Univerzita Pardubice

Ekonomicko-správní

Markův proces v životním pojištění

Bc. Jaroslav Lábr

Diplomová práce

2018

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2016/2017

Studijní program: Systémové inženýrství a informatika
Forma: Prezenční
Obor/komb.: Pojistné inženýrství: Management finančních rizik (PI-MFR)

Podklad pro zadání DIPLOMOVÉ práce studenta

PŘEDKLÁDÁ:	ADRESA	OSOBNÍ ČÍSLO
Bc. Lábr Jaroslav	Vrbice 40, Vrbice	E160033

TÉMA ČESKY:

Markovův proces v životním pojištění

TÉMA ANGLICKY:

Markov process in life insurance

VEDOUCÍ PRÁCE:

RNDr. Ján Gogola, Ph.D. - UMKM

ZÁSADY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Cíl práce: Diplomová práce se zabývá možností aplikace Markovova procesu v životním pojištění. Cílem práce je popsat model, který je stochastický a který umožňuje výpočet netto pojistného některých produktů životního pojištění.

Teoretická část:
- Charakteristika životního pojištění
- Základní pojmy životního pojištění
- Stochastické modely
- Markovské procesy
  Základní vlastnosti, pojmy

Praktická část:
- aplikace Markovova procesu v životním pojištění

SEZNAM DOPORUČENÉ LITERATURY:

CIPRA, Tomáš. Pojistná matematika: teorie a praxe. 2., aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, 2006. ISBN 80-869-2911-6.
DAŇHEL, Jaroslav. Pojistná teorie. Praha: Professional Publishing, 2005. ISBN 80-864-1984-3.
DAVID C.M. DICKSON, MARY R. HARDY a HOWARD R. WATERS. Actuarial mathematics for life contingent risks. 2nd edition. Cambridge Univ. Pr: Cambridge University Press, 2013. ISBN 11-070-4407-3.
DOOB, J.L. Stochastic processes. 3. ^[Dr.]^. New York: Wiley, 1990. ISBN 978-047-1523-697.
DUCHÁČKOVÁ, Eva. Principy pojištění a pojišťovnictví. 3., aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, c2009. ISBN 978-80-86929-51-4.
DURRETT, Richard. Essentials of stochastic processes. Second edition. New York: Springer, c1999. ISBN 03-879-8836-X.

Podpis studenta: .... **Datum:** ....

Podpis vedoucího práce: .... **Datum:** ....

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 9/2012, bude práce zveřejněna v Univerzitní knihovně a prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 30.4.2018

Jaroslav Lábr

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych rád poděkoval svému vedoucímu práce Rndr. Jánu Gogolovi, Ph. D. za jeho vedení, trpělivost, ochotu, odbornou pomoc a cenné rady, které mi pomohly při zpracování diplomové práce. Chtěl bych také poděkovat rodičům za podporu při studiu.

Markův proces v životním pojištění

Autor: Bc. Jaroslav Lábr

Ústav matematiky a kvantitativních metod, Pardubice

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Ján Gogola, Ph. D.

ANOTACE

Cílem této diplomové práce je za využití Markova procesu popsat modely, který budou stochastické a umožní výpočet ročního netto pojistného v životním pojištění. Teoretická část práce je zaměřena obecně na historii, základní pojmy a produkty životního pojištění. Praktická část se zabývá využitím Markova procesu a jeho aplikaci na výpočet ročního netto pojistného na specifické modely smluv využívané v životním pojištění.

KLÍČOVÁ SLOVA

Markův proces, životní pojištění, netto pojistné

TITLE

Markov process in life insurance

Author: Jaroslav Lábr

Institute of Mathematics and Quantitative Methods, Pardubice

Supervisor: RNDr. Ján Gogola, Ph. D.

ANNOTATION

Aim of this thesis is to use Markov's proces to describe models which are stochastic and allow calculation anually netto insurance in life insurance. Teoretical part is focused on history, basic concepts and products of life insurance. Practical part uses Markov's prpcess and his application on calculationg netto premium on specific models of contracts used in life insurance.

KEYWORDS

Markov process, life insurance, net premiums

OBSAH

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM TABULEK

ÚVOD

Životní pojištění je v dnešní době velmi konkurenční byznys s několika desítkami pojišťoven na tuzemském trhu. Řada pojišťoven v tak obrovské konkurenci využívá různé možnosti, jak na trhu získat výhodu a přilákat více pojištěných.

Během mého studia na navazujícím magisterském studiu, ve kterém jsem se specializoval na obor management finančních rizik, jsem získal mnoho zajímavých poznatků k oblasti pojišťovnictví. Zejména v předmětech, jako řízení rizik v pojišťovnictví, statistické metody v pojišťovnictví, neživotní pojištění, životní pojištění, aktuárská demografie, pojistná matematika, modelování finančních toků a v mnoha dalších. Předměty z této oblasti mě motivovali k získání stáže v jedné z předních životních pojišťoven a to vedlo k tomu abych se ponořil do životního pojištění hlouběji a proto jsem si zvolil jako téma diplomové práce „*Markův proces v životním pojištění*“.

V první části diplomové práce si vyjasníme některé pojmy, které jsou úzce spjaty s životním pojištěním. Dále se zaměříme na historii životního pojištění, jak ve světě, tak v České republice.

V další části si charakterizujeme životní pojištění a přiblížíme jeho tradiční produkty, které se dnes na trhu vyskytují, buď jako samostatný produkt nebo v různých už dnes i složitých modifikacích, rozšířené o různě doplňkové úrazové připojištění.

V následující části představíme stochastický procesy a dále se zaměřím právě na odvození rovnic pravděpodobností přechodu a výpočet netto pojistného pro různé druhy více stavových modelů pojistných smluv.

V praktické části, kde za využití teoretických znalostí budeme modelovat netto pojistné různých druhů modelů pojistných smluv. Nejprve se zaměříme na nejednoduší model se specifickým pojištěním smrti a na tom si porovnáme rozdíly výpočtů netto pojistného u klasického výpočtu pomocích komutačních čísel a metodou za využití Markova procesu. U složitějších více stavových modelů se už zaměříme pouze na výpočet netto pojistného pomocí Markova procesu.

1 TEORETICKÉ POJMY

V této kapitole si uvedeme a vysvětlíme nejdůležitější teoretické pojmy, které jsou s životním pojištěním užívané.

1.1 Základní pojmy životního pojištění

V této podkapitole si definujeme některé základní pojmy, které jsou s životním pojištěním spjaté.

1.1.1 Pojistný trh

Pojistný trh představuje střet nabídky a poptávky po specifické peněžní službě, kterou nazýváme pojištění. Důvěryhodný a solidní trh se odvíjí od zdravé prosperující ekonomiky a vyspělé finanční sféry na daném území. [5] Na jedné straně se na tomto trhu prezentují jednotlivé pojišťovny, které prodávají pojistné produkty a dosahují zisků. Na straně druhé se klienti (spotřebitelé) snaží vyjednat co nejvýhodnější podmínky a ceny pro jednotlivé produkty. Na pojistném trhu mají významnou roli také zprostředkovatelé pojištění (makléři, poradci atd.), kteří umožnují rychlejší a lepší fungování mezi nabídkou a poptávkou na pojistném trhu. Pojistný trh v dnešní době ve značné míře ovlivňuje velké množství konkurenčních pojišťoven a rychle se měnící trendy v rostoucí digitalizaci. [17]

1.1.2 Pojem pojistné riziko

„Pojem riziko je chápán jako možnost vzniku události s výsledkem odchylným od cíle s určitou objektivní pravděpodobností“. [8]

Jde tedy o míru pravděpodobnosti vzniku pojistné události vyvolané pojistným nebezpečím. Tato definice nám říká, že nelze s jistotou pojistit událost, která nastane. Pojistné riziko je hlavní důvod toho, proč se klienti pojišťují. Protože se chtějí ochránit před možným budoucím vznikem daného rizika, přenášejí tedy pojistné riziko na jiný subjekt (pojišťovnu). V případě životního pojištění můžeme mluvit o přenesení dvou základních rizik:

- riziko úmrtí,
- riziko dožití. [4]

1.1.3 Subjekty v sektoru pojišťovnictví

V sektoru pojišťovnictví se menší či věší mírou objevují následující osoby a instituce:

- **Pojišťovny a zajišťovny**

Pojišťovna je právnická osoba, která získala oprávnění poskytovat na území ČR pojišťovací činnost a uzavírá s pojistníkem pojistnou smlouvu. Povolení pro pojišťovací činnost získá buď v odvětví životního nebo neživotního pojištění.

Zajišťovna je právnická osoba, jejíž činnost spočívá v zajištění pojišťoven v případě vybraných pojistných rizik. [17]

- **Zákazníci**

Pojistník je fyzická nebo právnická osoba, která uzavře smlouvu s pojišťovnou a tím se za předem stanovených podmínek zaváže platit sjednanou výši pojistného, které pokrývá sjednaná rizika.

Pojištěným je osoba, na jejíž život a zdraví se pojištění vztahuje. Pojištěný a pojistník může nebo nemusí být tatáž osoba. Rozlišovat pojmy pojistník a pojištěný má význam pouze tehdy, bude-li sjednáno pojištění cizího pojistného nebezpečí. Pojištěn tedy bude život a zdraví jiné osoby než té, která sjednala pojistnou smlouvu a je plátcem pojistného. Nejčastěji se tyto pojmy rozlišují v případě pojištění dítěte. Osoby mladší 18 let nesmí být vlastníky pojistné smlouvy, proto je smlouva vedena na jejich rodiče nebo prarodiče.

Obmyšlená osoba nebo osoba oprávněná k pojistnému plnění je osoba, které bude vyplaceno pojistné plnění v případě pojistné události. [17]

- **Pojišťovací zprostředkovatelé a samostatní likvidátoři pojistných událostí**

Pojišťovací zprostředkovatel je právnická nebo fyzická osoba, která za předem sjednané prémie provozuje zprostředkovatelskou činnost v pojišťovnictví. Zprostředkovatel je osoba, která vystupuje na trhu jako prostředník mezi nabídkou a poptávkou, tedy mezi pojišťovnou a pojistníkem.

Samostatný likvidátor pojistných událostí je podnikatel, který provádí na základě smlouvy s pojišťovnou šetření ke zjištění rozsahu její povinnosti plnit.

V České republice se vyskytuje několik asociací, které sdružují zprostředkovatele a likvidátory pojistných událostí. Těmi jsou:

- Asociace českých pojišťovacích makléřů (AČPM)
- Asociace finančních zprostředkovatelů a finančních poradců České republiky (AFIZ)
- Unie společností finančního zprostředkování a poradenství (USF)
- Česká komora samostatných likvidátorů pojistných událostí [17]

1.1.4 Pojistná doba

Pojistná doba je období, na které se pojistná smlouva sjednává. Pojistná doba se dále dělí na pojistná období, která mají svá specifika:

- **Dočasné pojištění** – pojišťovna kryje rizika pouze po omezenou dobu, která je předem smluvně omezena.
- **Trvalé pojištění** – pojistná doba je bez smluvního omezení, např. pojištění doživotního důchodu, kde probíhá výplata až do smrti pojištěného bez jakéhokoli omezení.
- **Pojištění s odkladem** – pojišťovna nehradí pojistné plnění po dobu odkladu. [8]

1.1.5 Pojistné

Pojistné představuje předem zaplacenou úplatu za přenesení negativních finančních důsledků nahodilosti z podnikatelských a ostatních ekonomických subjektů na pojišťovnu. Uvažujeme-li na makro úrovni, pak jde o přenesení pojistných rizik v ekonomice na specifické odvětví národního hospodářství – pojišťovnictví.

Podle způsobu platby lze pojistné rozdělit na dvě kategorie:

- **Jednorázově placené** – pojistné je placené hned na počátku pojistného období, a to za celou dobu jeho trvání.
- **Běžné pojistné** – pojistné je placené opakovaně, a to za předem určené období. Období je na bázi měsíčně, čtvrtletně, pololetně nebo ročně placeného pojistného. [5]

Další možné členění pojistného:

- **Netto pojistné** – výše tohoto pojistného je rovno rizikovému pojistnému a musí pokrýt možné budoucí plnění.
- **Brutto pojistné** – výše tohoto pojistného obsahuje netto pojistné spolu se správními náklady a bezpečnostní přirážku pro případné nepříznivé škodní výchylky. Mezi správní náklady řadíme počáteční, běžné, správní a inkasní náklady.
- **Valorizované pojistné** – Je pojistné v životním pojištění, které je sjednáváno na delší časové období a reaguje na vývoj inflace. Toto pojistné musí být odsouhlaseno pojistníkem. [5]

1.1.6 Pojistné plnění

Pojistná událost je nahodilá skutečnost označená ve smlouvě, se kterou je spojen vznik povinnosti pojišťovny poskytnout pojistné plnění. V případě životního pojištění nelze určit výši pojistného plnění na základě výše škody, jelikož škoda je v tomto pojištění obtížně ohodnotitelná. Pojistná částka se tedy sjednává předem a je uvedena v pojistné smlouvě. Jedná se tedy o obnosové pojištění.

Pojistné plnění může vypláceno dvěma způsoby:

- **Jednorázově vyplacená pojistná částka** – v nedůchodovém životním pojištění, jako je např. pojištění smrti na 500 000 Kč, kde v případě úmrtí bude tato částka vyplacena.
- **Důchod** – v důchodovém pojištění nebo v případě některých pojistných produktech při rozložení jednorázové pojistné částky do anuity umožněné opcí klienta. Důchod lze dělit na:
    - **Jistý důchod** – důchod vyplácen po předem určenou dobu.
    - **Životní důchod** – důchod se vyplácí po celou dobu života pojištěného.
- **Zproštění od placení pojistného** – v případě splnění předem určených podmínek, je umožněno zprostit pojistníka od placení pojistného. Například při invaliditě dospělé osoby vzniká nárok na zproštění od placení pojistného za předpokladu, že si klient toto připojištění sjednal. V případě, že tato situace nastane, přebírá na sebe pojišťovna povinnost platit pojistné. [5]

1.1.7 Technická úroková míra

Technická úroková míra se používá pro výpočet pojistného rizikového a životního pojištění. Je obvykle stanovena v pojistné smlouvě. Česká národní banka pravidelně určuje horní limit technické úrokové míry, kterou poté české pojišťovny mají uplatňovat. Technická úroková míra, která je platná při uzavření smlouvy, je účinná po celou dobu trvání smlouvy. Změna úrokové míry nemá vliv na stávající podmínky. [4]

2 HISTORICKÝ VÝVOJ POJIŠTĚNÍ

2.1 Vývoj pojištění ve světě

2.1.1 100 let před naším letopočtem

Počátky pojetí životního pojištění, jak ho známe, lze vysledovat do starého Říma. Caius Marius, římský vojenský vůdce, mezi jeho vojáky vytvořil pohřební klub (v org. Burial club). V případě, že někdo z jeho armády zemřel, ostatní členové pohřebního klubu platili všechny náklady spojené s pohřbem. [20]

V této době vzniklo mnoho podobných klubů. Římané totiž věřili tomu, že každý nesprávně pohřbený člověk se stane nešťastným duchem. Právě proto byly kluby přijaty vládou a armádou z důvodu hlubokého přesvědčení o naprosté nezbytnosti správného pohřbení každého člověka bez ohledu na jejich sociální postavení. Kluby se později vyvíjely tak, aby poskytovaly i stipendium pozůstalým po zemřelých.

Koncept tohoto pojištění zanikl spolu s pádem Říše římské kolem roku 450 našeho letopočtu. [1] [2]

2.1.2 Období od roku 1688

Edward Lloyd's Coffee House, malý obchod na London‘s Tower Street, který byl oblíbeným místem pro shromažďování lodních kapitánů, majitelů lodí a obchodníků, se stal místem pro předávání zpráv a časem i pro sjednávání námořního pojištění.

V roce 1769 se skupina profesionálních pojistitelů (v org. underwritters) přestěhovala do společnosti New Lloyd's Coffe House, která nakonec vyrostla do dnešní podoby. Tuto společnost známe pod názvem Lloyd's of London. [10]

2.1.3 Období od roku 1759

Presbyterian Synod ve Philadelphii sponzorovala první životní pojištění v Americe formou benefitů pro Presbyterianské ministry a jejich rodinné příslušníky. Episcopalian ministři zorganizovali podobný fond o 10 let později.

V roce 1735 vznikla první pojišťovna v Amerických koloniích v Charlestonu. Až do roku 1760 ale nabízela pouze protipožární pojištění. V této době své portfolio rozšířili a začali nabízet i životní pojištění. [1] [21]

2.1.4 Období od roku 1837

Vzniklá panika z roku 1837 a následná finanční krize vedly k posunu směrem k vzájemnému propojení mezi životními pojišťovnami. V období od roku 1838 do roku 1849 zvýšila pouze jedna životní pojišťovna kapitál na základě zásob. Během stejného období bylo nakoupeno 17 vzájemných společností, vyžadující malý počáteční kapitál.

Rozšiřování vzájemných vztahů, stejně jako další vývoj, jako jsou právní změny umožňující ženám zakoupit životní pojištění a kulturní posun od kazatelů, kteří démonizovali životní pojištění jako "hazard", vytvořilo období boomu pro životní pojišťovny. V tomto období vznikla řada současných největších životních pojišťoven, včetně New York Life, MassMutual, John Hancock a MetLife. [1] [21]

2.1.5 Období od roku 1875

Během období deprese v letech 1871 až 1874 ukončilo svou činnost 46 životních pojišťoven, z nichž 32 selhalo. Důsledkem toho byla ztráta pojistníků ve výši 35 milionů dolarů.

V roce 1875 vznikla v Newarku vznikla společnost pro vdovy a sirotky Friendly Society s jediným produktem: pojištění pohřbu. Byla to první společnost ve Spojených státech, která poskytla životní pojištění dělnické třídě. Tato společnost existuje dodnes pod názvem Prudential. [1] [21]

2.1.6 Období od roku 1911

Skupinové životní pojištění vzniklo v době, kdy společnost Equitable Life Assurance Society (nyní AXA Equitable) uzavřela pojistné smlouvy pro všech 125 zaměstnanců společnosti Pantasote Leather Company, aniž by vyžadovala individuální žádosti nebo lékařské vyšetření. V roce 1912 společnost Equitable zorganizovala oddělení pro podporu skupinového pokrytí a brzy začala pojišťovat zaměstnance společnosti Montgomery Ward. [1] [21]

2.1.7 Období od roku 1930

Po skončení první světové války se prodeje životního pojištění dramaticky zvýšily. Do roku 1920 bylo ve Spojených státech k dispozici více než 120 milionů pojistných smluv životního pojištění a v roce 1930 platné životní pojištění dosáhlo rekordní výše 117 miliard dolarů. V té době to odpovídalo přibližně jedné pojistce pro každou dospělou osobu v USA Jeden z pěti pojištěných byl pojištěn společností MetLife. [1] [21]

2.1.8 Období od roku 1965

Servisní pojišťovna poskytující životní pojištění byla přijata do zákona, aby poskytla životní pojištění členům ozbrojených sil na aktivní službu. Pojištění je pojištěno skupinou komerčních pojistitelů a federální vláda platí správní náklady a dodatečné náklady vyplývající ze zvýšeného rizika vojenské povinnosti. [1] [21]

2.1.9 Období od roku 1976

Konec druhé světové války a ekonomický boom měly za příčinu následnou podporu prodeje životního pojištění ve Spojených státech. Do poloviny 70. let vlastnilo 72 procent dospělé populace ve Spojených státech a více než 90 procent všech rodin určitou formu životního pojištění. [1] [21]

2.1.10 Období od roku 2010

Od roku 2010 se odhaduje, že pouze 44 procent domácností v USA má individuální životní pojištění. Jedná se o 50leté minimum, ale životní pojištění zůstává důležitým střediskem finančního plánování rodiny.

Odhaduje se, že například 9.září, kdy byly spáchány útoky v New Yorku, Washingtonu a Pensylvánii, kde zahynulo 2876 lidí, bylo vyplaceno na životním pojištění více než 1,2 miliardy dolarů.

Mnoho studií připisuje pokles prodeje životního pojištění v USA zanedbání střední třídy. Životní pojišťovny se zaměřují na bohatý, seniorský trh, který hledá velké tržby, a zanedbávají průměrné obyvatele střední třídy, kteří potřebují životní pojištění k ochraně svých rodin v případě nečekané smrti. [1]

2.2 Vývoj životního pojištění v České republice

2.2.1 Vývoj životního pojištění v Českých zemích do roku 1918

Stále narůstající krize feudalismu a sílící projevy kapitalistického způsobu výroby vnesly zásadní změny do způsobu života lidí, a to zejména do způsobu zabezpečování rodin v případě předčasného úmrtí živitele nebo v případě jeho invalidity. O pozůstalé se po předčasně zemřelých živitelích rodin, případně o invalidy, v minulosti většinou starali blízcí příbuzní. Někdy se však nižší šlechta dostávala do těžké situace, jelikož smrti živitele zůstávaly jejich rodiny bez prostředků. Ve snaze tomu zabránit byl v roce 1771 za vlády Marie Terezie a Josefa II. vydán penzijní předpis, který zaručoval důchody vdovám a sirotkům po byrokratech, kteří věrně sloužili. O deset let později, roku 1781, byl vydán předpis o důchodu pro všechny příslušníky byrokratického aparátu, kteří se po alespoň desetileté uspokojivé službě stali práce neschopnými. Oba tyto přepisy jsou známy jako tzv. *normály*.

Velkým sociálním problémem byly nezaopatřené vdovy a sirotci. Koncem 18. století tedy začaly vznikat vdovské a sirotčí penzijní ústavy. Nejstarším z nich byl Olomoucký všeobecný vdovský a sirotčí penzijní ústav. Členové byli povinni zaplatit vklad 200 zlatých a platit ročně příspěvky ve výši 16 zlatých. Všem členům Olomouckého ústavu bylo zaručeno, že vdova v případě smrti manžela dostane penzi 200 až 300 zlatých ročně. Dalšími ústavy tohoto typu byly:

- Uherský ústav
- Pražský ústav pro občany provozující živnosti
- Pražský zabezpečovací ústav pro muže, které bez jejich zavinění postihlo neštěstí, a pro vdovy a sirotky,
- Vídeňský všeobecný vdovský a sirotčí penzijní ústav,
- Lvovský ústav.

Žádný z těchto ústavů nebyl přístupný dělníkům, drobným rolníkům a sociálně slabým vrstvám společnosti.

Do roku 1869 ovládaly pojistný trh českých zemí v životním pojištění pojišťovny, které měly ústředí mimo toto teritorium. Nejdůležitější z prvních novodobých životních pojišťoven bylo všeobecný zaopatřovací ústav pro poddané rakouského císařského státu.

První české pojišťovny získávaly méně výhodnější pojištění oproti zahraničním pojišťovnám. V roce 1879 získaly obě české pojišťovny pouze 2,58 % brutto-pojistného životního pojištění z celého předlitavského trhu životního pojištění (v českých zemích žilo 37,72 % obyvatel „Předlitavska“).

První česká pojišťovna „Slavie“ zahájila svou činnost jako ryze životní pojišťovna. Později se stala pojišťovnou provozující jak životní pojištění, tak pojištění majetku a odpovědnosti za škody. Na rozdíl od toho druhá česká pojišťovna „Praha“ zůstala stále ryze životní pojišťovnou. Koncem 19. století obě české pojišťovny postupně zvyšovaly svůj podíl na pojistném trhu českých zemí. Životní pojištění předstihlo požární pojištění – doposud nejsilnější druh pojištění majetku.

Na přelomu 19. a 20. století se stalo životní pojištění nejvýznamnějším druhem pojištění.

Klíčovou úlohu v něm hrálo pojištění pro případ úmrtí, dále pojištění na dožití a až v pozadí bylo důchodové pojištění. Na rozvoj životního pojištění mělo vliv také uzákonění penzijního pojištění soukromých úředníků a obchodních zástupců. Počátkem první světové války životní pojištění v českých zemích stagnovalo, avšak všechny větší životní pojišťovny byly schopné krýt své závazky z vytvořených rezervních fondů. Základní a také nejdůležitější druhy pojištění (požární, úrazové a životní pojištění) byly trvale výdělečné i přes kolísající zisky. [12] [14] [15] [16]

2.2.2 Vývoj životního pojištění v Československu v období mezi dvěma světovými válkami 1918–1938

Soukromé pojišťovnictví v českých zemích vstoupilo do poválečného období s jednou akciovou pojišťovnou „Koruna“ a pěti národnostně českými vzájemnými pojišťovnami provozujícími životní pojištění. Situace se však změnila vznikem samostatného Československa.

Po celou dobu trvání Československa se rozlišovaly čtyři základní „*klasické*“ druhy životního pojištění:

- pojištění na pouhé úmrtí,
- pojištění na dožití,
- pojištění na dožití a úmrtí (tzv. smíšené pojištění),
- důchodové pojištění.

Vedle „klasického“ životního pojištění, u kterého musel klient absolvovat lékařskou prohlídku, nabízely některé pojišťovny tzv. „lidové“ pojištění, u něhož lékařská prohlídka nebyla nutná. Zvláštní kapitolou bylo také pojištění tzv. *anormálních životů*, tj. osob s vážnými zdravotními obtížemi.

V roce 1921 byl založen Československý Svaz pro pojišťování životů. Během období hospodářské konjunktury, v letech 1924–1929, přestalo být životní pojištění pouze prostředkem zaopatření pozůstalých v případě úmrtí živitele, ale získávalo stále více prvků spořivosti. Docházelo ke stálému rozvoji životních pojišťoven u přímého normálního kapitálového pojištění. Trh životního pojištění ovládalo v Československu jedenáct domácích a zahraničních pojišťoven, a to:

- Fénix-život,
- Slavia,
- Viktoria,
- Assicurazioni,
- Réunione,
- Slovanská pojišťovna,
- Zemská životní pojišťovna,
- Praha,
- Čechoslavia,
- Kotva,
- Dunaj.

V letech 1930 až 1938, během hospodářské krize a ozdravování ekonomiky, se obchod se životním pojištěním zhoršil především v poklesu nové produkce a zvýšené lapsovosti (tj. stornem do tří let), odkupy, redukcemi a ostatními způsoby snížení. V této době překonávání hospodářské krize se někteří pojistníci rozhodli spáchat sebevraždu tak, aby vypadala jako nešťastná náhoda či vražda, čímž by finančně zabezpečili svou rodinu. Tím začaly vznikat první *pojišťovací podvody*. Do normálního stavu se obchodní činnost životních pojišťoven dostala až v roce 1937. Od té doby se úspěšně rozvíjela až do okupace českých zemí nacistickým Německem a do oddělení Slovenského státu. [12] [14] [15] [16]

2.2.3 Vývoj životního pojištění v Československu za druhé světové války 1939-1945

V oblasti životního pojištění se výrazně projevovaly vlivy pokračující inflace. Roku 1940 bylo vydáno vládní nařízení, podle něhož byly pojišťovny povinny převzít ručení ze všech životních pojištění až do 200 000 Kč pojistné částky na jednoho pojistníka. Pojišťovny tedy zavedly při uzavírání smluv srážky při výplatách pojistného plnění, které měly sloužit na úhradu nákladů pojišťovny. [16]

2.2.4 Vývoj životního pojištění od roku 1945

Ve 20. století se stalo životní pojištění nejdůležitějším odvětvím celého soukromého pojištění. Začalo se dále členit na riziková životní pojištění, smíšená životní pojištění, důchodová pojištění a rodinná pojištění. Postupně se vyvíjelo až do podoby, jak ho známe dnes. [16]

3 ŽIVOTNÍ POJIŠTĚNÍ

3.1 Charakteristika životního pojištění

Životní pojištění obsahuje spousty pojistných produktů. Tradičními produkty jsou pojištění pro případ smrti, pojištění pro případ dožití, kombinace pojištění pro případ smrti nebo dožití a důchodové pojištění.

V počátcích životního pojištění bylo pouze pojištění na život. To znamená, že se jednalo pouze o pojištění pro případ smrti. Od druhé poloviny 19. století se na trhu začaly objevovat tradiční český pojišťovny, které dnes mají významné postavení na trhu. V dnešní době už se pojištění na život řadí mezi běžné pojistné produkty, jehož hlavní přednost spočívá v možnosti kombinovat spoření a pojištění. V současnosti, kdy na trh přichází inovace, digitalizace, pojistné produkty se vyvíjí, vznikají nové produkty a konkurence je vysoká, se životní pojištění stalo širokým pojmem. K tradičním pojistným produktům lze sjednat i různá připojištění, které si klient volí sám. I přesto se na pojistném trhu vyskytují samostatná pojištění pro případ smrti, pro případ dožití, ale samozřejmě i pojištění pro případ kombinace těchto dvou variant spolu s možností spoření. V poslední zmíněné kombinaci má pojištěný jistotu, že pokud zemře bude obmyšlená osoba zabezpečena a pokud se pojištěný dožije sjednaného věku, získá vložené pojistné o navýšený úrok zpět.

Jak už bylo uvedeno dříve, tyto kombinace je možné rozšířit i o další možné doplňkové formy (připojištění), jako například pojištění života, kde lze sjednat pojištění pro případ smrti z jakýkoliv příčin, případně smrt následkem úrazu. Dalšími formou připojištění je pojištění invalidity I. II. a III. stupně a pojištění velmi vážných onemocnění. Dále pojištění úrazu, kde lze pojistit pojištění trvalých následků nebo denní odškodné. Některé pojišťovny hradí i pobyt v nemocnici pomocí připojištění hospitalizace případně vyplácejí při pracovní neschopnosti předem sjednanou částku za každý den. V dnešní době lze dokonce životní pojištění využít i jako možnost investice svých peněžních prostředků, kde lze investovat do různých předem daných fondů, jako jsou například skupina akciových fondů, peněžní fondy, dluhopisové fondy, smíšené fondy a také garantované fondy. Každá pojišťovna má své předem dané fondy a klient si může vybrat do jakých investuje a v průběhu pojištění může své rozhodnutí měnit.

Jednotlivé připojištění životního pojištění se liší rozsahem pojistné ochrany, pojistnými podmínkami, výší pojistného. Pojišťovny můžou mít tyto aspekty i rozdílné. Pojištěním nelze zamezit nahodilé události, ale vyplacené pojistné plnění může tuto událost zmírnit a částečně vyřešit, nebo jen zmírnit některé následky.

3.2 Základní podoby životního pojištění

V této podkapitole si přiblížíme základní rizika životního pojištění. Životní pojištění obsahuje krytí dvou rizik, které jsou kombinovány v různých podobách, proto se vyskytuje množství druhů a podob životního pojištění.

Základní rozdělení životního pojištění:

- *Pojištění pro případ smrti*
- *Pojištění pro případ dožití*
- *Smíšené pojištění pro případ smrti nebo dožití*

3.2.1 Pojištění pro případ smrti

U pojištění pro případ smrti nebo také rizikového životního pojištění se sjednává výše pojistné částky na riziko úmrtí, které je jediné v případě smrti. Tato pojistná částka se v případě smrti vyplácí osobě (může být také více osob) uvedené v pojistné smlouvě jako obmyšlená osoba. Účelem tohoto druhu pojištění je zejména zabezpečení pozůstalých osob po pojištěné osobě, dále to může být úhrada závazku, úhrada nákladů v souvislosti s úmrtím a pohřbem atd.

Pojištění pro případ smrti lze rozdělit do několika druhů pojištění. Mezi základní rozdělení pojištění pro případ smrti patří členění podle způsobu sjednání pojistné doby, a to na:

- *dočasné pojištění pro případ smrti,*
- *časově neomezené pojištění pro případ smrti.*

Dočasné pojištění pro případ smrti, nebo také rizikové pojištění kryje riziko úmrtí výhradně v rámci sjednané, předem pevně dané doby. Z toho lze odvodit, že případné plnění se vztahuje pouze na předem dané období. Po uplynutí období, na které bylo pojištění pro případ smrti sjednáno tak pojistné plnění nebude vyplaceno. Tento typ životního pojištění se používá jako krytí dlužné částky úvěru, půjčky, hypotéky (zde to banky přímo vyžadují) apod. Velikost dlužné částky odpovídá výši daného závazku vůči dané instituci. Jelikož se úvěry splácejí a jejich částka tedy časem klesá, tak se dočasné pojištění pro případ smrtí nesjednává pouze jako pevná částka, ale lze ho sjednat i jako klesající pojistná částka, kde simuluje vývoj klesající dlužné částky. Klesající pojistná částka může klesat buď lineárně nebo anuitně podle předem stanoveného procenta klesání. Podle věku a dalších vstupních parametrů je klientovi vypočítané pojistné, které bude hradit.

Současně je toto pojištění limitováno maximální spodní hranicí pro sjednání pojištění (například 70 let) a od určitého věku (například od 70 let do 80 let) lze pojištění pro případ smrti sjednat pouze na 5 let a na pojistnou částku ve výši 10 000kč.

Časově neomezené pojištění pro případ smrti je pojištění, kdy za předpokladu, že žádný člověk není nesmrtelný, je vždy vyplaceno pojistné plnění. Dané pojišťovny ani pojištěný neví, kdy k okamžiku výplaty dojde. Bohužel v praxi to bývá upraveno a smyslem časově neomezeného pojištění pro případ smrti je stanovena horní hranice věku pojištěného do kdy je možná výplata pojistného plnění (například do 85 let). [5] [8] [24]

3.2.2 Pojištění pro případ dožití

Pojištění pro případ dožití se vyskytuje v několika formách. Jeho základní podoba je, že pojistník platí běžné nebo jednorázové pojistné na předem sjednanou pojistnou částku a v předem sjednanou dobu obdrží pojistné plnění ve výši pojistné částky navýšené o předem stanovený garantovaný úrok (nebo při investici do rizikových fondů, podle jejich zhodnocení). Někdo by mohl tvrdit, že je to obdobou spoření, kde jde pouze o vytváření úspor. Hlavní rozdíly pojištění pro případ dožití a spořením jsou takové, že pojišťovna ručí za vklady pojistníků ne výškou skutečného vkladu, ale výškou předem sjednané pojistné částky. Přerušení placení běžného pojistného je spojeno s určitými pokutami. To je důvod, proč je v klasické podobě pojištění pro případ dožití moc nevyužívá a je od něj odvozeno více používané pojištění, a to *důchodové pojištění a věnové pojištění.*

Důchodové pojištění je pojištění na dožití se sjednaným věkem, ale s frekvencí výplaty větší než jedna výplata. Od předem daného věku bude v určité frekvenci vyplácen důchod.

Důchody rozlišujeme podle počátku jeho výplaty:

- *Pojištění ihned splatného důchod* lze uplatnit pouze při jednorázově placeném pojistném. Pojišťovna v předem sjednaných podmínkách začíná ihned v další frekvenci vyplácet sjednanou důchodovou částku, a to po celou dobu sjednaného pojištění.
- *Pojištění odloženého důchodu* je více využívaná forma, ve které je obvykle po předem sjednané období placeno běžné pojistné až do okamžiku, kdy nastane předem sjednaný okamžik pro výplatu důchodu.

Pojištění důchodu lze sjednat na určitou dobu (většinou do určitého věku pojištěného) nebo až do smrti pojištěné osoby.

Podoba pojištění důchodu bývá doplňována o další připojištění, zejména o pojištění smrti, invalidity, ale i jiných připojištěních. Pokud ale máme pojištění důchodu rozšířené o další připojištění je lepší toto pojištění nazývat smíšeným pojištěním.

Vedle základního důchodu je možné sjednat i další formy důchodu:

- *Pozůstalostní důchod,* který je splatný v případě úmrtí pojištěné osobě uvedené v pojistné smlouvě.
- *Dočasný důchod,* který se vyplácí pojištěné osobě v případě plné invalidity.

Věnové pojištění je pojištění pro dítě, kde se sjednává dožití určitého věku dítěte (například plnoletost, k datu ukončení střední školy, začátek studia vysoké školy). Pojistné plnění probíhá v předem stanoveném věku buď formou jednorázového plnění, nebo po několik následujících období formou podílu z pojistného plnění. Věnové pojištění bylo vymyšleno za účelem zajištění dítěte, a proto u se často sjednává s pojištěním na smrt rodičů. [5] [8] [24]

3.2.3 Smíšené životní pojištění

Jak lze odvodit z názvu, smíšené životní pojištění je pojištění dvou složek, pojištění smrti a dožití. U tohoto pojištění bude pojištěné osobě nebo obmyšlené osobě vždy vyplacená pojistná částka. Pokud se pojištěná osoba dožije sjednané doby pojištění, bude jí vyplaceno sjednané pojistné plnění. Pokud pojištěná osoba zemře v průběhu pojištění, pojistné plnění dostane obmyšlená osoba uvedená ve smlouvě (pozn. těchto osob může být více).

V dnešní době v rychle se rozvíjející oblasti pojišťovnictví smíšená forma životního pojištění funguje v několika podobách. Smíšené životní pojištění může mít rozdílné pojistné částky pro pojištění smrti a pojištění dožití, nebo také může mít pojištění smrti sjednané s klesající pojistnou částkou a pojištění dožití na pevně danou částku. [5] [8] [24]

4 ÚVOD DO STOCHASTICKÉHO MODELOVÁNÍ

Stochastické procesy jsou způsoby kvantifikace dynamických vztahů sekvencí náhodných událostí. Stochastické modely hrají důležitou roli při objasňování mnoha oblastí přírodních a inženýrských věd. Mohou být použity k analýze variability v biologických a lékařských procesech, k řešení nejisto ovlivňujících manažerská rozhodnutí a složitosti psychologických a sociálních interakcí a k poskytnutí nových perspektiv, metodologie, modelů a intuice k pomoci v jiných matematických a statistických studií. [3]

Cílem této kapitoly je seznámit se se standartními pojmy a metodami stochastického modelování a představit, jak jsou stochastické procesy rozšířené do různých vědních oborů

4.1 Stochastické modelování

Kvantitativní popis přírodního jevu se nazývá matematický model tohoto jevu. Příklady se vyskytují od jednoduché rovnice $S = \frac{1}{2}gt^2$, která popisuje vzdálenost padajícího objektu v čase t, který začínal v klidu, až po složité počítačové programy, které simulují biologickou populaci nebo velké průmyslové systémy. [22]

Některé stochastické modely jsou užitečné jako podrobné kvantitativní předpisy chování, jakým je například model, který určuje optimální počet jednotek na skladu. Jiný model zase může být použit v jiném kontextu a bude poskytovat pouze obecné kvantitativní informace o vztazích a relativním významu několika faktorů ovlivňujících událost. Takový model je stejně důležitý jako první příklad modelu, ale zcela odlišným způsobem Existuje spousta různých typů stochastických modelů využívajících se v praxi. Spousta nových modelů se ale vytváří a vytvářet bude. [3]

Spousta uvedených atributů jako realismus (v org. realism), elegance (v org. elegance), platnost (v org. validity) a reprodukovatelnost (v org. reproducibility) jsou důležité pro hodnocení modelu pouze tehdy, mají-li vliv na konečný stav modelování. Například je nerealistické a nevýrazné vidět rozlehlé město Praha jako geometrický bod, matematické objekt, který nemá žádnou velikost ani rozměr. Přesto je velmi užitečné toto použít, pokud modelujeme sférickou geometrii, abychom odvodili minimální vzdálenost vzdušnou cestou z Prahy do Brna.

Neexistuje taková věc jako nejlepší model pro daný jev. Pragmatické kritérium užitečnosti často umožnuje existenci dvou nebo více modelů pro stejnou událost, ale slouží k různým účelům. Uvažujme světlo. Model vlnové formy, ve kterém je světlo považováno za kontinuální proudění, je zcela přiměřené pro konstrukci brýlových čoček a čoček pro dalekohledy. Naproti tomu, pro pochopení vlivu světla na sítnici oka, je upřednostňován fotonový model, který vidí světlo jako malé diskrétní svazky energie. Žádný z modelů nenahradí druhý. Oba jsou relevantní a užitečné. [7] [9]

Slovo „stochastic“ pochází z cílené chamtivosti (k tomu, že se uchylujeme k hádání) a v překladu znamená „náhodný“, nebo „rizikový“. „Stochastic“ může být jistý, deterministický nebo určitý. Deterministický model předpovídá jediný výsledek z daného souboru okolností. Stochastický model předpovídá soubor možných výsledků vážených jejich pravděpodobností. Minci, kterou vyhodíme do vzduchu, s jistotou dopadne někdy v budoucnu na zem. Ať už dopadne rubem, nebo lícem nahoru, půjde o náhodný jev. Pro spravedlivou minci uvažujeme, že obě alternativy mohou nastat se stejnou pravděpodobností 0,5. [18]

Nastalé jevy však nejsou samy o sobě pouze stochastické nebo deterministické. Modelování stochastického nebo deterministického jevu je volbou pozorovatele. Volba závisí na účelu daného modelování. Kritéria pro posouzení výběru je užitečnost daného modelování. Ve většině případů je správná volba zcela jasná, ale nastávají i sporné situace. Například pokud je mince, která kdysi padla, rychle zakryta dlaní a výsledek zůstává neznámý, dva soutěžící mohou ještě užitečně využít pravděpodobnostní koncepce k vyhodnocení toho, co je mezi nimi spravedlivá sázka. To znamená, že mohou minci vidět jako náhodnou, přestože by většina lidí mohla považovat výsledek za fixní nebo deterministický. Jako méně obyčejný příklad kontroverzní situace jsou změny úrovně početné populace často účelně modelovány deterministicky, a to navzdory všeobecné shodě mezi pozorovateli, že mnoho výskytů událostí přispívá k jejich výkyvům. [18]

Vědecké modelování má tři složky: 1) zkoumá se přirozený jev, 2) logický systém pro odvození důsledků tohoto jevu, a 3) spojení, které spojuje prvky přírodního systému ve studiu s logickým systémem. Pokud se zamyslíme nad těmito třemi složkami z hlediska problému s velkými kruhovými vzdušnými trasami, přirozeným systémem je země s letišti v Praze a Berlíně. Logický systém je matematickým předmětem sférické geometrie a oba jsou spojeny prohlížením letišť ve fyzickém systému jako body v logickém obvodě. [7] [9] [18]

Moderní přístup ke stochastickému modelování je v podobném duchu. Příroda nedefinuje jedinečnou definici „pravděpodobnosti“, stejně jako neexistuje žádná definice „bodu“ v geometrii. „Pravděpodobnost a bod“ jsou významy v čisté matematice, které jsou definovány pouze prostřednictvím vlastností, které jsou vysvětlovány pomocí příslušných množin axiomů.

Existují však tři obecné principy, které jsou často užitečné ve vztahu k abstraktním prvkům nebo propojení abstraktních prvků teorie matematické pravděpodobnosti s reálným nebo přirozeným jevem, který má být modelován. Jedná se o

1) zásadu stejně pravděpodobných výsledků,
2) princip dlouhodobé proměnné frekvence a
3) princip rozdílného složení nebo subjektivní pravděpodobnosti. Z historického hlediska tyto tři pojmy vznikly z velmi neúspěšných pokusů definovat pravděpodobnost z hlediska fyzických zkušeností. Dnes jsou relevantní jako pokyny pro přidělování hodnot pravděpodobnosti v modelu a pro interpretaci závěrů modelu ve smyslu studovaného jevu. [7] [18]

Rozdíly mezi těmito principy jsou podloženy dlouhodobým experimentem. Budeme předstírat, že jsme součástí skupiny lidí, kteří se rozhodnou hodit si mincí a pozorovat událost, že mince padne lícem nahoru. Tuto událost označíme H a opačnou stranu mince označíme T. [18]

Zpočátku všichni ve skupině souhlasí s tím, že $Pr\{H\} = 0{,}5$. Když se zeptáme lidí proč, odpovídají dvěmi možnostmi. První je, že při kontrole stavby mincí jsou přesvědčeni, že oba možné stavy, rub a líc, mohou nastat se stejnou pravděpodobností. Druhou možností jsou minulé zkušenosti. Věří také, že pokud se mince hodí mnohokrát, tak počet pokusů, kdy padne líc, bude téměř jedna polovina. [18]

Stejně pravděpodobná interpretace pravděpodobnosti se objevila v dílech Laplacea v roce 1812, kdy byl učiněn pokus definovat pravděpodobnost události A k poměru celkového počtu způsobů, jakým by se jev A mohl vyskytnout k celkovému počtu všech možných výsledků experimentu. Stejný přístup pravděpodobnosti se dnes často používá k určení pravděpodobností, které odrážejí určitý pojem úplného nedostatku znalostí o výsledku náhodného jevu. Zásada vyžaduje rozumné využití, pokud má být užitečná. Například v našem experimentu s mincemi, budeme uvažovat, že mince může přistát na rubem, lícem, ale také na její hraně. Událost, kdy mince přistane na hradě, označíme E, pak můžeme nasání pravděpodobnosti popsat, jako $\Pr(H) = \Pr\{T\} = \Pr\{E\} = \frac{1}{3}$. [18]

Následující princip, dlouhodobá relativní frekvenční interpretace pravděpodobnosti, je základním stavebním kamenem moderního stochastického modelování, který je v axiomatické struktuře přesně odůvodněný právem velkých čísel (v org. law of large numbers). Tento zákon velkých čísel tvrdí, že relativní zlomek časů, ve kterých událost nastane v sekvenci nezávislých podobných experimentů, se v limitu přibližuje pravděpodobnosti výskytu události na jakémkoli jednotlivém pokusu. [3] [18]

Tato zásada však není relevantní ve všech situacích. Když chirurg řekne pacientovi, že má šanci na přežití $80 - 20$, pro chirurga to znamená, že 80 procent jeho pacientů s podobným příznakem chirurgický zákrok přežije. Pacienta ale nezajímá, jakou pravděpodobnost má chirurg dlouhodobě, ale v daný okamžik. Je pro něj životně důležitý pouze výsledek chirurgického zákroku, který bude vykonán na něm. [18]

Když se vrátíme ke skupinovému experimentu, předpokládáme, že mince bude převrácena do vzduchu a po přistání je rychle pokryta, aby nikdo neviděl výsledek. Jaká je teď pravděpodobnost $Pr\{H\}$? Nyní několik lidí ze skupiny tvrdí, že výsledek mince již není náhodný, že $Pr\{H\}$ je buď 0 nebo 1 a že i když nevíme, co to bude, teorie pravděpodobnosti se na to nevztahuje. [18]

Jiní vyjadřují odlišný názor. Rozdíl mezi „náhodným“ a „nedostatkem znalostí“ je v nejmenším případě nejasný a že člověk s dostatečně výkonným počítačem a dostatečnými informacemi o takových faktorech, jako je energie, rychlost a směr požitý při hodu mincí může předvídat výsledek, rub nebo líc, s jistotou před hodem.

V souvisejících případech je několik lidí ve skupině ochotno sázet mezi sebou, s vyrovnanými pravděpodobnostmi, na výsledek shody. To znamená, že jsou ochotni použít pravděpodobnost, aby určili, co je spravedlivá sázka, aniž by zvážili, zda je studovaná událost náhodná nebo ne. Zde se použilo kritérium užitku pro posouzení modelu.

Zatímco zbytek davu debatoval „náhodně“ versus „nedostatek znalostí“, jeden člověk si prohlídl minci. Její pravděpodobnost pro rub se nyní liší od všech ostatních. Když drží minci zakrytou, oznamuje výsledek líc, nyní všichni mentálně přidělují hodnotu $Pr\{T\} = 0$.

Další scénář vysvětluje, proč při dostizích jiní lidé přiřazují stejné události různé pravděpodobnosti. Z tohoto důvodu se pravděpodobnosti, které se používají při tvorbě kurzů, často nazývají subjektivní pravděpodobnosti. Pak kurzy vytvářejí třetí princip určování hodnot pravděpodobnosti v modelech a jejich interpretaci v reálném světě. [18]

Moderní přístup k stochastickému modelováni je rozvést definici pravděpodobnosti z jakéhokoli konkrétního typu aplikace. Teorie pravděpodobnosti je axiomatická struktura, která je součástí čisté matematiky. To je použité v modelování stochastických jevů je to také součástí jevů širší sféry vědy a také při využívání v oborech matematiky při modelování deterministických jevů.

Aby byl stochastický model užitečný, musí odrážet všechny aspekty studovaného jevu, které jsou relevantní pro danou oblast. Navíc model musí být přizpůsoben výpočtu a musí umožnovat odpočet důležitých předpovědí nebo důsledků tohoto jevu. [18]

4.2 Stochastický proces

Stochastický proces je množina náhodných proměnných X kde t je parametr, který běží přes vhodnou množinu indexů T(lze zapsat také jako $X(t)$). V běžné situaci index t odpovídá diskrétní jednotce času a množina indexů je $T = \{0, 1, 2, \dots\}$. V tomto případě X může představovat výsledky při opakovaném hodu mince. Stochastické procesy, u kterých $T = [0, c)$ jsou obzvláště důležité v aplikacích. Zde t často představuje čas, ale také vznikají různé jiné situace. Například t může znamenat vzdálenost od libovolného bodu a X může počítat počet defektu v intervalu $(0, t)$ podél závitu nebo počet vozů v intervalu $(0, t)$ na dálnici. [7] [9]

Stochastické procesy se liší podle jejich stávajícího prostoru nebo rozsahu možných hodnot pro náhodné proměnné X podle jejich indexové množiny T a závislosti mezi náhodnými proměnnými X. Stochastické procesy budou využity v následujících kapitolách kde pomocí Markovova procesu bude vypočítáno netto pojistné v různých podobách životního pojištění. [7] [9]

5 VÍCE STAVOVÉ MODELY

V této kapitole si pomocí více stavových modelů představíme model přežití. Dále si uvedeme několik dalších více stavových modelů, které jsou užitečné pro různé typy pojistných smluv. Můžeme uvést příklad, kdy pojistné plnění závisí na zdraví pojistníka, na přežití nebo je pojistné plnění poskytováno v případě smrti.

Obecné definice modelu vícenásobného stavu spolu s jeho předpoklady a notacemi si odvodíme v podkapitole 5.2.

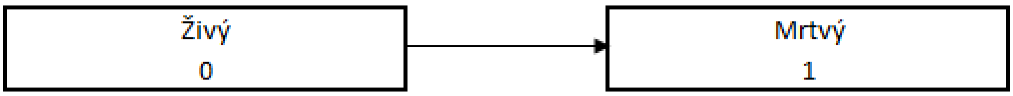
V podkapitole 5.4 budeme diskutovat o odvození vzorců pro pravděpodobnosti a v následující podkapitole 5.5 si vyhodnotíme tyto pravděpodobnosti pomocí numerického výpočtu pravděpodobnosti. To si v podkapitole 5.6 rozšíříme o vzorce pro výpočty pojistného.

V podkapitole 5.7 se budeme věnovat „mnohonásobně vymírajícím modelům“ (v org. multiple dekrement models) a sestavení tabulky pro daný model, která bude využita v praktickém výpočtu. V podkapitole 5.8 se budeme věnovat Markovu více úrovňovému modelu (v org. Markov multiple state models) v diskrétním čase.

5.1 Příklady více stavových modelů

Modely s více stavy jsou jednou z nejvíce vzrušujících oblastí vývoje v pojistně-matematických vědách v posledních letech. Jsou intuitivní a snadno pracují s použitím jednoduchých, ale i složitých numerických technik. Rovněž zjednodušují a poskytují dobrý základ pro stanovení cen a ocenění některých složitých pojistných smluv. V této podkapitole si na jednoduchých příkladech představíme některé využití více stavových modelů, které jsou běžně využívány v aktuální pojistně-matematické praxi.

5.1.1 Model živý-mrtvý



Obrázek 1: Model živý-mrtvý

Zdroj: vlastní zpracování podle [6]

Předpokládáme, že budeme modelovat nejistotu ohledně trvání budoucího života jednotlivce tím, že budeme považovat budoucí životnost za náhodnou proměnnou, T_x, pro jedince ve věku x, s danou kumulativní distribuční funkcí $F_x(t)(= \Pr[T_x \leq t])$, a funkcí přežití, $S_x(t) = 1 - F_x(t)$. Jedná se o pravděpodobnostní model v tom smyslu, že pro jednotlivce ve věku x máme jednu náhodnou proměnnou, T_x, jejíž distribuční hodnota a všechny související pravděpodobnosti jsou předem známy.

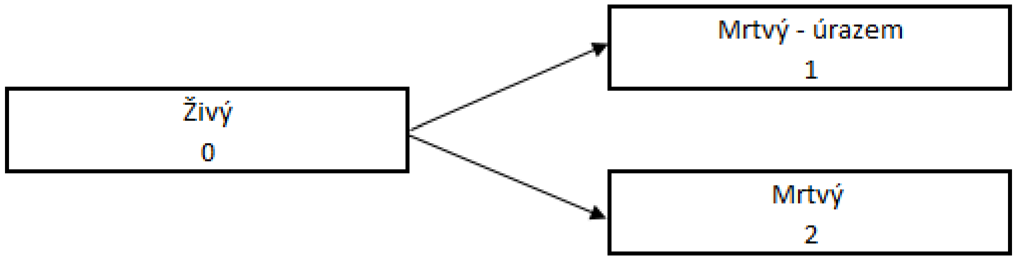
Tento model můžeme reprezentovat schématicky, jak jsme znázornili na obrázku 1. Jedinec se zde ocitá v jednom ze dvou stavů, „živý“ nebo „mrtvý“. Pro lepší přehlednost budeme tyto stavy označovat jako 0 a 1. Přechod mezi stavy 0 a 1 je možný pouze ze stavu 0 do stavu 1, ale přechod v opačném směru nemůže nastat. Daný model má dva stavy a proto ho můžeme označit jako více stavový model se dvěma stavy.

Tento více stavový model můžeme použít k přeformulování následujícím způsobem. Předpokládejme, že máme život ve věku $x \geq 0$ v čase $t = 0$. Pro každé $t \geq 0$ definujeme náhodnou proměnnou $Y(t)$, která má jednou ze dvou hodnot stavů 0 a 1. Pokud $Y(t) = 0$, znamená to, že náš jedinec je naživu ve věku $x + t$. Pokud $Y(t) = 1$, znamená to, že náš jedinec zemřel před věkem $x + t$. Souhrn náhodných proměnných $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ je příklad stochastického procesu ve spojitém čase. Spojitý stochastický proces je souhrn náhodných proměnných indexovaných plynulou časovou proměnnou. Pro všechny t, $Y(t)$ může nastat buď 0 nebo 1 a T_x je k tomuto modelu připojen jako čas, ve kterém $Y(t)$ skáče z hodnoty 0 na 1, to je

$$T_x = max\{t : Y(t) = 0\}$$

Model živý-mrtvý znázorněn na obrázku 1 zachycuje všechny životně podmíněné informace, které jsou nezbytné pro výpočet pojistného a pojistných hodnot smlouvy, kde jsou platby (pojistné, odměny a náklady) závislé pouze na tom, zda je jedinec živý nebo mrtvý v daném věku. Příkladem takového pojištění v praxi je termínové pojištění, pojištění smrti. Existují však složitější formy pojištění, které vyžadují sofistikovanější modely. V dalších částech si uvedeme další příklady více stavových modelů. Všechny tyto modely se skládají z konečné sady stavů se šipkami, které označují možné pohyby mezi některými stavy, ale není podmínkou, že budou mezi všemi stavy. [6]

5.1.2 Model termínované pojištění s pojištěním smrti úrazem



Obrázek 2: Model náhodné smrti

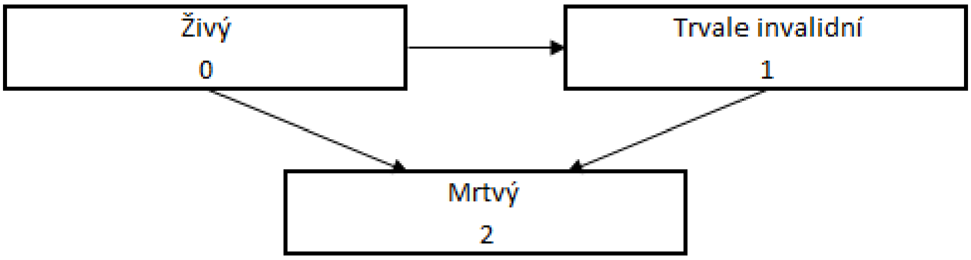
Zdroj: vlastní zpracování podle [6]

Předpokládáme, že máme na pojistné smlouvě sjednané dvé pojistné částky pro dva druhy úmrtí. Nejprve máme sjednané pojištění pro případ úmrtí na 100 000 Kč. Pokud bude ale úmrtí způsobené úrazem, pojistná částka bude 200 000 Kč. Zde, jak už je vidět, nelze použít model živý-mrtvý z obrázku 1. V případě úmrtí musíme rozlišit, zda člověk zemře následkem úrazu nebo jiným způsobem. Z tohoto důvodu není dostačující model se stavy živý-mrtvý.

Vhodný model těchto stavů je uveden na obrázku 2. Tento model má tři stavy a můžeme definovat průběh stochastického procesu $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$, kde každá náhodná proměnná $Y(t)$ má jednu z hodnot $0, 1$ a 2. Tedy například $Y(t) = 1$ označuje, že jedinec, který v čase $t = 0$ zemřel úrazem před věkem $x + t$.

Model na obrázku 2 jsme proto rozšířili o další stav a nyní lze rozlišit příčinu smrti a tím i pojistná částka, která bude vyplacena. Model na obrázku 2 začíná stejně jako model na obrázku 1 ve stavu živý a v budoucnu pojištěný zemře. Rozdíl je v ale tom, že nyní rozlišujeme mezi úmrtím způsobeným úrazem nebo úmrtím z jiné příčiny. [6]

5.1.3 Model trvalé invalidity



Obrázek 3: Model trvalé invalidity

Zdroj: vlastní zpracování podle [6]

Obrázek 3 ukazuje model trvalé invalidity, který poskytuje některé nebo všechny z následujících výhod:

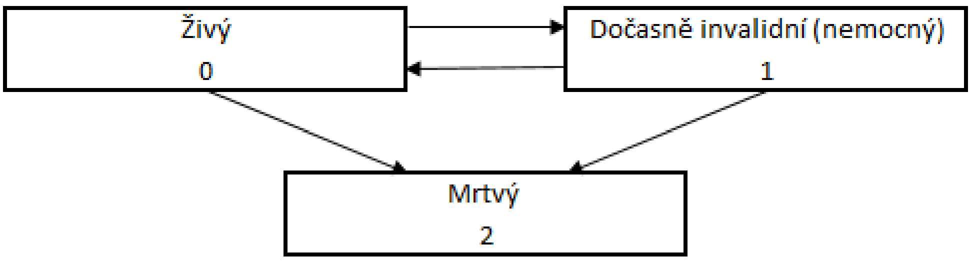
a) Anuita při trvalém zdravotním postižení.

b) Paušální částka v případě trvalé invalidity.

c) Paušální částka v případě úmrtí.

Tento model uvažuje výplatu pojistného, pokud je pojištěný zdravý. Důležitou vlastností tohoto modelu je fakt, že invalidita je trvalá, neexistuje žádná možnost vrátit se ze stavu 1 do stavu 0. [6]

5.1.4 Model s dočasnou invaliditou (nemocí)



Obrázek 4: Model dočasné invalidity(nemoci)

Zdroj: vlastní zpracování podle [6]

V tomto modelu uvažujeme pojištění důchodového pojištění s vyplácením dávky v době invalidity (nemoci). Obrázek 4 ukazuje model vhodný pro poskytnutí anuity, zatímco osoba je invalidní (nemocná), s pojistným splatným, zatímco je pojištěná osoba zdravá. Model znázorněný na obrázku 4 se liší od modelu na obrázku 3 pouze v jednom ohledu, a tím je možnost dostat se ze stavu 1 opět do stavu 0, tzn. že už nadále nebude invalidní nebo nemocný a opět bude zdravý.

Tento model ilustruje důležitý obecný rys modelů více stavů, který nebyl v dřívějších modelech k dispozici. Touto důležitou vlastností je možnost zadat jeden nebo více stavů mnohokrát. Pokud jde o danou interpretaci modelu znamená to, že před smrtí může dojít k několika přechodům mezi stavy zdravý a nemocný. Pouze ze stavu mrtvý není možnost návratu na předchozí stavy. [6]

5.2 Předpoklady a notace

Více stavové modely uvedené v předchozí podkapitole jsou mimořádně užitečné v pojistném světě. Některé z těchto modelu si podrobně přiblížíme v praktické části a představíme si i další složitější modely. Než tak učiníme musíme zavést některé předpoklady.

V této sekci budeme uvažovat obecný model s více stavy. Máme konečnou množinu $n + 1$ stavů označených $0, 1, \dots, n$, přičemž mezi vybranými stavy je možný okamžitý přechod. Tyto stavy představují různé podmínky. Pro všechna $t \geq 0$, máme náhodnou proměnou $Y(t)$, která nabývá jednu z hodnot $0, 1, \dots, n$ interpretujeme událost $Y(t) = i$, která pak znamená, že pojištěná osoba je ve stavu i a ve věku $x + t$. Soubor náhodných proměnných $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ je pak stochastický proces s kontinuálním časem.

Model více stavů bude vhodným modelem pro pojistnou politiku, pokud bude vyplácení dávek nebo pojistného závislé na daném stavu nebo pohybu mezi danou dvojicí stavů v daném okamžiku, jak bylo ukázáno v předchozí podkapitole. Za připomínku stojí ukázat, že všechny stavy jsou na počátku 0, neboli vstupují pouze zdravé osoby.

Předpoklad 1: *Předpokládáme, že pro všechny stavy i a j a kdykoliv v čase t až $t + s$, kde $s \geq 0$, bude podmíněná pravděpodobnost* $\Pr[Y(t + s) = j | Y(t) = i]$ *definován v tom smyslu, že jeho hodnota nezávisí na žádné informaci o procesu před časem t.* [6]

Intuitivně, to znamená že pravděpodobnost událostí pro hodnoty v čase $t + h$ je zcela určena znalostí aktuálního stavu procesu. Zejména pravděpodobnosti nezávisí na tom, jak proces dosáhl současného stavu nebo jak dlouho byl v současném stavu v minulosti. Tato vlastnost, která udává pravděpodobnosti budoucích událostí závisí na přítomnosti, je známa jako **Markův proces**. Při použití jazyka pravděpodobnosti předpokládáme, že $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ je Markův proces.

Předpoklad 1 nebyl výslovně uveden pro modely znázorněné na obrázku 1 a obrázku 2, protože to zde nebylo nutné, vzhledem k naší interpretaci těchto modelů. V každém z těchto dvou případů, pokud uvažujeme, že proces je ve stavu 0 v čase x (tak, že jedinec žije ve věku x), známe minulost procesu (jedinec byl naživu ve všech věkových kategoriích před věkem x).

Předpoklad 1 je mnohem zajímavější pro modely na obrázku 3 a obrázku 4. Předpokládejme například, že v modelu na obrázku 4 víme, že $Y(t) = 1$, což znamená, že jedinec je invalidní (nemocný) v čase t. Potom podle *předpokladu 1* můžeme tvrdit, že pravděpodobnost jakéhokoliv budoucího pohybu po čase t (buď zotavení, nebo úmrtí) nezávisí na dalších informacích, jako například po jak dlouhou dobu života byl jedinec nemocný nebo kolik během života utrpěl nemocí do doby t.

Předpoklad 2: *Předpokládáme, že pro jakýkoliv pozitivní interval v čase* h,

$\Pr[Dva\ nebo\ více\ přechodů\ v\ časovém\ úseku\ délky\ h] = o(h)$. [6]

Připomeňme si, že jakoukoli funkci h, nazveme $g(h)$, můžeme označit $o(h)$, když

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = 0.$$

Intuitivně funkce je $o(h)$, jestliže h konverguje k 0, tak konverguje k nule rychleji než h.

Předpoklad 2 nám říká, že pro malý časový interval délky h je pravděpodobnost dvou nebo více přechodů v tomto intervalu tak malá, že může být ignorována. Tento předpoklad nelze uvažovat u modelu na obrázku 1 a obrázku 2, jelikož v obou případech může dojít k jedinému přechodu. Je to však předpoklad, který musíme z technických důvodu použít u modelů na obrázku 3 a obrázku 4. Pro více stavové modely si musíme definovat flexibilní notace pro ${}_tp_x$, ${}_tq_x$ a μ_x. Tyto notace budou využity v praktické části a v následných podkapitolách.

Notace pro stavy i a j v modelu s více stavy a pro $x, t \geq 0$, definujeme

$${}_tp_x^{ij} = \Pr[Y(x+s) = j \mid Y(x) = i], \tag{5.1}$$

$${}_tp_x^{\overline{ii}} = \Pr[Y(x+s) = i\ for\ all\ s \in [0,t] \mid Y(x) = i], \tag{5.2}$$

takže ${}_tp_x^{ij}$ je pravděpodobnost, že život se blíží x ve stavu i a ve stavu j ve věku $x+t$, kde j může být rovno i, zatímco ${}_tp_x^{\overline{ii}}$ je pravděpodobnost, že život ve věku x ve stavu i zůstane ve stavu i po celou dobu od věku x do věku $x+t$.

Pro $i \neq j$ definujeme

$$\mu_x^{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{{}_hp_x^{ij}}{h} \quad for\ i\ \neq j. \tag{5.3}$$

Předpoklad 3: *Pro všechny stavy i a j a pro všechny věkové skupiny $x \geq 0$, předpokládáme že* ${}_tp_x^{ij}$ *je diferencovatelná funkce pomocí t.* [6]

Předpoklad 3 je technický předpoklad potřebný k tomu, aby byl umožněn hladký přechod mezi stavy. Důsledky tohoto předpokladu spočívá v tom, že limit ve vymezení μ_x^{ij} vždy existuje a že pravděpodobnost přechodu uskutečňovaného v časovém intervalu délky t se přibližuje k 0 jako t konvergující k 0. Předpokládáme také, že μ_x^{ij} je ohraničená a integrační funkce x. Tyto předpoklady nejsou v praxi příliš omezující.

Z hlediska modelu živý-mrtvý znázorněného na obrázku 1 můžeme uvést následující poznatky:

${}_tp_x^{00}$ je to samé jako ${}_tp_x$ a ${}_tp_x^{01}$ je to samějako ${}_tq_x$.

${}_tp_x^{10} = 0$ jelikož v tomto modelu nejsou přípustné přechody, mrtvý – živý.

${}_0p_x^{ij}$ se rovná 1, pokud $i = j$.

μ_x^{01} je to samé jako μ_x, síla úmrtnosti ve věku x.

Ve všeobecném případě, se stavy $0,1, \dots, n$, odkazujeme μ_x^{ij} jako sílu přechodu nebo intenzitu přechodu mezi stavy i a j ve věku x.

Dalším vyjádřením vzorce (8.3) je pro $h > 0$

$$ {}_hp_x^{ij} = h * \mu_x^{ij} + o(h) \tag{5.4}$$

Z této formulace můžeme tvrdit, že pro malé pozitivní hodnoty h

$$ {}_hp_x^{ij} \approx h * \mu_x^{ij} \tag{5.5}$$

5.3 Odvození m_x podle Gomperz-Makehama zákona

Nejprve si přiblížíme výpočet μ_x podle Gompertz-Makehama zákona. Výsledné hodnoty jsme počítali pouze pro hodnoty větší než x let, kde bylo potřeba spočítat koeficienty pro G-M rovnici, která je dána vzorcem

$$m_x \cong a + bc^{x+0,5}, kde\ a > 0, b > 0\ a\ c > 1$$

nebo se také využívá vzorec

$$m_x \cong a + be^{c*x}, kde\ a > 0, b > 0\ a\ c > 0$$

nejprve zvolíme x_0 a délku libovolnou délku k, kterou potom budeme upravovat. Nyní si napíšeme vzorec pro koeficienty a, b, c

$$a = \frac{G_1 - bK_c}{k}, b = \frac{G_2 - G_1}{K_c(c^k - 1)}, c = \sqrt[k]{c^k} = \sqrt[k]{\frac{G_3 - G_2}{G_2 - G_1}},$$

jak můžeme vidět, tak koeficienty a, b, c nám přinesly další neznámé, které si musíme odvodit. Proto si nyní určíme součty hrubých měr úmrtnosti m_x v jednotlivých intervalech

$$G_1 = \sum_{x=x_0}^{x_0+k-1} m_x = \sum_{x=x_0}^{x_0+k-1} (a + bc^{x+0,5}),$$

$$G_2 = \sum_{x=x_0+k}^{x_0+2k-1} m_x = \sum_{x=x_0+k}^{x_0+2k-1} (a + bc^{x+0,5}),$$

$$G_3 = \sum_{x=x_0+2k}^{x_0+3k-1} m_x = \sum_{x=x_0+2k}^{x_0+k3-1} (a + bc^{x+0,5}).$$

Po úpravách určíme hodnu $c^k = \frac{G_3 - G_2}{G_2 - G_1}$ a odsud dostaneme náš koeficient

$$c = \sqrt[k]{c^k} = \sqrt[k]{\frac{G_3 - G_2}{G_2 - G_1}}.$$

Dále si určíme hodnotu proměnné K_c

$$K_c = c^{x_0+0,5}(1 + c + c^2 + \cdots + c^{k-1}) = c^{x_0+0,5}\frac{c^k - 1}{c - 1}.$$

Nyní už máme vše potřebné abychom určili zbývající dva koeficienty b, a

$$b = \frac{G_2 - G_1}{K_c(c^k - 1)}, a = \frac{G_1 - bK_c}{k}.$$

Hodnotu koeficientu k dohledáme pomocí metody nejmenších čtverců

$$\min \sum_i (y_i - f(x_i))^2 . [19]$$

5.4 Vzorce pro pravděpodobnosti

V této části si uvedeme, jak odvodit vzorce pro všechny pravděpodobnosti z hlediska intenzity přechodu, o kterých předpokládáme, že jsou známy. Skutečnost, že lze vysvětlit všechny pravděpodobnosti z hlediska intenzity přechodu, je důležitá. Říká nám, že intenzity přechodu $\{\mu_x^{ij}\,; x \geq 0; i, j = 0, \dots, n, i \neq j\}$ jsou základními veličinami, které určují vše, co potřebujeme vědět o více stavovém modelu.

První zobecněný vzorec je platný pro jakýkoli model s více stavy. Dává vzorec pro ${}_tp_x^{\overline{ii}}$ve smyslu všech intenzit přechodu ze stavu i, μ_x^{ij}. Pro jakýkoliv stav i ve více stavovém modelu s $n+1$ stavy, splňující všechny předpoklady definujeme pravděpodobnost přežití

$$ {}_tp_x^{\overline{ii}} = \exp\left\{-\int_0^t \sum_{j=0;j\neq i}^{n} \mu_x^{ij}\, ds\right\}. \tag{5.6}$$

Tento vzorec můžeme odvodit následujícím způsobem. Pro jakoukoli $h > 0$ zvažme pravděpodobnosti ${}_{t+h}p_x^{\overline{ii}}$. To je pravděpodobnost, že proces (nebo pojištěný) zůstane ve stavu i během časového období $[0, t+h]$, vzhledem k tomu, že proces byl ve stavu i ve věku x. Můžeme tuto událost rozdělit na dvě dílčí události:

a) Proces zůstává ve stavu i od věku x do věku $x+t$, vzhledem k tomu, že byl ve stavu i ve věku x.

b) Proces zůstává ve stavu i od věku $x+t$ do věku $x+t+h$, vzhledem k tomu, že byl ve stavu i ve věku $x+t$.

Pravděpodobnost těchto dvou dílčích událostí je ${}_tp_x^{\overline{ii}}$ a ${}_tp_{x+t}^{\overline{ii}}$, a podle pravidel pro podmíněné pravděpodobnosti máme

$$ {}_{t+h}p_x^{\overline{ii}} = {}_tp_x^{\overline{ii}} * {}_hp_x^{\overline{ii}}. $$

To lze přepsat jako

$$ {}_{t+h}p_x^{\overline{ii}} = {}_{t}p_x^{\overline{ii}} \left(1 - h \sum_{j=0; j \neq i}^{n} \mu_x^{ij} + o(h) \right). $$

Úpravou této rovnice, získáme

$$ \frac{{}_{t+h}p_x^{\overline{ii}} - {}_{t}p_x^{\overline{ii}}}{h} = - {}_{t}p_x^{\overline{ii}} \sum_{j=0; j \neq i}^{n} \mu_x^{ij} + \frac{o(h)}{h}, $$

a pokud $h \to 0$ dostáváme

$$ \frac{d}{dt} {}_{t}p_x^{\overline{ii}} = - {}_{t}p_x^{\overline{ii}} \sum_{j=0; j \neq i}^{n} \mu_x^{ij} + o(h), $$

aby

$$ \frac{d}{dt} \log({}_{t}p_x^{\overline{ii}}) = - \sum_{j=0; j \neq i}^{n} \mu_x^{ij} + o(h). $$

Integrace přes $(0, t)$ dává

$$ \log({}_{t}p_x^{\overline{ii}}) - \log({}_{0}p_x^{\overline{ii}}) = - \int_0^t \sum_{j=0; j \neq i}^{n} \mu_{x+r}^{ij} \, dr. $$

Na obě strany rovnice použijeme exponent, a vidíme že řešení rovnice je

$$ {}_{t}p_x^{\overline{ii}} = {}_{0}p_x^{\overline{ii}} * \exp\left\{ - \int_0^t \sum_{j=0; j \neq i}^{n} \mu_x^{ij} \, ds \right\}. $$

Protože ${}_{0}p_x^{\overline{ii}} = 1$, tak to dokazuje rovnici (5.6) uvedenou na začátku této podkapitoly. [6]

5.4.1 Kolmogorova diferenciální rovnice

Nechť i a j jsou nějaké dva, ne nutně odlišné, stavy v modelu více stavů, který má celkem $n+1$ stavů. Pro $x, t, h \geq 0$, odvodíme tyto vzorce

$$ {}_{t+h}p_x^{ij} = {}_tp_x^{ij} - h \sum_{k=0;k\neq j}^{n} \left({}_tp_x^{ij} * \mu_{x+t}^{jk} - {}_tp_x^{ik} * \mu_{x+t}^{kj} \right) \tag{5.7} $$

A proto ukazují hlavní výsledky, že

$$ \frac{d}{dt}\, {}_tp_x^{ij} = \sum_{k=0;k\neq j}^{n} \left({}_tp_x^{ik} * \mu_{x+t}^{kj} - {}_tp_x^{ij} * \mu_{x+t}^{jk} \right). \tag{5.8} $$

Rovnice (5.8) udává soustavu rovnic pro Markův proces známou jako Kolmogorova diferenciální rovnice (v org. Kolmogorov's forward equations).

K odvození Kolmogorovy rovnice postupujeme stejně jako v odvození rovnice pravděpodobnosti pro více stavové vzorce. Zvažujeme pravděpodobnost, že budeme v požadovaném stavu, j, a ve věku $x+t+h$, a podmínkou stavu procesu ve věku $x+t$. Buď je již ve stavu j, nebo je v nějakém jiném stavu, řekněme k, a přechod k j je nutný před věkem $x+t+h$. Tak, dostáváme

$$ {}_{t+h}p_x^{ij} = {}_tp_x^{ij} * {}_hp_{x+t}^{jj} \sum_{k=0;k\neq j}^{n} {}_tp_x^{ik} * {}_hp_{x+t}^{kj}. $$

Využitím předchozích znalostí tato rovnice může být přepsána jako

$$ {}_{t+h}p_x^{ij} = {}_tp_x^{ij} \left(1 - h * \sum_{k=0;k\neq j}^{n} \mu_{x+t}^{jk} - o(h) \right) + h * \sum_{k=0;k\neq j}^{n} {}_tp_x^{ik}\, \mu_{x+t}^{kj} + o(h). $$

Přeskupením pravé strany rovnice získáme rovnici(5.7). Další možné rozdělení je dělení podle h, kde necháme $h \to 0$, potom dostaneme rovnici (5.8). [6]

5.5 Odvození numerického integrování

V této části si odvodíme metodu numerické integrace zvanou „repeated Simpson's rule“, která není úplně jednoduchá, ale bývá velmi přesná.

K dané metodě si uvedeme i příklad, kde numericky vyhodnotíme

$$I = \int_b^a f(x)dx$$

pro některé funkce f.

5.5.1 Repeated Simpson's rule

Toto pravidlo je založeno na pravidlu Simpsona, který dává následující aproximaci:

$$\int_a^{a+2h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\big(f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\big).$$

Tato aproximace vzniká přiblížením funkce f kvadratickou funkcí, která prochází třemi body $\big(a, f(a)\big), \big(a+h, f(a+h)\big)$ a $\big(a+2h, f(a+2h)\big)$. Opakování tohoto výsledku vede k opakovanému pravidlu Simpsona, jmenovitě

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{j=1}^{n} f(a+(2j-1)h + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(a+2jh) + f(b)\right)$$

kde $h = (b-a)/2n$.

Příklad:

Předpokládáme rovnici

$$I^* = \int_0^{20} e^{-0{,}05x} dx.$$

Tento integrál byl zvolen, protože lze snadno spočítat a tím můžeme ověřit přesnost výsledků

$$I^* = \frac{1}{0{,}05}(1 - e^{-0{,}05*20}) = 12{,}6424112$$

Hodnotu $I^* = 12{,}6424112$ jsme uvedly na sedm desetinných míst pro představu chyby.

Nyní si v následující tabulce ukážeme výsledky podle Simpsonova pravidla, když zvolíme různě velké n

n	numerické integrování	chyba
Skutečná hodnota	12,6424111766	0,0000000000
10	12,6424116154	0,0000004388
20	12,6424112040	0,0000000274
80	12,6424111783	0,0000000017
480	12,6424111766	0,0000000000

Tabulka 1: Hodnoty numerického integrování podle Simpsonova pravidla

Zdroj: vlastní zpracování podle [6]

Z tabulky 1 můžeme vidět porovnání skutečné hodnoty integrálu s výpočtem Simpsonova pravidla, kde je patrné, že pokud se zvolí dostatečně velké n, tak můžeme tvrdit, že výpočet je totožný s výpočtem pomocí integrování.

5.6 Výpočet netto pojistného

Zatím jsme se věnovali různým druhům více stavových modelů a také si ukázali, jak vyhodnotit pravděpodobnosti u takových modelů vzhledem k přechodným intenzitám mezi dvojicemi stavů. Dalším krokem, kterým se budeme zabývat v této kapitole, je výpočet pojistného vzhledem k určitému modelu.

K tomu využijeme definice anuitních funkcí, který vede přímo k intuitivním vzorcům pro očekávané současné hodnoty. Neexistuje standartní notace pro anuitní a pojišťovací funkce v rámci více stavových modelů.

Předpokládejme, že máme život ve věku x a nachází se ve stavu i ve více stavovém modelu. Chceme ocenit anuitu za 1 rok placenou pravidelně, zatímco život je ve stavu j (ale může se nacházet i ve stavu i).

EPV polhůtní anuity, která je v platnosti δ za rok, je

$$\bar{a}_x^{ij} = E\left[\int_0^\infty e^{-\delta t}\, I(Y(t) = j|Y(0) = i)dt\right]$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t}\, I(Y(t) = j|Y(0) = i)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t}\ \ {}_tp_x^{ij}\, dt \tag{5.9}$$

Kde I je funkce indikátoru.

Podobně, pokud je anuita splatná na začátku každého roku, od současného času, podmíněného životním stavem ve stavu j, vzhledem k tomu, že život je v současné době v stavu i, je EPV

$$\ddot{a}_x^{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \ {}_kp_x^{ij}. \tag{5.10}$$

Dávky anuity, které jsou placeny častěji lze ocenit podobně.

U pojistných plnění je platba zpravidla podmíněna intenzitou přechodu. Příspěvek na úmrtí je splatný při přechodu do stavu „mrtvý“. Pojistná smlouva, která se týká pojištění kritické nemoci a smrti, bude vyplácet pojistnou částku za úmrtí nebo pojistnou částku za dříve diagnostikovanou jednu ze specifických skupin vážných onemocnění.

Předpokládejme, že výhoda jednotky, která je splatná okamžitě při každém budoucím převodu do stavu k, protože život je v současné době ve stavu i (což může být rovno k). Pak je EPV pro pojistné kalkulováno jako

$$\bar{A}_x^{ij} = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta t} \ {}_tp_x^{ij} \, \mu_{x+t}^{jk} \, dt. \tag{5.11}$$

Abychom to odvodily, uvažujeme platbu placenou v intervalech $(t, t + dt)$:

a) Částka platby je 1.

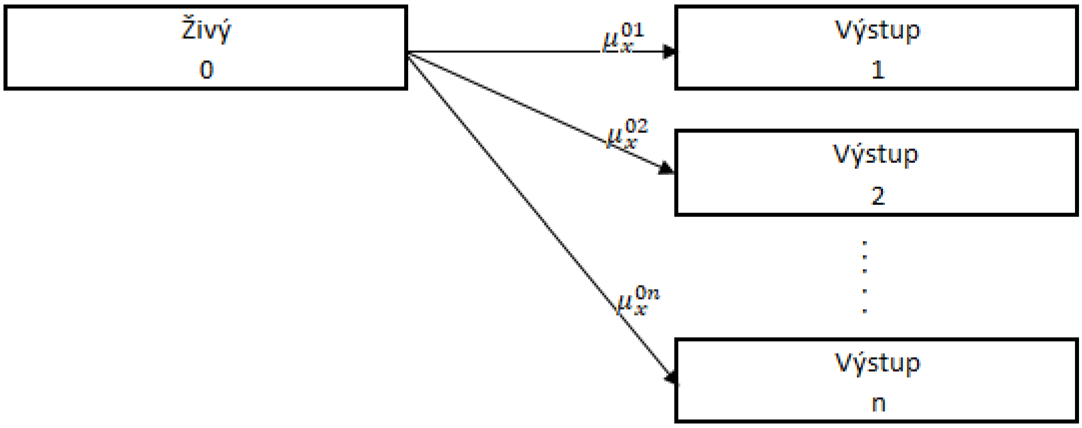
b) Diskontní faktor (pro dostatečně malé dt) je $e^{-\delta t}$.

c) Pravděpodobnost, že pojištěn osoba onemocní tzn. změnu stavu do k v intervalu $(t, t + dt)$, tak musí být ve stavu zdravý tzn. ve stavu j v čase t, pokud není ve stavu k bezprostředně předtím, než uplyne doba $t + h$, tak pravděpodobnost dvou přechodů v nekonečně malém čase zanedbáváme. Pravděpodobnost přežití určíme jako ${}_tp_x^{ij}$ a přechod ze stavu j do stavu k během intervalu $(t, t + dt)$, s pravděpodobností mírou úmrtnosti $\mu_{x+t}^{jk} \, dt$.

Součet (neboli integrace) ve všech možných časových intervalech dává rovnici (5.11).

Obecně lze tvrdit, že pojistné je počítáno za použití zásady ekvivalence a předpokládáme, že životy jsou ve stavu 0 v době vzniku pojistné smlouvy.

5.7 Více stavové dekrementní modely



Obrázek 5: Více stavový dekrementní model

Zdroj: vlastní zpracování podle [6]

V originále „Multiple decrement models“ jsou speciální typy vícečetných modelů, které se často vyskytují v pojistně-matematických aplikacích. Model s vícenásobným dekrementem je charakterizován tím, že má jeden výchozí stav a několik výstupních stavů s možným přechodem od výchozího stavu k některému z výstupních stavů.

Pravděpodobnost výpočtu pro model s vícenásobným dekrementem je poměrně snadná, protože můžeme provést pouze jeden přechod. Pro takový model máme $i = 1, 2, \dots, n \; a \; j = 0, 1, \dots, n \; (j \neq i)$,

$$ {}_tp_x^{00} \equiv {}_tp_x^{\overline{00}} = \exp\left\{-\int_0^t \sum_{i=1}^{n} \mu_{x+s}^{0i} ds\right\}, $$

$$ {}_tp_x^{0i} = \int_0^t \sum_{i=1}^{n} {}_sp_x^{00} \, \mu_{x+s}^{0i} ds, $$

$$ {}_0p_x^{ii} = 1, $$

$$ {}_0p_x^{ij} = 0. $$

Za předpokladu, že známe intenzity přechodu jako funkce x, můžeme vypočítat ${}_tp_x^{00}$a ${}_tp_x^{0i}$pomocí numerického integrování. [6]

5.8 Vytváření více stavové dekrementní úmrtnostní tabulky

Někdy je vhodné vyjádřit model s vícenásobným dekrementem v úmrtnostní tabulce, podobně jako použití funkcí úmrtnostní tabulky $l_x \, a \, d_x$ pro model živý-mrtvý. Úmrtnostní tabulka s více dekrementními stavy může být použita při výpočtu pravděpodobnosti přežití a pravděpodobnosti smrti, s použitím modelu více výstupů znázorněném v předchozí podkapitole. Při předpokladu celočíselného věku pro poklesy mezi celými věkovými skupinami, lze použít úmrtnostní tabulku s vícenásobným dekrementem.

X_t	l_x	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$	$d_x^{(3)}$
50	100000	64	5000	50
51	94885	63	4791	56
52	89973	59	4588	62
53	85262	74	4391	68
54	80729	75	4197	72
55	76383	78	4010	76

Tabulka 2: Tabulka l_x s více dekretními stavy

Zdroj: vlastní zpracování podle [6]

Pokud l_{x0} je kořen úmrtnostní tabulky (libovolné kladné číslo) v počátečním věku X_0. Definujeme

$$l_{x+t} = l_{x0} \; {}_t p_{x0}^{00}$$

A pro $j = 1, 2, \dots,$ n $a \; x \geq x_0$,

$$d_x^{(j)} = l_x * p_x^{0j}.$$

Vzhledem k celočíselným hodnotám l_x a $d_x^{(j)}$ pro daný věk, lze vypočítat všechny pravděpodobnosti celočíselného věku. Můžeme interpretovat $l_x,$ kde $x > x_0$, jako předpokládaný počet živých ve výchozím stavu 0 ve věku x mimo l_{x0}ve stavu 0 a ve věku $x_0 \leq x,$ ačkoli je l_{x0} libovolnou výchozí hodnotou, nemusí to být celé číslo. Stejně tak $d_x^{(j)}$může být interpretován jako očekávaný počet osob vystupujících z tabulky a to podle způsobu snižování ve věku x až do věku $x + t$. [6]

5.8.1 Předpoklady zlomového věku pro dekrement

Předpokládejme, že jediné informace, které máme o modelu s vícenásobným dekrementem, jsou celočíselné věkové hodnoty l_x a $d_x^{(j)}$. Pro výpočet ne celočíselného věku nebo pravděpodobnosti trvání musíme předpokládat snížení pravděpodobnosti nebo síly mezi celými věky.

UDD v úmrtnostní tabulce s více dekrementy

Zde UDD znamená jednotné rozdělení dekrementů. Pro $0 \leq t \leq 1$, a celé číslo x, a pro každý výstup j, předpokládejme, že

$$ {}_t p_x^{0j} = t\, p_x^{0j}. \tag{5.12}$$

Předpoklad UDD v modelu s více násobným dekrementem lze interpretovat tak, že předpokládáme, že pro každý úbytek jsou východy z výchozího stavu jednorázově rozděleny každý rok.

Konstantní přechodové síly

Pro $0 \leq t \leq 1$, a celé číslo x předpokládáme, že pro každý výstupní stav j, μ_{x+t}^{0j} je konstanta pro každý věk x, rovnající se $\mu^{0j}(x)$. Nechme

$$\mu^{0\cdot}(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu^{0k}(x)$$

tak, že $\mu^{0\cdot}(x)$ představuje celkovou sílu přechodů ze stavu 0 ve věku $x+t$ pro $0 \leq t \leq 1$. To je vhodné označit za celkovou pravděpodobnost výstupu ze stavu 0 pro všechny roky ve věku od x do věku $x+1$ jako $p_x^{0\cdot}$. To lze definovat jako

$$p_x^{0\cdot} = 1 - p_x^{00} = \sum_{k=1}^{n} p_x^{0k} = 1 - e^{-\mu^{0\cdot}(x)},$$

tak že $p_x^{00} = e^{-\mu^{0\cdot}(x)}$. Za předpokladu konstantních přechodových sil mezi celými čísly pro všechny dekrementy

$$ {}_t p_x^{0j} = \frac{p_x^{0j}}{p_x^{0\cdot}} \left(1 - (p_x^{00})^t\right) \tag{5.13}$$

Dokážeme to následovně:

$$ {}_tp_x^{0j} = \int_0^t {}_tp_x^{00} \quad \mu_{x+r}^{0j}\, dr \tag{5.14} $$

$= \int_0^t e^{-r\ \mu^{0\cdot}(x)}\ \mu^{0j}(x)\, dr$ konstantním předpokladem síly

$$ = \frac{\mu^{0j}(x)}{\mu^{0\cdot}(x)}\left(1 - e^{-t\ \mu^{0\cdot}(x)}\right) $$

$$ = \frac{\mu^{0j}(x)}{\mu^{0\cdot}(x)}(1 - (p_x^{00})^t) \tag{5.15} $$

Nyní necháme $t \to 1$, a přeuspořádáme proměnné

$$ \frac{\mu^{0j}(x)}{\mu^{0\cdot}(x)} = \frac{p_x^{0j}}{p_x^{0\cdot}} \tag{5.16} $$

kde levou stranu nám udává poměr míry výstupu stavu j k celkové síle výstupu a pravá strana je poměr pravděpodobnosti výstupu stavu j proti celkové pravděpodobnosti výstupu. Nahraďme rovnici (5.16) zpět do rovnice (5.15) pro dokončení důkazu.

Předpoklad zde spočívá v tom, že podmínka $1 - (p_x^{00})^t$ reprezentuje celkovou pravděpodobností výstupu za předpokladu konstantní přechodové míry a pojem $\frac{p_x^{0j}}{p_x^{0\cdot}}$ rozděluje tuto pravděpodobnost výstupu na různě úbytky v poměru k úplnému jednoročnímu výstupu pravděpodobnosti. [6]

5.8.2 Odvození nezávislých sazeb od závislých sazeb

1. UDD v úmrtnostní tabulce s více dekrementy

Předpokládejme, že každý dekrement je rovnoměrně distribuován v modelu s vícenásobným dekrementem. Pak víme, že celé číslo x a pro $0 \leq t < 1$,

$$ {}_tp_x^{0k} = t\, p_x^{0k}, \quad {}_tp_x^{00} = 1 - t\, p_x^{0\cdot}, \quad a \quad {}_tp_x^{00}\, \mu_{x+t}^{0j} = p_x^{0j} \tag{5.17} $$

kde si všimněte, že pravá strana poslední rovnice nezávisí na t. Potom z rovnice (5.17)

$$ \mu_{x+t}^{0j} = \frac{p_x^{0j}}{1 - t\, p_x^{0\cdot}} $$

a integrace obou stran nám dává

$$\int_0^1 \mu_{x+t}^{0j}\, dt = \frac{p_x^{0j}}{p_x^{0\cdot}} \left(-\log(1 - p_x^{0\cdot})\right) = \frac{p_x^{0j}}{p_x^{0\cdot}} \left(-\log p_x^{00}\right).$$

Všimněte si, že pravděpodobnost přežití nezávislého dekrementu j je

$$p_x^{*(j)} = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}^{0j}\, dt}$$

a pomocí substituce exponentu dostaneme

$$p_x^{*(j)} = \left(p_x^{00}\right)^{\left(\frac{p_x^{0j}}{p_x^{0\cdot}}\right)} \tag{5.18}$$

Takže vzhledem k tabulce 2 můžeme použít rovnici (5.18) pro výpočet přidružených nezávislých sazeb, za předpokladu UDD v úmrtnostní tabulce při vícenásobném dekrementu.

2. Konstantní síly v úmrtnostní tabulce s více dekrementy

Je zajímavé, že vztah mezi závislými a nezávislými sazbami za předpokladu stálého zlomu věku síly je přesně stejný jako v rovnici (5.18). Z rovnice (5.16) odvodíme

$$\mu^{0j}(x) = \mu^{0\cdot}(x) * \frac{p_x^{0j}}{p_x^{0\cdot}},$$

takže

$$p_x^{*(j)} = e^{-\mu^{0j}(x)} = \left(e^{-\mu^{0\cdot}(x)}\right)^{\left(\frac{p_x^{0j}}{p_x^{0\cdot}}\right)} = \left(p_x^{00}\right)^{\left(\frac{p_x^{0j}}{p_x^{0\cdot}}\right)}. [6]$$

5.8.3 Odvození závislých sazeb od nezávislých sazeb

1. UDD v úmrtnostní tabulce s více dekrementy nebo konstantní míry přechodu

Můžeme předpokládat rovnici (5.18), která se vztahuje jak na předpokládaný zlomek věku, tak na

$$p_x^{0j} = \frac{\log p_x^{*(j)}}{\log p_x^{00}}\, p_x^{0\cdot} \tag{5.19}$$

Abychom to mohli použít, používáme skutečnost, že produkt nezávislých pravděpodobností přežití nám dává pravděpodobnost závislého přežití jako

$$\prod_{j=1}^{n} {}_tp_x^{*(j)} = \prod_{j=1}^{n} exp\left(-\int_0^t \mu_{x+r}^{0j}\,dr\right) = xp\left(-\int_0^t \sum_{j=1}^{n} \mu_{x+r}^{0j}\,dr\right) = {}_tp_x^{00}.$$

2. **UDD v nezávislých modelech**

Pokud předpokládáme jednotné rozdělení dekrementů v každém z nezávislých modelů, bude výsledek mírně odlišný od předpokladu UDD v úmrtnostní tabulce s více dekrementy. To znamená, že pokud budeme předpokládat UDD v nezávislých modelech, pak přechody v modelu s vícenásobném dekrementem nebudou UDD.

Předpoklad UDD v nezávislých modelech znamená, že pro každý dekrement $j,$ a pro celé číslo $x, 0 \leq t < 1,$

$${}_tq_x^{*(j)} = t\,q_x^{*(j)} \;\Rightarrow\; {}_tp_x^{*(j)}\,\mu_{x+t}^{0j} = q_x^{*(j)}.$$

Potom

$$p_x^{0j} = \int_0^1 {}_tp_x^{00}\,\mu_{x+t}^{0j}\,dt = \int_0^1 {}_tp_x^{*(1)}\;{}_tp_x^{*(2)}\;\dots\;{}_tp_x^{*(n)}\;\mu_{x+t}^{0j}\,dt.$$

Vytkneme ${}_tp_x^{*(j)}\;\mu_{x+t}^{0j} = q_x^{*(j)}$ a dostaneme

$$p_x^{0j} = q_x^{*(j)} \int_0^1 \sum_{k=1,k\neq j}^{n} {}_tp_x^{*(j)}\,dt = q_x^{*(j)} \int_0^1 \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \left(1 - t\,q_x^{*(k)}\right) dt.$$

Integrál je zde jako polynom v t, takže například pokud máme dva dekrementy, dostaneme

$$p_x^{01} = q_x^{*(1)} \int_0^1 \left(1 - t\,q_x^{*(2)}\right) dt = q_x^{*(1)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{*(2)}\right)$$

a obdobně pro p_x^{02}.

Je jednoduché ukázat, že se třemi dekrementy, za předpokladu UDD v každém modelu s jednám dekremente máme

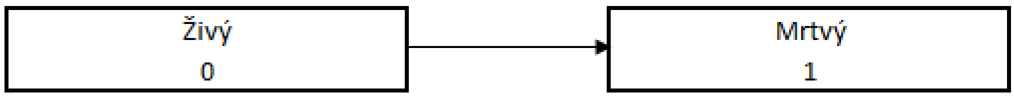
$$p_x^{01} = q_x^{*(1)} \left(1 - \frac{1}{2}\left(q_x^{*(2)} + q_x^{*(3)}\right) + \frac{1}{3} q_x^{*(2)} * q_x^{*(3)}\right).$$

Obdobně pro p_x^{02} a p_x^{03}. [6]

6 PRAKTICKÉ PŘÍKLADY VÍCE STAVOVÝCH MODELŮ

V této kapitole si ukážeme praktické příklady modelů, které jsme si znázornili v předchozí kapitole 5 a k tomu přidáme i některé složitější modely. U daných modelů si vypočítáme potřebné proměnné, abychom mohly spočítat netto pojistné.

6.1 Model Živý-mrtvý



Obrázek 6: Model Živý-mrtvý

Zdroj: vlastní zpracování podle [6]

Zadání:

Tento model je popsán na obrázku 1. Jde o klasický produkt životního pojištění, kde se pojištěná osoba pojistí na pojistnou částku 1 000 000 $K\check{c}$ v případě smrti. Pojištěná osoba se pojistí ve věku 50 let, a to na dobu 15 let. Předpokládejme, že koeficient δ je 2,5% ročně a neexistují žádné další náklady.

a) Naším úkolem bude spočítat roční netto pojistné. K tomu využijeme potřebné vzorce, které jsme si odvodili v předchozí kapitole 5. Pro výpočet využijeme hodnoty z úmrtností tabulky, náhled potřebného úseku úmrtnostní tabulky je přiložen v příloze A.

b) Hodnoty ročního netto pojistné spočítáme podle komutačních čísel a porovnáme výsledky se zadáním a).

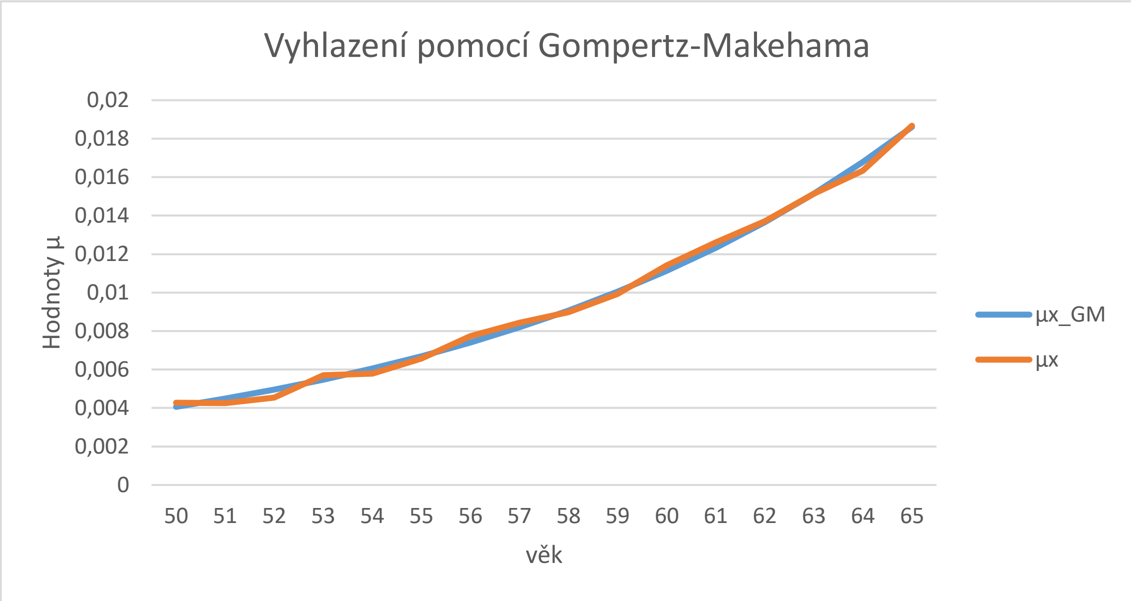
Nejprve si spočítáme hodnoty a, b, c, pomocí kterých si určíme intenzity přechodu. K výpočtu potřebných hodnot použijeme vzorce z podkapitoly 5.2.

x_0	k	$G1$	$G2$	$G3$	c^k	c	K_c	b	a
50	10	0,06621	0,1841	0,516	2,813	1,108972	3087,78	0,0000211	0,000115

Tabulka 3:Koeficienty potřebné k výpočtu G-M funkce

Zdroj: vlastní zpracování

Pro představu si ukážeme graf 1, jak vypadaly hodnoty před vyhlazením a po vyhlazení za využití Gompertz-makehamova zákona. Tento zákon lze použít pouze na data, kde uvažujeme hodnoty x_0 alespoň 50 a vyšší.



Graf 1: porovnání µx a µx_GM

Zdroj: vlastní zpracování

V tabulce 3 můžeme vidět potřebné proměnné, které jsme spočítaly pomocí vzorců z podkapitoly 5.2.1. Pomocí proměnných jsme spočítali hodnoty μ_{x_GM} znázorněné v grafu 1, kterou dále využijeme při výpočtu netto pojistného.

Řešení a)

Než začneme počítat pojistné, musíme nejprve spočítat pravděpodobnost, že v následujícím roce bude pojištěný ve stavu 0. To spočítáme jako

$$ {}_tp_{50}^{00} = \exp\left\{-\int_0^t \left(\mu_{50+t}^{01}\right)dx\right\} = \exp\left\{-\int_0^t (A + B * C^x)dx\right\}. $$

Pojistné spočítáme jako

$$ NP = PC_{smrti} * \frac{\bar{A}_{50:15}^{01}}{\bar{a}_{50:15}^{00}} $$

Nejprve musíme pomocí Simpsonova pravidla s krokem $h = 1/12$ si spočítat EPV s polhůtní anuitou podle vzorce (5.9) a EPV pro smrt podle vzorce (5.11).

$$\bar{a}^{00}_{50:15} = \int_0^{15} e^{-2,5\% * t} \ {}_tp^{00}_{50} \, dt = 11,9426647,$$

$$\bar{A}^{01}_{50:15} = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2,5\% * t} \ {}_tp^{00}_{50} \, \mu^{01}_{50+t} \, dt = 0,1010601.$$

Roční netto pojistné potom spočítáme jako

$$\boldsymbol{NP} = 1\,000\,000 * \frac{0,1005916}{11,5020506} = \mathbf{8\,462,11} \ \boldsymbol{K}\text{č}$$

Nebo jednorázové pojistné spočítáme jako

$$\boldsymbol{NP} = 1\,000\,000 * \ 0,1005916 = \mathbf{101\,060,09} \ \boldsymbol{K}\text{č}$$

Řešení b)

Pro výpočet ročního netto pojistného pomocí komutačních čísel musíme nejprve spočítat dočasné pojištění pro případ smrti

$$JP_x = \bar{A}^{1}_{50:15} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = 0,104717,4,$$

,

a k tomu přelhůtní pojištění dočastného důchodu

$$JP_x = \ddot{a}_{50:15} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = 12,55586.$$

Potom roční netto pojistná sazba se vypočítá jako

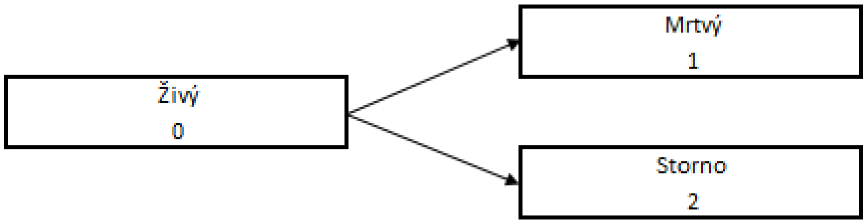
$$\boldsymbol{NP_{kom.\check{c}\acute{i}sla}} = 1\,000\,000 * \frac{0,104717,4}{12,55586} = \mathbf{8\,340} \ \boldsymbol{K}\text{č}.$$

A jednorázová netto pojistná sazba se vypočítá jako

$$\boldsymbol{NP_{kom.\check{c}\acute{i}sla}} = 1\,000\,000 * \ 0,104717,4 = \mathbf{104\,717,4} \ \boldsymbol{K}\text{č}.$$

Pokud porovnáme roční NP vypočtené pomocí vztahů v kapitole 5. tak dostaneme $\mathbf{8462,11} \ \boldsymbol{K}$**č** oproti tomu roční NP vypočítané pomocí komutačních čísel je $\mathbf{8340} \ \boldsymbol{K}$**č.** Proto rozdíl 122 Kč ročně (tj. 0,33 korun denně) můžeme brát jako zanedbatelný rozdíl, který je způsoben metodikou výpočtu.

6.2 Model Živý-mrtvý-storno



Obrázek 7: Model živý-mrtvý-storno

Zdroj: vlastní zpracování podle [6]

Zadání:

Tento model je obdobný modelu Živý-mrtvý, jen je rozšířený o možnost výstupu, a to storno smlouvy a vystoupení z ní bez možnosti pojistného plnění. Jde o klasický produkt životního pojištění, kde se pojištěná osoba pojistí na pojistnou částku 1 000 000 Kč v případě smrti. Pojištěná osoba se pojistí ve věku 50 let, a to na dobu 15 let. Předpokládejme, že koeficient δ je 2,5% ročně, možnost storna uvažujeme 5 % pro každý rok a neexistují žádné další náklady.

Kolik bude roční netto pojistná sazba?

Řešení:

Než začneme počítat pojistné, musíme nejprve spočítat pravděpodobnost, že v následujícím roce bude pojištěný ve stavu 0. To spočítáme jako

$$ {}_{t}p_{50}^{00} = \exp\left\{-\int_{0}^{t}\left(\mu_{50+t}^{01} + k\right)dx\right\} = \exp\left\{-\int_{0}^{t}\left((A+k) + B * C^{x+t}\right)dx\right\}. $$

Potom pojistné spočítáme jako

$$ NP = PC_{smrti} * \frac{\bar{A}_{50:15}^{01}}{\bar{a}_{50:15}^{00}}. $$

Nejprve musíme pomocí Simpsonova pravidla s krokem $h = 1/12$ si spočítat EPV s polhůtní anuitou podle vzorce (5.9) a EPV pro smrt podle vzorce (5.11).

$$\bar{a}^{00}_{50:15} = \int_0^{15} e^{-2,5\%*t} \ {}_tp^{00}_{50} \, dt = 8{,}662195,$$

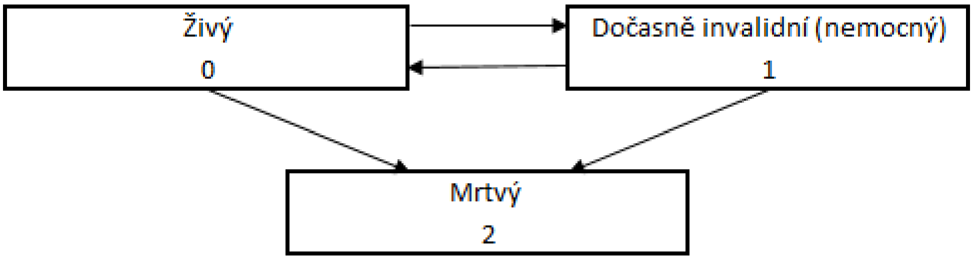
$$\bar{A}^{01}_{50:15} = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2,5\%*t} \ {}_tp^{00}_{50} \, \mu^{01}_{50+t} \, dt = 0{,}066739.$$

Roční netto pojistné potom spočítáme jako

$$\boldsymbol{NP} = 1\,000\,000 * \frac{0{,}0715951}{8{,}7757091} = \mathbf{7\,704{,}63}\ \boldsymbol{K}\text{č}.$$

Pokud hodnotu $NP = 7\,704{,}63\ K$č při uvažování 5% storna porovnáme s $NP = \ 462{,}11\ K$č z modelu Živý-mrtvý, kde storno není uvažováno. Můžeme tvrdit, že roční netto pojistná sazba je nižší. Způsobeno to je tím, že se mi do konce smlouvy nedožije celý pojistný kmen, tím i někteří pojištění, kteří stornují a následně zemřou, nebudou mít nárok na pojistné plnění. Proto nemusíme tvořit tak velké rezervy a můžeme si dovolil vybírat nižší pojistné.

6.3 Model Živý-nemocný-mrtvý



Obrázek 8: Model Živý-nemocný-mrtvý

Zdroj: vlastní zpracování dle [6]

Zadání:

Tento model už neuvažuje pouze přesun ze stavu 0 do výstupního stavu, ale je zde možnost, že klient onemocní stav 1 a po nějaké době se může opět vrátit do stavu zdravý 0, ale také může zemřít a tím se dostane do stavu 2. Ze stavu 2 už logicky není návratu.

Jde o produkt životního pojištění, kde se pojištěná osoba pojistí na pojistnou částku 1 000 000 $Kč$ v případě smrti, a na 100 000 $Kč$ ročně v případě nemoci. Pojištěná osoba se pojistí ve věku 50 let, a to na dobu 15 let. Předpokládejme, že koeficient δ je 2,5% ročně a neexistují žádné další náklady.

a) Kolik bude roční netto pojistná sazba, pokud uvažujeme polhůtní EPV?

b) Kolik bude roční netto pojistná sazba, pokud uvažujeme předlhůtní EPV?

Řešení:

Nejprve si musíme určit způsob výpočtu μ_x^{ij} pro $i = 0, 1\ a\ j = 0, 1, 2$.

$$\mu_x^{01} = a_1 + b_1 \exp\{c_1\, x\},$$

$$\mu_x^{10} = 0{,}1\mu_x^{01},$$

$$\mu_x^{02} = a_2 + b_2 \exp\{c_2\, x\},$$

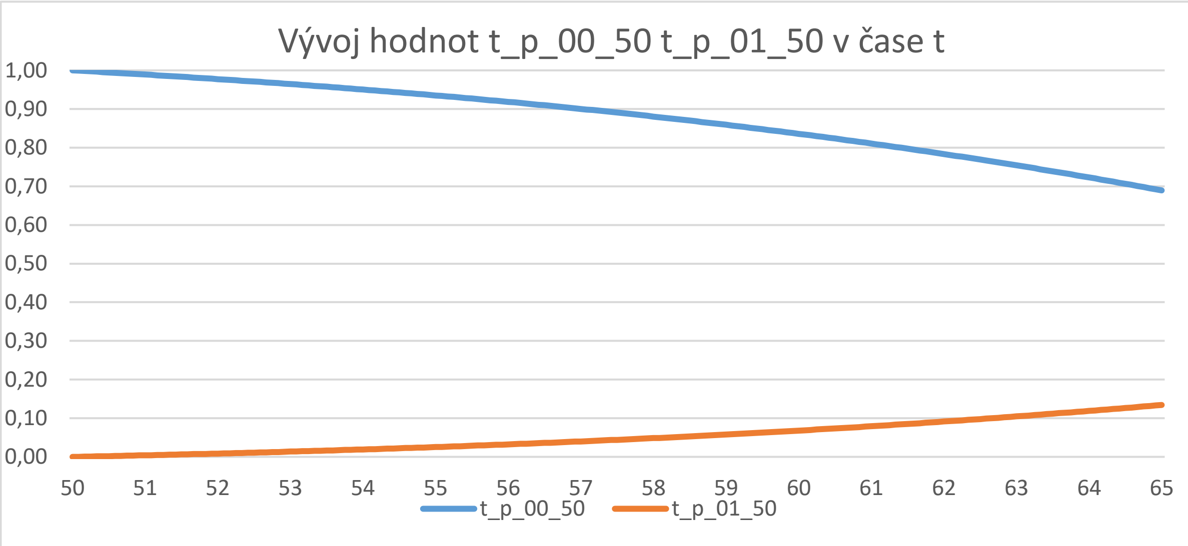
$$\mu_x^{12} = \mu_x^{02},$$

kde koeficientům $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ přiřadíme hodnoty

$$a_1 = 4 * 10^{-4}, b_1 = 3{,}4674 * 10^{-6}, c_1 = 0{,}138155,$$

$$a_2 = 5 * 10^{-4}, b_2 = 7{,}5858 * 10^{-5}, c_2 = 0{,}087498.$$

Nyní spočítáme ${}_tp_{50}^{00}$ a ${}_tp_{50}^{01}$k tomu využijeme rovnici (5.7) s krokem $h = 1/12$, využijeme měsíční kroky, protože následující proměnné budeme potřebovat spočítat pomocí Simpsonovi formule, které dává přesnější výsledky při výším počtu n. Výsledky ${}_tp_{50}^{00}$ a ${}_tp_{50}^{01}$ nám udává následující graf.



Graf 2: vývoj pravděpodobnosti přežití

Zdroj: vlastní zpracování

Řešení a)

Roční netto pojistné při polhůtním EPV spočítáme jako

$$NP = \frac{PC_{nemoc} * \bar{a}_{50:15}^{01} + PC_{smrti} * \bar{A}_{50:15}^{02}}{\bar{a}_{50:15}^{00}},$$

nejprve si spočítáme EPV pro příjem z pojistného jako

$$NP\,\bar{a}_{50:15}^{00} = NP \int_0^{15} e^{-2,5\% * t} \;{}_tp_{50}^{00}\, dt$$

a pomocí numerického integrování dostaneme $\bar{a}_{50:15}^{00} = 11{,}0895267$.

Další hodnotu EPV pro nemoc vyjádříme jako

$$100\,000\; \bar{a}_{50:15}^{01} = 100\,000 \int_0^{15} e^{-2,5\% * t} \;{}_tp_{50}^{01}\, dt$$

opět pomocí numerického integrování dostaneme hodnotu $\bar{a}_{50:15}^{01} = 0{,}5996129$.

Poslední EPV hodnotu pro smrt spočítáme jako

$$1\,000\,000\ \bar{A}^{02}_{50:15} = 1\,000\,000 \int_0^{15} e^{-2,5\%*t} \left({}_t p^{00}_{50}\, \mu^{02}_{50+t} + \ {}_t p^{01}_{50}\, \mu^{12}_{50+t} \right) dt$$

pomocí numerického integrování dostaneme hodnotu $\bar{A}^{02}_{50:15} = 0{,}1430339.$

Nyní už dosazením do vzorce pro netto pojistné získáme

$$\mathbf{NP} = \frac{100\,000 * \bar{a}^{01}_{50:15} + 1\,000\,000 * \bar{A}^{02}_{50:15}}{\bar{a}^{00}_{50:15}} = \mathbf{18\ 305\ K\check{c}}$$

Řešení b)

Roční netto pojistné při předlhůtním EPV spočítáme jako

$$\boldsymbol{NP} = \frac{PC_{nemoc} * \ddot{a}^{(12)01}_{50:15} + PC_{smrti} * \bar{A}^{02}_{50:15}}{a^{(12)01}_{50:15}}$$

První si spočítáme EPV pro příjem z pojistného jako

$$\ddot{a}^{(12)00}_{50:15} = \left(1 + {}_{\frac{1}{12}}p^{00}_{50}\, v^{\frac{1}{12}} + {}_{\frac{2}{12}}p^{00}_{50}\, v^{\frac{2}{12}} + \cdots + {}_{14\frac{11}{12}}p^{00}_{50}\, v^{14\frac{11}{12}} \right) = 10{,}7850848,$$

a EPV pro nemoc spočítáme jako

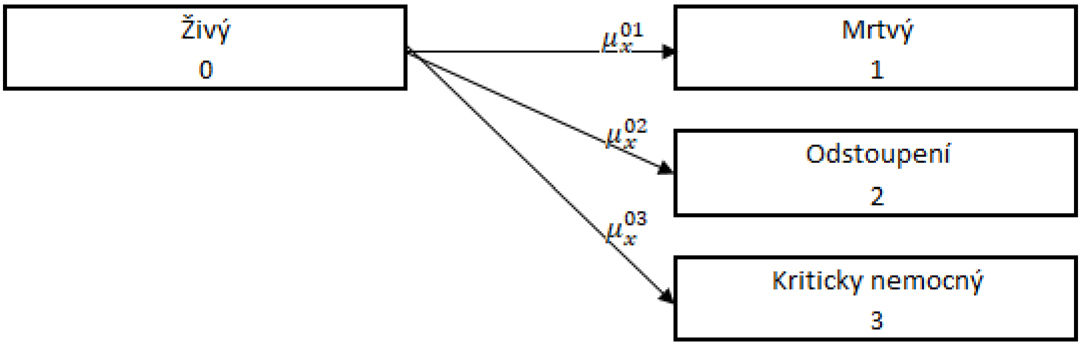
$$a^{(12)01}_{50:15} = \left({}_{\frac{1}{12}}p^{01}_{50}\, v^{\frac{1}{12}} + {}_{\frac{2}{12}}p^{01}_{50}\, v^{\frac{2}{12}} + \cdots + {}_{15}p^{00}_{50}\, v^{15} \right) = 0{,}5340939.$$

EPV pro smrt je stejné jako polhůtní $\bar{A}^{02}_{50:15} = 0{,}1430339.$

Nyní už dosazením do vzorce pro netto pojistné získáme

$$\mathbf{NP} = \frac{100\,000 * a^{(12)01}_{50:15} + 1\,000\,000 * \bar{A}^{02}_{50:15}}{\ddot{a}^{(12)00}_{50:15}} = \mathbf{18\ 232\ K\check{c}}$$

6.4 Model s více stavy dekrementů



Obrázek 9: Model s více stavy dekrementů

Zdroj: vlastní zpracování dle [6]

Na obrázku 9 je popsán model s více dekrementy v tomto modelu budeme pracovat s l_x a $d_x^{(i)}, kde\ i = 1, 2, 3$.

Pojistná smlouva je sjednaná na $15let$, se vstupním věkem $50let$ a kořen $l_0 = 100\,000$, tzn. že pojistnou smlouvu si sjedná $100\,000$ osob. V pojistné smlouvě je sjednaná pojistná částka smrti na $200\,000\ Kč$, potom pojistná částka v případě odstoupení na $500kč$ a pojistná částka v případě kritického onemocnění na $500\,000\ Kč$.

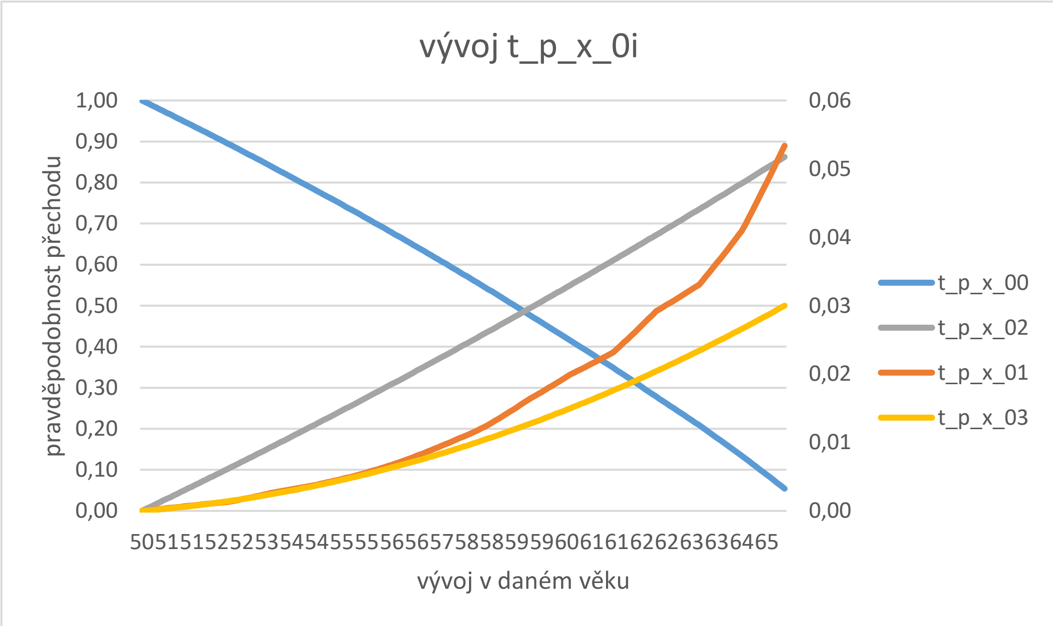
Budeme uvažovat následující úmrtnostní tabulku s více dekrementy

X	l_x	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$	$d_x^{(3)}$
50	100000	64	5000	50
51	94886	64	4792	57
52	89973	59	4589	63
53	85263	74	4391	68
54	80729	75	4198	73
55	76384	79	4010	76
56	72218	85	3828	79
57	68226	93	3650	82
58	64401	99	3478	84
59	60741	109	3310	85
60	57237	114	3148	86
61	53889	113	2991	86
62	50698	123	2839	86
63	47649	121	2692	86
64	44750	131	2551	85
65	41984	149	2414	84

Obrázek 10: Úmrtnostní tabulka s více dekrementy

Zdroj: zpracováno dle [6]

Nejprve si z tabulky spočítáme ${}_tp_x^{0i}, i = 0, 1, 2, 3$, zde využijeme vzorce (5.13) až (5.18) dané výsledky si interpretujeme pomocí grafu 3, kde na levé straně máme pravděpodobnost přechodu ${}_tp_x^{00}$, ${}_tp_x^{02}$ a na pravé ${}_tp_x^{01}$, ${}_tp_x^{03}$.



Graf 3: pravděpodobnosti přežití v určitých stavech

Zdroj: vlastní zpracování

Pokud už známe hodnoty ${}_tp_x^{0i}, i = 0, 1, 2, 3$ můžeme pomocí Simpsonova vzorce spočítat potřebné EPV pro výpočet netto pojistného.

Roční netto pojistné při polhůtním EPV spočítáme jako

$$NP = \frac{PC_{smrt} * \bar{a}_{50:15}^{01} + PC_{odstoupen\acute{i}} * \bar{a}_{50:15}^{02} + PC_{krit.nemocn\acute{y}} * \bar{a}_{50:15}^{03}}{\bar{a}_{50:15}^{00}},$$

nejprve si spočítáme EPV pro příjem z pojistného jako

$$NP\,\bar{a}_{50:15}^{00} = NP \int_0^{15} e^{-2,5\% * t} \ {}_tp_{50}^{00}\, dt$$

a pomocí numerického integrování dostaneme $\bar{a}_{50:15}^{00} = 7,3805421$.

Další hodnotu EPV pro smrt spočítáme jako

$$200\,000\ \bar{a}_{50:15}^{01} = 200\,000 \int_0^{15} e^{-2,5\% * t} \ {}_tp_{50}^{01}\, dt$$

opět pomocí numerického integrování dostaneme hodnotu $\bar{a}_{50:15}^{01} = 0,1748355$.

Předposlední EPV hodnotu pro odstoupení od smlouvy spočítáme jako

$$500\ \overline{a}_{50:15}^{02} = 500 \int_0^{15} e^{-2,5\% * t} \ \ {}_t p_{50}^{02}\, dt$$

pomocí numerického integrování dostaneme hodnotu $\overline{a}_{50:15}^{02} = 4{,}8239210$.

Poslední EPV hodnotu pro kritické nemoci spočítáme jako

$$500\,000\ \overline{a}_{50:15}^{03} = 500\,000 \int_0^{15} e^{-2,5\% * t} \ \ {}_t p_{50}^{03}\, dt$$

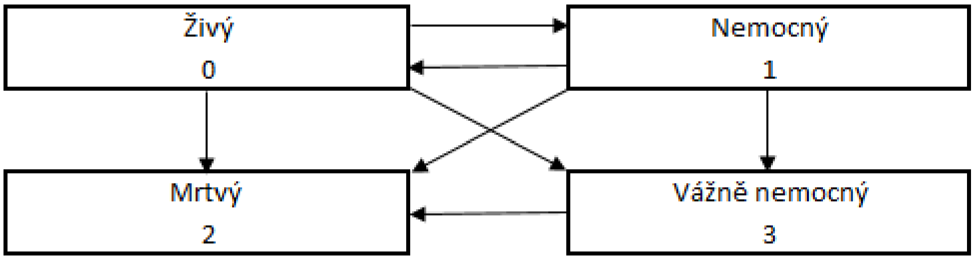
pomocí numerického integrování dostaneme hodnotu $\overline{a}_{50:15}^{03} = 0{,}1291301$.

Nyní už dosazením do vzorce pro netto pojistné získáme

$$\boldsymbol{NP} = \frac{200\,000 * \overline{a}_{50:15}^{01} + 500 * \overline{a}_{50:15}^{02} + 500\,000 * \overline{a}_{50:15}^{03}}{\overline{a}_{50:15}^{00}} = \mathbf{13\,812\ K\check{c}}.$$

6.5 Model Zdravý-nemocný-vážně_nemocný-mrtvý

Uvažujme následující model pojistné smlouvy, která kombinuje dávky důchodového pojištění a kritické nemoci.



Obrázek 11: Model Zdravý-nemocný-vážně_nemocný-mrtvý

Zdroj: zpracováno dle [6]

Předpokládáme, že do pojištění vstoupí osoba ve věku 30 let a bude pojištěná po dobu 35 letech. Osoba je pojištěná na pojistnou částku $100\,000\ Kč$ pro případ smrti, dále na $75\ 000\ Kč$ pro případ nemoci a na $100\ 000\ Kč$ pro velmi vážné nemoci.

Intenzitu přechodu uvažujeme následující:

$$\mu_x^{01} = a_1 + b_1 \exp\{c_1\, x\},$$

$$\mu_x^{10} = 0{,}1\mu_x^{01},$$

$$\mu_x^{02} = a_2 + b_2 \exp\{c_2\, x\},$$

$$\mu_x^{12} = \mu_x^{02},$$

$$\mu_x^{32} = 1{,}2\, \mu_x^{02},$$

$$\mu_x^{03} = 0{,}05\mu_x^{01},$$

$$\mu_x^{13} = \mu_x^{03}.$$

Kde koeficientům $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ přiřadíme hodnoty

$$a_1 = 4 * 10^{-4}, b_1 = 3{,}5 * 10^{-6}, c_1 = 0{,}14,$$

$$a_2 = 5 * 10^{-4}, b_2 = 76 * 10^{-5}, c_2 = 0{,}09.$$

Za předpokladu, že pojištěný vstoupí do pojištění jako zdravý, známe hodnoty pro

$$ {}_{30}p_{50}^{00} = 1, {}_{30}p_{50}^{01} = 0, {}_{30}p_{50}^{02} = 0, {}_{30}p_{50}^{03} = 0. $$

Nyní si musíme určit hodnoty ${}_{t+h}\,p_{50}^{00}, {}_{t+h}p_{50}^{01}, {}_{t+h}p_{50}^{02}, {}_{t+h}p_{50}^{03}$ pomocí vzorce (5.7).

Pro představu si odvodíme ${}_{t+h}p_{50}^{00}$

$$ {}_{t+h}p_{50}^{00} = \ {}_{t}p_{50}^{00} - h * \ {}_{t}p_{50}^{00}\,(\mu_x^{01} + \mu_x^{02} + \mu_x^{03}) + h * \ {}_{t}p_{50}^{01}\,\mu_x^{10}, $$

$$ {}_{t+h}p_{50}^{01} = {}_{t+h}p_{50}^{01} - h * {}_{t+h}p_{50}^{01}\,(\mu_x^{10} + \mu_x^{12} + \mu_x^{13}) + h * \ {}_{t}p_{50}^{00}\,\mu_x^{01}. $$

Řešení:

Roční netto pojistné při polhůtním EPV spočítáme jako

$$ NP = \frac{PC_{nemoc} * \bar{a}_{30:35}^{01} + PC_{krit\,nemoci} * \bar{a}_{30:35}^{03} + PC_{smrti} * \bar{A}_{30:35}^{02}}{\bar{a}_{30:35}^{00}}, $$

nejprve si spočítáme EPV pro příjem z pojistného jako

$$ NP\,\overline{a}_{30:35}^{00} = NP \int_0^{35} e^{-4{,}879\% * t}\ {}_{t}p_{30}^{00}\,dt $$

a pomocí numerického integrování dostaneme $\overline{a}_{50:15}^{00} = 15{,}5766448.$

Další hodnotu EPV pro nemoc vyjádříme jako

$$ 75\,000\ \overline{a}_{30:35}^{01} = 75\,000 \int_0^{35} e^{-4{,}879\% * t}\ {}_{t}p_{30}^{01}\,dt $$

opět pomocí numerického integrování dostaneme hodnotu $\overline{a}_{50:15}^{01} = 0{,}0395479.$

Další hodnotu EPV pro kritickou nemoc vyjádříme jako

$$ 100\,000\ \overline{a}_{30:35}^{03} = 100\,000 \int_0^{35} e^{-4{,}879\% * t}\ {}_{t}p_{30}^{03}\,dt $$

opět pomocí numerického integrování dostaneme hodnotu $\overline{a}_{50:15}^{01} = 0{,}002878026.$

Poslední EPV hodnotu pro smrt spočítáme jako

$$ 100\,000\ \overline{a}_{30:35}^{02} = 100\,000 \int_0^{35} e^{-4{,}879\% * t}\ {}_{t}p_{30}^{02}\,dt $$

pomocí numerického integrování dostaneme hodnotu $\overline{A}^{02}_{50:15} = 0{,}086835$.

Nyní už dosazením do vzorce pro roční netto pojistné získáme

$$\mathbf{N}\mathrm{P} = \frac{75\,000\ \overline{a}^{01}_{30:35} + 100\,000\ \overline{a}^{03}_{30:35} + 100\,000\ \overline{a}^{02}_{30:35}}{\overline{a}^{00}_{30:35}} = \mathbf{2\,480{,}14\ K}\text{č}$$

Kdybychom uvažovali měsíční netto pojistné získáme

$$\mathbf{N}\mathrm{P} = \frac{75\,000\ \overline{a}^{01}_{30:35} + 100\,000\ \overline{a}^{03}_{30:35} + 100\,000\ \overline{a}^{02}_{30:35}}{\overline{a}^{00}_{30:35} * 12} = \mathbf{206{,}68\ K}\text{č}$$

ZÁVĚR

Markovy procesy mají široké využití ve spoustě odvětví a vědních oborech. Mezi ty, na které jsem se zaměřil, patřilo užití při modelování různých jevů v pojišťovnictví, v mém případě hlavně modelováni v oblasti životního pojištění při výpočtu netto pojistného. Cílem mé diplomové práce bylo věnovat se Markovo procesu a jeho úpravám pro modelování výpočtu netto pojistného od jednoduchých modelů s dvěma stavy až po modely, které měly více stavů a více přechodů mezi jednotlivými stavy.

Při využívání více zdrojů jsem se často střetával s rozdílným značením proměnných. Preferoval jsem proto podle svého uvážení nejednoduší a nejvíce srozumitelné značení, zejména pro lepší pochopení osoby, která by si diplomovou práci mohla číst.

V prvních částech jsem se zaměřil na historii pojišťovnictví jak ve světě, tak i v České republice. Dále jsem se zaměřil na přiblížení tradičních produktů v životním pojištění, kde jsem nejprve popsal charakteristiku životního pojištění a základní podoby životního pojištění.

V praktické části diplomové práce jsem řešil otázku věku pojištěného a doby, na kterou se pojištění sjednává. Tyto hodnoty jsem sjednotil u všech příkladů. Po vyřešení sjednocení vstupních dat jsem se zaměřil na šest rozdílných modelových smluv od toho základního až po složité modely, ve kterých se vyplácí pojistné plnění v různých stavech. Jelikož pojišťovny neposkytují tabulky pravděpodobností přechodů mezi jednotlivými stavy, musel jsem využít cizojazyčné literatury, která se zabývá úmrtnostními tabulkami. Na základě proměnných a vzorců odvozených v kapitole 5 jsem provedl výpočty roční netto pojistné sazby v programu Microsoft Office Excel. Při výpočtu jsem se zaměřil převážně na starší osoby, které mají zajímavější průběh vývoje pravděpodobnosti přechodu mezi stavy, například při pravděpodobnosti dožití dalšího roku.

Cílem diplomové práce bylo porovnat výpočet netto pojistné sazby u klasického pojištění smrti při výpočtu pomocí komutačních čísel a výpočtu, při kterém jsem použil Markův proces a jeho vlastnosti. Pojistná smlouva měla nastavené parametry na 50 letou osobu při sjednaným pojištění na 15 let a na pojistnou částku smrti $1\,000\,000\ Kč$. Jednorázová netto pojistná sazba při výpočtu pomocí komutačních čísel vyšla $NP_{kom.čísla} = 104\,717{,}4\ Kč$ a pomocí metody, při která byl využit Markův proces byla vypočítaná sazba $NP = 101\,060{,}09\ Kč$. Z těchto hodnot jsem zjistil, že výpočty za využití Markova procesu by byly výhodnější více pro pojišťovnu než pro pojištěného, protože by pojištěný platil vyšší netto pojistnou sazbu než při výpočtu pomocí komutačních čísel.

V další praktické části jsem pomocí znalostí Markova procesu simuloval výpočty netto pojistné sazby při uvažování více vstupních připojištění nebo vlivu jiných faktorů. Nejprve jsem modeloval výpočet roční netto pojistné sazby pro model popsaný v kapitole 6.2, kde jsem uvažoval možnost strojovosti. Při uvažování, že někteří klienti smlouvu po čase stornují, jsem zjistil, že netto pojistná sazba vychází nižší.

V kapitole 6.3 až 6.5 jsem uvažoval už složitější modely, kde si klient kromě pojištění smrti mohl sjednat další různá připojištění, jako například nemoci nebo připojištění vážných onemocnění. V těchto modelech, pokud bych uvažoval stejné parametry jako v modelu 6.1, netto pojistná sazba vycházela dražší, zejména vlivem dalších připojištění.

Diplomová práce se zabývala alternativní možností výpočtu netto pojistné sazby, než jsou dnes často využívané klasické metody pomocí komutačních čísel nebo pravděpodobnosti úmrtí.

POUŽITÁ LITERATURA

[1] A brief history of life insurance. *ThinkAdvisor Network* [online]. ThinkAdvisor: Investment Advisor and Research on Wealth magazines, 2013, 9.10.2013 [cit. 2018-04-25]. Dostupné z: www.thinkadvisor.com

[2] CIPRA, Tomáš. *Pojistná matematika: teorie a praxe*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, 2006. ISBN 8086929116.

[3] COX, D.R. a H.D. MILLER. *The theory of stochastic processes*. Repr. London: Chapman and Hall, 1978. ISBN 9780412151705.

[4] *Česká asociace pojišťoven* [online]. Praha: čap, 2014 [cit. 2018-04-25]. Dostupné z: http://www.cap.cz/en/

[5] DAŇHEL, Jaroslav. *Pojistná teorie*. Praha: Professional Publishing, 2005. ISBN 80-864-1984-3.

[6] DAVID C.M. DICKSON, MARY R. HARDY a HOWARD R. WATERS. *Actuarial mathematics for life contingent risks*. 2nd edition. Cambridge Univ. Pr: Cambridge University Press, 2013. ISBN 1107044073.

[7] DOOB, J.L. *Stochastic processes*. 3. New York: Wiley, 1990. ISBN 9780471523697.

[8] DUCHÁČKOVÁ, Eva. *Principy pojištění a pojišťovnictví*. 3., aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, c2009. ISBN 978-80-86929-51-4.

[9] DURRETT, Richard. *Essentials of stochastic processes*. New York: Springer, c1999. ISBN 03-879-8836-x.

[10] EDITORS, John REW, Charles STURGE a Julian SANDYS. *Macmillan directory of Lloyd's of London*. Basingstoke: Macmillan, 1989. ISBN 9780333491812.

[11] *Finance* [online]. Praha: Mladá fronta, 1945 [cit. 2018-04-25]. Dostupné z: https://www.mf.cz/o-spolecnosti/

[12] *FinanceBroker Team a.s.: Historie* [online]. Praha: Online, 2014 [cit. 2018-04-25]. Dostupné z: https://www.brokerteam.cz/historie

[13] KEITH M. SEAFIELD & MICHAEL A. PACK. *Chicago Fire Insurance Patrol, 1871-1959*. United States: K.M. Seafield and M.A. Pack, 2007. ISBN 097866230X.

[14] MARVAN, M.: *Dějiny pojišťovnictví v Československu, 1. díl – Dějiny pojišťovnictví v Československu do roku 1918,* Novinář, 1989, [ISBN neuvedeno]

[15] MARVAN, Miroslav a Josef CHALOUPECKÝ. *Dějiny pojišťovnictví v Československu*. Bratislava: Alfa Konti, 1993. ISBN 80-88739-01-2.

[16] MARVAN, Miroslav a Josef CHALOUPECKÝ. *Historie českého pojišťovnictví v dokumentech*. Praha: Hermes, 1995. ISBN 9788090186712.

[17] Ministerstvo financí ČR: Subjekty v sektoru pojišťovnictví. *Ministerstvo financí ČR* [online]. Praha 1: Ministerstvo financí ČR, 2015, 13. 2. 2015 [cit. 2018-04-25]. Dostupné z: https://www.psfv.cz/cs/pojisteni/subjekty

[18] RESNICK a Sidney I. *Adventures in stochastic processes*. S.l.: Birkhauser, 2014. ISBN 9781461267386.

[19] THATCHER, A. R. 1999. The long-term pattern of adult mortality and the highest attained age. Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society), 1999, vol. 162, no. 1, s. 5-43. Dostupné také z WWW: http://www.jstor.org/stable/2680465?seq=1#page_scan_tab_contents.

[20] *The documentary history of insurance, 1000 B. C.-1875*. Newark, N.J.: Prudential press, 1915.

[21] TRENERRY, Charles Farley. *The origin and early history of insurance: including the contract of bottomry*. Clark, NJ: Lawbook Exchange, 2009. ISBN 978-1-58477-932-2.

[22] TREŠL, Jiří. *Stochastic processes and risk in finance and insurance*. Praha: Oeconomica, 2010. ISBN 9788024517254.

[23] Whittaker, E. T. and Robinson, G. "The Trapezoidal and Parabolic Rules." *The Calculus of Observations: A Treatise on Numerical Mathematics, 4th ed.* New York: Dover, pp. 156-158, 1967.

[24] *Životní pojištění*. Praha: Grada, 2002. Finance pro každého. ISBN isbn80-247-0146-4.

PŘÍLOHY

PŘÍLOHA A – VÝŘEZ ÚMRTNOSTÍ TABULKY

Výřez z úmrtnostní tabulky pro výpočet netto pojistného v modelu Živý-mrtvý.

X	Dx	Px	m_x	q_x	p_x	µ_x
50	1652	386187	0,00428	0,00427	0,99573	0,00428
51	1728	406141	0,00425	0,00425	0,99575	0,00425
52	1970	433533	0,00454	0,00453	0,99547	0,00454
53	2296	402861	0,00570	0,00568	0,99432	0,00570
54	2063	356748	0,00578	0,00577	0,99423	0,00578
55	2302	350568	0,00657	0,00654	0,99346	0,00657
56	2633	340186	0,00774	0,00771	0,99229	0,00774
57	2672	316639	0,00844	0,00840	0,99160	0,00844
58	2607	290425	0,00898	0,00894	0,99106	0,00898
59	2846	286637	0,00993	0,00988	0,99012	0,00993
60	3334	292287	0,01141	0,01134	0,98866	0,01141
61	3671	291179	0,01261	0,01253	0,98747	0,01261
62	3916	285808	0,01370	0,01361	0,98639	0,01370
63	4193	277140	0,01513	0,01502	0,98498	0,01513
64	4383	268182	0,01634	0,01621	0,98379	0,01634
65	4817	257972	0,01867	0,01850	0,98150	0,01867
66	5136	249605	0,02058	0,02037	0,97963	0,02058
67	5554	247222	0,02247	0,02222	0,97778	0,02247
68	6137	244981	0,02505	0,02474	0,97526	0,02505
69	6729	238507	0,02821	0,02782	0,97218	0,02821
70	7115	228395	0,03115	0,03067	0,96933	0,03115
71	7551	217793	0,03467	0,03408	0,96592	0,03467
72	8104	209781	0,03863	0,03790	0,96210	0,03864
73	8803	203539	0,04325	0,04233	0,95767	0,04326
74	9553	193674	0,04933	0,04814	0,95186	0,04934
75	9608	182330	0,05270	0,05134	0,94866	0,05271
76	9895	171976	0,05754	0,05593	0,94407	0,05755
77	10356	165194	0,06269	0,06078	0,93922	0,06271
78	11211	160484	0,06986	0,06750	0,93250	0,06989
79	11656	152957	0,07620	0,07341	0,92659	0,07624
80	11737	115263	0,10183	0,09689	0,90311	0,10192
81	8407	88179	0,09534	0,09100	0,90900	0,09541
82	7919	79452	0,09967	0,09494	0,90506	0,09975
83	8492	79749	0,10648	0,10110	0,89890	0,10659
84	8794	71338	0,12327	0,11612	0,88388	0,12343
85	8776	64165	0,13677	0,12802	0,87198	0,13699

Tabulka 4: Úmrtnostní tabulka muži USA 2000

PŘÍLOHA B – UKÁZKA VÝPOČTU PROMĚNÝCH V MODELU SE ČTYŘMI STAVY

Ukázka výpočtu v Excelu více stavového modelu Živý-nemocný-kriticky_nemocný-mrtvý.

t	Xt	_	mu_01_30+t	mu_02_30+t	mu_12_30+t	mu_32_30+t	mu_10_30+t	mu_03_30+t	mu_13_30+t	t_p_00_30	t_p_01_30
0	30,00	1	0,000633	0,00163	0,00163	0,00196	0,00006	0,00003	0,00003	1	0
1/12	30,08	4	0,000636	0,00164	0,00164	0,00197	0,00006	0,00003	0,00003	0,99981	0,00005
1/6	30,17	2	0,000639	0,00165	0,00165	0,00198	0,00006	0,00003	0,00003	0,99962	0,00011
1/4	30,25	4	0,000642	0,00166	0,00166	0,00199	0,00006	0,00003	0,00003	0,99942	0,00016
1/3	30,33	2	0,000645	0,00167	0,00167	0,00200	0,00006	0,00003	0,00003	0,99923	0,00021
5/12	30,42	4	0,000647	0,00167	0,00167	0,00201	0,00006	0,00003	0,00003	0,99903	0,00027
1/2	30,50	2	0,000650	0,00168	0,00168	0,00202	0,00007	0,00003	0,00003	0,99884	0,00032
7/12	30,58	4	0,000653	0,00169	0,00169	0,00203	0,00007	0,00003	0,00003	0,99864	0,00037
2/3	30,67	2	0,000656	0,00170	0,00170	0,00204	0,00007	0,00003	0,00003	0,99844	0,00043
3/4	30,75	4	0,000659	0,00171	0,00171	0,00205	0,00007	0,00003	0,00003	0,99824	0,00048
5/6	30,83	2	0,000662	0,00172	0,00172	0,00206	0,00007	0,00003	0,00003	0,99804	0,00054
11/12	30,92	4	0,000665	0,00173	0,00173	0,00207	0,00007	0,00003	0,00003	0,99784	0,00059
1	31,00	2	0,000668	0,00174	0,00174	0,00208	0,00007	0,00003	0,00003	0,99764	0,00065
1 1/12	31,08	4	0,000672	0,00175	0,00175	0,00210	0,00007	0,00003	0,00003	0,99744	0,00070
1 1/6	31,17	2	0,000675	0,00176	0,00176	0,00211	0,00007	0,00003	0,00003	0,99724	0,00076
1 1/4	31,25	4	0,000678	0,00177	0,00177	0,00212	0,00007	0,00003	0,00003	0,99703	0,00081
1 1/3	31,33	2	0,000681	0,00178	0,00178	0,00213	0,00007	0,00003	0,00003	0,99682	0,00087
1 5/12	31,42	4	0,000685	0,00178	0,00178	0,00214	0,00007	0,00003	0,00003	0,99662	0,00093
1 1/2	31,50	2	0,000688	0,00179	0,00179	0,00215	0,00007	0,00003	0,00003	0,99641	0,00098
1 7/12	31,58	4	0,000691	0,00180	0,00180	0,00216	0,00007	0,00003	0,00003	0,99620	0,00104
1 2/3	31,67	2	0,000695	0,00181	0,00181	0,00218	0,00007	0,00003	0,00003	0,99599	0,00110
1 3/4	31,75	4	0,000698	0,00182	0,00182	0,00219	0,00007	0,00003	0,00003	0,99578	0,00116
1 5/6	31,83	2	0,000702	0,00183	0,00183	0,00220	0,00007	0,00004	0,00004	0,99557	0,00121
1 11/12	31,92	4	0,000705	0,00184	0,00184	0,00221	0,00007	0,00004	0,00004	0,99535	0,00127
2	32,00	2	0,000709	0,00185	0,00185	0,00222	0,00007	0,00004	0,00004	0,99514	0,00133
2 1/12	32,08	4	0,000712	0,00186	0,00186	0,00224	0,00007	0,00004	0,00004	0,99492	0,00139
2 1/6	32,17	2	0,000716	0,00187	0,00187	0,00225	0,00007	0,00004	0,00004	0,99471	0,00145
2 1/4	32,25	4	0,000720	0,00188	0,00188	0,00226	0,00007	0,00004	0,00004	0,99449	0,00151
2 1/3	32,33	2	0,000724	0,00190	0,00190	0,00227	0,00007	0,00004	0,00004	0,99427	0,00157
2 5/12	32,42	4	0,000727	0,00191	0,00191	0,00229	0,00007	0,00004	0,00004	0,99405	0,00163
2 1/2	32,50	2	0,000731	0,00192	0,00192	0,00230	0,00007	0,00004	0,00004	0,99383	0,00169
2 7/12	32,58	4	0,000735	0,00193	0,00193	0,00231	0,00007	0,00004	0,00004	0,99361	0,00175
2 2/3	32,67	2	0,000739	0,00194	0,00194	0,00233	0,00007	0,00004	0,00004	0,99338	0,00181
2 3/4	32,75	4	0,000743	0,00195	0,00195	0,00234	0,00007	0,00004	0,00004	0,99316	0,00187
2 5/6	32,83	2	0,000747	0,00196	0,00196	0,00235	0,00007	0,00004	0,00004	0,99293	0,00193
2 11/12	32,92	4	0,000751	0,00197	0,00197	0,00236	0,00008	0,00004	0,00004	0,99271	0,00199
3	33,00	2	0,000755	0,00198	0,00198	0,00238	0,00008	0,00004	0,00004	0,99248	0,00205
3 1/12	33,08	4	0,000759	0,00199	0,00199	0,00239	0,00008	0,00004	0,00004	0,99225	0,00211
3 1/6	33,17	2	0,000764	0,00200	0,00200	0,00240	0,00008	0,00004	0,00004	0,99202	0,00218
3 1/4	33,25	4	0,000768	0,00202	0,00202	0,00242	0,00008	0,00004	0,00004	0,99179	0,00224
3 1/3	33,33	2	0,000772	0,00203	0,00203	0,00243	0,00008	0,00004	0,00004	0,99155	0,00230
3 5/12	33,42	4	0,000777	0,00204	0,00204	0,00245	0,00008	0,00004	0,00004	0,99132	0,00237
3 1/2	33,50	2	0,000781	0,00205	0,00205	0,00246	0,00008	0,00004	0,00004	0,99108	0,00243
3 7/12	33,58	4	0,000785	0,00206	0,00206	0,00247	0,00008	0,00004	0,00004	0,99085	0,00249
3 2/3	33,67	2	0,000790	0,00207	0,00207	0,00249	0,00008	0,00004	0,00004	0,99061	0,00256
3 3/4	33,75	4	0,000795	0,00208	0,00208	0,00250	0,00008	0,00004	0,00004	0,99037	0,00262
3 5/6	33,83	2	0,000799	0,00210	0,00210	0,00252	0,00008	0,00004	0,00004	0,99013	0,00269
3 11/12	33,92	4	0,000804	0,00211	0,00211	0,00253	0,00008	0,00004	0,00004	0,98989	0,00275
4	34,00	2	0,000809	0,00212	0,00212	0,00255	0,00008	0,00004	0,00004	0,98964	0,00282
4 1/12	34,08	4	0,000813	0,00213	0,00213	0,00256	0,00008	0,00004	0,00004	0,98940	0,00289
4 1/6	34,17	2	0,000818	0,00215	0,00215	0,00257	0,00008	0,00004	0,00004	0,98915	0,00295
4 1/4	34,25	4	0,000823	0,00216	0,00216	0,00259	0,00008	0,00004	0,00004	0,98890	0,00302
4 1/3	34,33	2	0,000828	0,00217	0,00217	0,00260	0,00008	0,00004	0,00004	0,98865	0,00309
4 5/12	34,42	4	0,000833	0,00218	0,00218	0,00262	0,00008	0,00004	0,00004	0,98840	0,00315

Obrázek 12: Ukázka výpočtu pravděpodobností přechodu

duchod	duchod		nemoc		kriticka nemoc		smrt	
ä_00_30:35	a_00_30:35		a_01_30:35		a_03_30:35		a_02_30:35	
1,0000000	1	1	0	0	0,00003167	0,000032	0,00163086	0,00163086
0,9957519	0,995751856	3,983007424	5,25693E-05	0,00021028	0,000032	0,000127	0,001632495	0,006529979
0,9915208	0,991520818	1,983041636	0,000104921	0,00020984	0,000032	0,000063	0,00163415	0,0032683
0,9873068	0,987306813	3,949227251	0,000157057	0,00062823	0,000032	0,000127	0,001635825	0,0065433
0,9831098	0,983109768	1,966219536	0,00020898	0,00041796	0,000032	0,000063	0,00163752	0,00327504
0,9789296	0,978929612	3,915718448	0,000260693	0,00104277	0,000032	0,000127	0,001639235	0,00655694
0,9747663	0,974766273	1,949532545	0,000312197	0,00062439	0,000032	0,000063	0,00164097	0,00328194
0,9706197	0,970619678	3,882478713	0,000363497	0,00145399	0,000032	0,000127	0,001642725	0,006570899
0,9664898	0,966489758	1,932979515	0,000414592	0,00082918	0,000032	0,000063	0,001644499	0,003288999
0,9623764	0,96237644	3,84950576	0,000465488	0,00186195	0,000032	0,000127	0,001646294	0,006585176
0,9582797	0,958279654	1,916559309	0,000516184	0,00103237	0,000032	0,000063	0,001648108	0,003296217
0,9541993	0,95419933	3,816797322	0,000566685	0,00226674	0,000032	0,000127	0,001649943	0,006599771
0,9501354	0,950135398	1,900270796	0,000616992	0,00123398	0,000032	0,000064	0,001651797	0,003303594
0,9460878	0,946087787	3,784351149	0,000667109	0,00266843	0,000032	0,000127	0,001653671	0,006614683
0,9420564	0,942056429	1,884112857	0,000717036	0,00143407	0,000032	0,000064	0,001655565	0,003311129
0,9380413	0,938041253	3,752165011	0,000766777	0,00306711	0,000032	0,000127	0,001657478	0,006629913
0,9340422	0,934042191	1,868084381	0,000816335	0,00163267	0,000032	0,000064	0,001659412	0,003318824
0,9300592	0,930059174	3,720236694	0,00086571	0,00346284	0,000032	0,000127	0,001661365	0,006645461
0,9260921	0,926092133	1,852184266	0,000914907	0,00182981	0,000032	0,000064	0,001663338	0,003326677
0,9221410	0,922141001	3,688564003	0,000963927	0,00385571	0,000032	0,000128	0,001665331	0,006661325
0,9182057	0,918205709	1,836411418	0,001012772	0,00202554	0,000032	0,000064	0,001667344	0,003334688
0,9142862	0,91428619	3,65714476	0,001061445	0,00424578	0,000032	0,000128	0,001669377	0,006677507
0,9103824	0,910382376	1,820764752	0,001109949	0,0022199	0,000032	0,000064	0,001671429	0,003342858
0,9064942	0,906494201	3,625976803	0,001158285	0,00463314	0,000032	0,000128	0,001673501	0,006694005
0,9026216	0,902621597	1,805243193	0,001206456	0,00241291	0,000032	0,000064	0,001675593	0,003351186
0,8987645	0,898764497	3,595057989	0,001254465	0,00501786	0,000032	0,000128	0,001677705	0,006710819
0,8949228	0,894922836	1,789845673	0,001302313	0,00260463	0,000032	0,000064	0,001679836	0,003359672
0,8910965	0,891096548	3,564386192	0,001350003	0,00540001	0,000032	0,000128	0,001681987	0,006727949
0,8872856	0,887285566	1,774571132	0,001397538	0,00279508	0,000032	0,000064	0,001684158	0,003368316
0,8834898	0,883489825	3,533959301	0,001444919	0,00577968	0,000032	0,000129	0,001686349	0,006745395
0,8797093	0,87970926	1,759418521	0,001492149	0,0029843	0,000032	0,000064	0,001688559	0,003377118
0,8759438	0,875943806	3,503775224	0,001539231	0,00615692	0,000032	0,000129	0,001690789	0,006763157
0,8721934	0,872193398	1,744386796	0,001586166	0,00317233	0,000032	0,000065	0,001693039	0,003386078
0,8684580	0,868457971	3,473831885	0,001632958	0,00653183	0,000032	0,000129	0,001695309	0,006781234
0,8647375	0,864737462	1,729474924	0,001679607	0,00335921	0,000032	0,000065	0,001697598	0,003395196
0,8610318	0,861031806	3,444127223	0,001726117	0,00690447	0,000032	0,000130	0,001699907	0,006799627
0,8573409	0,857340939	1,714681878	0,001772491	0,00354498	0,000032	0,000065	0,001702235	0,00340447
0,8536648	0,853664799	3,414659195	0,001818729	0,00727492	0,000032	0,000130	0,001704583	0,006818334
0,8500033	0,850003321	1,700006642	0,001864835	0,00372967	0,000033	0,000065	0,001706951	0,003413903
0,8463564	0,846356443	3,385425774	0,00191081	0,00764324	0,000033	0,000130	0,001709339	0,006837356
0,8427241	0,842724103	1,685448206	0,001956658	0,00391332	0,000033	0,000065	0,001711746	0,003423492
0,8391062	0,839106237	3,356424948	0,00200238	0,00800952	0,000033	0,000131	0,001714173	0,006856693
0,8355028	0,835502783	1,671005567	0,002047978	0,00409596	0,000033	0,000065	0,00171662	0,003433239
0,8319137	0,83191368	3,327654722	0,002093456	0,00837382	0,000033	0,000131	0,001719086	0,006876343
0,8283389	0,828338866	1,656677732	0,002138815	0,00427763	0,000033	0,000066	0,001721572	0,003443143
0,8247783	0,824778279	3,299113117	0,002184057	0,00873623	0,000033	0,000131	0,001724077	0,006896308
0,8212319	0,821231858	1,642463716	0,002229185	0,00445837	0,000033	0,000066	0,001726602	0,003453204
0,8176995	0,817699542	3,270798168	0,002274201	0,0090968	0,000033	0,000132	0,001729147	0,006916587
0,8141813	0,81418127	1,62836254	0,002319107	0,00463821	0,000033	0,000066	0,001731711	0,003463422
0,8106770	0,810676982	3,242707927	0,002363906	0,00945562	0,000033	0,000132	0,001734295	0,00693718
0,8071866	0,807186617	1,614373234	0,0024086	0,0048172	0,000033	0,000066	0,001736898	0,003473797
0,8037101	0,803710115	3,214840462	0,00245319	0,00981276	0,000033	0,000133	0,001739521	0,006958085
0,8002474	0,800247417	1,600494835	0,00249768	0,00499536	0,000033	0,000066	0,001742164	0,003484328

Obrázek 13: Ukázka výpočtu předlhůtního a polhůtního koeficientu pomocí Simpsonova vzorce