 10^6$
Torzni tuhost dutého hřídele $k_{34}$ [Nm·rad <sup>-1</sup> ]	-
Torzni tuhost vazby dutý hřídel – dvojkolí $k_{45}$ [Nm·rad <sup>-1</sup> ]	$4,42 \cdot 10^6$
Převodový poměr mezi pastorkem a velkým kolem $i_{13}$ [-]	4,730
Převodový poměr mezi předlohovou hřídelí a velkým kolem $i_{23}$ [-]	2,143



Obr. 38 Sestavení náhradního modelu podle schématu pohonu.

Popis: 1 rotor TM, 2 ozubená kola převodovky, 3 a 4 dutý hřídel, 5 dvojkolí včetně unašeče.

Nejprve vypočítáme momenty setrvačnosti náhradních hmot a torzní tuhosti vazeb v náhradním modelu na základě zadaných parametrů:

- Redukce momentu setrvačnosti rotoru na společnou osu rotace – vyjdeme z podmínky zachování kinetické energie

$$E_{k\ red} = E_{k\ skut} \quad (99)$$

$$\frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2}J_r\dot{\varphi}_r^2.$$

Pro úhlovou rychlost  $\dot{\varphi}$  platí

$$\dot{\varphi}_r = \dot{\varphi}_1 \cdot i_{13}. \quad (100)$$

Dosazením rovnice (100) do (99) dostaneme redukováný moment setrvačnosti

$$J_1 = J_r \cdot i_{13}^2 = 6,85 \cdot 4,730^2 = 153,28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (101)$$

- Podobně provedeme též redukci momentu setrvačnosti ozubených kol převodovky na celkový moment setrvačnosti převodovky

$$E_{k \text{ red}} = E_{k \text{ skut}} \quad (102)$$

$$\frac{1}{2} J_2 \dot{\phi}_2^2 = \frac{1}{2} J_{p1} \dot{\phi}_{p1}^2 + \frac{1}{2} J_{p2} \dot{\phi}_{p2}^2 + \frac{1}{2} J_{p3} \dot{\phi}_{p3}^2.$$

Pro úhlové rychlosti  $\dot{\phi}$  platí

$$\dot{\phi}_{p1} = \dot{\phi}_2 \cdot i_{13}, \quad \dot{\phi}_{p2} = \dot{\phi}_2 \cdot i_{23}, \quad \dot{\phi}_{p3} = \dot{\phi}_2. \quad (103)$$

Po dosazení a úpravě

$$\begin{aligned} J_2 &= J_{p1} \cdot i_{13}^2 + J_{p2} i_{12}^2 + J_{p3} = 0,064 \cdot 4,730^2 + 1,73 \cdot 2,143^2 + 13,23 \\ &= 22,609 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned} \quad (104)$$

- Při odvozování redukované tuhosti  $k_{12}$  můžeme vyjít z podmínky zachování potenciální energie

$$E_{p \text{ red}} = E_{p \text{ skut}} \quad (105)$$

$$\frac{1}{2} \frac{M_{12}^2}{k_{12}} = \frac{1}{2} \frac{M_{rp}^2}{k_{rp}}.$$

Pro moment platí

$$M_{12} = M_{rp} \cdot i_{13}. \quad (106)$$

Rovnici (106) dosadíme do rovnice (105):

$$\frac{1}{2} \frac{M_{12}^2}{k_{12}} = \frac{1}{2} \frac{M_{12}^2}{k_{rp} \cdot i_{13}^2}. \quad (107)$$

Odtud:

$$k_{12} = k_{rp} \cdot i_{13}^2 = 2,6 \cdot 10^6 \cdot 4,730^2 = 58,18 \cdot 10^6 \text{ Nm} \cdot \text{rad}^{-1}. \quad (108)$$

Mezi zadanými hodnotami chybí torzní tuhost dutého hřídele. Její přibližnou hodnotu určíme pomocí vztahu (8). Potřebné rozměry dutého hřídele odměříme podle výkresu podvozku.

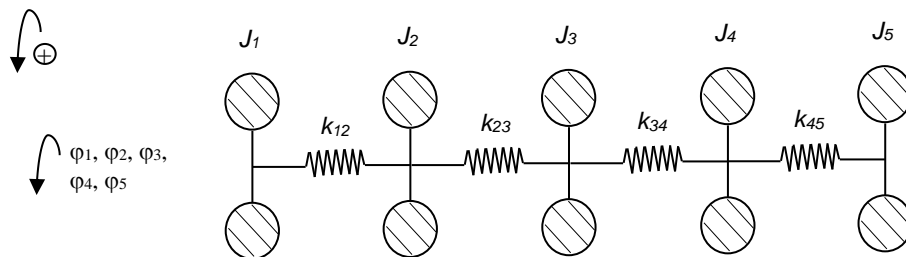


Tab. 12 Hodnoty pro výpočet torzní tuhosti dutého hřídele.

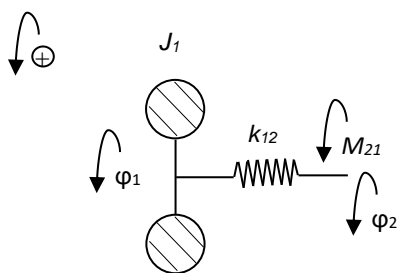
Délka dutého hřídele $l$ [m]	0,45
Vnější poloměr $R$ [m]	0,20
Vnitřní poloměr $r$ [m]	0,195
Modul pružnosti ve smyku pro ocel $G$ [Pa]	$8,15 \cdot 10^{10}$

$$\begin{aligned}
 k_{34} &= \frac{G\pi(R^4 - r^4)}{2l} \\
 &= \frac{8,15 \cdot 10^{10} \cdot (0,2^4 - 0,195^4)}{2 \cdot 0,45} \doteq 43,84 \cdot 10^6 \text{Nm} \cdot \text{rad}^{-1}.
 \end{aligned}
 \tag{109}$$

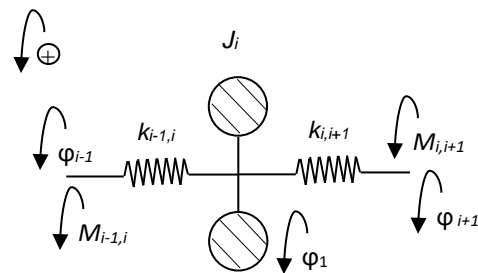
Nyní již máme všechny potřebné vstupní parametry náhradního modelu a můžeme sestavit pohybové rovnice soustavy metodou postupného uvolňování.



Obr. 39 Náhradní model torzní soustavy pohonu EJ 471



Obr. 41 Uvolnění hmoty 1.



Obr. 40 Uvolnění obecné hmoty  $i$ .

Jednotlivé hmoty pohonu uvolníme pomyslným odstraněním vazeb mezi nimi a jejich nahrazením vazbovými účinky (momenty). Pro takto uvolněná tělesa můžeme zapsat pohybové rovnice v Newtonově tvaru:

$$J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 = M_{21}, \tag{110}$$

$$J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 = M_{12} + M_{32}, \tag{111}$$

$$J_3 \cdot \ddot{\varphi}_3 = M_{23} + M_{43}, \tag{112}$$

$$J_4 \cdot \ddot{\varphi}_4 = M_{34} + M_{54}, \quad (113)$$

$$J_5 \cdot \ddot{\varphi}_5 = M_{45} + M_{65}, \quad (114)$$

$$J_6 \cdot \ddot{\varphi}_6 = M_{65}. \quad (115)$$

Soustava pohybových rovnic (110)–(115) obsahuje pro řešení příliš mnoho neznámých, proto musíme doplnit rovnice momentů ve vazbách:

$$M_{12} = k_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = -M_{21}, \quad (116)$$

$$M_{23} = k_{23} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) = -M_{32}, \quad (117)$$

$$M_{34} = k_{34} \cdot (\varphi_3 - \varphi_4) = -M_{43}, \quad (118)$$

$$M_{45} = k_{45} \cdot (\varphi_4 - \varphi_5) = -M_{54}, \quad (119)$$

$$M_{56} = k_{56} \cdot (\varphi_5 - \varphi_6) = -M_{65}. \quad (120)$$

Rovnice momentů (116)–(120) dosadíme do pohybových rovnic (110)–(115) a vzniklé diferenciální rovnice upravíme do homogenního tvaru:

$$J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + \varphi_1 \cdot k_{12} - \varphi_2 \cdot k_{12} = 0, \quad (121)$$

$$J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - \varphi_1 \cdot k_{12} + \varphi_2 \cdot (k_{12} + k_{23}) - \varphi_3 \cdot k_{23} = 0, \quad (122)$$

$$J_3 \cdot \ddot{\varphi}_3 - \varphi_2 \cdot k_{23} + \varphi_3 \cdot (k_{23} + k_{34}) - \varphi_4 \cdot k_{34} = 0, \quad (123)$$

$$J_4 \cdot \ddot{\varphi}_4 - \varphi_3 \cdot k_{34} + \varphi_4 \cdot (k_{34} + k_{45}) - \varphi_5 \cdot k_{45} = 0, \quad (124)$$

$$J_5 \cdot \ddot{\varphi}_5 - \varphi_4 \cdot k_{45} + \varphi_5 \cdot (k_{45} + k_{56}) - \varphi_6 \cdot k_{56} = 0, \quad (125)$$

$$J_6 \cdot \ddot{\varphi}_6 - \varphi_5 \cdot k_{56} + \varphi_6 \cdot k_{56} = 0. \quad (126)$$

Pohybové rovnice stejně jako v předchozím příkladu přepíšeme do maticového tvaru

$$J\ddot{\varphi} + K\varphi = 0, \quad (127)$$

kde:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_5 \end{bmatrix}, \quad (128)$$

$$\ddot{\varphi} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{\varphi}_4 \\ \ddot{\varphi}_5 \end{bmatrix}, \quad (129)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{12} & -k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -k_{12} & k_{12} + k_{23} & -k_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{23} & k_{23} + k_{34} & -k_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{34} & k_{34} + k_{45} & -k_{45} \\ 0 & 0 & 0 & -k_{45} & k_{45} \end{bmatrix}, + \quad (130)$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix}. \quad (131)$$

Řešením frekvenční determinantu pomocí výpočtového softwaru obdržíme vlastní kruhové frekvence soustavy

$$\det|K - \Omega^2 J| = 0. \quad (132)$$

Tab. 13 Vypočítané vlastní frekvence 5hmotového modelu pohonu EJ 471

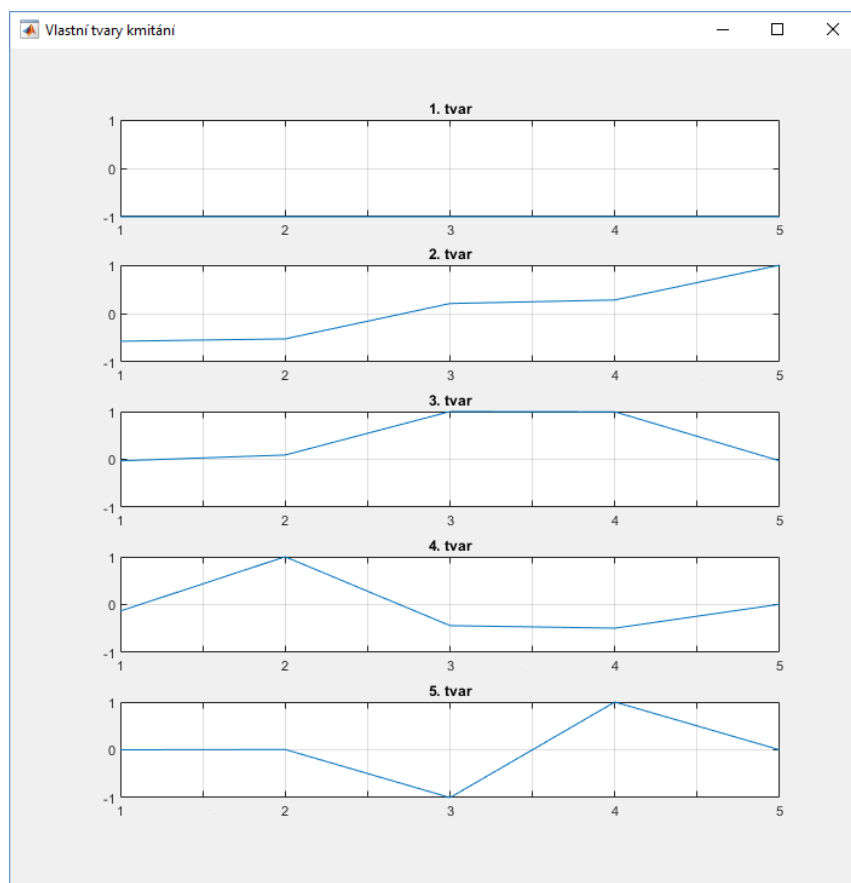
Vlastní kruhové frekvence	[rad·s <sup>-1</sup> ]	Vlastní frekvence	[Hz]
$\Omega_1$	0,00	$f_1$	0,00
$\Omega_2$	180,08	$f_2$	28,66
$\Omega_3$	1222,21	$f_3$	194,52
$\Omega_4$	1789,01	$f_4$	284,74
$\Omega_5$	5665,42	$f_5$	901,68

Pomocí vlastních frekvencí vypočítáme normované amplitudy stejně jako u předchozího příkladu.

Tab. 14 Vypočítané hodnoty normovaných amplitud pro 5hmotový model pohonu EJ 471

Hmota $i$ [-]	1	2	3	4	5
Normovaná amplituda $\varphi_{N1i}$ [-]	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000
Normovaná amplituda $\varphi_{N2i}$ [-]	-0,553	-0,505	0,217	0,289	1,000
Normovaná amplituda $\varphi_{N3i}$ [-]	-0,031	0,091	1,000	0,994	-0,031
Normovaná amplituda $\varphi_{N4i}$ [-]	-0,134	1,000	-0,450	-0,502	0,027
Normovaná amplituda $\varphi_{N5i}$ [-]	0,000	0,007	-1,000	0,999	0,005

Z vypočtených hodnot sestrojíme křivky výkmitů pro jednotlivé vlastní tvary kmitání.



Obr. 42 Výkmitové čáry pro 5hmotový model pohonu EJ 471.

Na svislých osách normované amplitudy, na vodorovné ose indexy hmot modelu.

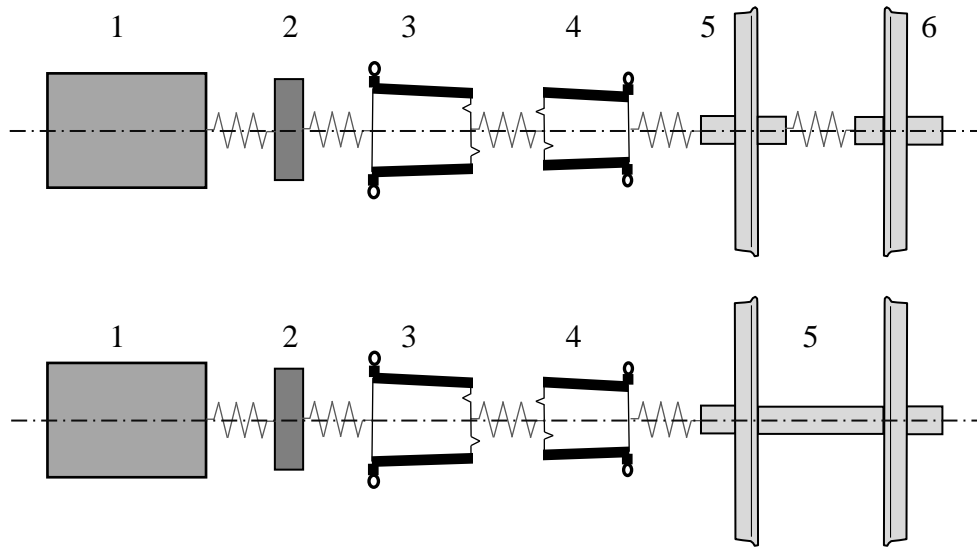
Z grafů křivek vlastního kmitání vidíme, že při 2., 3. a 4. vlastním kmitání oba konce dutého hřídele kmitají souhlasně s téměř stejnou amplitudou. Je to dáno tím, že odhadnutá tuhost dutého hřídele převyšuje tuhosti ostatních hmot. Naopak při frekvenci  $f_5 = 901,68$  Hz kmitá pouze jeden konec dutého hřídele proti druhému a zbytek pohonu je v klidu.

Z výsledků vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitání v případě tohoto modelu nelze vyvozovat žádné závěry, neboť přesnost všech výsledků je ovlivněna pouze přibližnou hodnotou torzní tuhosti kloubového dutého hřídele. Tento výpočet slouží pouze jako ukázkový vzor.

### 3.2.3 Porovnání vlivu počtu hmot modelu

V tomto oddíle jsou navzájem porovnány výsledky vlastních tvarů kmitání pro různé modely téhož pohonu. Vycházíme přitom z prvního ukázkového příkladu – pohonu lokomotivy BR 120 DB. Všechny výpočty jsou provedeny ve vlastní aplikaci v MATLABu.

V prvním srovnání porovnáme „úplný“ 6hmotový model řešený ve vzorovém příkladu a zjednodušený 5hmotový model, který nezohledňuje kmitání kola proti kolu.



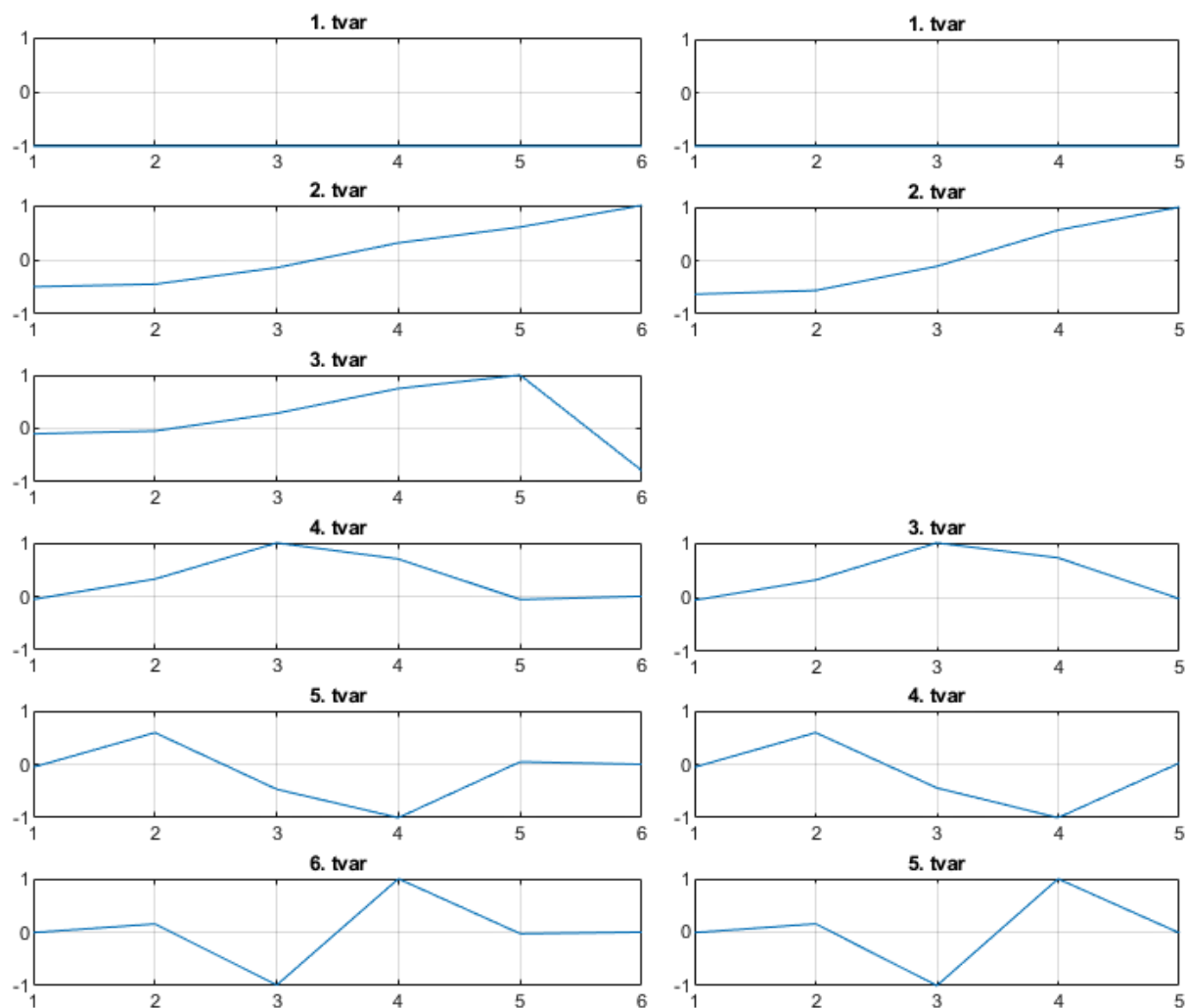
Obr. 43 Porovnávané modely s 6 a 5 hmotami.

Tab. 15 Vstupní parametry 5 hmotového modelu

$J_1$ [kg·m <sup>2</sup> ]	466,6	$k_{12}$ [Nm·rad <sup>-1</sup> ]	$88,2 \cdot 10^6$
$J_2$ [kg·m <sup>2</sup> ]	55	$k_{23}$ [Nm·rad <sup>-1</sup> ]	$15,1 \cdot 10^6$
$J_3$ [kg·m <sup>2</sup> ]	10,13	$k_{34}$ [Nm·rad <sup>-1</sup> ]	$10,1 \cdot 10^6$
$J_4$ [kg·m <sup>2</sup> ]	9,72	$k_{45}$ [Nm·rad <sup>-1</sup> ]	$15,7 \cdot 10^6$
$J_5$ [kg·m <sup>2</sup> ]	320,3		

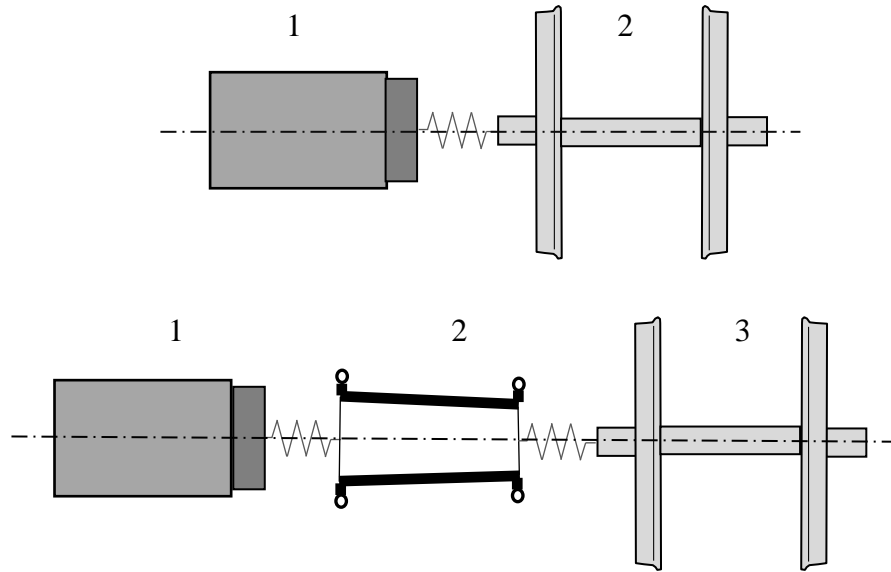
Tab. 16 Porovnání vlastních frekvencí obou modelů.

Náhradní model	6 hmot	5 hmot
$f_1$ [Hz]	0,00	0,00
$f_2$ [Hz]	21,28	23,09
$f_3$ [Hz]	50,76	180,71
$f_4$ [Hz]	181,80	237,74
$f_5$ [Hz]	238,34	306,83
$f_6$ [Hz]	307,24	-



Obr. 44 Porovnání vlastních tvarů pro model s 6 a 5 hmotami.

Z porovnání vlastních frekvencí i grafů je zřejmé, že při zanedbání tuhosti nápravy v soustavě zmizí vlastní frekvence v oblasti 50 Hz a příslušný vlastní tvar. Proto jsou vlastní tvary pro následující frekvence posunuté o jednu pozici. Nevýraznější rozdíl (8,5 %) vidíme u vlastní frekvence  $f_2$ , mezi ostatními sobě odpovídajícími frekvencemi je rozdíl menší než 1 %. Mezi vlastními tvary pro odpovídající frekvence jsou rozdíly rovněž minimální.



Obr. 45 Náhradní modely pohonu s 2 a 3 hmotami.

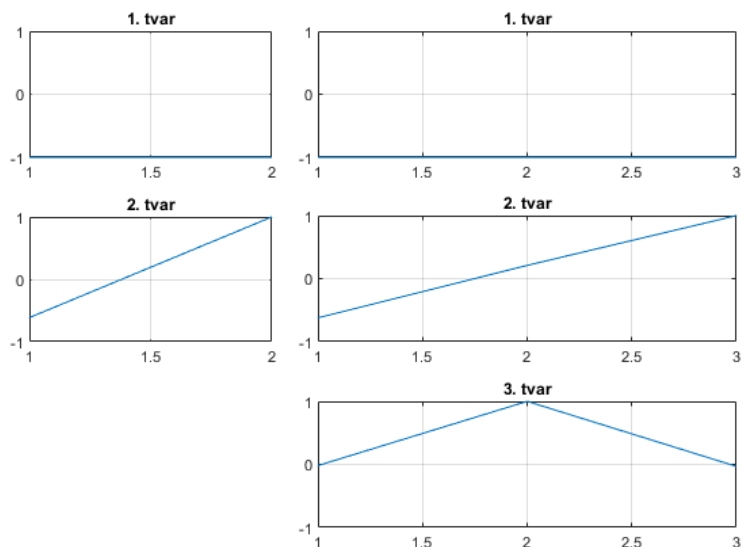
V druhém porovnání modelů srovnáme základní dvouhmotový model, kde jednu hmotu představuje TM s převodovkou a druhou hmotu dvojkolí, s tříhmotovým modelem, který navíc obsahuje kloubový dutý hřídel.

Tab. 17 Vstupní parametry porovnávaných modelů.

Model	2 hmoty	3 hmoty		2 hmoty	3 hmoty
$J_1$ [kg·m <sup>2</sup> ]	521,6	521,6	$k_{12}$ [Nm·rad <sup>-1</sup> ]	$4,37 \cdot 10^6$	$15,1 \cdot 10^6$
$J_2$ [kg·m <sup>2</sup> ]	320,3	19,85	$k_{23}$ [Nm·rad <sup>-1</sup> ]	-	$15,7 \cdot 10^6$
$J_3$ [kg·m <sup>2</sup> ]	-	320,3			

Tab. 18 Porovnání vlastních frekvencí obou modelů.

Náhradní model	2 hmoty	3 hmoty
$f_1$ [Hz]	0,00	0,00
$f_2$ [Hz]	23,62	31,32
$f_3$ [Hz]		200,74



Obr. 46 Porovnání vlastních tvarů pro model s 2 a 3 hmotami.

Základní modely se 2 a 3 hmotami neposkytují o soustavě příliš přesné informace. Vlastní frekvence  $f_2$  a 2. vlastní tvar kmitání odpovídají stejným frekvencím a tvarům kmitání jako u předchozího srovnání. U tříhmotového modelu vlastní frekvence  $f_3$  a 3. vlastní tvar odpovídají frekvenci  $f_4$  a 4. vlastnímu tvaru u šestihmotového modelu.

### 3.2.4 Porovnání vlivu změny hodnoty některých parametrů

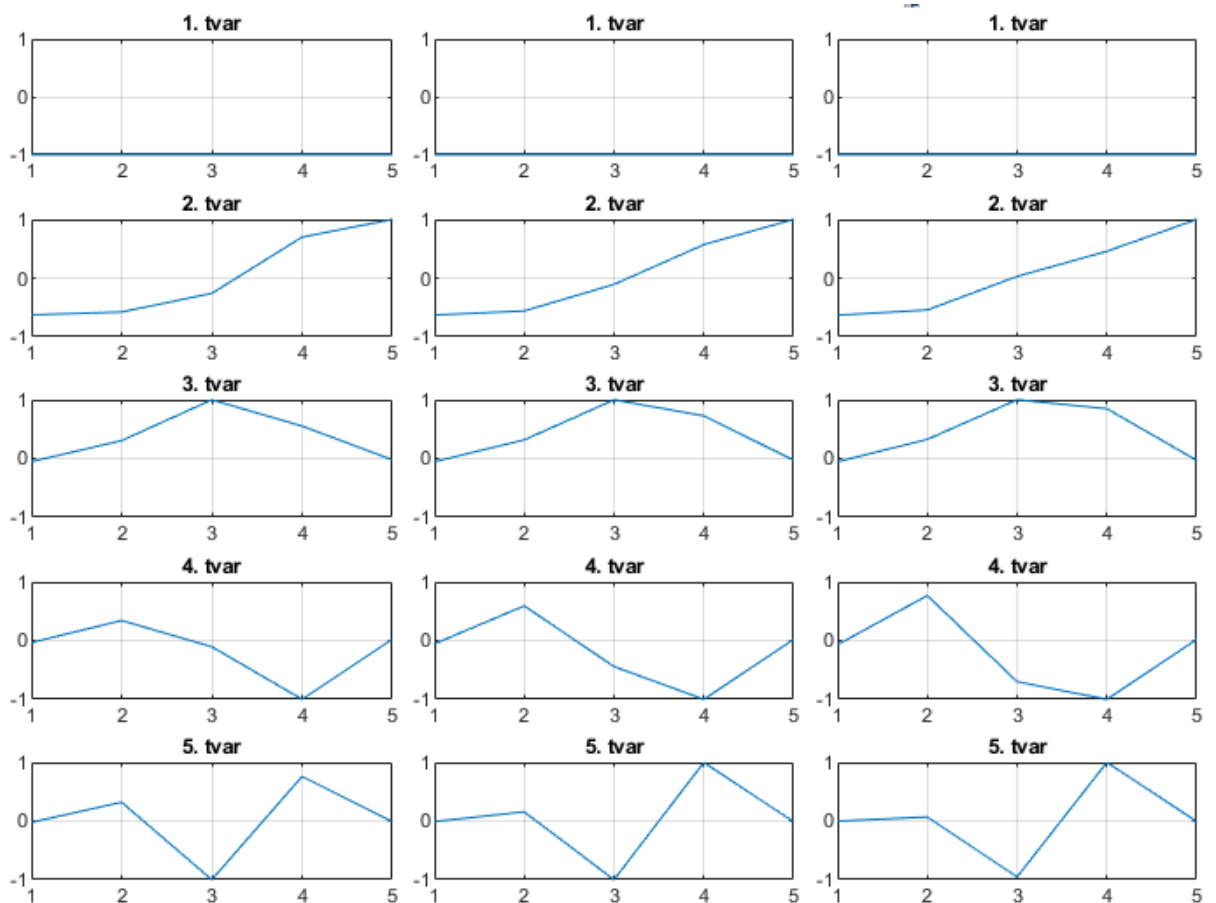
V tomto oddíle posoudíme vliv některých parametrů na celkovou charakteristiku modelu. Pro srovnání použijeme 5hmotový model ze str 67.

Nejprve posoudíme vliv tuhosti kloubového dutého hřídele. V praxi se jeho tuhost dá změnit změnou délky, tloušťky nebo použitím jiného materiálu. Vstupní hodnoty jsou stejné jako v Tab. 15. U modelu tužším dutým hřídelem je použita dvojnásobná tuhost  $k_{34}$ , u modelu s poddajnějším dutým hřídelem je tuhost  $k_{34}$  poloviční, ostatní hodnoty jsou stejné.

Tab. 19 Vliv tuhosti dutého hřídele na vlastní frekvence.

Model	se sníženou tuhostí	původní	se zvýšenou tuhostí
$f_1$ [Hz]	0,00	0,00	0,00
$f_2$ [Hz]	19,36	23,09	25,96
$f_3$ [Hz]	178,63	180,71	181,95
$f_4$ [Hz]	231,67	237,74	239,98
$f_5$ [Hz]	268,53	306,83	379,55





Obr. 47 Vliv tuhosti dutého hřídele na vlastní tvary kmitání.

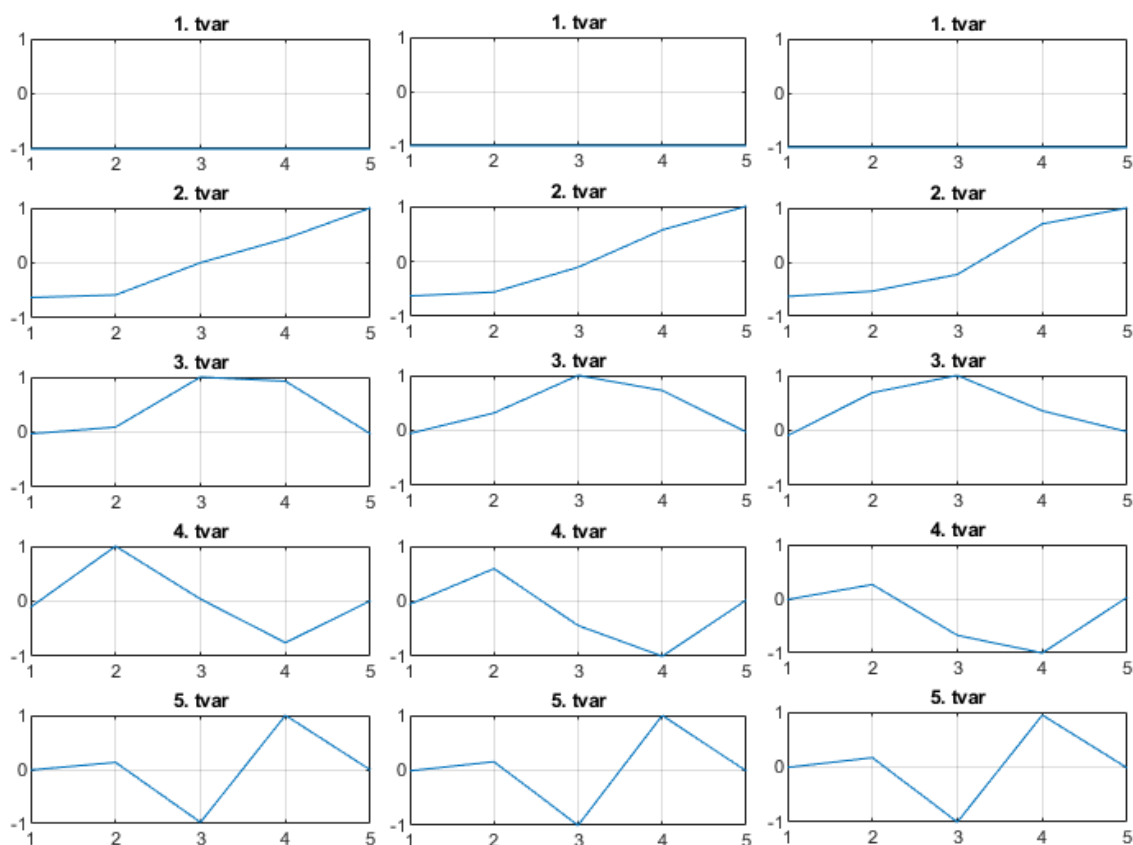
Vlevo vlastní tvary pro model s poloviční tuhostí  $k_{34}$ , uprostřed pro referenční model, vpravo pro model s dvojnásobnou tuhostí  $k_{34}$ .

Ze srovnávacího Obr. 47 vidíme, že v případě snížení tuhosti došlo k výraznému zvýšení strmosti křivky výkmitů mezi 3. a 4. hmotou ve všech vlastních tvarech kmitání kromě posledního. V případě zvýšení tuhosti došlo naopak ke snížení strmosti křivky v tomto úseku (opět kromě 5. tvaru) a u 2. vlastního tvaru došlo navíc k posunu uzlového bodu mezi hmoty 2 a 3.

Další částí pohonu, u kterých lze volbou konstrukce značně změnit jejich tuhost jsou mechanismy kloubových spojek. Tuhé jsou například spojky zubové, poddajné spojky s pryžovými bloky. Stejně jako v předchozím srovnání použijeme jako výchozí 5hmotový model (Tab. 15), u kterého dosadíme poloviční, resp. dvojnásobné, hodnoty tuhostí kloubových spojek.

Tab. 20 Vliv tuhosti kloubových spojek na vlastní frekvence.

Model	se sníženou tuhostí	původní	se zvýšenou tuhostí
$f_1$ [Hz]	0,00	0,00	0,00
$f_2$ [Hz]	18,59	23,09	27,01
$f_3$ [Hz]	138,01	180,71	199,61
$f_4$ [Hz]	220,04	237,74	304,35
$f_5$ [Hz]	269,46	306,83	370,83



Obr. 48 Vliv tuhosti kloubových spojek na vlastní tvary kmitání.

Vlevo vlastní tvary pro model s polovičními tuhostmi, uprostřed pro referenční model, vpravo pro model s dvojnásobnými tuhostmi.

Ze srovnávacího Obr. 48 vidíme, že v případě snížení tuhosti došlo u 2. a 3. tvaru k výraznému zvýšení strmosti křivky výkmitů mezi hmotami 2 a 3. a mezi hmotami 4 a 5. U 4. tvaru došlo dokonce k přesunu kmitny (bodu s největší amplitudou) z hmoty 4 na hmotu 2. V případě zvýšení tuhosti došlo naopak ke snížení strmosti křivky výkmitů mezi hmotami 2 a 3. a mezi hmotami 4 a 5 u 2. a 3. vlastního tvaru. Poslední vlastní tvar kmitání představuje kmitání dutého hřídele a změna tuhosti kloubových spojek na něj zřetelný vliv nemá.

Postup použitý v tomto oddíle se nazývá jednorozměrná citlivostní analýza a jednou nedílnou součástí analytické mechaniky. Principem citlivostní analýzy je zkoumání vlivu změny jedné vstupní veličiny na změnu výstupní veličiny. Komplexnější obraz o citlivosti výstupní veličiny dává vícerozměrná citlivostní analýza, která zkoumá vliv současné změny více vstupních parametrů na výstupní. [38] V tomto případě se nabízí možnost např. současné změny torzní tuhosti a momentu setrvačnosti.

## 4 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo popsat technická řešení individuálního pohonu dvojkolí kloubovým dutým hřídelem a vypracovat metodiku výpočtu vlastních tvarů kmitů náhradní torzní soustavy, doplněnou ukázkovým řešením příkladu. Pro zachování přehlednosti je práce členěna na dvě části.

V první části byl pohon kloubovým dutým hřídelem uveden do kontextu s ostatními druhy individuálních pohonů rozřazených podle míry odpružení jejich hmot. Dále byly popsány jednotlivé komponenty, ze kterých se pohon kloubovým dutým hřídelem skládá. V závěru první části byla popsána některá konkrétní konstrukční řešení, které jsou stále aktuální při konstrukci moderních hnacích vozidel.

Ve druhé části práce byla popsána metodika výpočtu vlastních tvarů kmitů náhradní torzní soustavy pohonu, a to nejprve formou připomenutí některých pojmů a metod z mechaniky, fyziky a matematiky, které jsou pro řešení této problematiky nezbytné. Následně je postup shrnut a aplikován dovednosti v algoritmizaci za využití výpočetního softwaru.

Teoretický postup je poté předveden na dvou vzorových příkladech, z nichž jeden je doplněn i srovnáním s výsledky německého autora, které potvrzují správnost výpočtu. Dále jsou příklady doplněny ukázkami vlivu počtu hmot zvoleného náhradního modelu na výsledné vlastní tvary a jednorozměrnou citlivostní analýzou, která ukazuje, jaký vliv na výsledné vlastní tvary kmitů má změna parametru torzní tuhosti.

Výpočet vlastních tvarů kmitů poskytuje pouze základní charakteristiku torzních soustav. Jejich znalost otvírá možnosti dalšímu zkoumání a modelování (nejen) torzních pohybů soustav pohonů a nabízí možnost dalšího rozvíjení této problematiky např. v diplomové práci.

## LITERATURA

- [1] LATA, Michael. *Konstrukce kolejových vozidel II*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2004. ISBN 80-7194-696-6.
- [2] SPRAGUE, Frank J. *ELECTRIC RAILWAY MOTOR*. USA. US324892A. Uděleno 25. 8. 1885. Zapsáno 25. 8. 1885.
- [3] Les photos de la rencontre d'Ambérieu. In: *Le Forum du N* [online]. 2.12.2012 [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: <http://le-forum-du-n.forumotions.net/t16467-les-photos-de-la-rencontre-d-amberieu>
- [4] Lokomotiva\_151. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Lokomotiva\\_151](https://cs.wikipedia.org/wiki/Lokomotiva_151)
- [5] JANČAR, Rost'a. Šroubek po šroubku. Jak se rodí nová česká lokomotiva. *Tech-net.cz* [online]. 1.8.2011 [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: [https://technet.idnes.cz/jak-se-rodí-nova-lokomotiva-skoda-sroubek-po-sroubku-pc0-/tec\\_reportaze.aspx?c=A110215\\_080420\\_tec\\_reportaze\\_rja](https://technet.idnes.cz/jak-se-rodí-nova-lokomotiva-skoda-sroubek-po-sroubku-pc0-/tec_reportaze.aspx?c=A110215_080420_tec_reportaze_rja)
- [6] JPB. Elektrická výzbroj. *Lokomotiva 109 E* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: <http://109-e.wgz.cz/rubriky/popis-lokomotivy-109-e/elektricka-vyzbroj>
- [7] ES64U4: Vysoce výkonná vícesystémová lokomotiva. *Žilinská univerzita v Žiline: Katedra výkonových elektrotechnických systémov* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: <http://www.kves.uniza.sk/kvesnew/dokumenty/et/DB-ES64U4-CZ-03.pdf>
- [8] Taurus: Nová lokomotivní řada 1016/1116 ÖBB. *Stránky přátel železnic* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: <http://spz.logout.cz/vozidla/taurus.html>
- [9] Podvozek (železnice). In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Podvozek\\_\(%C5%BEeleznice\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Podvozek_(%C5%BEeleznice))
- [10] JPB. Podvozky. *Lokomotiva 109 E* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: <http://109-e.wgz.cz/rubriky/popis-lokomotivy-109-e/podvozky>
- [11] Kompozitní kardanové hřídele. *ML Tuning: Kardan servis* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: [http://www.kardan.cz/kompozitni\\_kardanove\\_hridele.html](http://www.kardan.cz/kompozitni_kardanove_hridele.html)
- [12] Dépôt SNCF de Chambéry. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Poudou99/gallery-D%C3%A9pot-Chamb%C3%A9ry>

- [13] DOSTÁL, Josef a Petr HELLER. *Kolejová vozidla II.* V Plzni: Západočeská univerzita, 2009. ISBN 978-80-7043-641-7.
- [14] MITRAC: Pace-setting Drives. In: *Bombardier* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: <https://www.bombardier.com/content/dam/Websites/bombardiercom/supporting-documents/BT/Bombardier-Transportation-MITRAC-Drives.pdf>
- [15] DB-Baureihe 120. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: [https://de.wikipedia.org/wiki/DB-Baureihe\\_120](https://de.wikipedia.org/wiki/DB-Baureihe_120)
- [16] Henschel-BBC DE 2500. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: [https://de.wikipedia.org/wiki/Henschel-BBC\\_DE\\_2500](https://de.wikipedia.org/wiki/Henschel-BBC_DE_2500)
- [17] DB-Baureihe 101. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: [https://de.wikipedia.org/wiki/DB-Baureihe\\_101](https://de.wikipedia.org/wiki/DB-Baureihe_101)
- [18] FS Class E.412. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/FS\\_Class\\_E.412](https://en.wikipedia.org/wiki/FS_Class_E.412)
- [19] DVOUPODLAŽNÍ ELEKTRICKÉ JEDNOTKY. *ŠKODA* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: <https://www.skoda.cz/produkty/dvoupodlazni-elektricke-jednotky/detail/>
- [20] ELEKTRICKÉ LOKOMOTIVY. *ŠKODA* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: <https://www.skoda.cz/produkty/lokomotivy/rychlikove-lokomotivy/>
- [21] British Rail Class 91. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/British\\_Rail\\_Class\\_91](https://en.wikipedia.org/wiki/British_Rail_Class_91)
- [22] POHL, Rudolf a Ctirad NOVOTNÝ. *Dopravní prostředky: uspořádání a stavba.* Praha: Vydavatelství ČVUT, 2003. ISBN 80-01-02690-6.
- [23] LATA, Michael a Petr VOLTR. *KONSTRUKCE HNACÍCH KOLEJOVÝCH VOZIDEL: Soubor prezentací pro přednášky z předmětu PKO2P.*
- [24] LATA, Michael. Možnosti modelování torzního systému pohonu vozidla: Series B. In: *Scientific papers of the University of Pardubice* [online]. Pardubice, 2002, s. 75-92 [cit. 2018-04-10]. ISSN 1211-6610. Dostupné z: <http://dspace.upce.cz/handle/10195/32118>

- [25] Smyk a torze. *Matematicko-fyzikální fakulta UK* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: [http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz\\_fyziky\\_pro\\_DS/display.php/kontinuum/3\\_4](http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/display.php/kontinuum/3_4)
- [26] STEJSKAL, Vladimír, Stanislav STEJSKAL a Jaromír BROUSIL. *Mechanika III*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1993. ISBN 80-01-00918-1.
- [27] KRATOCHVÍL, Ctirad a Jaromír SLAVÍK. *Mechanika těles: dynamika*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2002. ISBN 80-214-2260-2.
- [28] Dynamika mechanismů. *Fakulta strojní – VŠB – TUO* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: [https://www.fs.vsb.cz/export/sites/fs/330/.content/files/DII\\_09\\_prednaska.pdf](https://www.fs.vsb.cz/export/sites/fs/330/.content/files/DII_09_prednaska.pdf)
- [29] REICHL, Jaroslav. Lagrangeovy rovnice II. druhu ve speciálních případech. *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main/article/view/1237-lagrangeovy-rovnice-ii-druhu-ve-specialnich-pripadech>
- [30] Kmitání. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2018 [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Kmitání>
- [31] Vlastní frekvence. *Ekosoftware* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: <https://www.ekosoftware.cz/vlastni-frekvence>
- [32] ŠKROBÁNEK, Emil. *Automobilové motory*. Bratislava: Alfa, 1988.
- [33] KREJČÍ, Petr. Dynamika: Problém vlastních hodnot. *UMTMB VUT Brno* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: [http://www.umt-old.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/pmm\\_dyn/opora.html#kap\\_1](http://www.umt-old.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/pmm_dyn/opora.html#kap_1)
- [34] SCHWARZ, Armin. Die 120 207-6. *Hellertal.startbilder.de* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: <http://hellertal.startbilder.de/bild/deutschland~rb--re-linien-in-nrw~re-9-rhein-sieg-express/334614/die-120-207-6-ex-db-120.html>
- [35] BUSCHER, Michael. *Radschlupfregelung zur maximalen Kraftshlußausnutzung bei elektrischen Traktionsantrieben*. Aachen: Verlag Shaker, 1995. ISBN 3-8265-0636-7.
- [36] STÖCKMANN, Volker. Der EuroSprinter. *Karow900.startbilder.de* [online]. [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: <http://karow900.startbilder.de/bild/privatloks~e-lok~br-127-eurosprinter/81826/der-eurosprinter-praesentierete-sich-in-neuem.html>
- [37] Elektrická jednotka 471. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Elektrick%C3%A1\\_jednotka\\_471](https://cs.wikipedia.org/wiki/Elektrick%C3%A1_jednotka_471)

- [38] RÁBOVÁ, Zuzana. *Modelování a simulace*. Brno: VUT, 1992. ISBN 80-214-0480-9.
- [39] ALP-45DP. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/ALP-45DP>
- [40] Uploaded by bengts. *Photobucket* [online]. [cit. 2018-04-20]. Dostupné z: <http://photobucket.com/gallery/user/bengts/media/bWVkaWFJZDo3OTQ0Mjg3Nw==/?ref=>