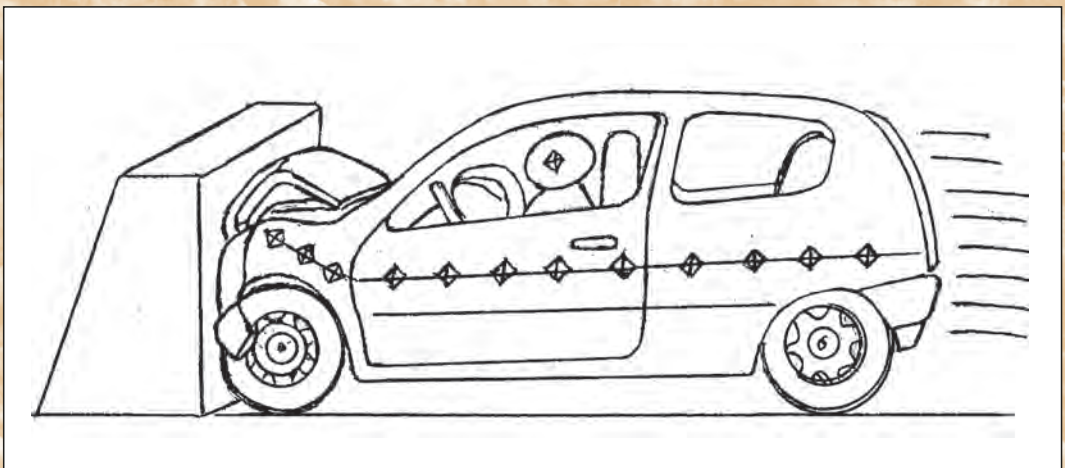


Jaroslav Menčík

# Rázy a vibrace

Základy mechaniky a zmírňování účinků



Tato publikace neprošla jazykovou korekturou.

Recenzenti:

Doc. Ing. Jan Kout, CSc.

Prof. Dr.Ing. Libor Beneš

© prof. Ing. Jaroslav Menčík, CSc., 2018

ISBN 978-80-7560-146-9 (tisk)

ISBN 978-80-7560-147-6 (pdf)

Kniha je volně přístupná na <http://hdl.handle.net/10195/70531> a <https://e-shop.upce.cz>

## **Rázy a vibrace**

Kniha se zabývá mechanikou rázů a vibrací a zmírňováním jejich účinků. Nejprve uvádí základní vztahy pro rázy a dále pro rychlosti, dráhy a síly při různých způsobech zastavování a brzdění. Všimá si i toho, že silové impulsy v tělesech se šíří pouze omezenou rychlostí. Ukazuje, jak se při zatížení chovají různé typy materiálů, jak mohou pohlcovat energii a jak dochází k jejich porušování. V další kapitole se popisují konstrukční prvky pro absorbování energie při nárazech: od ohýbaných dílů přes skořepiny až po kompozity, vzduchové polštáře a hydraulické tlumiče s konstantním zpomalením, jež zajišťuje nejúčinnější brzdění. Samostatná kapitola je věnována vibracím a zmírňování jejich účinků. Jsou uvedeny vztahy pro volné i vynucené kmitání, tlumené i netlumené. Pozornost je věnována i přenosu sil do základů a kinematickému buzení, vyskytujícímu se například při jízdě vozidla po nerovné vozovce. Je také vysvětlen dynamický absorbér vibrací a situace při kmitání více hmot. Ve složitějších případech se pro analýzu užívají numerické postupy, jako je metoda konečných prvků. Poslední kapitola je věnována teorii podobnosti a rozměrové analýze, které mohou ušetřit práci při vývoji zařízení pro tlumení rázů a vibrací. Kniha obsahuje řadu vysvětlujících příkladů, četné obrázky a odkazy na literaturu.

Kniha je volně přístupná na <http://hdl.handle.net/10195/70531>.

## **Poděkování**

Je autorovou milou povinností poděkovat upřímně oběma recenzentům této knížky za pečlivé přečtení rukopisu a odhalení různých přehlédnutí a dalších nedostatků.

Pardubice, květen 2018

Jaroslav Menčík

## **Impacts and vibrations**

This book deals with the mechanics of impacts and vibrations and mitigation of their effects. It brings the expressions for impacts and for velocity, displacement and force in various cases of braking or stopping, and pays attention to the fact that force impulses propagate in bodies only with limited velocity. Then, it shows how various materials respond to load, how they absorb energy and how they can fail. Further it describes technical means for impact energy absorption, such as bend parts, compressed shells, composites, air cushions and hydraulic shock dampers with constant deceleration. One chapter is devoted to vibrations and mitigation of their effects. Formulae are presented for free and forced vibrations, without or with damping, and attention is also paid to the transmission of forces into foundations and to kinematic exciting, appearing during a vehicle's ride on a wavy road. Also a dynamic absorber of vibrations is described and vibrations of a system of several bodies. More complex analysis needs numerical methods, such as the finite element method. The last chapter is devoted to the dimensional analysis and theory of similarity, which can spare work during the development of appliances for the damping of impacts and vibrations. The book contains explanatory examples, numerous figures and references.

The book can be downloaded on <http://hdl.handle.net/10195/70531>.

## Obsah

<b>1. Úvod</b>	<b>7</b>
<b>2. Rázy a nárazy</b>	<b>9</b>
2.1 Úvod	9
2.2 Příímý ráz hmotných bodů	10
2.3 Ráz pružný	11
2.4 Ráz nepružný	12
2.5 Ráz polopružný	13
2.6 Šikmý ráz	16
2.7 Síly při rázech – zjednodušené řešení	19
<b>3. Vlnový charakter nárůstu napětí</b>	<b>23</b>
3.1 Podélné vlny v prizmatické tyči	23
3.2 Elastické vlny v tyči při úderu tělesem konečné velikosti	26
3.3 Elastické vlny v trojrozměrném tělese	27
3.4 Plastické vlny	28
3.5 Hydraulický ráz	28
<b>4. Průběhy brzdění při různých odporech</b>	<b>31</b>
4.1 Brzdění s konstantní odporovou silou	31
4.2 Náraz na pružinu s lineární charakteristikou	34
4.3 Náraz na pružinu s lineární charakteristikou a s tlumením smykovým třením	39
4.4 Náraz na pružinu s lineární charakteristikou a s tlumením úměrným rychlosti	41
4.5 Náraz na pružinu s lineární charakteristikou a s tlumením úměrným čtverci rychlosti	44
4.6 Změny kinetické energie v průběhu brzdění	45
<b>5. Odezva a porušení materiálů a součástí</b>	<b>47</b>
5.1 Úvod	47
5.2 Pružnoplastická odezva tvárných materiálů	48
5.3 Odezva viskoelastických materiálů na zatížení	51
5.4 Porušení tvárné a křehké	52
5.5 Materiály houževnaté – pružnoplastický ohyb	54
5.6 Ztráta stability boulením	58

5.7	Vliv vrubů a dalších koncentrátorů napětí	60
5.8	Vliv trhlin, základy lomové mechaniky	62
5.9	Porušení těles z křehkých materiálů	65
<b>6.</b>	<b>Konstrukční prvky pro tlumení rázů</b>	<b>73</b>
6.1	Prstence a jejich soustavy	73
6.2	Struktury cik–cak	76
6.3	Osově symetrické skořepiny zatížené axiální silou	77
6.4	Materiály s buněčnou strukturou	78
6.5	Osově symetrické trhání a přetvarování kovových trubic	80
6.6	Kompozity	82
6.7	Vzduchové nebo plynové polštáře a polštářky	84
6.8	Hydraulické tlumiče s konstantním zpomalením	86
<b>7.</b>	<b>Vibrace a zmírňování jejich účinků</b>	<b>92</b>
7.1	Volné kmitání bez tlumení	92
7.2	Volné kmitání s tlumením	94
7.3	Vynucené kmitání	95
7.4	Síly přenášené z kmitajícího tělesa do rámu nebo základů	101
7.5	Kmitání při kinematickém buzení	103
7.6	Příčné kmitání nosníků	105
7.7	Krouživé kmitání	106
7.8	Rotace hřídele s excentrickým břemenem	107
7.9	Vyvažování rotujících zařízení	109
7.10	Energie v kmitajícím systému s tlumením	110
7.11	Dynamický absorbér vibrací	111
7.12	Kmitání soustav s více stupni volnosti	114
<b>8.</b>	<b>Rozměrová analýza a teorie podobnosti</b>	<b>118</b>
8.1	Rozměrová analýza	118
8.2	Podobnost	120
8.3	Další doporučení	121
8.4	Omezení principu podobnosti	123
8.5	Příklady bezrozměrových veličin	125
8.6	Příklady podobnostních čísel	125
	<b>Rejstřík</b>	<b>127</b>

# 1. Úvod

Všude, kde se něco pohybuje, vznikají dynamické síly. Ty jsou často nepříznivé, například při srážkách vozidel nebo těles při manipulaci, u strojních součástí, při nárazu na pevnou překážku, ale také při rychlém úderu tvrdým tělesem o velmi malé hmotnosti. Vyskytují se v dopravě i při různých technologických procesech. Při větších rázových silách může dojít k poškození nebo přímo k destrukci dotýčných těles. Jiné problémy se vyskytují u zařízení s rotačním nebo periodickým pohybem, jako jsou například různé motory nebo stroje. Pokud nejsou dostatečně vyvážené, vznikají přídatné síly a vibrace, které způsobují hluk, zvyšují opotřebenění ložisek i namáhání tělesa samotného nebo okolních zařízení a někdy vedou dokonce až k havárii, zejména při rezonanci.

Abychom těmto nepříznivým jevům mohli čelit a zmírňovat jejich následky, musíme znát jejich základní rysy. Tato znalost přináší ovoce. Automobily i další dopravní prostředky již prakticky od počátku měly odpružené podvozky. Kvůli rostoucím nárokům na bezpečnost se u automobilů i vlaků nyní běžně používají tzv. deformační zóny, které se při kolizi řízeně deformují a pohlcují velkou část energie nárazu tak, aby prostor pro cestující i posádku byl uchráněn. Vhodně navržené, dimenzované a uložené strojní zařízení je bezpečnější, má klidnější chod, hospodárnější provoz a delší životnost. Dynamické absorbery kmitů, které minimalizují chvění zvláštním způsobem, přidáním další kmitající hmoty, se užívají u předmětů velmi malých, jako je vibrační holicí strojek, tak i u velikých staveb, například mrakodrapů.

V průběhu doby byly značně prohloubeny znalosti dynamiky, včetně nauky o kmitání. Existuje bohatá literatura a byly vyvinuty různé počítačové programy, které mohou řešit velice složité problémy z těchto oblastí. Důležitým problémem se tak stává schopnost správně formulovat řešený problém, navrhnout směr řešení a popřípadě vhodný software. Tato knížka chce sloužit jako stručný úvod do problematiky rázů a vibrací a jejich zmírňování. Kromě vysvětlení základních pojmů a teorie pro získání všeobecné představy jsou v ní uvedeny jednoduché vzorce pro elementární výpočty. Zmíněna jsou také některá konstrukční řešení.

Jednotlivé kapitoly jsou doplněny řešenými úlohami a soupisem literatury k dalšímu studiu.

Členění knihy je následující. Kapitola 2 probírá základy mechaniky srážek těles: ráz pružný, nepružný a částečně pružný. Jsou uvedeny vztahy pro rychlosti a energie a je vysvětlen způsob přibližného stanovení maximální síly při nárazu na pružné těleso. Kapitola třetí si všímá toho, že silové impulsy se v tělesech mohou šířit pouze omezenou rychlostí, a ukazuje, jak se to projevuje a kdy je k tomu nutno přihlížet. Čtvrtá kapitola je věnována časovým průběhům rychlosti, dráhy a síly při různých způsobech brzdění. Pozornost je věnována i otázkám energií. Pátá kapitola ukazuje, jak se při zatížení chovají různé materiály: pružné, pružnoplastické a viskoelastické. Vysvětluje, jak se mění rozložení napětí, narůstají deformace a pohlcuje se energie při pružnoplastickém ohybu. Všímá si i ztráty stability při boulení štíhlých a tenkostěnných prvků namáhaných tlakovou silou, které se často používají pro zmírňování nárazů. Ukazuje, jakou roli hrají koncentrátoři napětí a jak se chovají tělesa s trhlinami, i jakým způsobem dochází k porušení těles z křehkých materiálů. V další kapitole se popisují konstrukční prvky užívané pro pohlcování energie při nárazech: ohýbané prstence, stlačované skořepiny a další díly, materiály s buněčnou strukturou, jako jsou např. voštiny nebo tvrdé pěny, kompozity včetně typů užívaných při balistické ochraně, a vzduchové polštáře (airbagy aj.). Je zde též vysvětlena konstrukce hydraulických tlumičů pracujících s konstantním zpomalením, které zajišťuje nejúčinnější brzdění. Sedmá kapitola je věnována vibracím a zmírňování jejich účinků, zejména přenosu sil do ložisek, základů nebo okolních konstrukcí. Jsou zde uvedeny vztahy pro volné kmitání bez tlumení i s tlumením a pro vynucené kmitání. Pozornost je věnována též kinematickému buzení, vznikajícímu například při jízdě vozidla po nerovné vozovce. Je zde popsán i tzv. dynamický absorbér vibrací, což je hmota připevněná pružně ke kmitajícímu tělesu. Při správném naladění kmitá pouze tato přídavná hmota, zatímco hlavní těleso, které je buzené, zůstává v klidu. Stručně je zmíněna situace při kmitání soustavy více hmot. Ve složitějších případech rázového zatížení nebo kmitání je nutno užívat numerické postupy, jako je například metoda konečných prvků. K tomu jsou již nutné vhodné počítačové programy, jež jsou v knize také stručně zmíněny. Poslední kapitola je věnována rozměrové analýze a teorii podobnosti, které umožňují snížení rozsahu výpočtů i experimentů a zobecňování výsledků, a tím i úsporu prací při výzkumu a vývoji nejrůznějších zařízení pro tlumení rázů a vibrací.



## 2. Rázy a nárazy

### 2.1 Úvod

Rázy dvou nebo více těles se vyskytují velice často. Může jít o srážku dvou těles srovnatelné hmotnosti, o náraz tělesa na pevnou překážku, anebo o úder tělesem o velké nebo naopak velmi malé hmotnosti. Vyskytují se v dopravě i při různých technologických procesech. Jako příklady můžeme uvést:

- Srážky dopravních prostředků (automobily, vlaky, lodě, letadla) nebo jejich nárazy do stavebních konstrukcí nebo různých překážek.
- Pád předmětů z výšky (např. vozidlo, pád výrobku při manipulaci, pád kamení na cestu, na vozidlo nebo na dopravní pás).
- Úder letícím předmětem (střela, kroupy, proud písku nebo kuliček při otryskávání různých součástí pro jejich čištění nebo zpevňování povrchu).
- Úder kladiva nebo bucharu při kování, práce sbíječky, pneumatického kladiva či přiklepové vrtačky.
- Zarážení pilot do země, ale i zatloukání hřebíků.
- Činnost strojů a mechanismů při vratném nebo opakovaném pohybu (tkalcovské stavy, manipulace s formami ve slévárnách nebo u sklářských strojů, dopravníky, manipulátory a roboty, hoblovky, mosty jeřábů, ventily spalovacích motorů, dveře v dopravních prostředcích a další).

Často je také nutno zabrzdit pohyb na velice krátké dráze, například aby vlak, kterému selhaly brzdy, nevyjel na konci nástupiště z kolejí.

Existují i příklady z oblasti zábavy: srážky koulí při kulečnicku nebo odraz míče při kopané či tenisu. Někteří si možná vzpomenou na představení v cirkuse, kde muži, ležícímu na zemi, položili na hrud' veliký kámen a druhý muž do něj vši silou udeřil perlíkem. Většina diváků při tom zatrnula hrůzou. Ale ti, kdo znali základy mechaniky, seděli klidně, protože věděli, že se nic nemůže stát.

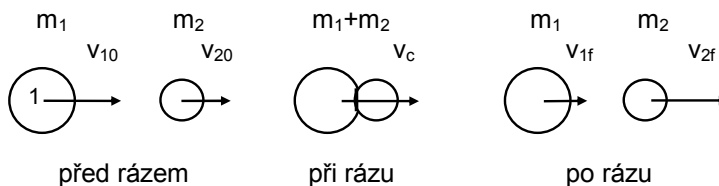
Zvláštním případem je tzv. hydraulický ráz v zařízeních pracujících s tekutinami, ke kterému dochází při náhlém zastavení proudu. Tohoto jevu všimneme na konci následující kapitoly.

Ve všech uvedených případech vznikají menší či větší síly. Někdy může dojít k destrukci těles v kontaktu nebo ke zvýšenému opotřebení a hluku. Cílem této kapitoly je poskytnout čtenáři všeobecnou představu, aby se uměl orientovat při řešení problémů, kde cílem je buď minimalizovat síly a poškození, anebo naopak účelně využít energii rázu. Nejprve zde připomeneme základní pojmy a vztahy z příslušných oblastí mechaniky a ukážeme jejich aplikaci na jednoduchých úlohách. Podrobnější materiály lze najít v učebnicích dynamiky pro vysoké školy a další literatuře, například [1 – 6].

Základem pro řešení úloh o rázu jsou pohybové rovnice a Newtonovy zákony, dále zákon zachování hybnosti, zákon zachování energie a vztahy pro výpočet kinetické energie a deformační práce. Úloha je velmi jednoduchá, jestliže stačí určit jenom rychlosti těles po rázu. Zde se zaměříme na rychlosti, zpomalení, brzdné dráhy a trvání rázu v několika základních případech. Sílu při rázu si všimneme jenom velmi stručně, neboť jim bude později věnována samostatná kapitola.

## 2.2 Přímý ráz hmotných bodů

Situaci budeme ilustrovat na dvou pružných koulích o hmotnostech  $m_1$ ,  $m_2$ , které se pohybují ve vodorovném směru po téže přímce (obr. 2.1 vlevo). Rychlost první koule je obecně vyšší než rychlost koule druhé,  $v_{10} > v_{20}$ , a v určitém okamžiku se jí dotkne. Mezi nimi pak působí kontaktní tlaková síla  $N$ , obě koule se stlačují a vzájemná vzdálenost jejich těžišť se zmenšuje. To je *etapa stlačení*, která končí v čase  $t_c$ , kdy je vzdálenost těžišť nejmenší a kontaktní síla největší (obr. 2.1 střed). V tomto kratičkém okamžiku je rychlost obou těles rovna  $v_c$ . Pak následuje *etapa odpružení* (restituce). Pokud byly deformace jenom pružné, změnila se v první etapě část kinetické energie v potenciální energii elastických napětí. Tato energie se v etapě odpružení uvolňuje a deformace se zmenšují, až po určité chvíli se obě tělesa oddělí a pokračují v pohybu různými rychlostmi  $v_{1f}$ ,  $v_{2f}$  (obr. 2.1 vpravo).



**Obr. 2.1.** Ráz dvou těles

Toto je *ráz pružný*. Někdy ale nedojde k žádnému odpružení a obě tělesa pokračují jako jeden celek rychlostí  $v_c$ . To je *ráz nepružný*. Zpravidla ale dojde k částečnému odpružení a potom hovoříme o *rázu polopružném*. Jednotlivých případů si všimneme blíže. Začneme s rychlostí  $v_c$  na konci první etapy, která je společná všem případům. Tuto rychlost dostaneme ze zákona zachování hybnosti. Platí

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = (m_1 + m_2) v_c, \quad (2.1)$$

odkud vyplývá

$$v_c = (m_1 v_{10} + m_2 v_{20}) / (m_1 + m_2). \quad (2.2)$$

### 2.3 Ráz pružný

Pokud byl ráz zcela pružný, žádná energie se během něj nespotřebovala. Rychlosti těles po odpružení proto můžeme určit s použitím **zákonu zachování energie**, který říká, že součet kinetických energií po rázu bude stejný jako před rázem:

$$E_{\text{kin},0} = E_{\text{kin},f} = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (2.3)$$

Také platí **zákon zachování hybnosti** této soustavy dvou těles:

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (2.4)$$

Vyjádříme-li z této rovnice rychlost  $v_{2f}$  a dosadíme ji do rovnice (2.3), dostaneme po úpravě konečnou rychlost tělesa 1:

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.5)$$

Podobným způsobem obdržíme rychlost druhého tělesa:

$$v_{2f} = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (2.6)$$

Podíváme se nyní na některé případy. Čtenáři doporučujeme, aby se je pokusil vyřešit sám s užitím vztahů (2.2), (2.5) a (2.6).

**Případ A.** Obě koule mají stejnou hmotnost ( $m_1 = m_2$ ) a pohybují se proti sobě stejnými rychlostmi ( $v_{20} = -v_{10}$ ; znaménko mínus značí, že směr  $v_{20}$  je opačný než směr  $v_{10}$ ). Dosazením do rovnic (2.2), (2.5) a (2.6) dostaneme  $v_c = 0$ ,  $v_{1f} = -v_{10}$  a  $v_{2f} = -v_{20} = v_{10}$ . Koule se od sebe odrazí a každá se vrací zpět svojí původní rychlostí.

Případ B. Obě koule mají stejnou hmotnost, koule 1 se pohybuje rychlostí  $v_{10}$ , koule 2 je v klidu. Z rovnic (2.2), (2.5) a (2.6) vyplyne  $v_c = \frac{1}{2} v_{10}$ ,  $v_{1f} = 0$ ,  $v_{2f} = v_{10}$ . První koule se zastaví, zatímco druhá koule se začne pohybovat rychlostí  $v_{10}$  ve směru pohybu první koule. Koule 1 předala svoji hybnost kouli 2. Obě koule si vlastně vyměnily své rychlosti.

Případ C. Druhá koule má mnohem větší hmotnost než koule první,  $m_2 \gg m_1$ , a je v klidu ( $v_{20} = 0$ ). Proto i společná rychlost na konci fáze stlačení je  $v_c = 0$ . Rychlosti po nárazu jsou:  $v_{1f} = -v_{10}$ ,  $v_{2f} = 0$ . Druhá koule se prakticky ani nepohne (je mnohem větší než koule první), a koule 1 odskočí zpět stejnou rychlostí, jakou dopadla na druhou kouli.

Případ D. Druhá koule má mnohem větší hmotnost než koule první a stejnou rychlost, ale opačný směr pohybu,  $m_2 \gg m_1$ ,  $v_{20} = -v_{10}$ . Společná rychlost na konci fáze stlačení je  $v_c = -v_{10}$  a rychlosti po nárazu budou:  $v_{1f} = -3v_{10}$ ,  $v_{2f} = -v_{10}$ . Druhá koule prakticky nezměnila svoji rychlost (je mnohem větší než koule první), ale koule č.1 odskočí zpátky vyšší rychlostí, než jakou narazila na druhou kouli. Něco podobného se stává i na silnici, když se jedoucímu automobilu uvolní kolo, pokračuje ve svém směru a narazí do protijedoucího automobilu, který je mnohem těžší. Je odmrštěno velikou rychlostí zpátky a může i narazit do jiného vozidla a poškodit je.

Ve všech případech byl rozdíl rychlostí obou bodů po rázu roven záporně vzatému rozdílu jejich rychlostí před rázem. To platí pro pružný ráz zcela obecně. Také lze říci, že absolutní hodnota rozdílu rychlostí obou pružných těles po rázu je stejná jako před rázem.

I přes silné zjednodušení nám uvedené příklady ukazují názorně, že při čelní srážce dvou automobilů bude lehčí vozidlo v nevýhodě, zejména pokud je druhé vozidlo mnohem těžší. Lehké vozidlo může být zdemolováno a odmrštěno a pro osádku může být střet fatální, zatímco řidič velmi těžkého vozidla ucítí pouze slabší náraz a jeho rychlost se změní jen málo.

Ideálně pružný ráz je extrémní případ. Nyní si všimneme druhého extrému.

## 2.4 Ráz nepružný

Pokud by ráz byl zcela nepružný, kdyby například obě tělesa byla z plasteliny a při srážce se pevně spojila tak, že by vytvořila jeden celek, pohybovala by se obě nakonec rychlostí  $v_c$ , danou vztahem (2.2). Kinetická energie této soustavy bude

$$E_{\text{kin},f} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_c^2 . \quad (2.7)$$

Je menší než počáteční energie  $E_{\text{kin},0}$  ve vztahu (2.3), neboť došlo k její částečné ztrátě přeměnou v deformační práci, obecně k její disipaci. Úbytek energie je

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_c^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{10} - v_{20})^2 . \quad (2.8)$$

Ve skutečnosti není žádný ráz ani zcela pružný ani nepružný, a můžeme jej označit jako polopružný.

## 2.5 Ráz polopružný

V první etapě rázu se část kinetické energie akumuluje v tělesech jako potenciální energie pružných napětí ( $E_{\text{el}}$ ) a část energie ( $W$ ) se spotřebovala na plastické deformování jednoho nebo obou těles, na vytvoření lomových ploch při porušení těles, a popřípadě na tření a další procesy, kromě jiného na zvuk vzniklý při rázu.  $W$  označuje práci vykonanou při rázu, resp. obecně disipovanou energii. Při odpružení se uvolní pouze elastická energie. Zákon zachování hybnosti (2.4) platí stejně jako u pružného rázu, ale zákon zachování energie (2.3) se změní na

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + W . \quad (2.9)$$

Rychlosti po rázu dostaneme řešením rovnic (2.4) a (2.9). Rovnici (2.4) umocníme na druhou, u rovnice (2.9) převedeme členy ( $\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$ ) na levou stranu, pak ji vynásobíme činitelem  $[-2(m_1 + m_2)]$  a oba výrazy sečteme. Dostaneme tak

$$(v_{1f} - v_{2f})^2 = (v_{10} - v_{20})^2 - 2 \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} W . \quad (2.10)$$

Po vyjádření  $v_{2f}$  z rovnice (2.4) a úpravě získáme konečnou rychlost tělesa 1:

$$v_{1f} = v_c - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{(v_{10} - v_{20})^2 - 2 \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} W} , \quad (2.11)$$

kde  $v_c$  je společná rychlost obou těles na konci fáze stlačení, definovaná vztahem (2.2). Podobným způsobem obdržíme konečnou rychlost druhého tělesa:

$$v_{2f} = v_c + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{(v_{10} - v_{20})^2 - 2 \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} W} . \quad (2.12)$$

Tyto vztahy platí i pro rychlosti během rázu. V takovém případě  $W$  vyjadřuje práci spotřebovanou až do vyšetřovaného okamžiku. Pro  $W = 0$ , což znamená žádná spotřebovaná energie během rázu, přejdou výrazy (2.11) a (2.12) ve vztahy (2.5) a (2.6) pro pružný ráz.

Pro jednodušší posuzování rázů různých těles zavedl Newton tzv. **součinitel restituce**  $\varepsilon$ , a to jako poměr rozdílů rychlostí obou těles po rázu k rozdílu jejich rychlostí před rázem,

$$\varepsilon = \left| \frac{v_{1f} - v_{2f}}{v_{10} - v_{20}} \right|. \quad (2.13)$$

Pružnému rázu odpovídá součinitel restituce  $\varepsilon = 1$ , nepružnému odpovídá  $\varepsilon = 0$ . U rázu částečně pružného se  $\varepsilon$  pohybuje mezi 0 a 1; je tím blíže k 1, čím větší je odpružení.

Součinitel restituce lze zjišťovat pokusně, například z výšky  $h_f$  odskoku koule ze zkoumaného materiálu, která dopadla na masivní podložku z výšky  $h_0$ . V tomto případě známe  $h_0$  a  $h_f$ , a tedy i rychlost dopadu  $v_{10} = \sqrt{2gh_0}$  a rychlost odrazu  $v_{1f} = \sqrt{2gh_f}$ , a pro masivní podložku platí  $v_{20} = v_{2f} = 0$ . Po dosazení těchto hodnot do rovnice (2.13) dostaneme

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{h_f}{h_0}}. \quad (2.14)$$

Potenciální polohová energie v gravitačním poli je dána vztahem

$$U_{\text{pot}} = m g h, \quad (2.15)$$

kde  $g$  je tíhové zrychlení,  $m$  je hmotnost tělesa a  $h$  je výška pádu. Vztah (2.14) tedy také říká, že koeficient restituce je roven odmocnině z poměru potenciálních energií tělesa po rázu a před ním.

**POZNÁMKA.** Dříve se předpokládalo, že koeficient restituce je materiálová konstanta. V Tabulce 1 je několik hodnot pro různé materiálové dvojice. Situace je ale složitější, protože chování při rázu je ovlivněno také stavem povrchu těles (např. drsností), ale i rychlostí nárazu a dalšími činiteli. Uvedená tabulka proto může sloužit jen pro orientační představu.

**Tabulka 1. Součinitele restituce různých látek [5, 7]**

látka (dvojice látek)	druh tělesa	$\varepsilon$
<i>kalená ocel – kalená ocel</i>	<i>ložiskové kuličky</i>	<i>0,98</i>
<i>sklo – sklo</i>	<i>koule a masivní deska</i>	<i>0,94</i>
<i>konstrukční ocel</i>	<i>koule a masivní deska</i>	<i>0,93</i>
<i>slonovina</i>	<i>kulečnickové koule</i>	<i>0,82</i>
<i>pryž – mramor</i>	<i>pryžová koule, masivní deska</i>	<i>0,82</i>
<i>litina</i>	<i>koule</i>	<i>0,68</i>
<i>dřevo (jilm)</i>	<i>koule</i>	<i>0,60</i>
<i>zvonovina</i>	<i>koule</i>	<i>0,59</i>
<i>olovo</i>	<i>koule</i>	<i>0,20</i>
<i>jíl</i>	<i>koule</i>	<i>0,17</i>

Nyní si ukážeme, jak souvisí součinitel restituce s energií spotřebovanou v průběhu rázu. Ze vztahu (2.9) plyne, že spotřebovaná energie je rovna rozdílu energií obou těles před rázem a po rázu,

$$W = \frac{1}{2} m_{10}^2 + \frac{1}{2} m_{20}^2 - \frac{1}{2} m_{1f}^2 - \frac{1}{2} m_{2f}^2, \quad (2.16)$$

Vyjádříme-li v rovnici (2.13) rychlosti po rázu prostřednictvím výrazů (2.11) a (2.12), dostaneme po úpravě

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(v_{10} - v_{20})^2 - 2 \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} W}}{v_{10} - v_{20}}, \quad (2.17)$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{10} - v_{20})^2 (1 - \varepsilon^2). \quad (2.18)$$

Pro  $v_{20} = 0$  a  $m_2 \gg m_1$  (tj. náraz tělesa 1 na masivní těleso 2 v klidu) získáme následující jednoduchý vztah mezi součinitelem restituce a poměrem práce zmařené při rázu a počáteční kinetické energie:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - (W / E_{1,kin,0})}, \text{ resp. } W / E_{1,kin,0} = 1 - \varepsilon^2. \quad (2.19)$$

Při znalosti koeficientu restituce  $\varepsilon$  a rychlosti  $v_c$  na konci fáze stlačování, dané vztahem (2.2), můžeme vztahy pro konečné rychlosti zapsat takto:

$$v_{1f} = v_c - \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_{10} - v_{20}) \varepsilon, \quad (2.20)$$

$$v_{2f} = v_c + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_{10} - v_{20}) \varepsilon; \quad (2.21)$$

od výrazů (2.5) a (2.6) se liší pouze koeficientem restituce  $\varepsilon$ .

## 2.6 Šikmý ráz

Situace při reálných rázech se obvykle liší od ideálního případu rázu dvou koulí pohybujících se po stejné přímce. Například takzvaný *šikmý ráz* nastává, jestliže vektory rychlostí obou těles neleží na stejné přímce, ale protínají se. V takovém případě mají rychlosti a síly při kontaktu obecný směr, který má složku ve směru normály ke styčné ploše a složku ve směru tečny k této ploše. Pro složky rychlosti ve směru normály platí vše, co bylo řečeno výše. Tečné složky rychlostí zůstávají při rázu beze změny. Podobná situace je i v případě, kdy vektory rychlostí obou těles sice leží na stejné přímce, ale tečná rovina k povrchům těles v místě jejich kontaktu není k této přímce kolmá. Účinků kontaktních sil v normálovém směru si všimneme v následující kapitole. Tečná složka síly působí v určité vzdálenosti od těžiště a snaží se jedno i druhé těleso pootočit, takže výsledný pohyb může být mnohem složitější. Více k tomuto tématu lze najít například v [1].

Nyní ukážeme použití odvozených vztahů na třech praktických úlohách podle [1].

### Úloha 1. Účinnost kování

Kladivo o hmotnosti  $m_1$  dopadne rychlostí  $v_{10}$  na kovaný předmět na kovadině, jejichž společná hmotnost je  $m_2$  a rychlost  $v_{20} = 0$  (obr. 2.2a). Pro jednoduchost budeme předpokládat, že náraz je zcela nepružný, takže kladivo neodskočí zpět.

Má-li být kování co neúčinnější, mělo by se při nárazu předat do kovaného předmětu co nejvíce energie; to znamená, že ztráta energie kladiva při rázu by měla být co největší. Vztah (2.8) přejde pro  $v_{20} = 0$  na

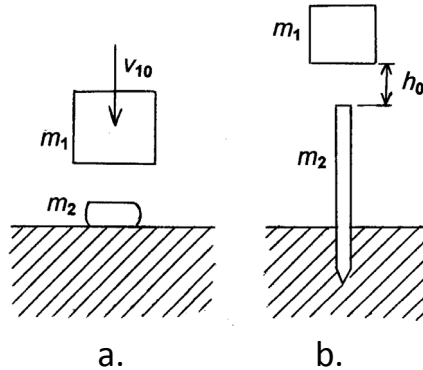
$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} = E_{kin,1,0} \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.22)$$

Má-li být tato ztráta největší, musí být co největší zlomek  $m_2/(m_1 + m_2)$ . To bude při  $m_2 \gg m_1$ . Aby kování bylo co neúčinnější, musí být hmotnost kovaného dílu a



kovadliny co největší ve srovnání s hmotností kladiva.

Velmi podobný případ je úder kladivem na balvan ležící na hrudi cirkusového artisty. Velká hmotnost kamene účinek nárazu prakticky utlumí.



**Obr. 2.2.** Kování (a) a zarážení piloty (b)

### Úloha 2. Účinnost zarážení pilot

Některé stavby na málo únosné půdě spočívají na sloupech zaražených do země, tzv. pilotách. Při zarážení dopadá na pilotu beran o hmotnosti  $m_1$  a předá jí část své pohybové energie (obr. 2.2b). Tento náraz je polopružný a díky předané energii vniká pilota do půdy hlouběji. Aby pilota dostala co největší část energie beranu, musí být ztráta pohybové energie beranu při rázu co nejmenší. Opačně než při kování musí být tedy vztah (2.22) co nejmenší. Toho se dosáhne, je-li hmotnost beranu co největší v porovnání s hmotností piloty,  $m_1 \gg m_2$ .

POZNÁMKA. Rychlost dopadu beranu se obvykle počítá ze vztahu

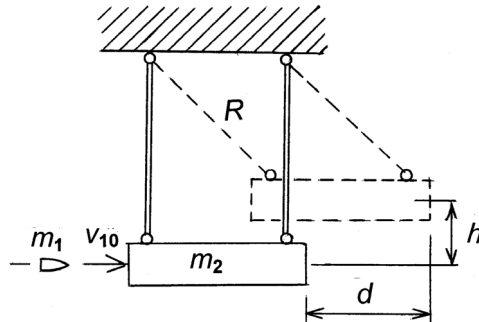
$$v_{10} = \sqrt{2gh_0} \quad , \quad (2.23)$$

kde  $h_0$  je výška pádu beranu, uvažovaná obvykle jako vzdálenost beranu a piloty před rázem. Ve skutečnosti se v průběhu rázu uvolní také polohová energie beranu jeho pohybem při vnikání piloty do země. Tato složka je ve srovnání s výškou pádu  $h_0$  zpravidla malá.

### Úloha 3. Určení rychlosti střely pomocí balistického kyvadla

Schéma experimentu je na obr. 2.3. Střela vnikne do tělesa kyvadla (např. bedny s pískem), a způsobí jeho vykývnutí. Rychlost střely se pak určí z výšky tohoto

vykývnutí. Úlohu budeme řešit pro následující hodnoty: hmotnost střely  $m_1 = 0,01$  kg, hmotnost kyvadla  $m_2 = 10$  kg, rameno kyvadla  $R = 3$  m, výška vykývnutí těžiště kyvadla je  $h = 5$  mm.



**Obr. 2.3.** Balistické kyvadlo.

**Řešení.** Střela vnikne do kyvadla a předá mu svoji energii. Jedná se o ráz, který můžeme považovat za nepružný. Část kinetické energie střely se zmaří její plastickou deformací a vzájemným třením a drcením zrn písku, a část se změní na kinetickou energii balistického kyvadla a postupně v jeho polohovou energii. Množství zmařené energie zatím neznáme. Zákon zachování energie ve tvaru „kinetická energie střely se změní na potenciální energii kyvadla“ tedy nelze použít. Při řešení proto vyjdeme ze zákona zachování hybnosti: „hybnost střely se rovná hybnosti soustavy střela + kyvadlo v okamžiku vniknutí střely“,

$$m_1 v_{10} = (m_1 + m_2) v_c, \quad (2.24)$$

kde  $v_c$  je rychlost kyvadla těsně po vniknutí střely. V tomto okamžiku má soustava „kyvadlo plus střela“ kinetickou energii  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_c^2$ , která se změní v potenciální energii soustavy  $E_{\text{pot}} = (m_1 + m_2)gh$ , kde  $g$  je tíhové zrychlení ( $9,81 \text{ m/s}^2$ ) a  $h$  je vzdálenost mezi výškou těžiště soustavy při vykývnutí a počáteční výškou. Z rovnosti obou energií dostaneme po úpravě

$$v_{1,0} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh} \quad (2.25)$$

Po dosazení hodnot ze zadání vyjde počáteční rychlost střely  $v_{10} = 313,5 \text{ m/s}$ .

**Poznámka 1.** Předpokládali jsme, že střela vnikla do tělesa kyvadla v jeho těžišti, a dále, že se kyvadlo při vykývnutí nemohlo pootáčet, takže nebylo nutno uvažovat

jeho moment setrvačnosti. Protože velmi malé výšky vykývnutí se měří obtížně, zjišťuje se někdy posunutí kyvadla ve vodorovném směru  $d = \sqrt{R^2 - (R - h)^2}$ , takže v našem případě je  $d = 173$  mm. Ještě je nutno ověřit, jestli vypočtená doba zabrzdění střely  $t_b$  byla značně kratší než doba kmitu kyvadla  $T = 2\pi\sqrt{R/g}$ . Pohyb střely v kyvadle lze přibližně považovat za rovnoměrně zpožděný, takže doba zabrzdění na dráze  $d$  je  $t_b = 2d/v_{10} = 2 \times 0,173/300 = 0,001153$  s. To je mnohem méně než  $T = 2\pi\sqrt{3,0/9,81} = 3,475$  s, takže další korekce není nutná.

**Poznámka 2.** Kinetická energie střely před vniknutím do balistického kyvadla byla  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 = 450,0$  J. Potenciální energie kyvadla se střelou po vykývnutí je  $E_{\text{pot}} = (m_1 + m_2)gh = (0,01 + 10) \times 9,81 \times 0,005 = 0,491$  J. To je jen o málo více než jedna tisícina původní energie (449,509 J). To znamená, že téměř 99,9 % bylo pohlceno nevratnými procesy. Kdyby se tato energie nepohltila, kyvadlo by vykývlo až do výšky 4,58 m (kdyby to konstrukce dovolila), anebo by střela napáchala odpovídající škodu. To ukazuje na veliký význam disipace energie pro zmírňování účinků rázu.

## 2.7 Síly při rázech – zjednodušené řešení

Pro určování sil potřebujeme znát vztah mezi deformací a silou. Detailům kontaktu se budeme věnovat později. Zde se omezíme na případ, kdy tuhé těleso o hmotnosti  $m$  a rychlosti  $v_0$  narazí na pružinu (o zanedbatelné hmotnosti), upevněnou k tuhému základu. (Výraz „pružina“ zde může označovat jakékoliv pružné těleso.)

Jakmile se těleso dotkne pružiny, stlačuje ji silou

$$F = kx, \quad (2.26)$$

kde  $k$  je tuhost pružiny a  $x$  její stlačení, totožné s dráhou tělesa od počátku kontaktu.

Úlohu bychom mohli řešit podrobně metodami dynamiky pomocí základní pohybové rovnice  $F = ma$ , a získat tak časový průběh dráhy tělesa a síly. To bude ukázáno v kapitole 5. Jestliže nás zajímá pouze maximální síla, můžeme ji dostat okamžitě ze zákona zachování energie. Pohybující se těleso má kinetickou energii

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} mv^2. \quad (2.27)$$

Jak postupně stlačuje pružinu, jeho kinetická energie se mění v deformační energii stlačené pružiny. S ohledem na vztah (2.26) lze tuto energii vyjádřit jako

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} Fx = \frac{1}{2} F^2/k = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2.28)$$

V okamžiku dosažení maximálního stlačení je těleso v klidu a jeho kinetická energie se zcela změnila v potenciální energii pružiny,

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} F^2/k, \quad (2.29)$$

Z tohoto vztahu dostaneme ihned maximální sílu

$$F_{\text{max}} = \sqrt{2W_{\text{kin}}k} = v\sqrt{mk}. \quad (2.30)$$

Vidíme, že maximální síla při nárazu bude přímo úměrná rychlosti nárazu  $v_0$  a také tím větší, čím větší je tuhost pružiny nebo nárazníku, a čím větší bude hmotnost pohybujícího se tělesa; v obou případech roste s jejich odmocninou.

Někdy je důležitá i znalost maximálního zpomalení. (Řešená úloha je totiž vzdáleně podobná nárazu dopravního prostředku (automobilu nebo železničního vozu) na překážku, a otázkou je, co to udělá s osádkou nebo nákladem a jakou pevnost musí mít jejich upevnění. Ze základní dynamické rovnice

$$F = m a \quad (2.31)$$

dostaneme, že maximální zpomalení bude

$$a_{\text{max}} = F_{\text{max}} / m = v_0 \sqrt{k/m} \quad (2.32)$$

**POZNÁMKA.** Ve všech případech jsme uvažovali pohyb těles ve vodorovném směru. Pohybují-li se ve směru svislém, musíme při pohybu v gravitačním poli přihlídnout i ke změnám jejich polohové energie. Při pádu z výšky  $h$  se uvolní energie  $E_{\text{pot}} = mgh$ . Ta se musí přičíst ke kinetické energii pohybujícího se tělesa. Pozor – ke dráze  $h$  je obecně nutno připočítat i dráhu těžiště tělesa 1 při stlačování těles 1 i 2. U poddajných těles někdy nejsou tyto hodnoty zanedbatelné.

Význam poddajnosti pružiny budeme ilustrovat na následující úloze.

### **Příklad.**

Vozidlo s elastickým nárazníkem narazí rychlostí  $v = 10$  km/h na masivní zeď. Jaká bude maximální síla při nárazu, a jaké bude trvání doby do zastavení a maximální zpomalení? Předpokládáme hmotnost vozidla  $m = 1000$  kg a tuhost nárazníku  $k = 500$  N/mm = 500000 N/m.

Řešení. Maximální sílu při nárazu dostaneme snadno ze zákona zachování energie.

Vozidlo má na počátku kinetickou energii, která se změní na potenciální energii pružiny nárazníku,  $E_{\text{kin}} = U_{\text{pot}}$ . Rychlost je  $v = 10000/3600 = 2,78$  m/s a kinetická energie je  $E_{\text{kin}} = 3865$  J. Ze vztahu (2.30) pak dostaneme

$$F_{\text{max}} = v\sqrt{mk} = 2,78\sqrt{1000 \times 500000} = 62163 \text{ N}.$$

Této síle odpovídá dráha do zastavení  $x_b = F_{\text{max}}/k = 62163/500000 = 0,1243$  m. Maximální zpomalení dostaneme ze základní pohybové rovnice  $F = ma$ . Bude tedy  $a_{\text{max}} = F_{\text{max}}/m = 62163/1000 = 62,16$  m/s<sup>2</sup>. To je více než šestinásobek tíhového zrychlení  $g$  ! Doba do zastavení bude  $t_b = 0,070$  s; příslušný vzorec (4.18) je uveden v kapitole 4.

Jednalo se o náraz poměrně nízkou rychlostí, 10 km/h. Při rychlosti 50 km/h by byla síla i zpomalení 5-krát vyšší (tzn. 30g !); viz vztahy (2.30) a (2.32). Energie nárazu je úměrná čtverci rychlosti; bude tedy 25-krát vyšší. K tomu by bylo nutno přihlížet i při konstrukci tlumiče nebo absorberu energie.

Podívejme se nyní, jak se situace změní, jestliže pružina nárazníku bude mít desetkrát větší poddajnost, takže tuhost bude  $k' = k/10 = 50000$  N/m. Rychlost nárazu je opět 10 km/h. Odpovídající maximální síla bude  $F_{\text{max}} = 2,78\sqrt{(1000 \times 50000)} = 19657,6$  N, tj. 3,16-krát nižší. Maximální zpomalení, které při použití pružného dorazu je vždy na konci zastavení, bude  $a_{\text{max}} = 19657,6/1000 = 19,66$  m/s<sup>2</sup>, tj. zhruba 2g. Brzdná dráha bude  $x_b = 19657,6/50000 = 0,3932$  m = 39,3 cm. Doba do zastavení bude 0,222 s. Velice zhruba lze říci, že desetnásobné zvýšení poddajnosti pružiny vedlo k trojnásobnému snížení maximální síly i zpomalení, a k trojnásobnému prodloužení doby do zastavení a brzdné dráhy (tj. k trojnásobnému zvětšení deformace brzdícího elementu.)

**POZNÁMKA.** V příkladu jsme uvažovali náraz tuhého tělesa na pružinu. Často se při nárazu deformuje i zastavované těleso, například automobil. Tím se účinky rázu zmírňují, neboť obě tělesa jsou z hlediska mechaniky zařazena v sérii (viz kapitolu 4.2, podkapitolu Několik pružin v sérii). Avšak použití čistě elastických prvků pro zastavení pohybujícího se tělesa by mělo dva nedostatky. Ve srovnání s brzdícím elementem pracujícím s konstantním zpomalením je maximální síla při použití pouhé pružiny vždycky nejméně dvakrát vyšší (viz kapitolu 4). Navíc, díky pouhé akumulaci energie bude mít zastavené těleso tendenci odpružit zpátky. Vhodnější jsou proto prvky, které energii absorbují, resp. rozptýlí, například plastickým deformováním. O některých možnostech pojednáme v kapitole 6.

## Literatura ke kapitole 2.

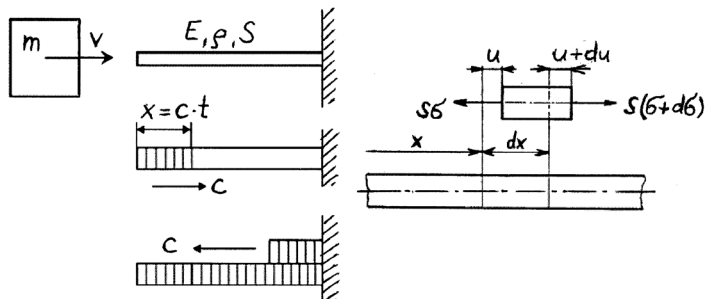
1. Brát, V., Brousil, J.: Dynamika. (Učební text ČVUT) SNTL, Praha, 1967. 306 s.
2. Hořejší, J.: Dynamika. Alfa, Bratislava + SNTL, Praha, 1980. 299 s.
3. Gonda, J.: Dynamika pre inžinierov. SAV, Bratislava, 1966. 453 s.
4. Juliš, K., Brepta, R. a kol. Mechanika II. díl Dynamika, Technický průvodce 66. SNTL, Praha, 1987. 688 s.
5. Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: Technická fyzika. SNTL, Praha, 1961. 1436 s.
6. Brepta, R., Prokopec, M.: Šíření napět'ových vln a rázy v tělesech. Academia, Praha, 1972. 524 s.
7. [https://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient\\_of\\_restitution](https://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient_of_restitution) (květen 2018).

### 3. Vlnový charakter nárůstu napětí

Při vyšetřování účinků zatížení zpravidla zanedbáváme skutečnost, že jakýkoliv silový impuls se může šířit tělesem jenom určitou rychlostí, a síly a deformace počítáme podle teorie, která vychází ze závislosti mezi napětím a přetvořením při statickém zatížení. Při srážkách těles i v dalších případech rázového zatížení je ale někdy nutno přihlídnout ke konečné rychlosti šíření silových impulsů v pružných látkách. Na počátku jsou totiž všechny částice tělesa v klidu a deformace, vyvolané silou, se šíří od místa rozruchu v podobě elastických vln. Rychlost jejich šíření je velmi vysoká, ale jsou-li rozměry tělesa velké, roste i doba průchodu vln tělesem a je nutno k tomuto jevu přihlížet [1 – 3]. Situaci budeme ilustrovat na jednoduché úloze, kdy na dlouhou tyč z elastického materiálu narazí masivní tuhé těleso pohybující se ve směru její osy (obr. 3.1). Na konci kapitoly si všimneme i hydraulického rázu v kapalinách.

#### 3.1 Podélné vlny v prizmatické tyči

Předpokládáme, že tyč je z izotropního materiálu o hustotě  $\rho$  a modulu pružnosti  $E$  (nezaměňovat s energií) a má délku  $L$  a průřez  $S$ . Levý konec tyče je volný a pravý se opírá o tuhou stěnu. Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze pohyb a deformace materiálu v osovém, tj. podélném směru, avšak nepředpokládáme, že by tlakové zatížení mohlo způsobit vybočení, resp. prohnutí tyče. Pohybující se těleso má rychlost  $v$  a značně velkou hmotnost  $m$  proti hmotnosti tyče.



**Obr. 3.1** Náraz masivního tělesa na tyč a šíření napětíových vln.  
Pravá část obrázku: síly působící na element tyče.

Situace je znázorněna v pravé části obr. 3.1. Dvěma myšlenými řezy vyjmeme z tyče ve vzdálenosti  $x$  od udeřeného konce element o nekonečně malé tloušťce  $dx$  a sestavíme rovnici rovnováhy sil, které na něj působí. Jejich účinkem se levý průřez posune o  $u$  a pravý se posune o  $u + du$ , resp. o  $u + (\partial u / \partial x) dx$ . Vyšetřovaný element se tedy zkrátí o  $(\partial u / \partial x) dx$ . [POZNÁMKA. Protože posunutí  $u$  závisí současně na poloze  $x$  i na čase  $t$ , jsou zde na příslušných místech používány parciální derivace (symbol  $\partial$ ) místo obyčejných derivací (symbol  $d$ ), obvyklých u funkcí jedné proměnné.] Relativní prodloužení je  $\varepsilon = -\partial u / \partial x$  a odpovídá mu napětí  $\sigma = E\varepsilon$ , kde  $E$  je modul pružnosti materiálu tyče. Obecně se toto napětí i deformace podél tyče plynule mění. V levém průřezu elementu působí napětí  $\sigma(x)$ , v pravém řezu působí napětí  $\sigma(x+dx) = \sigma(x) + d\sigma$ . Odpovídající síly, rovné součinu napětí a plochy průřezu, jsou  $F(x)$  a  $F(x) + dF$ . Rozdíl obou sil je  $dF = S d\sigma$  [ $=SEd\varepsilon = SE(\partial u / \partial x) dx$ ] a uděluje tomuto elementu zrychlení  $\ddot{u} = \partial^2 u / \partial t^2 = dF / dm$ , kde  $dm$  je jeho hmotnost, pro kterou platí  $dm = \rho S dx$ ;  $\rho$  je hustota materiálu tyče. S těmito veličinami můžeme napsat rovnici rovnováhy sil, působících na nekonečně malý element, jako

$$S d\sigma = dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = SE \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx. \quad (3.1)$$

Po úpravě dostaneme základní rovnici pro šíření vln tyčí ve směru její osy:

$$\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 (\partial^2 u / \partial x^2), \quad (3.2)$$

kde

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.3)$$

je rychlost šíření podélných (longitudinálních) elastických vln v jednorozměrném prostředí, tzv. fázová rychlost. Například pro ocel ( $E = 210$  GPa,  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>) je  $c = 5172$  m/s, pro beton ( $E = 44,0$  GPa,  $\rho = 1950$  kg/m<sup>3</sup>) je  $c = 4750$  m/s. Rychlost  $v = \partial u / \partial t$  pohybu částic, daná řešením rovnice (3.2), je  $v = -c(\partial u / \partial x)$ .

Jakmile na levý konec tyče udeří masivní tuhé těleso rychlostí  $v_0$ , začne se odsud šířit rychlostí  $c$  tlakové napětí o velikosti

$$\sigma_0 = E \frac{v_0}{c} = v_0 \sqrt{E\rho}. \quad (3.4)$$

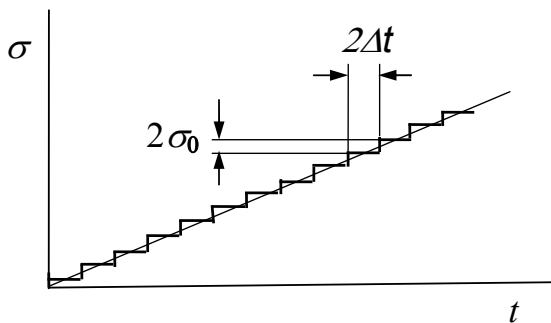


Za dobu  $t$  dorazí elastická vlna do vzdálenosti  $x = ct$ . V celé zasažené oblasti působí tlakové napětí o velikosti dané vztahem (3.4); vpravo od ní zatím žádné napětí nepůsobí (obr. 3.1 vlevo). Účinkem tlakového napětí se zatížená část tyče zkrátí o  $\Delta x = x \sigma_0/E = v_0 x/c$ . Toto zkrácení je shodné s posunutím pohybujícího se tělesa za dobu  $t$ , které činí  $u = v_0 t = v_0 x/c$ .

Dále budeme předpokládat, že napětí je v průřezu rozděleno rovnoměrně a je nižší než mez kluzu materiálu tyče. (Případu, kdy je vyšší, si všimneme později.) Oblast, ve které  $\sigma_0$  působí, se stále rozšiřuje rychlostí  $c$  až do okamžiku, kdy čelo vlny narazí na tuhou stěnu. To je za čas

$$\Delta t = L/c . \quad (3.5)$$

Od tuhé stěny se tlaková napěťová vlna odrazí opět jako tlaková (o stejné velikosti) a pohybuje se zpět (obr. 3.1 vlevo dole). Výsledné napětí v ovlivněné oblasti je rovno součtu původní a odražené vlny, tzn.  $\sigma_2 = 2\sigma_0$ . Těleso, jehož hmotnost  $m$  je značně veliká, se pohybuje dále nezmenšenou rychlostí. Když odražená vlna dorazí za čas  $2\Delta t$  na levý konec tyče, odrazí se opět od masivního tělesa zde a pohybuje se zase jako tlaková vlna vpravo. Výsledné napětí v zasažené oblasti je  $\sigma_3 = 3\sigma_0$ . Takto celý proces pokračuje dále, s napětím narůstajícím v časových intervalech  $2\Delta t$  po skocích  $2\sigma_0$  (obr. 3.2).

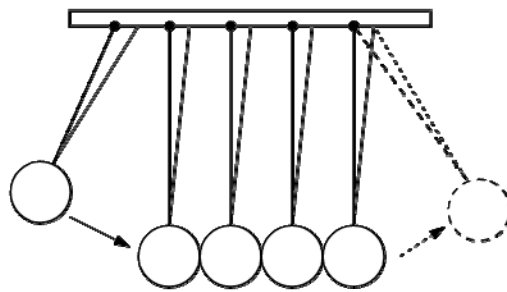


**Obr. 3.2.** Postupný nárůst napětí na konci tyče.

Pro představu uvedme, že doba potřebná, aby impuls proběhl ocelovou tyčí délky jeden metr, činí  $\Delta t = 0,000193$  s. Zpátky na levý konec dorazí v čase  $2\Delta t = 0,000387$  s. To jsou velice krátké časy, a u menších těles o charakteristických rozměrech řádově centimetry jsou ještě mnohem kratší.

Je-li konec tyče volný, napěťová vlna se od něj také odrazí, ale šíří se zpátky jako

tahová. To má zajímavý důsledek. U tyče z křehkého materiálu může toto napětí překonat mez pevnosti v tahu a kousek tyče u volného konce se odtrhne a odletí. Podobný jev můžeme pozorovat názorně na tzv. Newtonově houpačce [4, 5], znázorněné na obr. 3.3. Jestliže u řady ocelových kuliček, zavěšených za sebou na tenkých vlákních vychýlíme levou krajní kuličku a pustíme ji, narazí na sousední kuličku a předá jí svůj impuls. Ten se dále šíří nepozorovaně celou řadou. Když dorazí k poslední kuličce vpravo, ta viditelně odskočí a po chvílce dopadne zpět. Tento nový impuls se pak šíří zpátky k první kuličce, která také odskočí (o trochu méně), atd. Po chvíli celý proces ustane v důsledku ztrát energie.



**Obr. 3.3.** Newtonova houpačka

Vraťme se nyní k naší dlouhé tyči, na kterou udeřilo masivní těleso rychlostí  $v$ . V čase  $t_1$  působí v celé tyči tlakové napětí  $\sigma_1 = E v/c$ . Jeho účinkem se tyč zkrátí o  $\Delta L = L \sigma_1/E = Lv_0/c$ . Toto zkrácení je shodné s posunutím masivního tělesa za dobu  $t_1$ , které činí  $u_1 = v t_1 = v_0 L/c$ . Podobné relace platí i v dalším průběhu stlačování tyče. Masivní těleso na levém konci tyče se pohybuje stále konstantní rychlostí, ale napětí zde narůstá po malých skocích o velikosti  $2\sigma_0$  v intervalech  $2\Delta t$ , jak je znázorněno na obr. 3.2. Na tomto obrázku je kromě schodovité čáry odpovídající vlnové teorii také naznačen průběh nárůstu napětí přímo úměrně s časem, jak odpovídá kvazistatické teorii. Je vidět, že při dobách rázu, delších zhruba než pětinašobek doby na proběhnutí napěťové vlny tělesem a zpět, je rozdíl mezi přibližným a přesným řešením již zanedbatelný.

### 3.2 Elastické vlny v tyči při úderu tělesem konečné velikosti

Skutečnost je složitější. Těleso, které narazilo na čelo tyče, má konečnou hmotnost  $M$ . Působením reakční síly se proto začne zpomalovat. Zde ukážeme řešení podle

Timošenka [3]. Označíme-li hmotnost tělesa připadající na jednotku průřezu tyče ( $=M/S$ ) jako  $m_1$ , proměnné tlakové napětí na konci tyče  $\sigma$ , a okamžitou rychlost tělesa  $v$ , dostaneme pro toto těleso pohybovou rovnici

$$m_1 \frac{dv}{dt} + \sigma = 0, \quad (3.6)$$

S použitím vztahu mezi rychlostí a napětím,

$$\sigma_0 = v_0 \sqrt{E\rho} \quad (3.7)$$

můžeme výraz (3.6) zapsat jako

$$\frac{m_1}{\sqrt{E\rho}} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = 0. \quad (3.8)$$

To je diferenciální rovnice prvního řádu. Provedeme-li separaci proměnných  $\sigma$  a  $t$ , dostaneme po integrování a úpravě

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{E\rho}{m_1}} t\right), \quad (3.9)$$

kde  $\sigma_0$  je velikost napětí v prvním okamžiku kontaktu, daná vzorcem (3.4) pro  $v = v_0$ . Napětí podél napěťové vlny tedy není konstantní, ale klesá exponenciálním způsobem. Podobně jako v předchozím případě se tato vlna odrazí od tuhé stěny jako tlaková a vrátí se zpět k levému konci, zde se opět odrazí, atd. Po určité době se těleso zastaví a popřípadě odpruží zpět. Podrobnější řešení je např. v knize [3].

### 3.3 Elastické vlny v trojrozměrném tělese

Existují i další vlivy. Jestliže lokální silový impuls zapůsobí v určitém místě masivního trojrozměrného elastického tělesa, začnou se od tohoto místa šířit napěťové vlny všemi směry. Pokud impuls vyšel z vnitřku tělesa, z míst vzdálených od povrchů, má čelo vlny zpočátku kulový tvar; ve velké vzdálenosti od centra vzruchu již ale bude možno pohlížet na vlnu jako na rovinou. Napjatost je však nyní složitější, protože je trojosá. Ve směru šíření platí pro rychlost podélné vlny podobný vztah jako (3.3), ale uplatňuje se v něm i Poissonovo číslo  $\mu$ :

$$c_1 = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)\rho}} \quad (3.10)$$

Rychlost  $c_1$  je vyšší než rychlost  $c$  v tenké tyči. To je proto, že v masivním trojrozměrném tělese jsou posunutí v příčném směru potlačena, zatímco u tyče se předpokládalo, že podélná deformace je doprovázena příčnou kontrakcí. Poměr  $c_1/c$  závisí na velikosti Poissonova čísla. Pro  $\mu = 0,2$  je  $c_1/c = 1,054$ , pro  $\mu = 0,3$  je  $c_1/c = 1,160$ , a pro  $\mu = 0,45$  je  $c_1/c = 1,948$ . Pro  $\mu$  blížíící se k 0,5 (nestlačitelný materiál) by se rychlost šíření vln blížila k nekonečnu.

Kromě podélných vln existují i vlny příčné (transverzální), kdy se částice tělesa pohybují kolmo ke směru šíření vln. Jejich rychlost je

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} ; \quad (3.11)$$

$G$  je modul pružnosti ve smyku. Existují i vlny povrchové (Rayleighovy) a další. Podrobněji se lze o těchto tématech dočíst například v [1 – 3, 6,7].

### 3.4 Plastické vlny

Jestliže napětí, způsobené dynamickým zatížením, dosáhne nebo překročí mez kluzu materiálu, začne se kromě elastické vlny šířit od místa zatížení také plastická vlna. Pokud materiál vykazuje lineární zpevnění, bude rychlost podélné plastické vlny

$$c_{pl} = \sqrt{\frac{E_{pl}}{\rho}} , \quad (3.12)$$

kde  $E_{pl}$  je modul zpevnění materiálu (viz obr. 5.2a a vzorec 5.2b v kapitole 5). Pro konstrukční kovové materiály je  $E_{pl}$  obvykle o dva až tři řády nižší než Youngův modul, takže rychlost šíření plastických vln je minimálně o řád nižší než rychlost vln elastických. Pro materiály s nelineárním zpevněním je nutno ve vztahu (3.12) místo  $E_{pl}$  užít tečnu  $d\sigma/d\varepsilon$  ke křivce  $\sigma - \varepsilon$  v konkrétním místě. Jestliže tečný modul  $d\sigma/d\varepsilon$  s rostoucím přetvořením klesá, bude se podélná vlna šířit nižší rychlostí. V materiálu, který se naopak s přetvořením zpevňuje, se bude plastická vlna šířit vyšší rychlostí. Více k tomuto tématu lze najít např. v [1, 6, 8].

### 3.5 Hydraulický ráz

Při náhlém zastavení proudu kapaliny v potrubí zde dochází k náhlému zvýšení tlaku, které označujeme jako hydraulický ráz. Podobná tlaková špička vzniká, jestliže je kapalina uvedena náhle do pohybu, například při nárazu tělesa na

hydraulický tlumič rázů, o kterém pojednáme blíže v kapitole 6. To je způsobeno tím, že podobně jako v pevných látkách se i v kapalinách nebo plynech může jakýkoliv tlakový vzruch šířit pouze konečnou rychlostí, rovnou rychlosti zvuku. V kapalině tato rychlost  $c_h$  závisí na její stlačitelnosti a platí [9]:

$$c_h = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad , \quad (3.13)$$

kde  $\rho$  je hustota kapaliny a  $K$  je modul její objemové pružnosti. (Číselně je roven tlaku, potřebnému ke změně objemu o 100%.) Odpovídající velikost tlakové špičky je (porovnej se vztahem 3.4)

$$p_h = v_0 \sqrt{\rho K} \quad . \quad (3.14)$$

Tento tlak působí v prvním okamžiku, a v následujících okamžicích se postupně vyvíjí k hodnotám odpovídajícím kvazistatickému řešení. Je-li pracovní tlak vyšší než  $p_h$ , tvoří stoupanutí tlaku v důsledku hydraulického rázu pouze část celkového nárůstu tlaku a příliš se neprojeví.

Úlohy o rázu lze řešit různými metodami, jednoduššími i složitějšími, přibližnými i přesnějšími. Z hlediska nutnosti přihlížet k vlnové teorii šíření napětí je vhodné nejprve určit podle kvazistatické teorie dobu trvání rázu, a porovnat ji s dobou průchodu elastické vlny tělesem. Také lze porovnat maximální napětí podle kvazistatické teorie (které stanovíme například s použitím zákona zachování energie, viz kap. 2.7) s hodnotou napětí vypočtenou pro první okamžik nárazu podle vlnové teorie, vztah (3.4). Jsou-li hodnoty podle kvazistatické teorie řádově vyšší než podle vlnové teorie, není nutno vlnové efekty uvažovat a řešení podle kvazistatické teorie bude přijatelné. V opačném případě je třeba vliv vlnového charakteru nárůstu napětí uvažovat.

### Literatura ke kapitole 3.

1. Höschl, C.: Rázová pevnost těles. DT ČSVTS, Praha, 1977. 120 s. Dostupné na [http://www.it.cas.cz/files/skripta/06\\_RAZOVA\\_PEVNOST\\_TELES-ocr.pdf](http://www.it.cas.cz/files/skripta/06_RAZOVA_PEVNOST_TELES-ocr.pdf) (12.02.2018)
2. Brepta, R., Prokopec, M.: Šíření napěťových vln a rázy v tělesech. Academia, Praha, 1972. 524 s.

3. Timošenko, S. P., Goodyear, J.: Teorija uprugosti. (Překlad z angličtiny) Nauka, Moskva, 1975. 576 s.
4. [https://en.wikipedia.org/wiki/Newton's\\_cradle](https://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_cradle) (12.02.2018)
5. <https://cs.wikipedia.org/wiki/R%C3%A1zostroj> (12.02.2018)
6. Johnson, W.: Impact strength of materials. Edward Arnold, London 1972.
7. Kolsky, H.: Stress waves in solids. Clarendon Press, Oxford, 1953.
8. Guoxing, Lu, Tongxi, Yu: Energy absorption of structures and materials. Woodhead Publishing, 2003. ISBN 978-1-85573-688-7, Electronic ISBN 978-1-85-573858-4. Též na <https://www.sciencedirect.com/science/book/9781855736887> (12.02.2018)
9. Maštovský, O.: Hydromechanika. SNTL, Praha, 1964. 320 s.

## 4. Průběhy brzdění při různých odporech

V této kapitole ukážeme vztahy mezi rychlostí, dráhou, zpomalením a silami, a zmařenou nebo akumulovanou energií při základních způsobech brzdění, jako je brzdění s konstantní odporovou silou, brzdění nárazem na pružinu s lineární charakteristikou (bez disipace energie), náraz na pružinu s lineární charakteristikou a s tlumením smykovým třením, náraz na pružinu s lineární charakteristikou a s tlumením úměrným rychlosti a s tlumením úměrným čtverci rychlosti. Více je možno najít v literatuře [1 – 6].

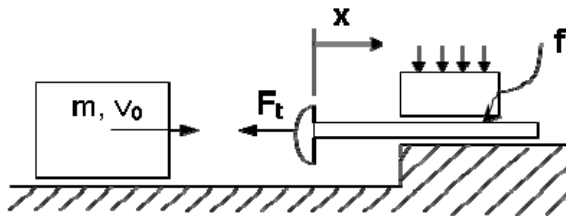
### 4.1 Brzdění s konstantní odporovou silou

Konstantní brzdou sílu lze docílit několika způsoby. Je to například tření smykové při konstantním součiniteli tření, nebo řízená deformace speciálně tvarovaného dílu například z kovu anebo postupná destrukce voštinové struktury. Stálou sílu lze také vyvodit vhodně konstruovaným hydraulickým tlumičem, který bude blíže popsán v kapitole 6.7.

Situace při nárazu je znázorněna schematicky na obr. 4.1. Těleso o hmotnosti  $m$  narazí v čase  $t = 0$  rychlostí  $v_0$  například na nárazník s třecím tlumičem. Při stlačování nárazníku vzniká reakční síla o velikosti  $F_t = \text{konst}$ , jejíž velikost lze nastavit seřízením tlumiče. Pohybová rovnice tělesa je

$$m\ddot{x} + F_t = 0, \quad (4.1)$$

kde  $\ddot{x}$  je zrychlení tělesa; dvě tečky značí druhou derivaci,  $d^2x/dt^2$ . Tuto rovnici



**Obr. 4.1.** Brzdění s konstantní odporovou silou.  $F_t$  – třecí síla,  $f$  – koeficient tření

můžeme přepsat na tvar

$$\ddot{x} = -F_t/m \quad (4.2)$$

Postupným integrováním tohoto výrazu dostaneme rychlost ( $\dot{x} = v$ ) a dráhu ( $x$ ):

$$\dot{x} = -(F_t/m)t + C_1 \quad (4.3)$$

$$x = -(F_t/2m)t^2 + C_1t + C_2 \quad (4.4)$$

$C_1$  a  $C_2$  jsou integrační konstanty, které se určí z počátečních podmínek. V našem případě jsou následující:  $x(t=0) = 0$  a  $v(t=0) = v_0$ , takže z rovnic (4.3 a 4.4) vyplyne  $C_1 = v_0$  a  $C_2 = 0$ , a můžeme napsat

$$v(t) = v_0 - (F_t/m)t \quad (4.5)$$

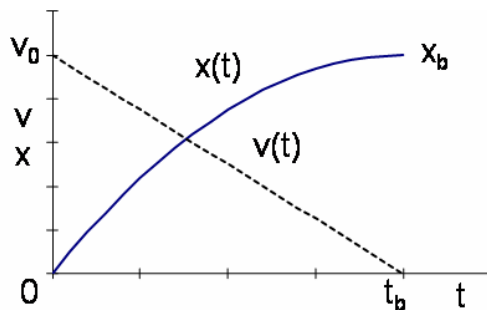
$$x(t) = v_0t - (F_t/2m)t^2 \quad (4.6)$$

Rychlost tedy v průběhu brzdění klesá s časem lineárně od  $v_0$  k nule (čárkovaně na obr. 4.2a). Odpovídající doba do zastavení je podle výrazu (4.5) pro  $v(t_b) = 0$ :

$$t_b = v_0 m/F_t \quad (4.7)$$

Dráha narůstá s časem stále pomaleji podle kvadratické paraboly (plná čára na obr. 4.2). Brzdnou dráhu dostaneme ze vztahu (4.6). Pro čas  $t = t_b$ , vyjádřený z rovnice (4.7), obdržíme:

$$x_b = \frac{1}{2} v_0^2 m/F_t \quad (4.8)$$



**Obr. 4.2.** Brzdění konstantní odporovou silou. Rychlost  $v$  a dráha  $x$  jako funkce času  $t$ .  $v_0$  – počáteční rychlost,  $x_b$  a  $t_b$  – brzdná dráha a doba.



Zpomalení je podle rovnice (4.2) v průběhu brzdění konstantní, a rovné

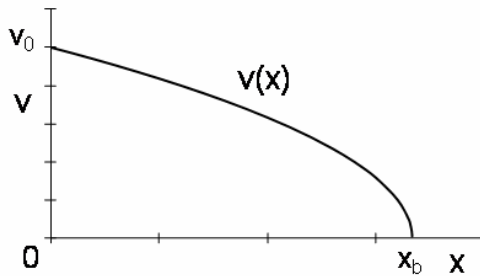
$$a = -F_t/m \quad (4.9)$$

a brzdná síla, rovněž konstantní, je rovna  $F_t$ .

Rychlost brzděného tělesa klesá s dráhou  $x$  podle vztahu

$$v = \sqrt{(v_0^2 - 2ax)} \quad (4.10)$$

který dostaneme, jestliže vyjádříme zrychlení výrazem  $\ddot{x} = d(v^2)/(2dx)$  a integrujeme je. Průběh je znázorněn na obr. 4.3.

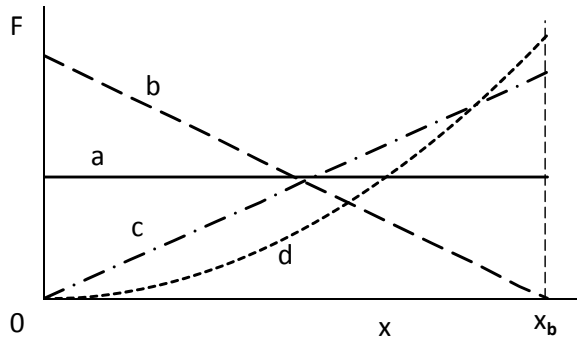


**Obr. 4.3.** Brzdění konstantní odporovou silou. Rychlost  $v$  jako funkce dráhy  $x$ .

Při návrhu zařízení pro zastavování pohybujícího se tělesa, popřípadě pro tlumení nárazu, můžeme ze vztahu (4.9) určit pro zadanou přípustnou sílu  $F_t$  zpomalení  $a$ , anebo naopak pro předepsané zpomalení určit potřebnou brzdnu sílu  $F_t$ . Ze vztahu (4.8) můžeme vypočítat brzdnu dráhu, nebo pro maximální přípustnou dráhu stanovit brzdnu sílu. **Zastavování s konstantním zpomalením je s nejnižší brzdnu silou a zpomalením, a tedy nejúčinnější!** Názorně to je vidět na obr. 4.4, kde jsou porovnány průběhy brzdě síly při různých způsobech brzdění. S výjimkou brzdění s konstantním zpomalením (čára „a“) má jakýkoliv jiný způsob brzdění vyšší hodnotu brzdě síly buď na začátku nebo na konci brzdění. Účinnost určitého zařízení pro zastavování je možno hodnotit podle poměru brzdě síly při konstantním zpomalení a maximální síly při použití konkrétního tlumiče,

$$F_{\text{střední}} / F_{\text{max}} = \eta_F \quad (4.11)$$

V konstrukci absorbérů energie nárazu se tato charakteristika ( $\eta_F$ ) označuje CFE, Crash Force Efficiency [2], což přibližně znamená účinnost nárazové síly.



**Obr. 4.4.** Průběh sil při různých způsobech brzdění.  
*a* - konstantní odporová síla, *b* – síla klesající lineárně s dráhou,  
*c* – pružina s lineární charakteristikou, *d* – síla rostoucí se čtvercem dráhy

## 4.2 Náráz na pružinu s lineární charakteristikou

Uspořádání je schematicky znázorněno na obr. 4.5. Těleso o hmotnosti  $m$  narazí v čase  $t = 0$  rychlostí  $v_0$  na pružinu o tuhosti  $k$ , kterou předpokládáme konstantní. Jejím stlačováním vzniká reakční síla o velikosti

$$F = kx, \quad (4.12)$$

kde  $x$  je dráha tělesa, totožná se stlačením pružiny (křivka „c“ na obr. 4.4).

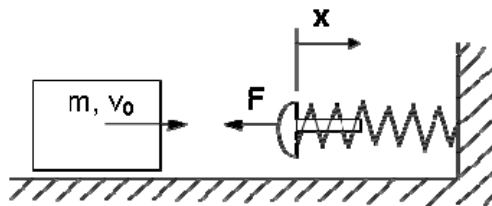
Pohybová rovnice tělesa je

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (4.13)$$

kde  $\ddot{x}$  je zrychlení tělesa. Rovnici (4.13) můžeme přepsat na tvar

$$\ddot{x} + (k/m)x = 0. \quad (4.14)$$

Tato diferenciální rovnice druhého řádu je stejná jako známá rovnice volného



**Obr. 4.5.** Brzdění pružinou s lineární charakteristikou

kmitání hmotného bodu na pružině, která se častěji zapisuje ve tvaru

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 ; \quad (4.15)$$

$\omega$  má význam kruhové frekvence, přičemž platí  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Obecné řešení rovnice (4.15) je

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = C \sin(\omega t + \varphi) . \quad (4.16)$$

$A$  a  $B$ , resp.  $C$  a  $\varphi$  jsou konstanty, které se určí z počátečních podmínek. Pro rychlost  $v(t)$  a zrychlení  $a(t)$  platí

$$v(t) = dx/dt = \omega C \cos(\omega t + \varphi) = v_0 \cos(\omega t + \varphi) , \quad (4.17)$$

$$a(t) = dv/dt = d^2x/dt^2 = -\omega^2 C \sin(\omega t + \varphi) = v_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) . \quad (4.18)$$

V našem případě je na počátku ( $t = 0$ ) dráha  $x = 0$  a rychlost  $v(0) = v_0$ . Pro tyto podmínky dostaneme  $\varphi = 0$  a  $C = v_0/\omega$ . V průběhu brzdění tedy klesá rychlost s časem podle funkce kosinus a dráha a zpomalení rostou podle funkce sinus (obr. 4.6). Protože vyšetřujeme zastavení pohybujícího se tělesa, budeme zde uvažovat pouze první čtvrtperiodu kmitavého pohybu. Rychlost klesne na nulu pro  $\omega t = \pi/2$ , tj. v čase

$$t_b = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} , \quad (4.19)$$

čemuž odpovídá dráha

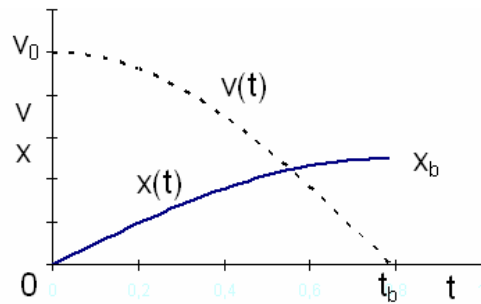
$$x_{\max}(v = 0) = x_b = v_0/\omega = v_0 \sqrt{m/k} . \quad (4.20)$$

Jak vyplývá ze vztahu (4.12), síla při brzdění roste s brzdnou dráhou lineárně (čára c na obr. 4.4).

Maximální zpomalení a maximální síla budou dosaženy právě na konci brzdění ( $t = t_b$ ,  $x = x_b$ ) a budou mít hodnoty

$$a_{\max} = v_0 \sqrt{k/m} , \quad (4.21)$$

$$F_{\max} = m a_{\max} = v_0 \sqrt{mk} \quad (4.22)$$



**Obr. 4.6.** Náraz na pružinu s lineární charakteristikou

Maximální síla i zpomalení budou tím větší, čím větší je počáteční rychlost a tuhost pružiny  $k$  (přesněji odmocnina z tuhosti,  $\sqrt{k}$ ); viz též příklad na konci kapitoly 2.

Podívejme se ještě na vliv hmotnosti  $m$  brzděného tělesa. Ten je dvojnásobný: maximální zpomalení klesá s druhou odmocninou z  $m$ , zatímco maximální síla roste přímo úměrně s  $\sqrt{m}$ . Čtyřikrát těžší těleso znamená poloviční zpomalení a dvakrát větší maximální sílu při jeho zastavení.

Je také užitečné vědět, jak jednotlivé veličiny souvisí s energií, kterou je potřeba zmařit. Kinetická energie se zastavením změní v potenciální energii stlačené pružiny a platí:

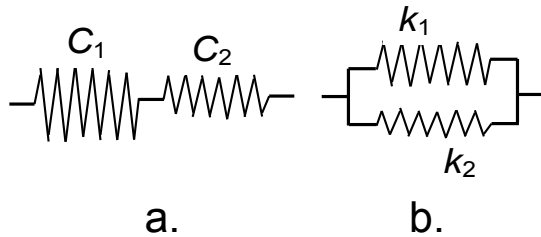
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} F_{\text{max}} x_{\text{max}} = \frac{1}{2} k x_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} F_{\text{max}}^2 / k \quad (4.23)$$

Z těchto vztahů lze při dané energii nárazu najít maximální sílu nebo dráhu brzdění, popřípadě potřebnou tuhost brzdící pružiny. Je zde ale jeden problém. Po dosažení maximálního stlačení má pružina tendenci vracet se do původního stavu a po chvíli by odmrštila zabrzděné těleso zpátky původní rychlostí v opačném směru. V případě pevného spojení s pružinou by došlo k trvalému kmitavému pohybu tělesa s kruhovou frekvencí  $\omega$  uvedenou výše. Má-li dojít k jeho zastavení při dosažení maximálního stlačení, musí zde být zabudován vhodný mechanismus, který to zajistí. Je ale také možné využít disipaci energie v průběhu brzdění, například s pomocí tření, jak je popsáno v kapitole 4.3.

### Několik pružin v sérii

Prozatím jsme předpokládali, že těleso narazí na jednu pružinu, a ta je stlačována.

Často se ale jedná o kolizi dvou těles, z nichž každé je více či méně poddajné. Příkladem je srážka dvou automobilů nebo náraz automobilu do poddajné překážky. Někdy je na povrchu tělesa vytvořena ochranná vrstva z poddajnějšího materiálu; přitom samo chráněné těleso má určitou poddajnost i bez této vrstvy. Situace je znázorněna na obr. 4.7a, kde jsou dvě pružiny v sérii.



**Obr. 4.7.** Pružiny spojené v sérii (a) a paralelně (b)

Obecně by mohlo být pružin v sérii více. V takovém případě působí v každé pružině (obecně v každém prvku v sérii) stejná síla a jejich deformace se sčítají. Protože deformace je dána jako součin síly a poddajnosti, je výsledná poddajnost  $n$  pružin v sérii rovna součtu poddajností jednotlivých pružin. Platí tedy

$$C = \sum_{j=1}^n C_j, \quad k = 1/C = \frac{1}{\sum 1/k_j} ; \quad (4.24)$$

$C$  značí poddajnost (podle slova compliance),  $k$  značí tuhost;  $j$ -tá pružina je označena indexem  $j$ . Pro dvě pružiny v sérii platí

$$C = C_1 + C_2, \quad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} . \quad (4.25)$$

Pokud žádná z pružin nemá omezený zdvih, je výsledná tuhost  $k$  systému v celém rozsahu deformování popsána vztahem (4.25). Někdy ale má jedna pružina omezený zdvih, například je kratší, a situace je složitější, jak ukážeme dále.

Stlačení jednotlivých pružin označíme  $x_1, x_2$  a výsledné stlačení bude  $x = x_1 + x_2$ . Maximální možné stlačení pružiny 1 je  $\delta_1$ . V první etapě stlačování jsou výsledná poddajnost i tuhost dány vztahy (4.25). Jakmile pružina 1 dosáhne maximální možný zdvih  $\delta_1$ , čemuž odpovídá síla

$$F_{\delta_1} = k_1 \delta_1 \quad (4.26)$$

a celkový zdvih

$$\delta = F_{\delta_1} / C, \quad (4.27)$$

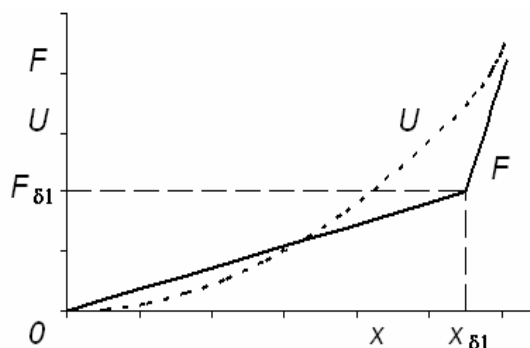
je pružina 1 vyřazena z činnosti a další zvyšování síly zachycuje pouze pružina 2 a celková poddajnost soustavy odpovídá pouze této pružině. Došlo tedy ke zvýšení tuhosti z hodnoty  $k$ , dané vztahem (4.25), na hodnotu  $k_2$ . Situace je znázorněna na obr. 4.8. Plocha pod čarou síla – dráha představuje práci spotřebovanou, resp. akumulovanou. V první etapě (pro  $x \leq \delta_1$ ) platí jednoduchý vztah mezi energií a dráhou nebo silou, takže ke známé hodnotě energie pohybujícího se tělesa lze snadno určit dráhu i sílu. To bylo ukázáno v konkrétním příkladu v kapitole 2.7. Je-li však energie tělesa, které je potřeba zastavit, větší než  $\frac{1}{2}F_{\delta_1}\delta$ , neexistuje explicitní vztah mezi energií a silou, resp. dráhou. Pro sílu platí

$$F = F_{\delta_1} + (x - x_{\delta_1})k_2, \quad (4.28)$$

a spotřebovaná energie je

$$E = \frac{1}{2} F_{\delta_1} x_{\delta_1} + \frac{1}{2} (x - x_{\delta_1})(F + F_{\delta_1}) \quad (4.29)$$

Jestliže k energii, kterou je nutno absorbovat, chceme stanovit odpovídající sílu nebo dráhu, je nejnadhěší vypočítat energie pro různé hodnoty dráhy  $x$  ve větším rozsahu (jde to i pomocí Excelu). Z příslušné tabulky pak zpětně najdeme dráhu odpovídající požadované mařené energii.



**Obr. 4.8.** Dvě pružiny v sérii. Síla  $F$  a energie  $E$  v závislosti na stlačení  $x$ .  $x_{\delta_1}$  a  $F_{\delta_1}$  – maximální možné stlačení pružiny 1 a odpovídající síla.

POZNÁMKA. Při paralelním uspořádání více pružin (obr. 4.7b) se sčítají síly přenášené jednotlivými pružinami. Výsledná tuhost je rovna součtu jejich tuhostí,

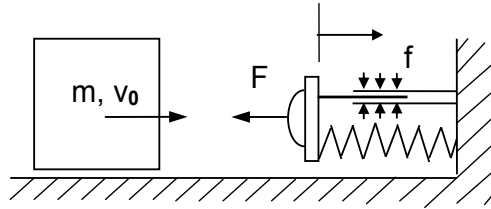
$$k = \sum k_j . \quad (4.30)$$

### 4.3 Náráz na pružinu s lineární charakteristikou a s tlumením smykovým třením

Situace je znázorněna na obr. 4.9. Těleso o hmotnosti  $m$  narazí rychlostí  $v_0$  na pružinu, která je opatřena přidavným tlumičem, například třecím, jehož odpor  $F_t$  je konstantní. Pohybová rovnice pro zpomalované těleso, je

$$m\ddot{x} + kx + F_t = 0 ; \quad (4.31)$$

$k$  je tuhost pružiny (N/m) a  $F_t$  je třecí síla (N), například  $F_t = Nf$ , kde  $N$  je síla, přitlačující brzdovou destičku v třecím tlumiči k pevnému protikusu, a  $f$  je součinitel tření, o kterém předpokládáme, že je konstantní.



**Obr. 4.9.** Brzdění s lineární pružinou a třecím tlumičem.

$F$  – celková síla od pružiny ( $= kx$ ) a třecího tlumiče ( $= F_t$ )

Po úpravě dostaneme následující rovnici pro pohyb (opět platí  $\omega^2 = k/m$ ):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -F_t/m , \quad (4.32)$$

To je nehomogenní diferenciální rovnice, tj. s nenulovou pravou stranou. Její řešení se obdrží jako součet řešení homogenní rovnice a partikulárního integrálu,

$$x(t) = x_{\text{hom}} + x_{\text{part}} . \quad (4.33)$$

Řešení homogenní rovnice (s nulovou pravou stranou) je stejné jako v předchozím oddílu [viz vztah (4.16)], a partikulární integrál je taková funkce, která vyhovuje

úplné rovnici (4.32). Výsledné řešení má tvar

$$x(t) = C \sin(\omega t + \varphi) - F_t / (m \omega^2), \quad (4.34)$$

kde  $\omega = \sqrt{k/m}$  je kruhová frekvence a  $C$ ,  $\varphi$  jsou konstanty, které vyplynou z počátečních podmínek. Pro  $t = 0$ ,  $x = 0$  a  $\dot{x} = v_0$  je

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{F_t}{m \omega^2}; \quad (4.35)$$

úhel  $\varphi$  je v radiánech. Po dosazení obou konstant do (4.34) dostaneme časový průběh dráhy při brzdění. Rychlost klesá s časem podle vztahu

$$\dot{x}(t) = \omega C \cos(\omega t). \quad (4.36)$$

Oba průběhy jsou podobné průběhům znázorněným na obr. 4.6.

Dobu  $t_b$  do poklesu rychlosti na nulu dostaneme z podmínky  $\cos(\omega t_b) = 0$ :

$$t_b = \frac{\pi}{2\omega} \quad (4.37)$$

Odpovídající brzdná dráha pro tuto dobu je

$$x_b(v=0) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t_b) - F_t / (m \omega^2). \quad (4.38)$$

Tato dráha je také rovna maximálnímu stlačení pružiny. Odpovídající síla  $F_{\max} = kx_b$  se bude snažit vracet těleso zpátky, čemuž bude nutno vhodným způsobem zabránit.

Obecně je brzdná síla úměrná stlačení pružiny; roste tedy úměrně s dráhou (křivka „c“ na obr. 4.4).

Z původní kinetické energie  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_0^2$  se část energie zmařila třením a část zůstala akumulována v pružině. Zmařená (disipovaná)  $W_{\text{dis}}$  energie a akumulovaná energie elastických napětí  $E_{\text{el}}$  jsou

$$W_{\text{dis}} = F_t x_b, \quad E_{\text{el}} = \frac{1}{2} F_{\max} x_b = \frac{1}{2} k x_b^2. \quad (4.39)$$



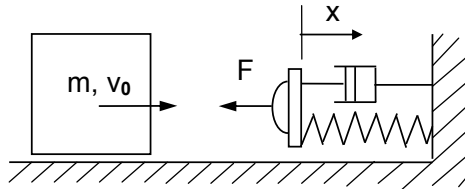
Celková práce při brzdění je rovna součtu obou složek,

$$E_{\text{tot}} = W_{\text{dis}} + E_{\text{el}} \quad (4.40)$$

Z tohoto vztahu můžeme při známé energii nárazu  $E$ , tuhosti pružiny  $k$  a velikosti síly tlumiče  $F_t$  najít odpovídající brzdou dráhu  $x_b$  a maximální brzdou sílu  $F_{\text{max}}$ , anebo najít potřebnou tuhost pružiny pro zadanou brzdou dráhu nebo další parametry.

#### 4.4 Náraz na pružinu s lineární charakteristikou a s tlumením úměrným rychlosti

Uspořádání je znázorněno na obr. 4.10. Od předchozího případu se liší tlumičem, jehož odpor je přímo úměrný rychlosti pohybu tělesa. Takto působí například běžné kapalínové tlumiče vibrací.



**Obr. 4.10.** Brzdění s lineární pružinou a tlumením úměrným rychlosti

Pohybová rovnice pro zpomalované těleso je

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 ; \quad (4.41)$$

$k$  je tuhost pružiny (N/m) a  $b$  je konstanta tlumiče (Ns/m), udávající odporovou sílu tlumiče při rychlosti 1 m/s. Po úpravě dostaneme

$$\ddot{x} + (b/m)\dot{x} + (k/m)x = 0 , \quad \text{resp. } \ddot{x} + 2N\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (4.42)$$

Řešení lze hledat ve tvaru  $x = Ce^{\lambda t}$ , kde  $\lambda$  je konstanta (Obecně existují dvě řešení, s konstantami  $C_1$ ,  $\lambda_1$ , a  $C_2$ ,  $\lambda_2$ .) Vyjádříme-li takto  $x$  v rovnici (4.42), dostaneme po úpravě následující vztah pro výpočet konstant  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  z parametrů tlumiče:

$$\lambda_{1,2} = -N \pm \sqrt{N^2 - \omega^2} , \quad (4.43)$$

kde  $N = b/(2m)$ ,  $\omega^2 = k/m$ . U kmitavých pohybů značí  $\omega$  kruhovou frekvenci vlastního netlumeného kmitání a  $N$  „frekvenci“ tlumení. Podle vzájemné velikosti  $N$  a  $\omega$  mohou nastat obecně tři případy:

### 1. $N < \omega$ (tzv. podkritické tlumení)

Kořeny rovnice (4.42) jsou komplexně sdružené, a obecné řešení je

$$x(t) = C e^{-Nt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0), \quad (4.44)$$

kde  $C$  a  $\varphi_0$  jsou konstanty, které se najdou z počátečních podmínek. Pro  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v(0) = v_0$  je řešení

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-Nt} \sin(\omega_1 t). \quad (4.45)$$

Výraz (4.45) má dvě složky: exponenciálně klesající ( $e^{-Nt}$ ) a sinusovou [ $\sin(\omega_1 t)$ ], kde  $\omega_1$  je vlastní kruhová frekvence kmitání s tlumením, která je vázána s kruhovou frekvencí  $\omega$  volného kmitání (bez tlumení) vztahem

$$\omega_1 = \sqrt{(\omega^2 - N^2)} = \omega \sqrt{1 - \delta^2}; \quad (4.46)$$

$\delta = N/\omega$  je tzv. **poměrný útlum**. Kmitání s tlumením je tedy o něco pomalejší než bez tlumení.

Sinusová složka ve vztahu (4.44) ukazuje, že dráha bude střídavě kladná a záporná, takže brzděné těleso bude periodicky kmitat vpřed a zpět, i když s útlumem. Frekvence kmitání (kmitočet)  $f_1$  je s kruhovou frekvencí  $\omega_1$  vázaná vztahem

$$\omega_1 = 2\pi f_1. \quad (4.47)$$

Výraznější kmitání je ale pro jednorázové zastavení nevhodné, takže tento případ nepřichází pro brzdění v úvahu. V praxi se kapalinové tlumiče s odporem úměrným rychlosti používají především pro tlumení vibrací. Tohoto případu si všimneme podrobněji v kapitole 7.

### 2. $N = \omega$ (tzv. kritické tlumení)

Obecné řešení je

$$x(t) = e^{-Nt} (C_1 + C_2 t), \quad (4.48)$$

kde  $C_1 + C_2$  jsou konstanty. Při počátečních podmínkách  $x(0) = 0$  a  $v(0) = v_0$  je časový průběh dráhy brzděného tělesa

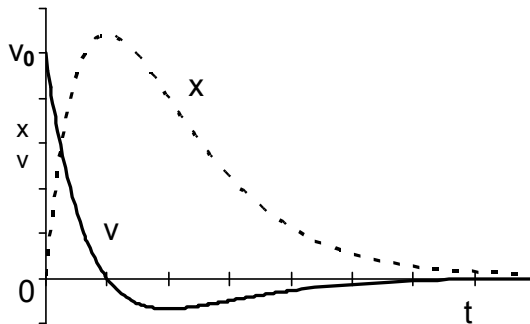
$$x(t) = v_0 t e^{-Nt} \quad (4.49)$$

a rychlost

$$\dot{x}(t) = v_0 e^{-Nt} (1 - Nt). \quad (4.50)$$

Na obr. 4.11 jsou znázorněny oba průběhy. Vidíme, že pohybující se těleso se zpomaluje; v určitém bodě jeho rychlost klesne na nulu, ale pak se začne pomalu pohybovat zpět a po určité době se definitivně zastaví. Toto chování je pochopitelné: pohybující se těleso předá pružině část své kinetické energie jako potenciální energii, a ta potom nutí brzděné těleso vracet se zpět. Ani tento případ není pro zastavení jednorázového nárazu příliš žádoucí. Opět by zde musel být přídatný mechanismus, který zajistí zastavení při dosažení nulové rychlosti.

Podobná situace je v následujícím případě s výraznějším tlumením.



**Obr. 4.11.** Brzdění s kritickým tlumením (schematicky).

### 3. $N > \omega$ (nadkritické tlumení)

Při počátečních podmínkách  $x(0) = 0$ ,  $v(0) = v_0$ , je časový průběh dráhy brzděného tělesa

$$x(t) = (v_0/\alpha) e^{-Nt} \sinh(\alpha t) \quad (4.51)$$

a rychlost

$$\dot{x}(t) = v_0 e^{-Nt} [\cosh(\alpha t) - (N/\alpha) \sinh(\alpha t)], \quad (4.52)$$

kde  $\alpha$  je definováno vztahem

$$\alpha^2 = N^2 - \omega^2 . \quad (4.53)$$

Oba průběhy jsou podobné jako na obr. 4.11. Rychlost monotónně klesá k nule, ale nabývá ještě po určitou dobu malé záporné hodnoty. To znamená, že se těleso na konci své dráhy vrací ještě o malý kousek zpátky. To však již nemusí znamenat problém, zejména pokud se užije pomocný mechanismus jako v předešlém případě.

#### 4.5 Náraz na pružinu s lineární charakteristikou a s tlumením úměrným čtverci rychlosti

Odpor úměrný kvadrátu rychlosti mívají například tlumiče, u kterých je odpor vyvozován průtokem plynu otvorem. Uspořádání je stejné jako na obr. 4.10, pouze charakteristika tlumiče je jiná. Pohybová rovnice je [1]:

$$\ddot{x} + \frac{1}{2} R \dot{x}^2 + \omega^2 x = 0 , \quad (4.54)$$

kde  $R$  [ $\text{m}^{-1}$ ] je konstanta charakterizující tlumení a  $\omega = \sqrt{k/m}$  je kruhová frekvence volného kmitání;  $k$  je tuhost pružiny a  $m$  hmotnost brzděného tělesa.

Řešení pomocí elementárních funkcí není možné. Jestliže ale vyjádříme zrychlení pomocí derivace čtverce rychlosti podle dráhy,

$$\ddot{x} = d(v^2)/(2dx) = d(\dot{x}^2)/(2dx) , \quad (4.55)$$

a zavedeme-li označení  $\dot{x}^2 = z$ , můžeme rovnici (4.54) po vynásobení dvěma přepsat na tvar

$$dz/dx \pm R z = - 2 \omega^2 x . \quad (4.56)$$

Řešením této rovnice je

$$z(x) = C \exp(\pm Rx) \pm z_p \quad (4.57)$$

kde  $C$  je integrační konstanta a  $z_p$  je partikulární integrál. Jeho možný tvar je [1]

$$z_p = [2\omega^2/R^2] (1 \pm Rx) . \quad (4.58)$$

Znaménko  $+$  platí pro  $\dot{x} > 0$ , a znaménko  $-$  pro  $\dot{x} < 0$ . Omezíme-li se na kladné hodnoty  $\dot{x}$  a na případ nárazu, kdy na počátku ( $t = 0$ ) je výchylka  $x = 0$  a rychlost  $v(0) = v_0$ , dostaneme po úpravách následující výraz pro závislost rychlosti na dráze:

$$v = v_0 \sqrt{1 - (2\omega^2/(Rv_0^2))x} = v_0 \sqrt{1 - Ax}, \quad (4.59)$$

kde  $A$  je konstanta daná vztahem  $A = [2\omega^2/(Rv_0^2)]$ . Dráhu do zastavení  $x_b$  dostaneme z rovnice (4.59) pro  $(v) = 0$ :

$$x_b = Rv_0^2/(2\omega^2). \quad (4.60)$$

Časový průběh dráhy lze (s přihlédnutím k tomu, že  $v = dx/dt$ ) získat numerickou integrací upraveného vztahu (4.59).

**Poznámka.** Z čistě matematického hlediska by jedno z řešení rovnice (4.54) mohlo vyjadřovat kmitavý pohyb. V našem případě, kdy předpokládáme, že vhodnou konstrukcí a seřízením docílíme zastavení v první půlperiodě pohybu (podmínkou je silné tlumení s pohlcováním energie), jsme pohyb zpět neuvažovali.

#### 4.6 Změny kinetické energie v průběhu brzdění

V některých případech není úkolem brzdícího zařízení úplně zastavit pohybující se těleso; může postačit dostatečné snížení jeho kinetické energie, a konečné zastavení je dosaženo jiným způsobem. Z tohoto hlediska je užitečné vidět, jak klesá kinetická energie tělesa s klesající rychlostí. Ze vztahů pro kinetickou energii na počátku brzdění tělesa o rychlosti  $v_0$  a v okamžiku, kdy rychlost klesla na  $v$ ,

$$E_{\text{kin},0} = \frac{1}{2} m v_0^2, \quad E_{\text{kin},v} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (4.61)$$

dostaneme

$$E_{\text{kin},v}/E_{\text{kin},0} = (v/v_0)^2 \quad (4.62)$$

Například při poklesu rychlosti  $v$  na polovinu původní hodnoty klesne kinetická energie tělesa (a tedy schopnost způsobit škodu) na jednu čtvrtinu, při poklesu na desetinu klesne na pouhé jedno procento, a při poklesu na tři procenta původní rychlosti poklesne na méně než jednu tisícinu. V takovém případě může být přijatelný i tvrdší doraz

#### Literatura ke kapitole 4.

1. Brát, V., Brousil, J.: Dynamika. (Učební text ČVUT) SNTL, Praha, 1967. 306 s.
2. Guoxing, Lu, Tongxi, Yu: Energy absorption of structures and materials. Woodhead Publishing, 2003. ISBN 978-1-85573-688-7, Electronic ISBN 978-1-85-573858-4. Též na <https://www.sciencedirect.com/science/book/9781855736887>

3. Gonda, J.: Dynamika pre inžinierov. SAV, Bratislava, 1966. 453 s.
4. Šrejtr, J.: Technická mechanika III. Dynamika. SNTL, Praha, 1958. 486 s.
5. Den Hartog, J. P.: Mechanical vibrations. Dover Publications, New York, 1985.
6. Hořejší, J.: Dynamika. Alfa, Bratislava + SNTL, Praha, 1980. 299 s.

## 5. Odezva a porušení materiálů a součástí

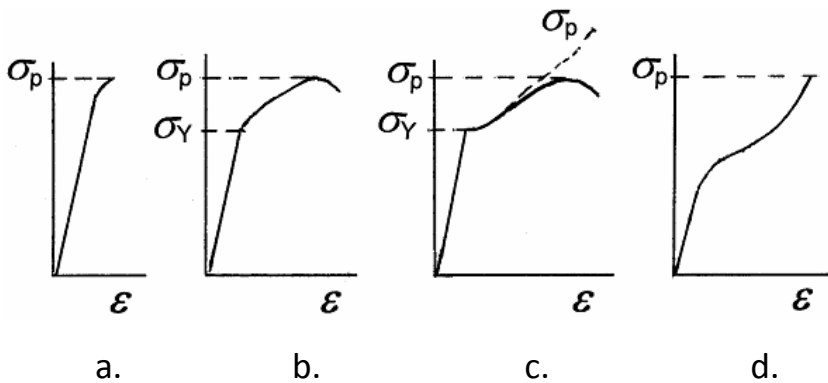
### 5.1 Úvod

Pro analýzu poměrů při zatížení konkrétní součásti je nezbytná znalost vztahů mezi napětím a přetvořením použitého materiálu. Naopak znalost základních rysů usnadní volbu materiálu pro konkrétní aplikaci. Na obr. 5.1 jsou znázorněny pracovní diagramy ( $\sigma - \varepsilon$ ) tahových zkoušek různých druhů materiálů. Práce spotřebovaná do porušení je úměrná ploše pod křivkou napětí – přetvoření.

Obr. 5.1a je typický pro křehké materiály, jako je sklo, keramika, kalená ocel nebo beton. Pro nižší napětí platí mezi napětím  $\sigma$  a přetvořením  $\varepsilon$  přímá úměrnost,

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (5.1)$$

kde  $E$  je modul pružnosti v tahu (tzv. Youngův modul). K porušení dojde, jestliže maximální napětí dosáhne meze pevnosti  $\sigma_p$ . Porušení je náhlé a na zlomených částech nejsou patrné trvalé deformace. Pevnost v tlaku je zhruba o řád vyšší než v tahu. Spotřeba energie při lomu je malá.



**Obr. 5.1.** Diagramy tahové zkoušky různých materiálů.

*a – materiál křehký, b, c – materiál pružnoplastický, d – pryž.  $\sigma$  – napětí,  $\varepsilon$  – poměrné prodloužení,  $\sigma_p$  – mez pevnosti,  $\sigma_Y$  – mez kluzu*

Obrázky 5.1b, c jsou typické pro tvárné kovové materiály, například pro měkkou konstrukční ocel, hliník nebo měď a jejich slitiny. Pro napětí nižší než mez kluzu  $\sigma_K$  platí i zde mezi napětím a přetvořením přímá úměrnost. Jakmile napětí dosáhne meze kluzu, začnou deformace narůstat rychleji a po odlehčení zůstanou trvalé změny tvaru a rozměrů. Díky plastickým deformacím je spotřeba energie do porušení mnohonásobně vyšší než u materiálů křehkých.

Obr. 5.1d je typický pro pryže a některé další polymerní materiály. Ve větším rozsahu zatížení je diagram nelineární, ale až do porušení nevznikají trvalé deformace.

V dalším si podrobněji všimneme chování součástí jednotlivých materiálů. Přihlédneme i ke vlivu tvaru a dalších činitelů

## 5.2 Pružnoplastická odezva tvárných materiálů

Pro lepší pochopení a snadnější výpočty se pracovní diagramy často zjednodušují a aproximují jednoduchými výrazy. Tři nejobvyklejší aproximace jsou [1 – 3]:

Bilineární funkce (obr. 5.2a):

$$\sigma \leq \sigma_Y \quad \varepsilon = \sigma/E \quad \sigma_Y \text{ je mez kluzu} \quad (5.2a)$$

$$\sigma > \sigma_Y \quad \varepsilon = \varepsilon_Y + (\sigma - \sigma_Y)/E'; \quad E' \text{ je tzv. modul zpevnění} \quad (5.2b)$$

Mocninná funkce (obr. 5.2b),

$$\sigma \leq \sigma_Y \quad \varepsilon = \sigma/E \quad (5.3a)$$

$$\sigma > \sigma_Y \quad \varepsilon = K\sigma^m; \quad K, m \text{ jsou konstanty} \quad (5.3b)$$

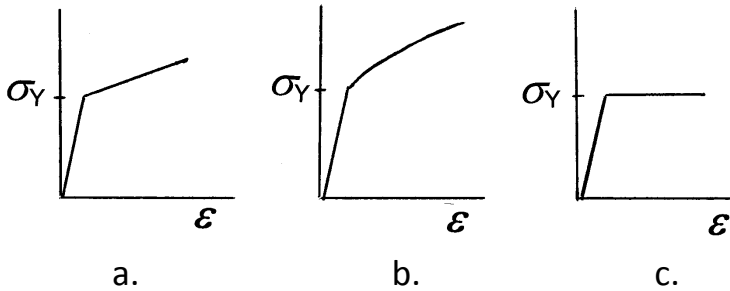
Ideální pružnoplastický materiál bez zpevnění (obr. 5.2c).

$$\sigma \leq \sigma_Y \quad \varepsilon = \sigma/E \quad (5.4a)$$

$$\varepsilon > \varepsilon_Y \quad \sigma = \sigma_Y \quad \varepsilon_Y \text{ je prodloužení pro } \sigma = \sigma_Y \quad (5.4b)$$

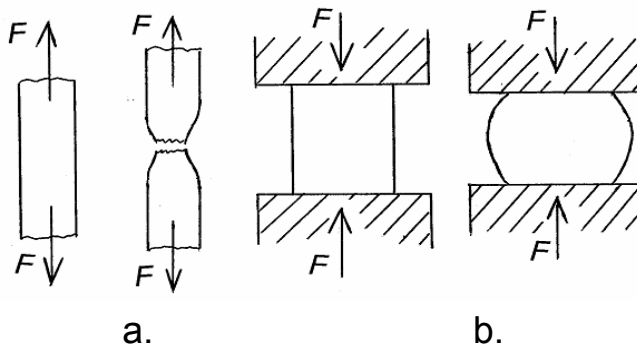
Uvedené vztahy a diagramy platí pouze pro menší přetvoření. Při běžné zkoušce tahem se napětí obvykle počítá jako zatížení dělené jmenovitou plochou průřezu,  $\sigma = F / S$ , a příslušné diagramy se nazývají konvenční. Skutečnost, že při zatížení osovým tahem nebo tlakem se kromě prodlužování vzorku mění se i velikost jeho průřezu, se zanedbává. To je přípustné pro přetvoření nepřekračující několik





**Obr. 5.2.** Idealizované pracovní diagramy. a – bilineární funkce, b – mocninná funkce, c – ideální pružnoplastický materiál bez zpevnění.  $\sigma_Y$  – mez kluzu

procent. Při větších deformacích již nejsou změny průřezu zanedbatelné a skutečné napětí se začíná výrazněji lišit od jmenovitého. Závislost mezi skutečným napětím a přetvořením při tahové zkoušce měkké konstrukční oceli je naznačena na obr. 5.1c čárkovaně; hořejší hodnota  $\sigma_p$  představuje skutečné napětí při přetržení. Rozdíly narůstají zejména při napětích, blízcích se k mezi pevnosti, kdy se u vzorku začíná tvořit krček v místě budoucího přetržení (obr. 5.3a). Při zatížení tlakem je situace opačná: plocha průřezu se zvětšuje (obr. 5.3b) a skutečné tlakové napětí je nižší než jmenovité. Velmi tvárný materiál by snesl prakticky neomezené zatížení jednoosým tlakem. K tomuto chování je nutno přihlížet při návrhu prvků pro tlumení nárazů, kde trvalá přetvoření bývají značně velká.



**Obr. 5.3.** Deformace tvárných materiálů při zatížení: a – tahem, b - tlakem

### Další materiálové charakteristiky pružnoplastických materiálů

U pružnoplastických materiálů pro součásti určené k tlumení rázů s využitím nevratného přetvoření jsou kromě pevnosti důležité i další charakteristiky: tažnost,

kontrakce a vrubová houževnatost [4]. U součástí s trhlinami je to ještě tzv. lomová houževnatost. Té si všimneme později. Zde popíšeme prvé tři veličiny.

**Tažnost** je definovaná z maximálního poměrného prodloužení při tahové zkoušce:

$$A = \frac{L_u - L_0}{L_0} = \varepsilon_0 ; \quad (5.5)$$

$L_0$  je původní měřená délka tyče nebo její části, a  $L_u$  je délka této části po přetržení. Zkušební tyč se při zkoušce tahem nedeformuje rovnoměrně; v blízkosti místa přetržení, tzv. krčku, se prodlužuje výrazně více. Proto je nutno zohlednit, jak byla tažnost měřena. Podle normy na zkoušení materiálů se tažnost udává v procentech a index uvádí, jestli původní měřená délka byla rovna deseti- nebo pětinasobku průměru zkušební tyče (označení  $A_{10}$ , resp.  $A_5$ ). Pokud se u navrhované součásti předpokládá, že se při použití budou využívat její plastické vlastnosti, musí mít dostatečnou tažnost. Podle [5] by mělo být minimálně  $A_5 = 15\%$  a mez pevnosti by měla být nejméně o 20% vyšší než mez kluzu.

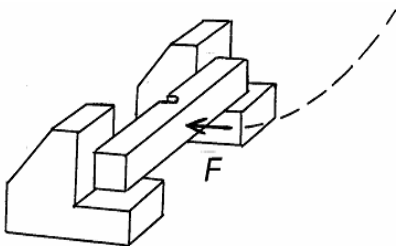
**Kontrakce** je definovaná jako největší poměrné zúžení průřezu zkušební tyče, změřené po přetržení v místě lomu,

$$Z = \frac{S_0 - S_u}{S_0} = \psi_0 \quad (5.6)$$

$S_0$  je plocha původního průřezu a  $S_u$  je plocha nejmenšího průřezu po přetržení. Udává se v procentech.

**Vrubová houževnatost** se zpravidla měří pomocí standardního vzorku a vrubem, do kterého udeří kyvadlové kladivo (obr. 5.4). Vyjadřuje se jako práce spotřebovaná na přeražení vzorku ( $K$ ) vztažená na plochu zeslabeného průřezu ( $S_0$ ),

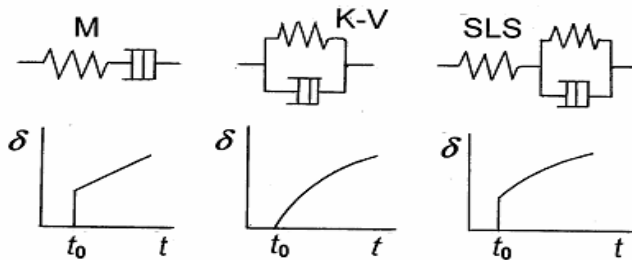
$$KC = \frac{K}{S_0} \quad (\text{J/cm}^2) \quad (5.7)$$



**Obr. 5.4.** Zkouška vrubové houževnatosti kyvadlovým kladivem

### 5.3 Odezva viskoelastických materiálů na zatížení

Mnoho součástí se vyrábí z polymerních materiálů. U nich deformace závisí nejen na velikosti zatížení, ale i na jeho trvání a časovém průběhu. Takovým látkám se říká viskoelastické a existuje řada modelů pro popis jejich chování [6]. Tyto modely se někdy znázorňují jako kombinace *prvků elastických* (kde deformace jsou okamžité a přímo úměrné zatížení, resp. napětí) a *prvků viskózních*, kde síly a napětí jsou přímo úměrné rychlosti deformování a deformace narůstají se zpožděním. Pro prvky elastické platí Hookův zákon,  $\sigma = E\varepsilon$ , pro prvky viskózní platí Newtonův zákon,  $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$ , kde  $\eta$  je dynamická viskozita a  $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$  je rychlost poměrného přetváření. Dva nejjednodušší modely viskoelastických látek jsou **Maxwellovo těleso** (M na obr. 5.5) a **Kelvinovo-Voigtovo těleso** (K-V na obr. 5.5). Maxwellovo těleso reaguje na zatížení od prvního okamžiku (elastická složka deformace je okamžitá a pak trvale narůstá viskózní složka, která by u tohoto modelu mohla narůstat bez omezení. U Kelvinova-Voigtova tělesa deformace narůstají od nuly postupně a mají konečnou velikost. Často se užívají modely složitější, například **standardní lineární těleso** (Kelvinovo-Voigtovo těleso v sérii



**Obr. 5.5.** Viskoelastické modely. M – Maxwellovo těleso, K-V – Kelvinovo-Voigtovo těleso, SLS – Standard Linear Solid (standardní lineární těleso)

s pružinou, SLS na obr. 5.5). Toto těleso již může přijatelně modelovat jak případy zatížení silou konstantní nebo monotónně se měnící, tak i kmitavý pohyb s tlumením. U jednorázového zatížení se pracuje s tzv. funkcí odezvy, která sestává z více členů a obvykle se popisuje pomocí řady exponenciálních funkcí, například [6, 7]:

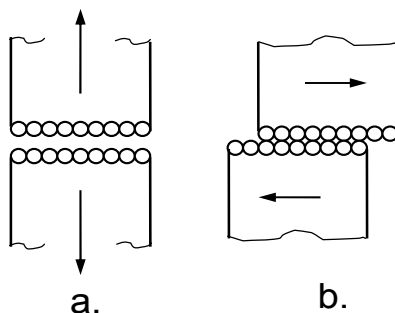
$$y(t) = F \left[ C_0 + \sum_{j=1}^n C_j \exp(-t/\tau_j) \right]; \quad (5.8)$$

$F$  je zatížení,  $y$  je deformace,  $t$  je čas,  $C_0, C_1, \dots$  jsou konstanty pro daný materiál a geometrii tělesa a zatížení, a  $\tau_j$  je tzv. relaxační doba, která charakterizuje rychlost doznívání účinků zatížení. Při rychlém zatížení jsou viskoelastické efekty zpravidla malé a u krátkodobého rázu stačí reagovat pouze „pružina“  $C_0$ . Pro popis ustáleného kmitání je zase důležitý tzv. fázový úhel  $\varphi$ , který charakterizuje zpoždění mezi zatížením a deformací, a také ztráty energie při opakovaném zatěžování nebo při kmitání; viz též hysterezní smyčku na obr. 7.14 v kapitole 7.9.

## 5.4 Porušení tvárné a křehké

Jestliže zatížení dosáhne jisté kritické velikosti, dochází k porušení tělesa, a to buď trvalou změnou tvaru (a popřípadě lomem) u materiálů houževnatých, anebo lomem u materiálů křehkých. Je vhodné poznamenat, že dělení materiálů na křehké a houževnaté není zcela správné. Jen velmi málo látek lze označit za skutečně křehké, například diamant nebo křídu. U většiny materiálů lze za vhodných podmínek docílit trvalé změny tvaru, i když někdy jen ve velice malém objemu a rozsahu, například trvalý vtisk Vickersova indentoru při měření mikrotvrdosti skla [15]. Vhodnější je hovořit o křehkém nebo tvárném lomu nebo porušení. Tvárný lom je doprovázen poměrně velkými změnami tvaru. Křehký lom je takový, který prakticky nevykazuje známky trvalého přetvoření před porušením. Mnoho materiálů se může porušit oběma způsoby, v závislosti na řadě činitelů. Ke křehkému lomu obecně přispívá pět faktorů: 1. křehký materiál, 2. tahové napětí, 3. nízká teplota, 4. rázové zatížení a 5. složitý tvar součásti s vruby nebo dalšími koncentratory napětí. Některých faktorů si zde krátce všimneme.

Napjatost. Tahová napětí se snaží atomy materiálu od sebe oddalovat, což obecně napomáhá rozrušení odtržením, obr. 5.6a. Smykové napětí se snaží posouvat vrstvy



**Obr. 5.6.** Lom odtržením (a) a trvalé přetvoření smykovým napětím (b).

atomů po sobě, což přispívá k plastickému deformování, obr. 5.6b. Nesmíme ale zapomenout, že i při zatížení smykem se v tělese vyskytují roviny, ve kterých působí normálová napětí tahová nebo tlaková, a naopak při zatížení tahem se vyskytují také roviny, kde působí smyková napětí.

Teplota. Trvalé změny tvaru těles z kovových materiálů vznikají především přemísťováním velkého množství atomů. Ty jsou pohyblivější při vyšších teplotách a méně pohyblivé při teplotách nižších. Například ocelová součást, kterou lze při rázovém zatížení trvale přetvořit i při pokojové teplotě, praskne, je-li teplota nižší než takzvaná přechodová teplota. To je teplota, při které dochází k náhlému poklesu vrubové houževnatosti. Přechodové teploty jsou u různých materiálů různé. U některých kovů jsou značně pod bodem mrazu, například  $-100^{\circ}\text{C}$ , u jiných je to naopak již při teplotách blížících se k nule.

Přítomnost koncentrátorů napětí. V oblasti náhlé změny tvaru nebo průřezu existuje zvýšené napětí, ale již v menší vzdálenosti od vrubu působí napětí nižší. Vhodné podmínky pro plastické tečení, a tedy i pro pohlcování energie nárazu, jsou tedy jen v relativně malém objemu. V kořeni vrubu tak může být poměrně brzy vyčerpána schopnost plastického tečení, na rozdíl od součástí s průřezem konstantním nebo plynule se měnícím, kde může probíhat plastické deformování ve větším objemu. Těchto otázek si všimneme v následujícím oddílu.

Rychlost zatěžování. Přemísťování atomů (při plastickém tečení) do nových rovnovážných pozic vyžaduje čas. Při dynamickém, resp. rázovém zatížení narůstá napětí velmi rychle, takže vznikají příznivější podmínky pro porušení odtržením, než pro plastické deformování.

Nebezpečná jsou především zatížení, jež vznikají při vzájemných srážkách křehkých těles nebo úderech na ně. Nebezpečná jsou proto, že v důsledku prakticky neexistující plasticity se téměř všechna energie nárazu mění v energii pružných napětí, která tak mohou dosáhnout značně vysokých hodnot. S ohledem na nižší pevnost v tahu křehkých materiálů a nízkou spotřebu energie při lomu proto dojde často k narušení nebo k úplnému zničení tělesa i při zdánlivě nevinném úderu.

Chování při rázu závisí na mnoha činitelích. Kromě rozměrů a hmotnosti obou těles se uplatňují také jejich fyzikální a pevnostní vlastnosti, celková poddajnost daná jejich materiálem, tvarem a způsobem uložení; dále hraje roli charakter vzájemného kontaktu, počáteční rychlost nárazu a další vlivy.

Z fyzikálních veličin je důležitý především modul pružnosti. Je-li jedno z těles či obě z materiálu tvárného, mají význam i veličiny charakterizující tyto vlastnosti, např. mez kluzu a mez pevnosti. U pevnosti se někdy uplatňuje také její závislost na době zatížení, známá např. u skla, porcelánu a některých druhů keramiky pod názvem statická únava. Při ní dochází k velice pomalému zvětšování přítomných mikroskopických trhlin a dalších vad účinkem okolního prostředí, například vzdušné vlhkosti, tzv. koroze pod napětím. Na rozdíl od běžných zkoušek pevnosti, při kterých napětí narůstá pomalu, takže doba do lomu činí obvykle desítky sekund, bývá při nárazu doba působení napětí jenom  $10^{-2}$  až  $10^{-5}$  s, tzn. tisíckrát až milionkrát kratší. Zkrácení doby zatížení omezuje napětěvou korozi v kořeni trhliny, což se projevuje zvýšenou pevností. I když toto zvýšení pevnosti není příliš vysoké (u skla naměříme při rázovém zatížení pevnost zhruba 1,2 až 2krát vyšší než při pomalu rostoucím zatížení, a zkracování doby zatížení pod  $10^{-3}$  s již nemá na pevnost vliv), může v některých případech rozhodnout o tom, dojde-li k porušení součásti či nikoliv.

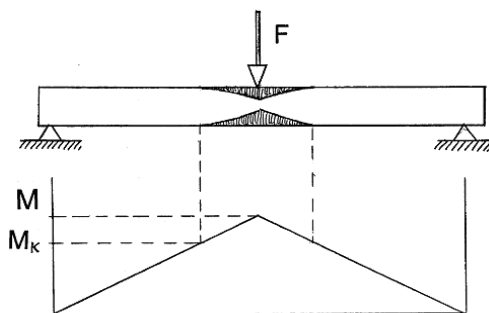
## Deformace a porušení součástí z různých materiálů

Bez ohledu na určitou nepřesnost budeme v dalším používat výrazy houževnaté a křehké materiály v jejich obvyklém smyslu.

### 5.5 Materiály houževnaté – pružnoplastický ohyb

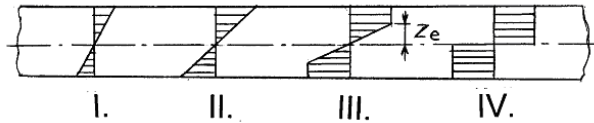
U dílů určených pro pohlcování energie plastickým deformováním není namáhání tahem vhodné. Výhodnější, resp. bezpečnější je namáhání ohybem. Zde ukážeme, jak se při něm vyvíjí rozložení napětí při rostoucím zatížení.

Na obr. 5.7 je znázorněn nosník na dvou podporách zatížený uprostřed příčnou silou. V dolní části je ukázáno rozložení ohybového momentu po délce.



**Obr. 5.7.** *Elastickoplastický ohyb. Plasticky deformovaná oblast a rozložení momentů.  $M$  - ohybový moment,  $M_k$  - moment, kdy napětí v krajních vláknech dosáhnou mez kluzu.*

Obrázek 5.8 ukazuje, jak se postupně mění rozložení napětí v nejvíce namáhaném průřezu uprostřed rozpětí. Pro jednoduchost se zde omezíme na obdélníkový průřez a ideální pružnoplastický materiál bez zpevnění (obr. 5.2c), se stejnou hodnotou meze kluzu v tahu i tlaku. Je to značná idealizace, ale pro získání všeobecné představy je užitečná.



**Obr. 5.8.** Elasticoplastický ohyb.

*Rozložení napětí v nejvíce namáhaném průřezu při postupném nárůstu zatížení (I, II, III, IV).  $z_e$  - rozhraní mezi elasticky a plasticky deformovanou oblastí.*

Zpočátku (obr. 5.8-I) se materiál deformuje pouze pružně a napětí v průřezu rostou přímo úměrně se vzdáleností  $z$  od neutrální osy. V jedné polovině průřezu působí napětí tahová a ve druhé polovině napětí tlaková, a platí pro ně [8]:

$$\sigma(z) = \frac{M}{J} z \quad (5.9)$$

$M$  je ohybový moment v daném místě a  $J$  je kvadratický moment průřezu v ohybu (pro obdélníkový průřez je  $J = bh^3/12$ ;  $h$  je výška průřezu ve směru zatížení a  $b$  je jeho šířka). Podobné rozložení napětí existuje až do okamžiku, kdy maximální napětí na povrchu dosáhne meze kluzu  $\sigma_Y$  (obr. 5.8-II). Odpovídající moment a zatížení v naznačeném případě je

$$M_K = \sigma_Y Z = \sigma_Y \frac{bh^2}{6}; \quad F_K = \frac{4M_K}{l}, \quad (5.10)$$

$Z$  je modul průřezu v ohybu a  $l$  je rozpětí nosníku. Při dalším zvyšování zatížení se charakter rozložení napětí mění. Tam, kde bylo dosaženo meze kluzu, již napětí dále neroste (předpokládáme materiál bez zpevnění, obr. 5.2c). Přírůstek momentu nad  $M_K$  proto bude přenášen pouze materiálem v oblastech, kde je napětí dosud nižší než  $\sigma_Y$ , a deformace proto budou narůstat rychleji. Poblíž neutrální osy je elastické jádro s lineárním nárůstem napětí se vzdáleností od osy (obr. 5.8-III). Ve větší vzdálenosti než  $z_e$  je materiál již plně zplastizován a napětí zde má konstantní

hodnotu rovnou mezi kluzu  $\sigma_Y$ . Přechod mezi elastickým jádrem a plastickou oblastí je ve vzdálenosti  $z_e$  od neutrální osy [1 – 3, 8]

$$z_e = \sqrt{3 \left( \frac{h^2}{4} - \frac{M_{el-pl}}{\sigma_Y b} \right)} ; \quad (5.11)$$

$M_{el-pl}$  je elasticko-plastický moment, větší než  $M_K$ . S rostoucím zatížením se dále zvětšují tloušťky zplastizovaných oblastí a klesá tloušťka elastického jádra. To nakonec vymizí při mezní velikosti ohybového momentu

$$M_M = \sigma_Y \frac{bh^2}{4} ; \quad (5.12)$$

Nyní je průřez již zcela zplastizován (Obr. 5.8-IV). Mezní moment je u obdélníkového průřezu o 50% vyšší než moment, při kterém bylo poprvé dosaženo meze kluzu. Prohnutí prutu v tomto okamžiku však ještě není veliké. U materiálu bez zpevnění by daný ohybový moment  $M_M$  mohl vést k neomezenému pootáčení obou ramen nosníku a ke zhroucení konstrukce. (U reálných materiálů k určitému zpevnění dochází.) Protože deformace jsou soustředěny v oblasti maximálního momentu, říkáme, že zde vznikl **plastický kloub** (obr. 5.7). POZNÁMKA. Jak je zřejmé ze vztahů (5.10) a (5.12), plastický kloub se vytvoří již při poměrně malém překročení podmínky plastického tečení. Rovněž deformace odpovídající vzniku plastického kloubu jsou poměrně malé.

Podobná situace je i u jiných tvarů průřezu. Obecně lze mezní moment vyjádřit ve tvaru

$$M_M = \sigma_Y Z_{pl} , \quad (5.13)$$

kde  $Z_{pl}$  je tzv. plastický modul průřezu. Vztahy pro jeho výpočet pro některé tvary průřezu lze najít v tabulce 5.1 a v literatuře, například [9 – 11]. Poznamenejme, že poměr mezi mezním momentem (při vzniku plastického kloubu) a momentem, kdy napětí poprvé dosáhlo meze kluzu, je stejný jako poměr plastického a elastického modulu průřezu,  $M_M/M_K = Z_{pl}/Z$ . Tento poměr také charakterizuje rezervu únosnosti po dosažení meze kluzu.



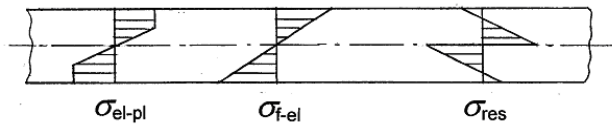
**Tabulka 5.1.** *Elastický a plastický modul průřezu v ohybu důležitých tvarů*

Tvar průřezu	$Z$	$Z_{pl}$	$Z_{pl}/Z = M_M/M_K$	
Obdélník	$bh^2/6$	$bh^2/4$	1,5	$b$ - šířka, $h$ - výška
Kruh	$\pi D^3/32$	$d^3/6$	1,7	$D$ - průměr
I - profil			$\approx 1,15$	

Jestliže během zatěžování tělesa došlo k plastickému tečení, zůstanou v něm po odlehčení trvalé deformace. Elastická složka deformací vymizí. Pokud bylo napětí v průřezu rozloženo nerovnoměrně, jako například při ohybu, zůstane v materiálu po odlehčení trvale i zbytkové napětí  $\sigma_{res}$ . Velikost tohoto napětí v určitém místě dostaneme, když od skutečného napětí v pružnoplastickém stavu,  $\sigma_{el-pl}$ , odečteme fiktivní elastické napětí  $\sigma_{f-el}$ , které by zde působilo při stejném zatížení, pokud by se těleso deformovalo pouze pružně (tj. jako kdyby mělo například mnohem vyšší mez kluzu):

$$\sigma_{res} = \sigma_{el-pl} - \sigma_{f-el} \quad (5.14)$$

Obr. 5.9 ukazuje rozložení zbytkových napětí v průřezu po vyvolání plastických deformací s rozložením napětí dle obr. 5.8-III C. Je užitečné vědět, že v místech, kde při zatížení došlo nejdříve ke vzniku plastických deformací, budou zbytková napětí po odlehčení mít opačné znaménko než při zatížení.



**Obr. 5.9.** *Elastickoplastický ohyb. Stanovení zbytkových napětí  $\sigma_{res}$ .  $\sigma_{el-pl}$  - napětí v elastoplastickém stavu,  $\sigma_{f-el}$  - fiktivní elastická napětí*

Při plastickém tečení se pohlcuje mnohem více energie než při deformování elastickém. Proto u materiálů pro součásti, které mají za úkol zmírnit náraz svým plastickým deformováním, požadujeme, aby bez porušení snesly velké trvalé přetvoření, tj. aby měly vysokou tažnost. Ta je zde důležitější než vysoká pevnost. U kovových prvků pro tlumení nárazů se často využívá ohybu, a je proto nutné, aby snesly bez lomu co největší ohnutí.

## 5.6 Ztráta stability boulením

Specifický způsob porušení je ztráta stability boulením u částí namáhaných na vzpěr. Situaci budeme ilustrovat na příkladu štíhlého prutu zatíženého osovou tlakovou silou (obr. 5.10 a,b). Při nižším zatížení je osa prutu přímá a působí v něm rovnoměrně rozložené tlakové napětí o velikosti

$$\sigma_{tl} = F / S ; \quad (5.15)$$

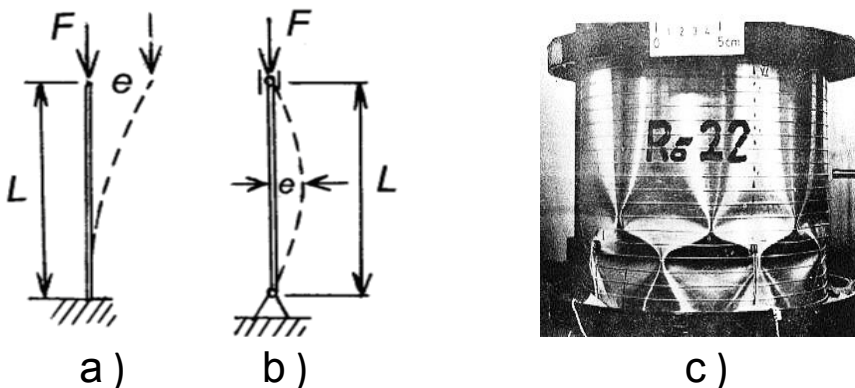
$F$  je osová síla a  $S$  plocha průřezu. Jestliže ale síla dosáhne tzv. **kritické hodnoty**  $F_{kr}$ , prut ze sebenepatrnější příčiny ztrácí stabilitu (vybočí, jak je naznačeno čárkovaně na obr. 5.10a,b) a k tlakovému napětí se navíc přidruží ještě ohybové napětí, které může být mnohonásobně vyšší. Toto napětí má největší hodnotu

$$\sigma_{max} = F e / Z , \quad (5.16)$$

kde  $e$  je velikost vybočení. Například u prutu kruhového průřezu bude celkové maximální napětí v krajním vlákne

$$\sigma_{max} = \sigma_{tl} [1 + 8(d/D)] , \quad (5.17)$$

kde  $D$  je průměr prutu,  $d$  je jeho průhyb a  $\sigma_{tl}$  je tlakové napětí před vybočením. Například při vybočení stejně velkém jako je průměr prutu, bude maximální napětí devětkrát vyšší než před vybočením. Při vyboulení se rychle zvětšuje hodnota  $e$ ,



**Obr. 5.10.** Ztráta stability boulením. a, b) ohyb tyčí a podobných štíhlých prvků, c) lokální ztráta stability osově stlačované válcové skořepiny [mdp.eng.cam.ac.uk; wikipedia.com; 26.1.2018].

takže ohybový moment stále narůstá. To má za následek rychlé dosažení meze kluzu, plastického tečení a maximální možné deformace u materiálu houževnatého, anebo dosažení meze pevnosti a lom u materiálu křehkého. Celý proces je tedy zpravidla nestabilní a často končí zhroucením konstrukce.

**Kritické zatížení**, při kterém dojde k vybočení v ideálním případě, je [8,9, 11,12]:

$$F_{kr} = \pi^2 EJ/l_0^2 \quad (5.18)$$

a odpovídající **kritické napětí** ( $F/S$ ) je

$$\sigma_{kr} = \pi^2 E/\lambda^2 . \quad (5.19)$$

V těchto vztazích je  $E$  modul pružnosti,  $J$  je moment setrvačnosti průřezu v ohybu,  $l_0$  je charakteristická délka prutu, zohledňující kromě jeho skutečné délky i způsob upevnění konců, a  $\lambda$  je tzv. štíhlostní poměr ( $=l_0/i$ , kde  $i$  je tzv. poloměr setrvačnosti). V podobném tvaru lze vyjádřit podmínky pro vyboulení také pro desky nebo skořepiny.

Vztahy (5.18) a (5.19) platí pro ideální případ: dokonale přímý prut a tlaková síla působící v jeho ose, resp. v těžišti průřezu. Tyto podmínky nejsou nikdy zcela splněny. Kvůli různým nedokonalostem, tzv. imperfekcím, dochází k vybočování již při několikanásobně nižším zatížení, než je  $F_{kr}$ . Přesto jsou uvedené vztahy užitečné, neboť říkají obecně, že

***Odpor proti vyboulení je tím nižší, čím větší je štíhlost prvku a čím nižší je tuhost materiálu, charakterizovaná modulem pružnosti.***

Štíhlost daného prvku je charakterizována poměrem jeho délky a momentu setrvačnosti, resp. tloušťky, a tuhost materiálu je charakterizována modulem pružnosti.

Vzorce (5.18) a (5.19) lze také využít, jestliže naopak chceme, aby hroucení prvku nastalo při síle nepřekračující určitou požadovanou hodnotu.

Podobné vztahy, s modulem pružnosti, tloušťkou stěny a charakteristickým délkovým rozměrem, platí i pro ztrátu stability vyboulením desek zatížených tlakem ve své střední rovině nebo skořepin. U nich často dochází k lokální ztrátě stability, například při ohybu, ale i při stlačování otevřeného profilu nebo tenkostěnné trubky osovou silou (obr. 5.10c); zde je geometrickým parametrem

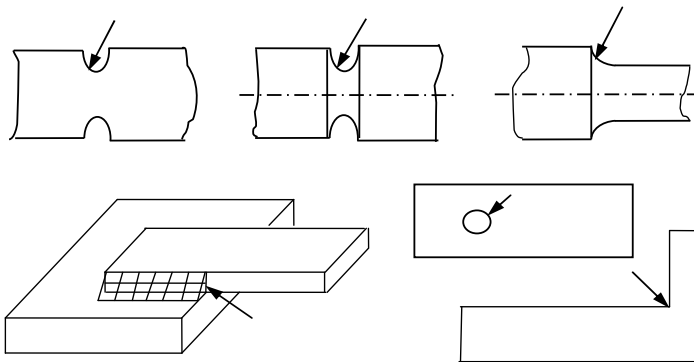
poměr tloušťky stěny a poloměru trubice. Tohoto jevu, lokálního borcení tenkostěnných trubek, se využívá při konstrukci jednorázových absorbérů energie při rázech, například u vlaků nebo automobilů. Podrobnosti lze najít v kapitole 6 a v literatuře, například [19 - 22].

### 5.7 Vliv vrubů a dalších koncentrátorů napětí

Tvar reálných součástí je často složitý, s náhlými změnami tvaru a s vruby (obr. 5.11). Je důležité vědět, že **tělesa s vruby** i jinými koncentrátory napětí mají větší sklon ke křehkému porušení, tj. s malou spotřebou energie, i když jsou z relativně houževnatého materiálu. To je pochopitelné z obr. 5.12. V oblasti vrubu je napětí rozloženo nerovnoměrně. Nejvyšší je v kořeni vrubu a směrem do materiálu klesá. Podrobné rozložení napětí lze zjistit počítačovou analýzou. Přibližnou hodnotu maximálního napětí na povrchu vrubu dostaneme z jednoduchého vztahu

$$\sigma_{\max} = \alpha \sigma_{\text{nom}} \quad (5.20)$$

kde  $\sigma_{\text{nom}}$  je jmenovité napětí v oblasti vrubu a  $\alpha$  je **součinitel koncentrace napětí**. Hodnoty těchto tzv. tvarových činitelů lze pro technicky důležité tvary vrubů a způsoby zatížení najít v různých příručkách, např. [12, 13].

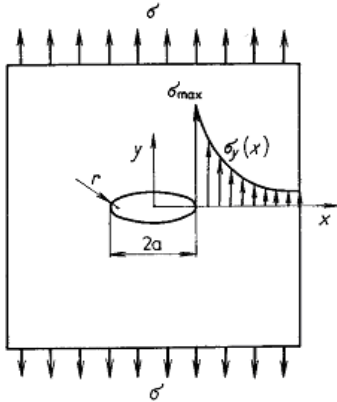


**Obr. 5.11.** Příklady vrubů v součástech. Šipky ukazují nebezpečná místa.

Součást z křehkého materiálu se poruší, jestliže maximální napětí v určitém místě dosáhne meze pevnosti  $\sigma_p$ . Ze vztahu (5.20) vyplývá, že u křehké součásti s vrubem dojde k porušení, jestliže jmenovité napětí dosáhne hodnoty

$$\sigma_{\text{nom}} = \sigma_{\text{Pt}} / \alpha . \quad (5.21)$$

Prakticky to znamená, že vrub snižuje technickou pevnost  $\alpha$ -krát !



**Obr. 5.12.** Deska s otvorem a koncentrace napětí u jednoho vrcholu (schematicky).

Materiály tvárné se zpočátku deformují pružně. Když ale někde napětí překročí mez kluzu, materiál se v daném místě deformuje plasticky a spotřebovává se zde více energie. U součástí s vrubem je v důsledku nehomogenního rozložení napětí v oblasti vrubu ale plastické tečení omezeno jenom na malý objem materiálu v těchto místech. Celková spotřeba energie například při nárazu je tady proto menší, než by byla u tělesa bez vrubu, s napjatostí homogenní, kde jsou příznivější podmínky pro plastické tečení v daleko větším objemu. (Porovnejme v obr. 5.2 plochu odpovídající elastickému deformování, tj. do dosažení  $\sigma_Y$ , s plochou celého diagramu včetně plastického deformování.) Také platí, že energie, předaná při nárazu, se v tělese jednoduchého tvaru rozloží ve velkém objemu a odpovídající napětí budou poměrně nízká, zatímco v tělese s vrubem je stejné množství energie soustředěno v mnohem menším objemu, takže zde vyvolá relativně intenzivnější plastické tečení, až popřípadě vyčerpání přetvárné schopnosti materiálu a následný lom. Vliv vrubu je možno ilustrovat na případu rázového zatížení trámečku bez vrubu a s vrubem, jaký se užívá při zkouškách vrubové houževnatosti (obr. 5.4). Je-li vzorek hladký, padající kladivo jej ohne, zatímco vzorek s vrubem je přeražen s rysy křehkého lomu.

Velmi nebezpečné jsou **trhliny**, zejména pokud působí tahová napětí. Základy pro posuzování porušení těles s trhlinami budou podrobněji probrány v následujícím oddílu. Chceme-li u součástí z houževnatého materiálu předejít křehkému porušení

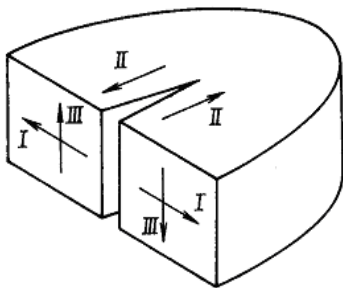
při rázovém zatížení, měli bychom u nich vyloučit trhliny i všechny náhlé tvarové změny a koncentrátoři napětí.

## 5.8 Vliv trhlín, základy lomové mechaniky

Ještě horší situace z hlediska odolnosti vůči rázovému zatížení je u těles, ve kterých je jedna nebo více trhlín. Může jít o trhliny vzniklé během výroby, ale i během provozu, například v důsledku únavy při opakovaném namáhání. U tělesa s trhlínou dojde při nárazu snadno ke křehkému lomu. Trhlina představuje velmi silný koncentrátor napětí, který výrazně omezuje plastické deformování (a tedy i pohlcování energie) v příslušné oblasti. První teoretické analýzy napjatosti, dělané za předpokladu čistě pružných deformací, dávaly v kořeni trhliny nekonečně vysoké napětí, což není možné. Později byly navrženy dva přístupy, které tento nedostatek překonaly [14, 15]. První z nich pracuje s pojmem **faktor intenzity napětí  $K$** . Ten charakterizuje souhrnně vliv jmenovitého napětí  $\sigma_{\text{nom}}$  v oblasti trhliny a její velikosti podle vztahu

$$K_I = \sigma_{\text{nom}} Y \sqrt{l} \quad ; \quad (5.22)$$

$l$  je délka nebo jiný charakteristický rozměr trhliny a  $Y$  je geometrický činitel, který zahrnuje vliv tvaru a polohy trhliny, její relativní velikost vzhledem k velikosti průřezu v daném místě a také charakter rozložení napětí (tah, ohyb apod.). Rozměr je  $\text{Pa}\cdot\text{m}^{1/2}$ , popř.  $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ . Index u faktoru intenzity napětí (I, II nebo III) označuje způsob rozevírání trhliny (obr. 5.13). Trhlina začne rychle růst, jestliže faktor



Obr. 5.13. Základní způsoby rozevírání trhliny.

intenzity napětí dosáhne kritické hodnoty, tzn. při

$$K \geq K_C \quad (5.23)$$

Nejdůležitější je prosté rozevírání trhliny (způsob I). Odpovídající kritická hodnota,  $K_{IC}$ , se nazývá **lomová houževnatost**. Ta se měří na standardních

vzorcích s trhlinou, pro které je dobře známa závislost mezi délkou trhliny a hodnotami  $K_I$ . V podstatě jde o to, že se při postupném zatěžování tohoto vzorku zjistí okamžik, kdy trhlina začne rychle růst, a pro odpovídající délku a zatížení se stanoví příslušná hodnota  $K_I$ , která vlastně představuje lomovou houževnatost  $K_{IC}$ . To, jestli můžeme u jiného tělesa s trhlinou očekávat rychlý lom, zjistíme, jestliže hodnotu faktoru napětí  $K_I$  pro toto těleso s konkrétní trhlinou a zatížením porovnáme s lomovou houževnatostí  $K_{IC}$ , naměřenou pro stejný materiál.

POZNÁMKA. Vzorce nebo grafy pro stanovení faktoru intenzity napětí lze najít v různých příručkách nebo atlasech [16], popřípadě zjistit pomocí vhodného počítačového modelu.

Součást s trhlinou se poruší, jestliže faktor intenzity napětí v určitém místě dosáhne kritické hodnoty  $K_{IC}$ . Ze vztahů (5.22) a (5.23) vyplývá, že u součásti s trhlinou dojde k porušení, jestliže jmenovité napětí dosáhne kritické hodnoty

$$\sigma_{kr} \geq \frac{K_C}{Y\sqrt{l_{kr}}} . \quad (5.24)$$

Protože tvarový činitel  $Y$  závisí i na velikosti trhliny, je někdy nutno nalézt její kritickou délku iteračním postupem.

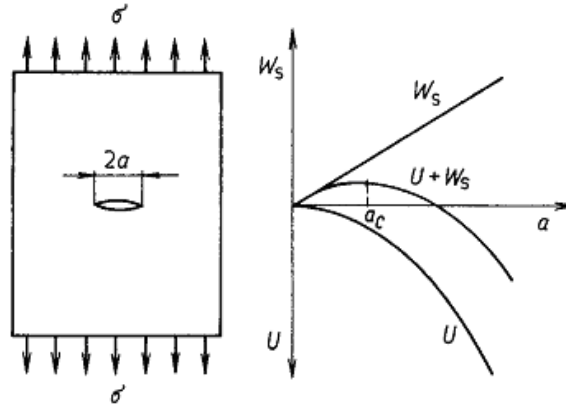
Naopak můžeme pro určité jmenovité (pracovní) napětí  $\sigma_{nom}$  stanovit kritickou délku trhliny,

$$l_{kr} = \left( \frac{K_C}{Y\sigma_{nom}} \right)^2 , \quad (5.25)$$

a ověřit nebo zajistit, že se ve výrobku mohou vyskytnout nanejvýš trhliny o velikosti menší než  $l_{kr}$ .

Druhý přístup k posuzování chování tělesa s trhlinou vychází z energetických principů. V zatíženém elastickém tělese s trhlinou je akumulována energie pružných napětí. Dochází-li k růstu trhliny, tato energie se uvolňuje. Na druhou stranu, růst trhliny vyžaduje energii, která se spotřebovává zejména na plastické deformování materiálu v oblasti velmi vysokých napětí před kořenem trhliny. Situace je znázorněna na obr. 5.14. Energie, spotřebovávaná na vznik nových lomových ploch, roste přímo úměrně s délkou trhliny. Uvolňovaná energie roste úměrně se čtvercem této délky. Zpočátku proto převažuje energie spotřebovávaná

na růst trhliny, ale od určitého okamžiku začne naopak převládat energie tímto růstem uvolňovaná, a lomový proces se stává nestabilním. Pro popis lomového



**Obr. 5.14.** Deska s trhlinou - energetická bilance [15].  
*U* – energie pružných napětí uvolňovaná růstem trhliny,  
*Ws* – energie spotřebovávaná růstem, *ac* – kritická délka

procesu byla zavedena tzv. **rychlost uvolňování energie *G*** jako energie uvolněná při zvětšení plochy trhliny o jednotku plochy ( $J/m^2$ ), a **měrná lomová energie  $\Gamma$** , vyjadřující, kolik energie je zapotřebí na vytvoření lomové plochy jednotkové velikosti ( $J/m^2$ ). Podmínka rychlého šíření trhliny je

$$G \geq \Gamma, \quad \text{resp. } G \geq G_C, \quad (5.26)$$

kde  $G_C$  znamená kritickou hodnotu rychlosti uvolňování energie.

Oba přístupy jsou při posuzování porušení s křehkým charakterem lomu ekvivalentní. Například pro prosté rozevirání trhliny platí

$$G_I = K_I^2 / [E/(1 - \mu^2)] . \quad (5.27)$$

Pro jiné způsoby rozevirání trhliny jsou vztahy podobné.

V tabulce 5.2 jsou uvedeny hodnoty lomové houževnatosti a měrné lomové energie pro některé materiály.



Při posuzování možného porušení vycházíme obvykle z faktoru intenzity napětí. Je však rozumné pohlížet na proces porušení vždycky i z energetického hlediska. Například při rázu je do tělesa dodáno určité množství energie. A jenom tehdy, je-li toto množství větší než hodnota  $\Gamma \times S$ , kde  $S$  je zbývající locha průřezu v místě

**Tabulka 5.2.** Lomová houževnatost  $K_{IC}$  a měrná lomová energie  $G_C$  některých materiálů [17]

Materiál	$K_{IC}$ (MPa m <sup>1/2</sup> )	$G_C$ (J/m <sup>2</sup> )
Ocel	30 – 140	1000 – 85000
Šedá litina	10 – 25	860 – 5400
Keramika (různé druhy)	1 – 20	2 – 2000
Sklo	0,6 – 1,0	6 – 10
Epoxidová pryskyřice	0,5 – 2,0	50 – 200

s trhlinou, můžeme očekávat úplný lom. Podobným způsobem je také možno předpovědět, o kolik se nárazem zvětší existující trhlina a k jaké degradaci pevnosti tělesa přitom dojde.

Nyní si všimneme porušení křehkých těles bez zjevných trhlin. Ukážeme si také, že někdy může porušení nastat různými způsoby v závislosti na podmínkách zatížení.

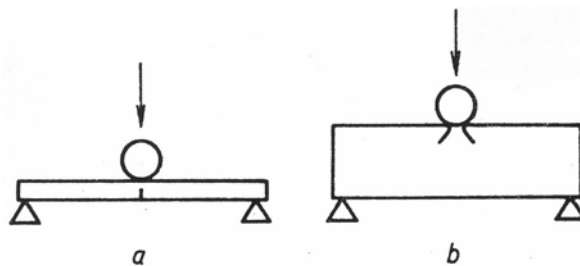
## 5.9 Porušení těles z křehkých materiálů

Porušení součásti například z keramiky nebo skla úderem jiným tělesem bude záviset na jeho rychlosti, dále na geometrii a rozměrech obou těles a popřípadě na způsobu podepření nebo uložení. V závislosti na nich může dojít k poškození různými způsoby. Charakteristické rysy porušení ve dvou případech si ukážeme na příkladu tělesa ve tvaru nosníku podepřeného na obou koncích, na který narazí druhé těleso ve tvaru malé koule z pevného materiálu (obr. 5.15).

Jakmile dojde ke vzájemnému dotyku, začnou se obě tělesa deformovat v místě kontaktu a kromě toho dochází k prohýbání nosníku. Rychlost letící koule klesá a její kinetická energie se mění postupně v kinetickou energii nosníku a v energii napjatosti akumulovanou v obou tělesech. (Kromě toho dochází k akumulaci a rozptýlení části energie v místech podepření nosníku.) Nyní mohou nastat tři

případy. Je-li energie letící koule malá, přemění se prakticky celá v energii napjatosti a koule i nosník se při dosažení určité deformace zastaví. Vzápětí ale dojde k jejich zpětnému odpružení a odskočení a ke kmitavému pohybu nosníku (popřípadě k opakování celého procesu v případě, že se jednalo o svislý pád koule na vodorovný nosník). Toto kmitání se v důsledku vnitřního tření v materiálu a dalších ztrát utlumí. Jestliže je energie úderu značně vysoká, dojde ještě před zastavením koule k rozrušení nosníku. Koule i části nosníku potom pokračují dále v pohybu. Ve třetím případě sice dojde ke vzniku prasklin, ale nosník si zachová celistvost.

Porušení nosníku může být obecně dvojího druhu v závislosti na rozměrech nosníku a koule a na podmínkách nárazu [15]. U tenkých nosníků nebo desek budou



**Obr. 5.15.** *Různé způsoby porušení při nárazu koule [15]:  
a) účinkem ohybových napětí, b) účinkem kontaktních napětí*

převládat ohybová napětí, takže lom nastane ohybem (obr. 5.15a). U tlustých nosníků a desek, s velkou tuhostí v ohybu, budou ohybová napětí malá a spíše lze očekávat poškození v místě nárazu (například vznik kuželového lomu, obr. 5.15b). V některých případech nastanou oba způsoby porušení.

Není-li rychlost úderu velká, vycházíme při určování velikosti napětí ze vztahů pro napětí, deformace a energii napjatosti při statickém zatížení, a dále z předpokladu, že se energie rázu přemění v energii pružných napětí. V našem případě vzniká v nosníku jednak napjatost ohybová, jednak kontaktní.

### Ohybová napjatost

Působí-li osamělá síla  $F$  uprostřed dlouhého tenkého nosníku, podepřeného na okrajích, vyvolá jeho prohnutí [15]

$$y = FC_0 = F l^3 / (48 EJ_0), \quad (5.28)$$

kde  $C_0$  je poddajnost nosníku v ohybu,  $l$  jeho délka a  $J_0$  moment setrvačnosti průřezu v ohybu. Maximální tahové (ohybové) napětí působí uprostřed rozpětí nosníku, na povrchu protilehlém působící síle, a má velikost

$$\sigma_0 = F l / (4Z), \quad (5.29)$$

kde  $Z$  je modul průřezu nosníku v ohybu. Akumulovaná energie ohybových napětí je rovna

$$E_{\text{pot,ohyb}} = \frac{1}{2} F y = \frac{1}{2} C_0 F^2 = l^3 / (96 E J_0) F^2. \quad (5.30)$$

### Kontaktní napjatost

Je-li koule o poloměru  $R$  vtačována do rovného povrchu masivního tělesa, vznikne zde kontaktní ploška kruhového tvaru o poloměru  $a$ . Střed koule se posune o hodnotu [8, 15]

$$y = C_{\text{kon}} F^{2/3} = [9F^2 / (16R_e E_e^2)]^{1/3}, \quad (5.31)$$

kde konstanta  $C_{\text{kon}}$  je tzv. kontaktní poddajnost,  $R_e$  je ekvivalentní poloměr křivosti stýkajících se povrchů a  $E_e$  je ekvivalentní modul pružnosti obou materiálů v kontaktu. Pro tyto dvě konstanty platí

$$1/R_e = 1/R_1 + 1/R_2, \quad 1/E_e = (1 - \mu_1^2)/E_1 + (1 - \mu_2^2)/E_2 \quad (5.32)$$

$R_1$ , resp.  $R_2$  je poloměr křivosti tělesa 1, resp. 2 v místě kontaktu,  $E_1$  a  $E_2$  jsou jejich moduly pružnosti a  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  jsou Poissonova čísla. Je-li jeden povrch (např. tělesa 2) rovinný, platí  $1/R_2 = 0$ ; je-li vydutý, má  $R_2$  zápornou hodnotu. Ze vztahu (5.31) je zřejmé, že deformace není přímo úměrná působící síle, jako například při ohybu, ale roste s její obecnou odmocninou (2/3). Maximální tahové napětí působí na okraji kontaktní plošky a má velikost

$$\sigma_{\text{kon}} = [(1 - 2\mu)/3] p_0; \quad (5.33)$$

$p_0$  je maximální tlak ve středu kontaktní plošky, pro který platí

$$p_0 = 3/2 P / (\pi a^2) = \pi^{-1} (6FE_e^2/R_e^2)^{1/3}. \quad (5.34)$$

Energie napjatosti, akumulovaná v oblasti kontaktu, je

$$E_{\text{pot, kont}} = 2/5 C_{\text{kont}} F^{5/3} \quad (5.35)$$

Celková akumulovaná energie je rovna součtu energie ohybové a kontaktní napjatosti,

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{pot, ohyb}} + E_{\text{pot, kont}} = 1/2 C_o F^2 + 2/5 C_{\text{kont}} F^{5/3} \quad (5.36)$$

Energie nárazu je rovna

$$E_{\text{imp}} = 1/2 m v_0^2, \quad \text{popř. } E_{\text{imp}} = mgh, \quad (5.37)$$

kde  $m$  je hmotnost koule,  $v_0$  její rychlost v okamžiku dopadu na nosník,  $g$  je gravitační zrychlení a  $h$  je výška pádu.

Za předpokladu, že se veškerá energie rázu přemění v energii napjatosti, tzn.

$$E_{\text{imp}} = E_{\text{pot}}, \quad (5.38)$$

můžeme při známých poddajnostech  $C_o$  a  $C_{\text{kon}}$  stanovit z rovnice (5.36) maximální velikost síly  $F$  a odpovídající ohybová i kontaktní napětí a posoudit, zda součást náraz vydrží či nikoliv. Naopak je také možno při dané pevnosti materiálu určit energii úderu, kterou součást ještě snese. V případě, že skutečná energie nárazu je větší, dojde k porušení součásti a přebytek energie se spotřebuje na tvorbu lomových povrchů, urychlení částí rozbitého tělesa a na další pohyb koule.

Nebezpečnost rázového zatížení ukážeme na dvou příkladech podle [15].

**P ř í k l a d 1.** Na skleněný vzorek ve tvaru trámečku o šířce 10 mm, tloušťce 3 mm a délce 100 mm, podepřený na delších koncích, dopadne z výšky 5 cm ocelová kulička o průměru 20 mm. Stanovte maximální napětí při nárazu a porovnejte s napětím vyvolaným volně ležící kuličkou.

Materiálové konstanty nosníku a kuličky jsou:  $\rho_1 = 2500 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\rho_2 = 7820 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $E_1 = 70 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 210 \text{ GPa}$ ,  $\mu_1 = 0,25$ ,  $\mu_2 = 0,3$ . Charakteristické konstanty nosníku jsou  $C_o = 13,2 \times 10^{-6} \text{ m N}^{-1}$ ,  $C_{\text{kon}} = 0,261 \times 10^{-6} \text{ m N}^{-2/3}$ , modul průřezu v ohybu  $Z = 1,5 \times 10^{-8} \text{ m}^3$ . Hmotnost kuličky je  $m_2 = 32,8 \text{ g}$ .

Ve statickém případě vyvozuje zatížení nosníku vlastní tíha kuličky, tj.  $F_{\text{stat}} = m_2 g = 0,322 \text{ N}$ . V dynamickém případě vycházíme z energie úderu, která je rovna  $W = mgh = 16,1 \times 10^{-3} \text{ J}$ . Dosadíme-li tuto hodnotu místo  $U$  do rovnice (5.36), dostaneme, že maximální síla nárazu bude  $F_{\text{dyn}} = 49,2 \text{ N}$ , tedy zhruba 150krát vyšší než při zatížení vlastní tíhou ! Podobně vzrostou i napětí: maximální ohybové napětí bude při statickém zatížení  $\sigma_{o,\text{stat}} = 0,54 \text{ MPa}$ ; při dynamickém zatížení bude  $\sigma_{o,\text{dyn}} = 82,0 \text{ MPa}$ . Maximální tahové napětí na okraji kontaktní plošky bude při statickém zatížení  $\sigma_{\text{kon,stat}} = 20,9 \text{ MPa}$ , a při dynamickém zatížení  $\sigma_{\text{kon,dyn}} = 111,8 \text{ MPa}$ . Pro úplnost uvedme, že rychlost dopadu kuličky na nosník byla  $v_0 = 1,0 \text{ m}$

$s^{-1}$ , a že energie nárazu se rozdělila mezi energii ohybových a kontaktních napětí takto:  $U_{o,dyn} = 16,0$  mJ,  $U_{kon,dyn} = 0,1$  mJ.

POZNÁMKA. Při výpočtech byl zanedbán vliv vlastní tíhy nosníku, dále energie uvolněná při pohybu kuličky v tíhovém poli během prohýbání nosníku, a energie akumulovaná v místech podepření nosníku.

Z výsledků vyplývá, že zatímco při statickém zatížení vzniknou pouze zanedbatelná napětí, při dynamickém zatížení stejným předmětem (přestože jde o pád z výšky pouhých 5 cm) vzniknou napětí dostatečná pro rozrušení skleněného vzorku, přičemž lze očekávat jak jeho zlomení, tak i poškození v místě kontaktu. Všimněme si ještě, že převážná část energie nárazu se změnila v energii ohybových napětí. To platí zcela obecně u tenkých nosníků i dalších ohebných těles. Někdy se proto při výpočtu dynamických sil zanedbává energie kontaktních napětí a místo z rovnice (5.36) se vychází přímo ze vztahu (5.30). Naopak při nárazu na velmi tuhé těleso je možno uvažovat pouze kontaktní napjatost.

P ř í k l a d 2. Jak se změní poměry, jestliže na vzorek z předchozího příkladu narazí rychlostí  $v_0 = 1$  m/s ostrá korundová částice o velikosti  $d = 0,1$  mm a zaoblení hrany  $R = 0,01$  mm? (Konstanty korundu jsou  $\rho_2 = 4000$  kg m<sup>-3</sup>,  $E_2 = 370$  GPa,  $\mu_2 = 0,25$ , konstanty skla jsou  $E_1 = 70$  GPa,  $\mu_1 = 0,25$ , odpovídající konstanty kontaktu jsou  $R_e = 1 \times 10^{-5}$  m,  $E_e = 67,7849$  GPa, a  $C_{kon} = 2,425 \times 10^{-6}$  m/N<sup>2/3</sup>.)

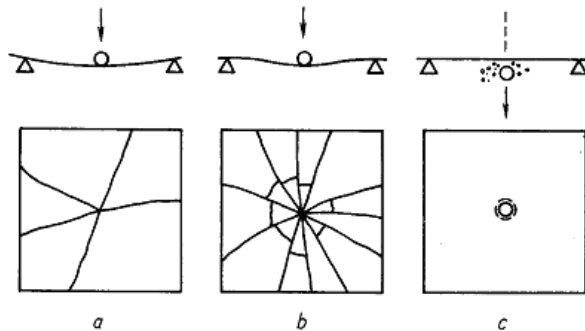
S ohledem na nepatrnou hmotnost částice ( $m = \pi d^3 \rho / 6 = 2,094 \times 10^{-9}$  kg) a energii ( $E_{kin} = \frac{1}{2} m v_0^2 = 1,047 \times 10^{-9}$  J) lze předpokládat, že se účinek nárazu projeví pouze v oblasti kontaktu. Ze vztahu (3.34) dostaneme po úpravě, že maximální síla při nárazu bude

$$F = [5U_{kon}/(2 C_{kon})]^{3/5} = [5 \times 1,047 \times 10^{-9} / (2 \times 2,425 \times 10^{-6})]^{3/5} = 0,016592 \text{ N}$$

Je zřejmé, že ohybová napětí, vyvolaná v trámečku tak malou silou, budou zanedbatelná.

Tlak uprostřed kontaktní plošky podle vztahu (5.34) bude  $p_0 = 5015$  MPa a tahové napětí na jejím okraji bude podle (5.33) rovno  $\sigma_{kon} = 836$  MPa. Vidíme, že i při nepatrných rozměrech může tvrdá letící částice s ostrými hranami vyvolat lokální narušení povrchu.

Větší odchylky od uvedené kvazistatické teorie budou vznikat při vyšších rychlostech úderu. Ve stále větší míře se bude uplatňovat setrvačnost tělesa, na které bylo udeřeno, a omezená rychlost, s jakou se může deformovat. V souladu s tím se bude měnit i charakter deformace a porušení. Na obr. 5.16 jsou znázorněny tři případy porušení skleněné desky, na jejíž střed dopadla ocelová kulička různou rychlostí. Obr. 5.16a odpovídá případu poměrně pomalého zatěžování (do rychlosti nárazu 1 až 2 m/s). Průhybová čára v okamžiku dosažení lomového napětí je stejná, jako ve statickém případě, a rovněž tak charakter vzniklých trhlin a spotřeba energie. Obr. 5.16b odpovídá středním rychlostem úderu (metry až desítky metrů za sekundu). V důsledku setrvačných sil, jež brání rychlému prohýbání desky, bude mít její průhybová plocha v krátké době po nárazu poněkud odlišný tvar než při pomalém deformování, a to s větším zakřivením v místě dopadu koule. Tomu odpovídají i vyšší ohybová napětí, takže k lomu může dojít dříve, než síla  $F$  vzroste



**Obr. 5.16.** Lom skleněných desek při různé intenzitě úderu.

na hodnotu, která by vyvolala lom při statickém zatížení. Také energie, akumulovaná v okamžiku lomu bude menší. (Na druhou stranu se ale může projevit vyšší pevnost při velmi krátkých trváních zatížení.) Obr. 5.16c odpovídá vysokým rychlostem úderu (řádově stovky metrů za sekundu). Prakticky ještě dříve, než se začne deska prohýbat, dostoupí kontaktní napětí takových hodnot, že vznikne kruhová rozšiřující se trhlina, která projde celou tloušťkou desky - z tabule je vyražen malý kousek ve tvaru komolého kužele [15]. V tomto případě je energie ohybových napětí zanedbatelná a uplatní se pouze energie napětí kontaktních.

V praxi se může vyskytnout mnoho dalších případů rázového zatížení. Obecné zákonitosti jsou ale podobné jako v případech uvedených zde.

## Literatura ke kapitole 5.

1. Pružnost a pevnost, II. díl. ČVUT, Praha, 1966. 134 s.
2. Pešina, E.: Základy užité teorie plasticity. SNTL, Praha, 1966. 188 s.
3. Guoxing, Lu, Tongxi, Yu: Energy absorption of structures and materials. Woodhead Publishing, 2003. ISBN 978-1-85573-688-7, 978-1-85-573858-4.  
Též: <https://www.sciencedirect.com/science/book/9781855736887> (12.02.2018)
4. Veles, P.: Mechanické vlastnosti a skúšanie kovov. ALFA, Bratislava, 1985. 408 s.
5. ČSN 73 1401. Navrhování ocelových konstrukcí. Česká technická norma. Český normalizační institut, Praha, 1994, 1998.
6. Haddad, Y. M.: Viscoelasticity of Engineering Materials. Springer, Berlin, 1995, 2012. 378 s.
7. Tschoegl, N. W.: The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior: An Introduction. Springer, Berlin, 1989. 768 s.
8. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 376 s.
9. Černoch, S.: Strojně technická příručka, díl 1. (12. vydání) SNTL, Praha, 1968. 1183 s.
10. Hořejší, J., Šafka, J. a kol.: Statické tabulky. SNTL, Praha, 1987. 688 s.
11. Krutina, J. Sbíрка vzorců z pružnosti a pevnosti. SNTL, Praha, 1962. 240 s.
12. Hájek, E., Puchmajer, P.: Stabilita pružných soustav. Ediční středisko ČVUT, Praha, 1981. 174 s.
13. Höschl, C. a kolektiv: Tabulky pro konstruktéry. SNTL, Praha, 1961. 156 s.
14. Broek, J. D.: Elementary engineering fracture mechanics. Noordhoff International Publishing, Leyden, 1974. 2. vydání, Sijthoff and Noordhoff, 1978. 437 s.14.
15. Menčík, J.: Pevnost a lom skla a keramiky. SNTL, Praha, 1990. 392 s.
16. Murakami, Y. (editor): Stress Intensity Factors Handbook 1, 2, 3. Pergamon Press, Oxford – New York, 1987 – 1992.
17. Menčík, J.: Mechanics of Components with Treated or Coated Surfaces. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996. 360 s
18. Ashby, M.: Useful solutions for standard problems. Volně přístupný soubor (pdf) po zadání názvu do Google. (březen 2018).
19. Marsolek, J., Reimerdes, H-G. Energy absorption of metallic cylindrical shells with induced non-axisymmetric folding patterns. International Journal of Impact Engineering, 30(8):1209–1223, 2004.

20. Dellner Company website: [http://www.dellner.com/assets/img/slider\\_1\\_m.jpg](http://www.dellner.com/assets/img/slider_1_m.jpg), 2016 (leden 2016).
21. Voith. Connect and protect: Coupler and front end systems. viz: (listopad 2015) [http://resource.voith.com/vt/publications/downloads/1994\\_e\\_g1712en\\_internet.pdf](http://resource.voith.com/vt/publications/downloads/1994_e_g1712en_internet.pdf),
22. Özyurt, E.: Energy absorption of truncated shallow cones under impact loading. Doktorská disertační práce, Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera, 2018. 113 s.



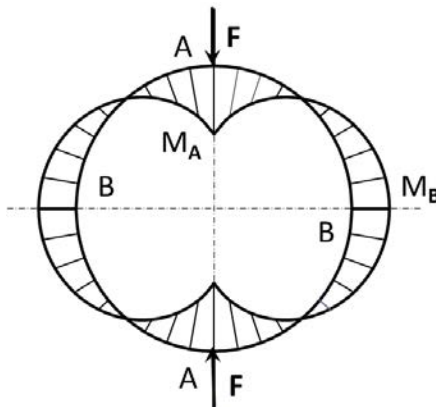
## 6. Konstrukční prvky pro tlumení rázů

V této kapitole ukážeme, jak fungují z hlediska pohlcování energie a tlumení nárazů různé typy používaných prvků, jako například prstence a jejich soustavy, skořepiny, voštiny a další prvky s buněčnou strukturou, přehrnované kovové trubice, vzduchové polštáře a hydraulické tlumiče.

### 6.1 Prstence a jejich soustavy

Účinným základním prvkem pro jednorázové pohlcování mechanické energie jsou kovové prstence, v nichž se vyvolávají plastické deformace osamělými silami radiálního směru (Obr. 6.1). Tyto síly vytvářejí ohybové momenty a napětí. Situace v nejjednodušším případě dvou sil působících v protilehlých bodech A na prstenc o poloměru  $R$  je znázorněna na obrázku. Nejprve vznikají pouze pružné deformace. Ohybový moment v řezu vedeném pod úhlem  $\varphi$  ke směru působící síly je [1, 2]:

$$M(\varphi) = \frac{1}{2} FR (2/\pi - \sin \varphi) . \quad (6.1)$$



*Obr. 6.1. Kruhový prstenc zatížený dvěma silami v bodech A. Rozložení ohybových momentů.*

Maximální ohybový moment a napětí jsou v působištích sil (řez A;  $\varphi = 0$ ):

$$M_A = (1/\pi) FR = 0,3183 FR \quad (6.2)$$

Odsud se moment mění plynule do bodu B, kde nabývá menší maximální hodnoty opačného smyslu,

$$M_B = -0,1817 FR ; \quad (6.3)$$

viz též vzorec (6.10b) pro  $n = 2$ . Jakmile ohybový moment v průřezu A dosáhne hodnoty

$$M_Y = \sigma_Y Z , \quad (6.4)$$

kde  $Z$  je elastický modul průřezu prstence v ohybu a  $\sigma_Y$  je mez kluzu materiálu, začnou v krajních vláknech vznikat plastické deformace; všude jinde se materiál deformuje pružně. Pro obdélníkový průřez platí  $Z = bh^2/6$ , kde  $b$  je jeho šířka a  $h$  je tloušťka ve směru působící síly; pro kruhový průřez je  $Z = \pi d^3/32$ , kde  $d$  je průměr průřezu prstence. Odpovídající zatížení je

$$F_Y = (1/0,3183) M_Y / R = \pi \sigma_Y Z / R \quad (6.5)$$

Pro jednoduchost budeme dále předpokládat elasticko-plastický materiál bez zpevnění. U něj i při větším přetvoření zůstává napětí rovno mezi kluzu (obr. 5.2c). Podobně, jako bylo popsáno v kapitole 5.5, se v řezu A postupně zvětšuje tloušťka plasticky deformovaných vnějších vrstev, až při zatížení

$$F_{pl,1} = \pi \sigma_Y Z_{pl} / R \quad (6.6)$$

elastické jádro vymizí a průřez A je zcela zplastizován; říkáme, že se zde vytvořil plastický kloub (blíže viz kapitolu 5.5). Odpovídající ohybový moment je

$$M_{pl} = \sigma_Y Z_{pl} , \quad (6.7)$$

kde  $Z_{pl}$  je tzv. plastický modul průřezu; pro obdélníkový průřez je  $Z_{pl} = bh^2/4$ , a pro kruhový průřez  $Z_{pl} = d^3/6$ .

Při vytvoření plastického kloubu v řezu A je větší část prstence deformována dosud pružně a celkové deformace jsou malé. Při dalším zvyšování zatížení rostou napětí jen mimo oblast plastických kloubů, ve které zůstávají konstantní. Při velikosti sil

$$F_{pl,2} = F_m = 4 M_{pl} / R \quad (6.8)$$

vzniknou plastické klouby i v řezech B. Od tohoto okamžiku začnou deformace výrazněji narůstat, a to až do okamžiku, kdy se části A navzájem dotknou. Jestliže budeme předpokládat, že v této fázi bude přibližně konstantní délka ramene  $R$ , na kterém působí síla  $F$ , je práce, vykonaná od počátku plastického deformování až

po maximální možné posunutí  $R$  bodů A rovna

$$L \approx F_{pl,2} R = 4 M_{pl} . \quad (6.9)$$

Plastické tečení, a tedy i spotřeba energie v uvažovaném případě, je stále koncentrováno v oblastech plastických kloubů. V místech mezi nimi jsou momenty a napětí nižší. Spotřebu energie v prstenci lze zvýšit vytvořením většího počtu plastických kloubů. V obecném případě  $n$  sil radiálního směru platí pro elastické momenty v řezech A a B:

$$M_A = \frac{1}{2} FR (1/\varphi - \cotg \varphi) , \quad (6.10a)$$

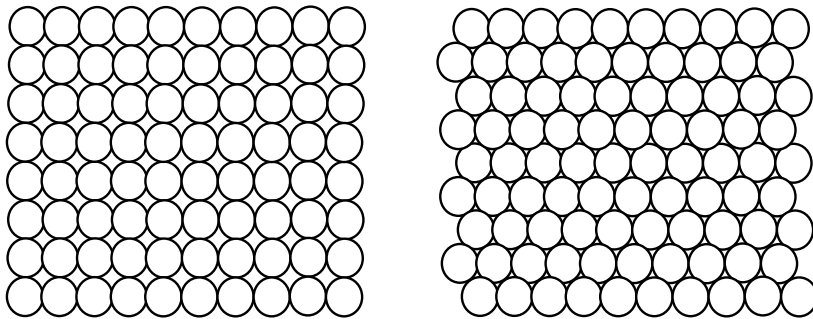
$$M_B = \frac{1}{2} FR (1/\varphi - 1/\sin \varphi) ; \quad \varphi = \pi/n , \quad n \text{ je celé číslo.} \quad (6.10b)$$

Síly nutné pro vyvolání plně plastického tečení (vytvoření plastických kloubů i v místech B mezi působišti osamělých sil) jsou

$$F_{pl,n} = \frac{4}{\sin \varphi} \frac{M_{pl}}{R} = \frac{4}{\sin(\pi/n)} \frac{M_{pl}}{R} \quad (6.11)$$

POZNÁMKA. Vzorec (6.7) platí pro případ, kdy tloušťka prstence ve směru jeho osy je malá, takže ohybové napětí v každém bodě působí pouze ve směru tečny k obvodu prstence. Při velké tloušťce (například jsou-li prstence vytvořeny jako trubky o délce srovnatelné nebo větší než průměr) je rozložení napětí složitější. Při příčném zatížení vznikne stav rovinné deformace a kromě ohybových napětí ve směru obvodovém se ve směru osy trubice objeví ještě napětí o velikosti  $\sigma_y = \mu \sigma_x$ , kde  $\mu$  je součinitel příčné kontrakce (Poissonovo číslo). V takovém případě je odpor vůči plastickému deformování o něco větší. Lze to zohlednit přibližně tak, že do vztahu (6.7) se místo meze kluzu  $\sigma_Y$  dosadí výraz  $\sigma_Y \times (4/3)$ .

Na charakter deformování má vliv i to, jestli zatěžování, resp. deformování probíhá tak rychle, že se uplatňují i setrvačné síly. Pokud je několik prstenců spojeno za sebou ve směru působící síly, šíří se jimi při nárazu elastický impuls (viz též kapitolu 3). Jestliže protilehlý konec řady kroužků je pevný, odrazí se impuls se stejným znaménkem. Momenty a napětí v tomto místě se sčítají, takže kromě plastického deformování prvního prstence v místě nárazu může dojít vzápětí ke zplastizování posledního prstence v místě podepření, zatímco kroužky mezi nimi nejsou tak intenzívně deformovány [2].



**Obr. 6.2.** *Uspořádání prstenců.: a) čtvercové, b - hexagonální*

Soustavy spojených prstenců se používají často. Na charakter jejich deformování má pak vliv celkové uspořádání. Obr. 6.2a ukazuje uspořádání čtvercové, na obr. 6.2b je uspořádání hexagonální. V knize [2], obr. 4.19, je ukázáno, že zatímco při čtvercovém uspořádání se řady, u kterých dochází k borcení kroužků, prohýbají, při hexagonálním uspořádání se jednotlivé řady bortí jako celek.

POZNÁMKA. Prstencovou strukturu měly například pružné drátěnky užívané u starších typů postelí, a podobně vypadají i sítě pro zachycování kamenů padajících na silnici ze skal.

## 6.2 Struktury cik–cak

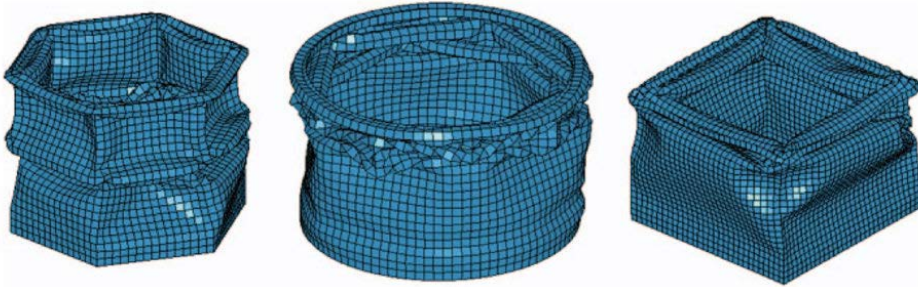
V některých případech bývají vhodné kovové pruty ohnuté způsobem cik–cak. Zatěžující síly mohou tuto „pružinu“ roztahovat nebo stlačovat; musí však být zabráněno jejímu vybočování do stran. Opět se jedná o namáhání prutů ohybem. Největší moment působí v ohybech, a na začátku zatěžování má velikost

$$M = F a . \quad (6.12)$$

Zpočátku se struktura chová jako elastická pružina. Jakmile moment dosáhne hodnoty  $M_Y$  dané vztahem (6.4), začíná se materiál v ohybech plasticky deformovat, a při dosažení momentu  $M_{pl}$  podle (6.7) zde vzniknou plastické klouby. S rostoucí deformací se ohybový moment postupně zvětšuje až k hodnotě  $M_{pl}\sqrt{2}$ . U běžných kovových materiálů dochází při větším přetváření zpravidla ke zpevnování, takže navzdory růstu momentu probíhá proces stabilně až do dosažení maximálního stlačení, kdy se ramena dotknou po celé délce.

### 6.3 Osově symetrické skořepiny zatížené axiální silou

U těchto skořepin dochází při určité velikosti síly k lokálnímu borcení stěn. Jeden příklad byl uveden na obr. 5.10c, další tři jsou na obr. 6.3.



Průřez: Hexagonální

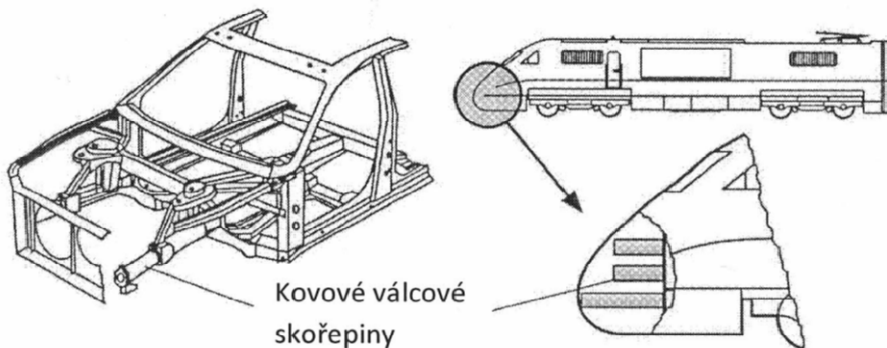
Kruhový

Čtvercový

**Obr. 6.3.** Ukázky borcení tenkostěnných trubic zatížených osovou silou [3, 4].

Tyto obrázky byly získány počítačovým modelováním; poznamenejme, že dnešní programy MKP pro nelineární analýzu dávají výsledky, které se velmi dobře shodují s výsledky experimentů (porovnej tvar lokálních zborcení na obr. 6.3 s fotografií na obr. 5.10c). Při dalším zvyšování zatížení budou vznikat další vlny v dosud nezborcených částech.

Válcové skořepiny se užívají například jako absorbéry čelních nárazů u automobilů nebo železničních vozidel (obr. 6.4). Absorbéry mají někdy tvar komolého kužele, s malým i velkým vrcholovým úhlem [4]. Bývají kovové nebo jsou vyrobené jako kompozitní, vyztužené vlákny. Charakteristickými

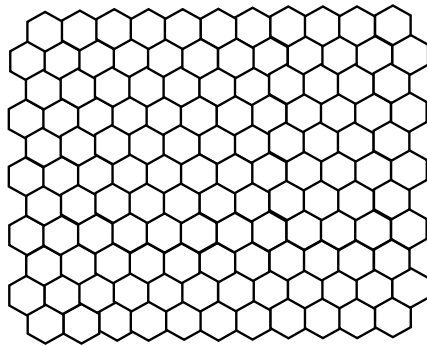


**Obr. 6.4.** Pohlcovače energie nárazu u automobilů a kolejových vozidel [5].

konstrukčními veličinami (pro stanovení kritického zatížení) jsou modul pružnosti, tloušťka stěny a další charakteristický rozměr, například poloměr u válcové nebo kuželové skořepiny nebo délka strany u čtvercové nebo šestiboké (hexagonální) skořepiny apod.

#### 6.4 Materiály s buněčnou strukturou

Energie nárazu může být pohlcována také nevratným deformováním **buněčných struktur** [2, 6, 7]. Jejich důležitými představiteli jsou **voštiny** a **pěny**, známé například ze sendvičových konstrukcí (lyže, vlnitá lepenka, stěny letadel a vozidel aj.). Voštiny jsou rovinné útvary sestávající z mnoha buněk, zpravidla stejného tvaru a rozměrů (Obr. 6.5). V tom jsou podobné strukturám tvořeným prstenci. Pěny jsou prostorové útvary z buněk, které připomínají mnohostěny. Mohou být se stěnami uzavřenými nebo otevřenými a jejich velikost kolísá. Materiálem může být kov, plasty nebo i papírová lepenka, ale buněčnou strukturu mají také různé rostliny, od travin až po dřevo. Může se jednat o látky pružné, viskoelastické nebo pružnoplastické, houževnaté nebo křehké.

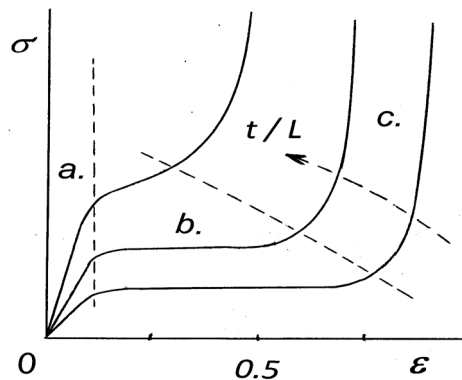


*Obr. 6.5. Buňky s voštinovým uspořádáním.*

Důležitou geometrickou charakteristikou buněčných struktur je **poměrná hustota**, definovaná jako  $r = \rho^*/\rho$ , kde  $\rho^*$  je průměrná hustota buněčné struktury včetně dutin a  $\rho$  je hustota ( $\text{kg/m}^3$ ) materiálu buněk (např. polymeru nebo kovu). U běžných technických kompozitů činí poměrná hustota několik procent. Doplňující veličinou je **pórovitost**  $\eta$ , vyjadřující podíl dutin v kompozitu;  $\eta = 1 - \rho^*/\rho = 1 - r$ .

Deformování voštin nebo pěn při tlumení nárazů připomíná deformování prstenců probírané v předchozí kapitole. Typický vzhled diagramu napětí–přetvoření je na

obr. 6.6;  $\sigma$  je průměrné makronapětí počítané jako síla působící v rovině voštin, vztážená na jednotku celkového průřezu kompozitu včetně dutin. Má zhruba tři oblasti. Při nízkých napětích (oblast *a*) jsou deformace pružné a napětí roste přímo úměrně s deformací. V určitém okamžiku dosáhne napětí kritické velikosti. U kompozitů z pružného materiálu s tenkými stěnami buněk dochází k jejich boulení a pružnoplastickému prohýbání. Další stlačování probíhá zhruba při konstantním nebo velmi pomalu narůstajícím zatížení (oblast *b*, plató na obr. 6.6). Stěny se více a více bortí. Od jistého okamžiku se již navzájem dotýkají původně protilehlé strany jednotlivých buněk, takže se vlastně jedná téměř o kompaktní těleso, a zatížení potřebné k dalšímu stlačování rychle narůstá (oblast *c*). Má-li tlumení rázu probíhat spíše při konstantní síle, bez špičkových hodnot, musí být tlumič nebo absorbér energie být navržen tak, aby k pohlčení předpokládané energie nárazu došlo ještě v oblasti “b” na obr. 6.6.



**Obr. 6.6.** Křivky napětí – přetvoření při stlačování voštinové stěny – (podle [2]).  
*a* – lineární elasticita (stěny buněk se prohýbají), *b* – plató (např. elastické boulení, plastický ohyb, křehký lom), *c* – zhušťování (stěny buněk se dotýkají). *t* – tloušťka stěny buňky, *L* – charakteristický rozměr buňky.

K elastickému boulení stěn buněk dochází při tzv. **kritickém zatížení**, zmíněném již v kapitole 5.6. Určitou představu dá Eulerova teorie vzpěru prutů, která přibližně platí i pro boulení desek a stěn buněk [8, 9]. Pro přímý prut zatížený v osovém směru tlakovou silou je kritické zatížení

$$F_{kr} = \pi^2 E J / (c L^2), \quad (6.13)$$

kde  $E$  je modul pružnosti v tahu,  $L$  je délka prutu,  $J$  je moment setrvačnosti jeho

průřezu v ohybu a  $c$  je konstanta charakterizující způsob upevnění konců prutu; například při obou koncích vetknutých je  $c = 4$ . Obdélníkový průřez o šířce  $b$  a tloušťce  $t$  ve směru prohnutí má moment setrvačnosti  $J = bt^3/12$  a plochu průřezu  $S = bt$ . Vydělíme-li kritickou silou plochou průřezu  $S$ , dostaneme po úpravě odpovídající **kritické napětí** ve stěně:

$$\sigma_{kr} = k E (t/L)^2, \quad (6.14)$$

kde  $k$  je konstanta. Kritické napětí je takové, při kterém by mělo dojít k vybočení v případě ideálně přímého prutu zatíženého osovou tlakovou silou působící přesně v jeho ose. (Přesněji řečeno, při kritickém zatížení by se mělo vybočení udržet.) Ve skutečnosti dochází k vybočení již při zřetelně nižších zatíženích v důsledku různých nedokonalostí prutu nebo zatížení, takzvaných imperfekcí.

POZNÁMKA. Podobně jako u prutů závisí i u skořepinových dílů kritické napětí pro lokální vyboulení na modulu pružnosti  $E$ , tloušťce stěny  $t$  a charakteristickém rozměru  $L$ , kterým ale nyní může být například u válcové skořepiny její poloměr.

Při vyboulení přistupuje k tlakovému napětí ještě napětí ohybové, které je několikanásobně vyšší, jak bylo ukázáno v kapitole 5. Jedná-li se o voštiny nebo buňky z pružnoplastického materiálu, dochází u nich k plastickému deformování, s nevratnou spotřebou energie. Pokud jsou jejich stěny z materiálu křehkého, lámou se po dosažení meze pevnosti. Při lomových procesech se také spotřebovává energie, i když v menší míře. Ale i tyto lomy, které probíhají při zhruba konstantním napětí, zajišťují, že stlačující síla zůstává přibližně konstantní.

Pro uplatnění takovýchto struktur při návrhu tlumicích prvků je důležitá znalost závislosti síly na velikosti stlačení u konkrétního tytu prvku.

## 6.5 Osově symetrické trhání a přetvarování kovových trubíc

Při vytvoření plastického kloubu a jeho dalším ohýbání se spotřebovává výrazně větší množství energie než při deformování elastickém. Nedostatkem u ohybu přímého prutu zatíženého v příčném směru je omezený rozsah ohýbání (pouze o 90 až 180°) a tedy omezené množství pohlcené energie. Zlepšení lze dosáhnout různými způsoby. Jedním z nich [2] je například **osově symetrické trhání trubíc** ve více směrech, například vtlačováním vhodného trnu, s následujícím trvalým ohýbáním, které se docíluje stáčením již natržených a postupně se prodlužujících

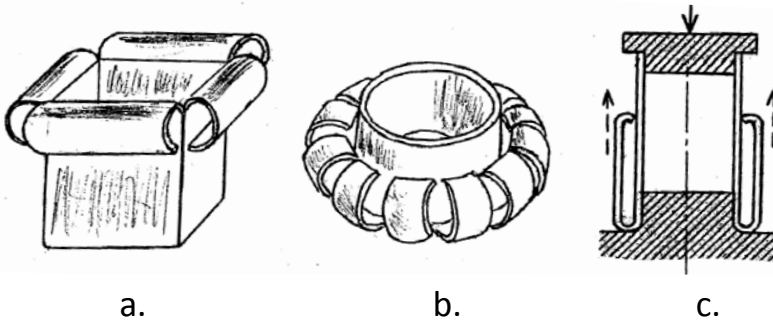


pásků. Obrázek 6.7a ukazuje trhání trubice čtvercového průřezu, kdy při jejím natlačování na jehlanovitý trn na opěrné desce vznikají čtyři stáčené pásky. Obr. 6.7b ukazuje současné trhání více pásků z trubice kruhového průřezu, která je přitlačována osovou silou k vhodně tvarované podložce. V obou případech mohou být v trubici na vhodných místech vytvořeny zářezy nebo drážky, které zajišťují požadované dráhy lomů a konstantní šířku vytvářených pásků. Celková práce  $W$ , vynakládaná silou  $F$  působící na dráze  $x$ , sestává z práce trhání  $W_{\text{trh}}$ , práce plastického ohýbání a stáčení proužků,  $W_{\text{plast}}$ , a práce tření  $W_f$  mezi ohýbanými proužky a tvarovací podložkou, po které se posouvají:

$$W = F x = W_{\text{trh}} + W_{\text{plast}} + W_f. \quad (6.15)$$

Vznikající pásky se buď trvale stáčejí, anebo se po ohnutí opět rovnají, v závislosti na tvaru opěrné desky.

Jiným příkladem přetvarování o relativně velkém rozsahu je osově symetrické **ohýbání s přehrnováním trubíc** z velmi tvárného a houževnatého materiálu,



**Obr. 6.7.** Přetvarování kovových trubíc: a, b) s trháním stěn, c) s přehrnováním.

znázorněné na obrázku 6.7c [2]. Při tlačení shora na vhodně předtvarovanou trubici dochází na dolní opěře k ohybu stěny v meridiánovém směru a vzápětí opět k jejímu narovnání do válcového tvaru, tentokrát o větším průměru. Práce elastických deformací je zanedbatelná ve srovnání s prací plastického přetváření, která je

$$W = F x = W_{\text{plast,ohyb 1}} + W_{\text{plast,ohyb 2}} + W_{\text{membr}} + W_f, \quad (6.16)$$

kde  $W_{\text{plast,ohyb 1}}$  je práce ohýbání meridiánu o  $180^\circ$  v jednom směru a  $W_{\text{plast,ohyb 2}}$  je

práce jeho rovnání,  $W_{\text{membr}}$  je práce membránových napětí vynaložená na trvalé zvětšení nebo zmenšení poloměru v místě přetvarování, a  $W_f$  je práce třecích sil mezi trubici a její opěrou, pokud je tato opěra nutná.

Závislost síly na deformaci je následující. Nejprve síla pro deformování narůstá, ale jakmile dojde k přehnutí části trubice do nového tvaru (tj. k její inverzi), pokračuje již deformování při konstantní síle. To znamená, že vhodným předtvarováním lze vytvořit prvek pro tlumení nárazu, u kterého bude síla přibližně konstantní již od začátku jeho funkce.

## 6.6 Kompozity

Pro tlumení nárazů se používají také kompozitní materiály a součásti. To jsou takové, které sestávají ze dvou nebo více složek o různých vlastnostech, přičemž výsledný materiál má odlišné (a lepší) vlastnosti. Příkladem kompozitního materiálu jsou **vláknové lamináty**, kde v polymerní matici o poměrně nízké pevnosti jsou rozptýlená vysoce pevná vlákna, například skleněná, kevlarová nebo uhlíková. Lamináty se před vytvrzováním tvarují a po něm popřípadě ještě opracovávají na konečné rozměry. Příkladem kompozitní součásti jsou lyže, vytvořené jako sendvič sestávající ze dvou pevných elastických vrstev, mezi nimiž je měkké jádro z pěnového polymeru.

Volbou materiálů složek kompozitu a jejich uspořádáním lze dosáhnout velmi širokého rozpětí vlastností. Je-li účelem zmírnit náraz, požadujeme, aby kompozit měl přijatelnou pevnost a zejména schopnost absorbovat energii nárazu nebo úderu. Mezi aplikace patří části vozidel nebo letadel, ochranné přilby, chrániče kloubů, díly sloužící k ochraně cestujících při kolizi, ale také neprůstřelné vesty; v posledním případě je nutno zabránit proniknutí střely ochrannou vrstvou, ale též omezit maximální sílu úderu střelou.

U **kompozitů vyztužených vlákny** má na spotřebu energie při destrukci vliv materiál vláken, materiál matrice, vlastnosti rozhraní, podíl vláken, tvar vláken, orientace vláken, tj. úhel vláken ve vztahu ke směru osy tělesa a směru zatížení, a pořadí řazení jednotlivých vrstev. Rolí hraje i způsob a podmínky výroby, a také geometrie součásti a podmínky zatížení. Pokud vlastnosti kompozitu závisí na teplotě, je důležitým činitelem i teplota.

Pro zmírnění účinků nárazu není ani tak důležitá vysoká pevnost, jako spíše schopnost plynule absorbovat, resp. disipovat energii při přiměřené (ne příliš vysoké) síle nebo napětí. Energie je pohlcována jednak při plastickém deformování a jednak při lomových procesech. Základní pojmy lomové mechaniky byly vysvětleny v kapitole 4. Spotřeba energie při lomu závisí na měrné lomové energii (tj. energii potřebné na vytvoření lomové plochy jednotkové velikosti) a dále na velikosti vzniklých lomových ploch. U vláknových kompozitů může lom probíhat napříč vlákny, napříč maticí, anebo na rozhraní vlákno-matrice. Protože celková styčná plocha matrice a velkého množství vláken je velká, je výhodné, aby vlákna byla pevná a rozhraní mezi nimi a maticí méně pevné, a jejich uspořádání takové, aby v co největší míře docházelo k šíření trhlin a zvětšování lomových ploch v prostoru mezi vlákny. Příkladem je záměrné třepení kompozitu při porušení v některých aplikacích [2].

**Sendvičové díly** mohou být použity i pro zachycování nárazů ve směru kolmém k rovině sendviče. Z makroskopického hlediska se jedná o desku zatíženou kolmo k povrchu. Energie je akumulována a pohlcována ohýbáním, roztahováním a lomem vnějších vrstev a lokalizovaným drcením jádra mezi nimi. Pro tento účel jsou výborné voštiny a pěny, které se používají na jádra sendvičů. Může dojít i k delaminaci jádra od vnějších vrstev a při vysokých rychlostech nárazu může dojít k proražení sendviče [2]. Roli někdy hraje i rychlost šíření napěťových vln a jejich odraz od konce protilehlého k nárazu.

Zvláštním typem sendviče je vlnitá papírová (popř. jiná) lepenka, která se často používá v obalové technice pro ochranu zboží před poškozením při manipulaci a dopravě. Jádro, jehož uspořádání je podobné jako jedna nebo více řad buněk na obr. 6.5, se při velkých silách deformuje, jeho stěny se bortí a šetrně tlumí náraz.

Specifickou aplikací kompozitů jsou **neprůstřelné vesty** [10]. U nich se využívá poznatku, že střela (z ruční zbraně) může být účinně zpomalena nebo zastavena několika vrstvami pevných textilií nebo vláken. Vysocepevná a houževnatá vlákna například z kevlaru „zachycují“ střelu (a pokud je olověná, otupují také její špičku) a rozprostírají její účinek od vrstvy k vrstvě na stále větší a větší plochu. Tím se zmenšuje koncentrace zatížení. U některých výrobků se vlákna povlékají pryskyřicí, pak se několik těchto vrstev tkaných nebo laminovaných vláken položí na sebe a vloží mezi dvě vrstvy polyetylénu. Je možné vytvořit i více takovýchto vrstev. Dalším problémem, kterému musí neprůstřelná vesta čelit, je vysoká

hybnost (součin hmotnosti a rychlosti) střely nebo letících úlomků například granátu, takže poranění může být způsobeno nikoliv ostrou špičkou, ale velkou silou působící na větší ploše. Proto se někdy do ochranné struktury vkládají destičky z kovu, například oceli nebo titanu, anebo z vysoce pevné a houževnaté keramiky, např. z  $\text{Al}_2\text{O}_3$  nebo karbidů některých kovů. Destičky, které mohou střelu – kromě snížení hybnosti – otupit a rozložit tak zatížení a energii na větší plochu, jsou vhodné proto, že neomezují tolik pohyblivost uživatele jako souvislý pancíř. Konec konců, podobným způsobem se chrání i někteří živočichové, například pásovci, kteří mají krunýř z tvrdých chitinových destiček spojených kůží. Jistým nedostatkem kovových vložek je jejich větší hmotnost (proti textilu), a u keramických vložek zase křehkost, takže vesta s nimi není schopna účinně pohltit více zásahů do stejného místa.

## 6.7 Vzduchové nebo plynové polštáře a polštářky

Viděli jsme několikrát, že náraz může být zmírněn použitím pružného dorazu, například kovové pružiny. Podobnou funkci mohou zastávat i pružiny vzduchové, popřípadě s náplní jiného plynu. Dobře známé jsou též bublinkové fólie pro balení zboží anebo airbagy užívané v automobilech.

**Airbag** funguje následujícím způsobem. Na vhodných místech (například ve volantu nebo v palubní desce před spolujezdcem) je ukryt textilní vak. Při nárazu se aktivuje mechanismus, který velice rychle (obvykle pyrotechnickým procesem) uvolní vak z krytu a spustí v něm vyvíječ plynu, užívající např. azid sodíku ( $\text{NaN}_3$ ) nebo jinou vhodnou látku. Vznikající plyn (v tomto případě dusík) naplní vak před chráněnou osobou, která se o něj opře. Nafouknutý vak tlumí náraz a rozkládá působící sílu rovnoměrně na větší plochu. Konstruktivní řešení může být navíc takové, že plynová náplň při stlačování vaku opírající se osobou uniká pomalu tkaninou ven. To přispívá k tomu, aby nevznikla příliš vysoká špička síly při maximálním stlačení polštáře. (Ideální by bylo brzdění s konstantní silou.)

Malé vzduchové polštáře se často užívají také v obalové technice pro ochranu předmětů přepravovaných v tvrdých krabicích nebo bednách. Může se jednat o tzv. **bublinkové fólie** se spoustou malých bublinek (rozměr cm), nebo o zatavené plastové sáčky naplněné vzduchem. Jsou levné a velmi lehké a jejich tvar se snadno přizpůsobí prostoru, resp. mezeře mezi chráněným předmětem a vnějším tuhým obalem.

V dalším uvedeme základní vztahy pro kontakt brzděného tělesa a plynového polštáře. Mezi tlakem plynu  $p$  a objemem  $V$ , ve kterém je tento plyn uzavřen, platí podle stavové rovnice vztah [11, 12]:

$$p V^n = p_0 V_0^n . \quad (6.17)$$

Index 0 označuje hodnoty na počátku stlačování, a exponent  $n$  je konstanta, charakterizující daný proces, který je obecně polytropický. Pro izotermickou změnu je  $n = 1$ , pro adiabatický proces (bez výměny tepla s okolím) je  $n = 1,4$ . Pro rychlé stlačení v našem případě můžeme přibližně předpokládat  $n = 1,4$ . Počáteční tlak  $p_0$  může být tlak atmosférický, ale i vyšší, v závislosti na konstrukci konkrétního tlumičícího prvku. Objem plynové náplně polštáře je konstantní, a bude-li v průběhu deformování konstantní i plocha  $S$ , ve které se stýká brzděné těleso a polštář, platí mezi tlakem  $p$  a výškou polštáře  $H$  relace

$$p H^n = p_0 H_0^n , \quad \text{resp.} \quad p / p_0 = (H_0 / H)^n . \quad (6.18)$$

POZNÁMKA. U bublinkových fólií je nutno uvažovat, že celková plocha  $S$  je rovna součtu ploch bublinek, které jsou zatíženy.

Nás zajímá také vztah mezi tlakem  $p$  a stlačením polštáře  $\delta$ . Protože platí  $\delta = H_0 - H$ , můžeme vztah (6.18) přepsat následujícím způsobem:

$$p / p_0 = [H_0 / (H_0 - \delta)]^n = [1 - (\delta / H_0)]^{-n} , \quad \text{resp.} \quad p = p_0 [1 - (\delta / H_0)]^{-n} \quad (6.19)$$

Například stlačení původní výšky polštáře o 10% vyvolá (při  $n = 1,4$ ) zvýšení tlaku o 16%, stlačení o 20% (tj. na 80 % původní výšky) zvýší tlak o 37 % apod. Při konstantní styčné ploše platí jednoduchá relace mezi tlakem a silou,

$$F = p S \quad (6.20)$$

POZNÁMKA. Tlak  $p_0$  v nezatíženém tlumiči není pro pozorovatele vně tohoto systému pozorovatelný.

Při použití plynového polštáře pro tlumení nárazu nás spíše než hodnota tlaku  $p$  v uzavřeném polštáři zajímá přírůstek tlaku  $\Delta p$  při jeho stlačování z nulové, resp. rovnovážné polohy. Teprve tento přírůstek vyvozuje brzdou sílu. Ze vztahu

$$p = p_0 + \Delta p \quad (6.21)$$

kde  $p_0$  je tlak v nezatíženém tlumiči, dostaneme

$$\Delta p = p - p_0 \quad (6.22)$$

Po vyjádření tlaku  $p$  ze vztahu (6.19) dostaneme po úpravě

$$\Delta p = p_0 \left\{ \left[ 1 - (\delta / H_0) \right]^{-n} - 1 \right\} \quad (6.23)$$

Energie plynové náplně při stlačení z objemu  $V_0$  na  $V$  vzroste o [8, 9]

$$E_{pot} = p_0 V_0^n \int_{V_0}^V V^{-n} dV = \frac{p_0 V_0}{n-1} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]; \quad (6.24)$$

$V_0$  a  $V$  je objem plynového polštáře před stlačněním a ve stlačeném stavu,  $p_0$  a  $p$  jsou příslušné tlaky. V běžných případech je možno za  $p_0$  dosadit tlak atmosférický. Exponent  $n$  lze pro krátkodobý děj uvažovat roven 1,4 jako pro děj adiabatický, popřípadě o něco nižší. Výchozí objem polštáře tvaru válce o ploše  $S$  a výšce  $H_0$  je

$$V_0 = S H_0 \quad (6.25)$$

Energie  $E_{pot}$ , daná vztahem (6.24), byla odebrána brzděnému tělesu, a je ve stlačeném plynu pouze akumulována. Jakmile je dosaženo maximálního stlačnění, bude zastavené těleso vráceno zpátky. Technicky je ale možno zajistit, aby plyn byl v okamžiku zastavení tělesa nebo krátce před ním z polštáře vypuštěn, takže k odpružení nedojde.

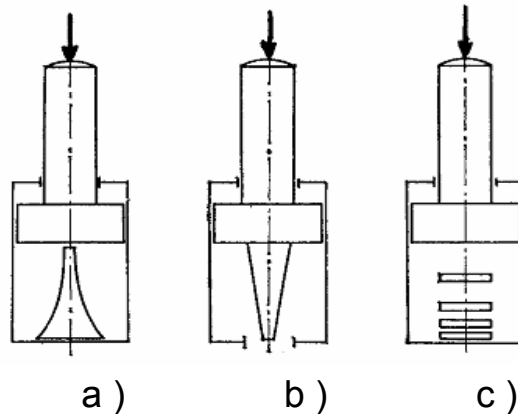
Řešením rovnic (6.22) – (6.24) pro konstrukční parametry  $p_0$ ,  $V_0$ ,  $S$  a energii  $E_{pot}$ , kterou je třeba akumulovat, resp. zmařit, lze určit objem po stlačení a odpovídající maximální tlak a brzdnu sílu. Je ale také možno pro danou energii a přípustnou maximální sílu, popřípadě s přihlédnutím k dalším parametrům, nalézt potřebný objem vzduchového polštáře.

## 6.8 Hydraulické tlumiče s konstantním zpomalením

V předchozí kapitole jsme vyšetřovali zastavování tělesa při různých zadaných parametrech brzdícího zařízení (pružina s lineární charakteristikou, třecí nebo viskózní tlumení aj.). Zde si všimneme případu, kdy je požadováno konstantní zpomalení, jehož má být dosaženo hydraulickým tlumičem. Tento tlumič pracuje tak, že pohybující se píst protlačuje pracovní kapalinu (olej apod.) jedním nebo více otvory menšího průřezu. Škrticím účinkem vzniká v kapalině před otvory

přetlak, který působí proti pístu tlumiče, čímž jej brzdí. U klasických tlumičů vibrací je průřez škrticích otvorů konstantní. Protože spád tlaku na škrticím otvoru nebo štěrbině je tím větší, čím větší je rychlost protékající kapaliny, roste brzdná síla s rychlostí pístu. Tento typ tlumiče ale není pro účely brzdění nebo tlumení rázů příliš vhodný, neboť dává nelineární průběh brzdné síly s maximální hodnotou na počátku brzdění (obr. 4.4).

Konstantního zpomalení se nejnáze dosáhne, jestliže se v průběhu brzdění zmenšuje průřez škrticích otvorů, a to takovým způsobem, aby i při klesající rychlosti pístu tlumiče zůstal celkový tlak pracovní kapaliny konstantní. Zmenšování průřezu může být buď plynulé (např. píst uzavírá tvarovaný otvor ve stěně válce, obr. 6.8a, nebo tvarovaná jehla uzavírá otvor v čele válce, obr. 6.8b), anebo postupné, kdy ve stěně válce tlumiče je vytvořeno několik štěrbin, které píst jednu po druhé uzavírá (obr. 6.8c) a tak zmenšuje plochu, kudy může před pístem vytékat olej z válce. V tomto případě (obr. 6.8c) není zpomalení ani brzdná síla konstantní, ale kolísá tak, jak jsou postupně uzavírány jednotlivé štěrbin. Zde se omezíme na uspořádání podle obr. 6.8a.



**Obr. 6.8.** *Hydraulický tlumič rázů s konstantním zpomalením (různá uspořádání). a) proměnlivá velikost otvoru ve stěně, b) jehla proměnlivého průměru, c) řada štěrbin o různých roztečích ve stěně.*

### **Plynulé uzavírání škrticího otvoru**

Jde-li krátký škrticí otvor (např. ve dně tlumiče), vzniká v něm turbulentní proudění, a spád tlaku na tomto otvoru, a tedy i tlak na píst tlumiče, je [13]:

$$p = \frac{\xi \rho v_k^2}{2}, \quad (6.26)$$

kde

$v_k$  – rychlost kapaliny,

$\rho$  – hustota kapaliny,

$\xi$  – ztrátový součinitel, který obecně závisí na viskozitě kapaliny, tvaru otvoru, průtočném množství a dalších činitelích; pro daný typ tlumiče jej lze považovat za konstantu.

Vyjádříme-li ve vztahu (6.26) rychlost kapaliny  $v_k$  prostřednictvím rychlosti pístu tlumiče  $v$ ,

$$v_k = v S_p / S, \quad (6.27)$$

kde  $S_p$  je účinná plocha pístu a  $S$  průřez škrticího otvoru, potom s přihlédnutím k tomu, že rychlost pístu, průřez škrticího otvoru a popř. i tlak mohou záviset na dráze pístu  $x$ , dostaneme výraz

$$p = \frac{\xi \rho S_p^2}{2} \left( \frac{v(x)}{S(x)} \right)^2. \quad (6.28)$$

Má-li být zpomalení při brzdění konstantní,  $a_b = \text{konst.}$ , musí – s přihlédnutím ke vztahu

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d(v^2)}{2dx} = -a_b \quad (6.29)$$

platit pro rychlost pístu tlumiče

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 - 2a_b x} = v_0 \sqrt{1 - (x/x_b)}, \quad (6.30)$$

kde  $v_0$  je rychlost na počátku brzdění a  $x_b$  brzdná dráha.

Vyjádříme-li dále brzdnou sílu  $F_b$  prostřednictvím hmotnosti  $m$  a zpomalení brzděného tělesa  $a_b$ , jakož i prostřednictvím tlaku  $p$  pracovní kapaliny a plochy pístu  $S_p$ ,

$$F_b = m a_b = -p S_p, \quad (6.31)$$

dostaneme po sloučení vztahů (6.27) – (6.31) a po úpravě následující závislost okamžitého průřezu škrticího otvoru na poloze pístu  $x$  [14, 15]:



$$S(x) = \sqrt{\frac{\xi \rho S_p^3 x_b}{m} \left(1 - \frac{x}{x_b}\right)} = S_0 \sqrt{1 - \frac{x}{x_b}}, \quad (6.32)$$

kde

$$S_0 = \sqrt{\xi \rho S_p^3 x_b / m} \quad (6.33)$$

je celkový průřez škrticího otvoru na počátku brzdění. (Je zřejmé, že průběh relativní změny průřezu škrticího otvoru,  $S(x)/S_0$ , v závislosti na relativní dráze brzdění,  $x/x_b$ , bude u všech tlumičů s konstantním zpomalením stejný.)

Ze vztahů (6.27) – (6.33) a z podrobnějšího rozboru vyplývají tyto charakteristické rysy uvedeného typu tlumiče:

1. Těleso o hmotnosti  $m$  a počáteční rychlosti  $v_0$  bude zabrzděno na dráze  $x_b$  při konstantním zpomalení

$$a_b = \frac{v_0^2}{2x_b}; \quad (6.34)$$

brzdná síla je dána vztahem (6.31). Energie zmařená při brzdění je

$$W = \frac{mv_0^2}{2}. \quad (6.35)$$

2. Je-li skutečná hmotnost  $m'$  brzděného tělesa větší než původně předpokládaná  $m$ , nestačí tuto hmotu tlumič dostatečně brzdit. Rychlost klesá pomaleji, takže v určitém místě je skutečná rychlost větší než předpokládaná, a tedy větší je i brzdná síla. Relativní nárůst brzdné síly se v průběhu brzdění zvyšuje. Při relativně malých brzděných hmotách naopak klesá rychlost rychleji a brzdná síla je menší než původně předpokládaná; narůstá však doba brzdění. Vliv změn hmotnosti lze eliminovat změnou průřezu škrticího otvoru tak, aby byly splněny relace (6.32) a (6.33).

3. Je-li skutečná počáteční rychlost  $v_0'$  brzděného tělesa větší než původně předpokládaná  $v_0$ , bude průběh rychlostí při brzdění podobný, s tím, že skutečné rychlosti budou v celém průběhu brzdění větší v poměru  $v_0'/v_0$ ; ve stejném poměru se zkrátí doba brzdění. Zpomalení a brzdné síly se zvětší v poměru  $(v_0'/v_0)^2$ . Vliv

změny počáteční rychlosti lze eliminovat změnou brzdné dráhy tak, aby byla zachována relace (6.30).

Hydraulické tlumiče se dají používat opakovaně. Proto se užívají u různých strojů nebo manipulačních zařízení, zejména tam, kde je potřeba utlumit pohyb těžkých částí, například při manipulaci s formami u sklářských strojů. V takových případech je nutno kontrolovat disipovaný výkon a ověřit, jestli se vzniklé teplo stačí odvádět přirozeným způsobem, popřípadě navrhnout vhodné chlazení pracovní kapaliny. Střední výkon tlumiče se počítá jako

$$P_{stř} = \frac{\text{energie zmařená v jednom pracovním cyklu}}{\text{trvání cyklu}} \quad (6.36)$$

Podrobněji je teorie hydraulických tlumičů s konstantním zpomalením popsána například v [14, 15], kde je také probrán případ tlumiče s řadou otvorů ve stěně válce, které jsou postupně uzavírány pístem. Informace o některých prodávaných hydraulických tlumičích rázů lze najít např. v [16, 17].

Další komerční tlumiče rázů a absorbéry energie jsou popsány v [18] – [20]. Dnes se stále více uplatňují počítačové simulace náročných problémů. Informace o programech pro simulování nárazů vozidel (při tzv. crash testech) lze najít např. v [21 – 23], některé videosimulace lze vidět na [24 – 26]. (Ve všech těchto případech se jedná o stav na webu z května 2018.)

## Literatura ke kapitole 6.

1. Černocho, S.: Strojně technická příručka, díl 1. SNTL, Praha, 1968. 1183 s.
2. Guoxing, Lu, Tongxi, Yu: Energy absorption of structures and materials. Woodhead Publishing, 2003. ISBN 978-1-85573-688-7, Electronic ISBN 978-1-85-573858-4. Též na <https://www.sciencedirect.com/science/book/9781855736887>
3. Bayram, B., Gerceker E., Karakaya M.A., Guler, M.E. Cerit: The effect of geometrical parameters on the energy absorption characteristics of thin-walled structures under axial impact loading. International Journal of Crashworthiness, 15(4):377–390, 2010.
4. Özyurt, E.: Energy absorption of truncated shallow cones under impact loading. Doktorská disertační práce, Univerzita Pardubice, DFJP, 2018. 113 s.
5. Marsolek, J., Reimerdes, H-G. Energy absorption of metallic cylindrical shells with induced non-axisymmetric folding patterns. International Journal of Impact Engineering, 30(8):1209–1223, 2004.

6. Gibson, L. J. and Ashby, M. F.: Cellular Solids, Structure and Properties. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997. 510 s.
7. Hilyard, N. C. (editor): Mechanics of cellular plastics. Applied Science Publishers, LTD, London, 1982. 360 s. (Ruský překlad: Příkladná mechanika jačejistých plastmass. Mir, Moskva, 1985.)
8. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 376 s.
9. Hájek, E., Puchmajer, P.: Stabilita pružných soustav. Ediční středisko ČVUT, Praha, 1981. 174 s.
10. [https://cs.wikipedia.org/wiki/Nepr%C5%AFst%C5%99eln%C3%A1\\_vesta](https://cs.wikipedia.org/wiki/Nepr%C5%AFst%C5%99eln%C3%A1_vesta)
11. Kalčík, J., Sýkora, K.: Technická termodynamika. Academia, Praha, 1973. 540 s.
12. Hašek, O., Nožička, J.: Technická mechanika pro elektrotechnické obory. Díl II. (Hydromechanika a termodynamika.) SNTL, Praha, 1968. 288 s.
13. Maštovský, O.: Hydromechanika. SNTL, Praha, 1964. 320 s.
14. Menčík, J.: Hydraulické tlumiče rázů s konstantním zpomalením. Strojírenství, 35 (1985), č. 10, s. 532 - 538.
15. Menčík, J.: Hydraulický tlumič rázů. Výzkumná zpráva úkolu J-55-250-170. VŠST Liberec, 1984.
16. Izolace vibrací, tlumení rázů ENIDINE: <http://www.enidine.com/en-US/Home/>
17. Tlumení rázů a vibrací: <http://www.acecontrols.com/us/products.html>,  
<http://www.ace-ace.de/de/produkte/daempfungstechnik/industriestossdaempfer.html>
18. Dellner Company website: [http://www.dellner.com/assets/img/slider\\_1\\_m.jpg](http://www.dellner.com/assets/img/slider_1_m.jpg),
19. Voith: Connect and protect: Coupler and front end systems. (Květen 2015) [https://voith.com/ita-en/1994\\_e\\_g1712\\_en\\_schaku\\_verbinden-schuetzen\\_2016-09.pdf](https://voith.com/ita-en/1994_e_g1712_en_schaku_verbinden-schuetzen_2016-09.pdf)
20. Voith: Voith lightweight components: New energy absorbers made of fibre composite plastics. [http://www.voith.com/en/press/press-releases-99\\_58828.html](http://www.voith.com/en/press/press-releases-99_58828.html),
21. <http://www.computerhistory.org/makesoftware/exhibit/car-crash-simulation/>
22. <https://www.youtube.com/watch?v=mYYWK1kxzwM>,
23. <https://www.xcitex.com/automotive-crash-tests-automotive-applications-motion-analysis-software.php>
24. [https://www.youtube.com/watch?v=\\_XXJqEY-sXk](https://www.youtube.com/watch?v=_XXJqEY-sXk)
25. <https://www.youtube.com/watch?v=OfHF46Ck-ps>
26. <https://jalopnik.com/the-future-of-crash-testing-is-digital-and-this-is-how-1747788970>

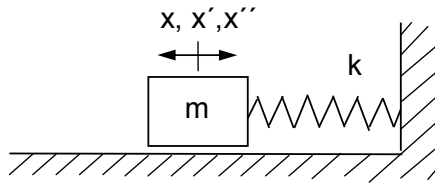
## 7. Vibrace a zmírňování jejich účinků

Rotační i jakékoliv periodické pohyby jsou zdrojem namáhání motorů, strojů a dalších zařízení. U nedokonale vyvážených zařízení se projevují kmitáním a silami přenášenými do základů nebo na sousední tělesa. Zde ukážeme, na čem tyto vibrace a síly závisí a jak je lze zmírňovat nebo eliminovat. Nejprve ale zopakujeme základní pojmy; v podrobnostech odkazujeme na [1 – 7]. Kmitání těles je umožněno dvěma vlastnostmi: pružností a setrvačností. Je-li pružné těleso zatíženo, deformuje se. Po pominutí zatížení se vrací do původního tvaru. Díky setrvačnosti zpravidla následuje překmitnutí opačným směrem, opět návrat atd. – těleso se rozkmitá. Nepůsobí-li žádné vnější síly, hovoříme o tzv. volném kmitání. Tento pohyb je obvykle tlumený a po chvíli ustane. Kdyby tlumení neexistovalo, kmitavý pohyb by trval bez omezení. Často se jedná o kmitání vynucené – například buzení pohonem nebo pohybem zařízení.

V této kapitole si nejprve všimneme volného kmitání netlumeného (kap. 7.1) a tlumeného (kap. 7.2). Kapitola 7.3 je věnována vynucenému kmitání a kapitola 7.4 se zabývá přenosem síly z kmitajícího zařízení do základů. V další kapitole si všimneme tzv. kinematického buzení, které se může vyskytnout i u dopravních prostředků. Kapitoly 7.6, 7.7 a 7.8 jsou věnovány příčnému kmitání nosníků a hřídelů, krouživému kmitání hřídelů a případu, kdy těžiště rotujícího tělesa neleží v ose rotace, ale má určitou excentricitu. Zmíněna je stručně i problematika vyvažování. V kapitole 7.9 si všimneme energií v kmitajících systémech, v kapitole 7.10 vysvětlíme, jak fungují dynamické absorbéry vibrací, a v kapitole 7.11 stručně pojednáme o kmitání soustav a těles s více stupni volnosti.

### 7.1 Volné kmitání bez tlumení

Nejjednodušším případem je těleso upevněné na pružině (obr. 7.1). Pružinou zde myslíme obecně jakékoliv pružné těleso, které se po vychýlení z nedeformovaného stavu a uvolnění rozkmitá. Patří sem tedy i různé nosníky a hřídele. Toto kmitání označujeme za volné, jestliže na těleso nepůsobí žádná vnější síla. Pokud je těleso ve srovnání s rozměry pružiny malé a naopak jeho hmotnost velká, můžeme o něm



Obr. 7.1. Volné kmitání

hovořit jako o hmotném bodu. Pohybová rovnice tohoto tělesa na pružině je:

$$m\ddot{x} + kx = 0 ; \quad (7.1)$$

$m$  je jeho hmotnost (kg),  $x$  je jeho dráha (m), a  $k$  je tuhost pružiny, udávající sílu potřebnou na její jednotkové stlačení (N/m). Tečka nad symbolem značí derivaci podle času,  $dx/dt$ , dvě tečky značí druhou derivaci,  $d^2x/dt^2$ . Vydělením rovnice (7.1) hmotností tělesa  $m$  dostaneme diferenciální rovnici:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 ; \quad (7.2)$$

$\omega$  je **vlastní kruhová frekvence** (úhlová rychlost) kmitavého pohybu ( $s^{-1}$ ), pro kterou platí

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} , \quad (7.3)$$

a která je vázána s frekvencí kmitání  $f$  vztahem

$$\omega = 2\pi f . \quad (7.4)$$

Řešení rovnice (7.2) je:

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) , \quad \text{resp.} \quad x(t) = C \sin(\omega t + \varphi_0) . \quad (7.5)$$

$A$  a  $B$ , anebo  $C$  a  $\varphi_0$  jsou konstanty, které se určí z počátečních podmínek.  $C$  znamená amplitudu kmitavého pohybu a  $\varphi_0$  je úhel odpovídající poloze bodu v čase  $t = 0$ .

**POZNÁMKA.** Pružina zde byla uvažována jako nehmotná. Ve skutečnosti má také určitou hmotnost, což ovlivní i vlastní frekvenci kmitání dané soustavy. Při výpočtech vlastní frekvence lze vliv hmotnosti pružiny přibližně uvažovat tak, že se k hmotnosti kmitajícího tělesa přičte určitá část hmotnosti pružiny; například u šroubovité pružiny jedna třetina.

## 7.2 Volné kmitání s tlumením

Pohyb je často brzděn nějakým odporem, například třením nebo viskózním tlumením. Zde ukážeme případ kmitavého pohybu s tlumením úměrným rychlosti pohybu (obr. 7.2), jak bývá obvyklé u hydraulických tlumičů. Pohybová rovnice je

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \quad (7.6)$$

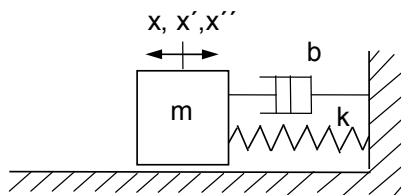
Konstanta  $b$  (Ns/m) vyjadřuje odporovou sílu odpovídající jednotkové rychlosti. Po vydělení rovnice (7.6) hmotností  $m$  dostaneme pohybovou rovnici

$$\ddot{x} + 2N\dot{x} + \omega^2 x = 0; \quad (7.7)$$

$\omega$  je opět kruhová frekvence, definovaná vztahem (7.3), a

$$N = b/(2m); \quad (7.8)$$

je tzv. **koeficient tlumení** ( $s^{-1}$ ). Dvojka ve jmenovateli je z formálních důvodů.



**Obr. 7.2.** Volné kmitání s tlumením

Tvar řešení diferenciální rovnice (7.6) závisí na velikosti konstant  $m$ ,  $b$  a  $k$ , tedy i na velikosti tlumení. Řešení této rovnice pro tři různé případy bylo popsáno v kapitole (4.2). Zde se omezíme na případ podkritického tlumení, kdy pohyb hmotného bodu lze popsat jako

$$x(t) = C e^{-Nt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (7.9)$$

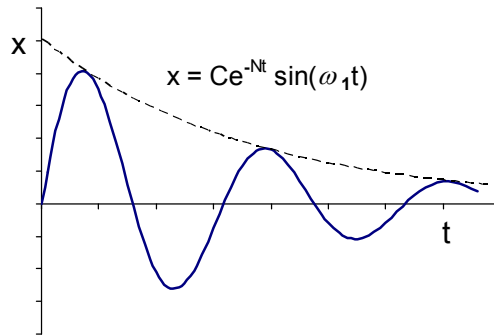
Jedná se také o kmitavý pohyb, ale s amplitudou klesající podle exponenciály (obr. 7.3). Kruhová frekvence systému s tlumením je

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - N^2} = \omega \sqrt{1 - \delta^2}, \quad (7.10)$$

kde

$$\delta = \frac{N}{\omega} \quad (7.11)$$

je tzv. **poměrný útlum**. Kmitání s tlumením při  $\delta < 1$  je tedy o něco pomalejší než kmitání netlumené se stejnými parametry  $m$  a  $k$ , a to tím více, čím větší je útlum  $\delta$ . Při  $\delta = 1$  by již šlo o tzv. kritické tlumení, kdy se vychýlené těleso pouze plynule vrátí do výchozí polohy. Při  $\delta > 1$  hovoříme o tlumení nadkritickém, s ještě rychlejším útlumem.



**Obr. 7.3.** Volné kmitání s útlumem

### 7.3 Vynucené kmitání

Jedná se o velice častý případ. Základní rysy ukážeme na situaci, kdy na pružné nebo pružně uložené těleso působí budící harmonická síla  $F_0 \sin(\Omega t)$  a kdy je přítomno i tlumení úměrné rychlosti pohybu (Obr. 7.4).  $\Omega$  je kruhová frekvence budící síly. Pohybová rovnice je

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin(\Omega t). \quad (7.12)$$

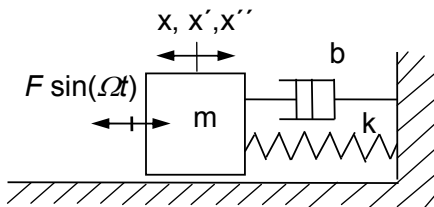
Po jejím vydělení hmotou  $m$  dostaneme následující rovnici pro dráhu:

$$\ddot{x} + 2N\dot{x} + \omega^2 x = a_p \sin(\Omega t + \varphi_p), \quad (7.13)$$

kde

$$a_p = F_0/m \quad (7.14)$$

je amplituda zrychlení při vynuceném kmitání a  $\omega$  je vlastní kruhová frekvence



Obr. 7.4. Vynucené kmitání.

volného kmitání bez tlumení, daná vztahem (7.3). Diferenciální rovnice (7.13) je s pravou stranou, neboli nehomogenní. Její řešení se dostane jako součet řešení  $x_h$  homogenní rovnice (7.7) bez pravé strany a takzvaného partikulárního integrálu  $x_p$ :

$$x = x_h + x_p . \quad (7.15)$$

Řešení homogenní rovnice je stejné jako u volného kmitání. Pro  $\delta < 1$  platí

$$x_h(t) = C e^{-Nt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0) . \quad (7.16)$$

Partikulární integrál  $x_p$  je taková funkce, která vyhovuje diferenciální rovnici (7.13). Vhodný výraz je

$$x_p(t) = r \sin(\Omega t + \varphi_p) \quad (7.17)$$

Po dosazení vztahu (7.17) a jeho derivací do rovnice (7.13) dostaneme po řadě úprav [1]:

$$r = a_p \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2N\Omega)^2}} = \frac{a_p}{\omega^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\delta\eta)^2}} , \quad (7.18)$$

$$\varphi_p = \text{arctg} \frac{b\Omega}{k - m\Omega^2} . \quad (7.19)$$

V těchto vztazích byl užit poměrný útlum  $\delta$  podle vztahu (7.11) a **činitel naladění**  $\eta$ , definovaný jako poměr budící frekvence k vlastní frekvenci netlumeného systému:

$$\eta = \Omega / \omega . \quad (7.20)$$

Je-li budící frekvence  $\Omega$  stejná jako vlastní frekvence  $\omega$ , je systém je v rezonanci.



Výsledné úplné řešení rovnice (7.13) je tedy

$$x(t) = C e^{-Nt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + r \sin(\Omega t + \varphi_p), \quad (7.21)$$

kde  $C$  je konstanta. Bez ohledu na velikost tlumení vymizí po určité době první složka (s členem  $e^{-Nt}$ ), která představuje přechodový jev. Zůstává pak jenom trvalá (stacionární) složka

$$x(t) = r \sin(\Omega t + \varphi_p), \quad (7.22)$$

kteřá popisuje vynucené kmity v ustáleném stavu. Ty mají zpravidla rozhodující význam pro chování např. strojních zařízení. Pro posouzení těchto kmitů je důležitá amplituda  $r$  a fáze  $\varphi_p$  stacionární složky. Je užitečné zavést tzv. **poměrnou amplitudu**  $\xi$  jako poměr amplitudy kmitavého pohybu  $r$  a statické výchylky  $r_{st}$  způsobené budicí silou  $F_0$ :

$$\xi = r/r_{st}, \text{ kde } r_{st} = F_0/k. \quad (7.23)$$

Lze dokázat, že platí

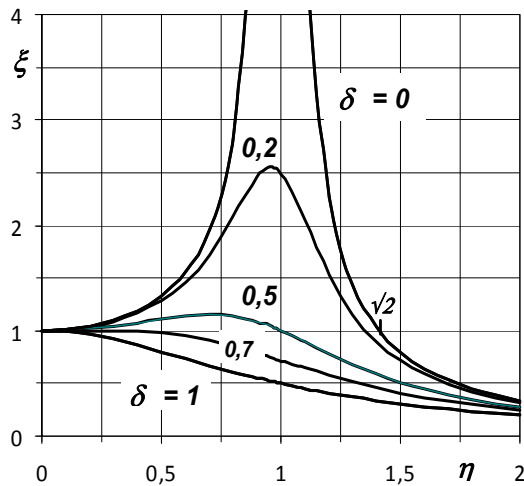
$$\xi = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\delta\eta)^2}}, \quad (7.24)$$

kde  $\delta$  je poměrný útlum. Další užitečnou veličinou je tzv. **fázový posun**  $\varphi$ , který vyjadřuje posunutí (zpoždění) mezi budicí silou a výchylkou kmitající hmoty:

$$\varphi = \varphi_p - \varphi_x = \operatorname{arctg} \frac{2\delta\eta}{1-\eta^2} \quad (7.25)$$

Obě veličiny,  $\xi$  a  $\varphi$ , jsou funkcí naladění  $\eta$  a poměrného útlumu  $\delta$ . Jejich průběhy jsou na obr. 7.5 a 7.6. Závislost amplitudy vynuceného kmitání na frekvenci, obr. 7.5, se nazývá **amplitudová charakteristika** nebo **rezonanční křivka**, a závislost fázového zpoždění na frekvenci, obr. 7.6, se nazývá **fázová charakteristika**. Z obou grafů je zřejmý zásadní význam rezonanční frekvence. Vidíme, že s přibližováním budicí frekvence k rezonanční frekvenci ( $\Omega \rightarrow \omega$ , resp.  $\eta \rightarrow 1$ ) roste u netlumeného kmitání ( $\delta = 0$ ) amplituda nade všechny meze. Vztah (7.24) upravený pro netlumené kmitání totiž přejde na tvar:

$$\xi = 1/(1-\eta^2), \quad \operatorname{tg} \varphi = 0 \text{ (pro } \eta \neq 1) \quad (7.26)$$



**Obr. 7.5.** Rezonanční křivka (závislost poměrné amplitudy  $\xi$  vynuceného kmitání na poměru  $\eta$  budící frekvence  $\Omega$  a vlastní frekvence  $\omega$ ).  $\xi$  – poměrná amplituda ( $= r/r_{st}$ ),  $\eta$  – činitel naladění ( $= \Omega/\omega$ ),  $\delta$  – poměrný útlum ( $= N/\omega$ ).

Při  $\eta = 1$ , resp. při  $\Omega = \omega$ , hovoříme o rezonanci, a  $\xi \rightarrow \infty$ . Nekonečně velká amplituda kmitání je ale pouze hypotetický případ. Ve skutečnosti se od určité velikosti rozkmitu začnou projevovat odchylky od lineární závislosti výchylky na síle. Na druhou stranu, silné vibrace mohou znemožnit správnou činnost zařízení nebo dokonce vést k jeho poškození anebo zničení, k utržení od základu a k dalším škodám. Jsou tedy velice nebezpečné a musíme se vždy snažit, aby pracovní otáčky nebo frekvence byly dostatečně vzdálené od rezonančních. Na štěstí, i kdyby skutečné otáčky byly v určitém okamžiku stejné jako rezonanční, nenastane zničení okamžitě. U rovnice (7.13), upravené pro netlumený pohyb, tj.

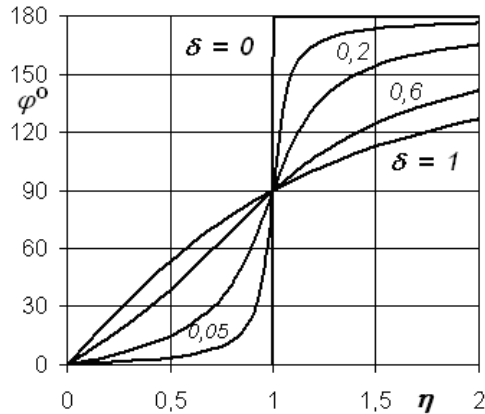
$$\ddot{x} + \omega^2 x = a_p \sin(\Omega t + \varphi_p), \quad (7.27)$$

má partikulární integrál při  $\Omega = \omega$  tvar

$$x_p(t) = r t \sin(\Omega t + \varphi_x), \quad (7.28)$$

kde

$$r = a_p/(2\omega), \quad \varphi_x = \varphi_p - \pi/2. \quad (7.29)$$



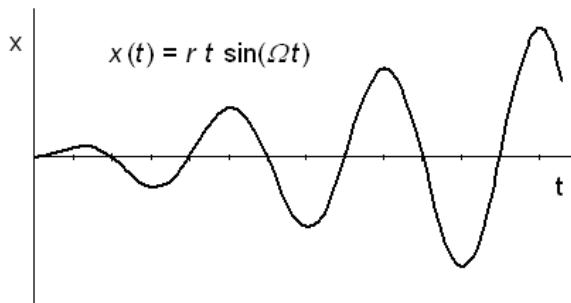
**Obr. 7.6.** Fázová charakteristika (fázový posun  $\varphi$  vynuceného kmitání jako funkce poměru  $\eta$  budicí frekvence  $\Omega$  a vlastní frekvence  $\omega$ ).  
 $\varphi$  – fázový posun ( $^\circ$ ),  $\eta$  – činitel naladění,  $\delta$  – poměrný útlum

Vztah (7.28) říká, že při rezonanci a nulovém tlumení narůstá amplituda lineárně s časem  $t$  (obr. 7.7). U mnoha zařízení jsou pracovní otáčky nebo frekvence vyšší než rezonanční. V takovém případě je při rozběhu stroje nutno přejet přes rezonanční otáčky co nejrychleji, aby amplituda nestačila dorůst do nebezpečné velikosti.

**POZNÁMKA.** Každý, kdo někdy pozoroval elektrickou stolní brusku, si jistě všiml, že během klesání otáček po vypnutí se v určitém okamžiku bruska po krátkou chvíli výrazněji rozechvěje. To je právě při přechodu přes oblast rezonance. Po chvíli ale tento jev ustane, neboť otáčky se již dostatečně vzdálily od rezonančních.

Při rezonanci u zařízení bez tlumení dojde (v ideálním případě) také ke skokové změně fáze kmitání (obr. 7.6). To je zřejmé ze vztahu (7.25). Pro  $\eta < 1$  je úhel  $\varphi$  kladný, ale pro  $\eta > 1$  je záporný. Poměrná amplituda  $\xi$  by pro frekvence vyšší než rezonanční měla být pro  $\eta > 1$  kreslená v záporné polorovině grafu, tj. pod vodorovnou osou. Kvůli jednotnému způsobu zobrazení pro netlumené i tlumené kmitání se i pro tento případ kreslí  $\xi$  v kladné polorovině.

Jestliže u tělesa buzeného harmonickou silou je přítomno tlumení, bude amplituda



**Obr. 7.7.** Postupný růst kmitů při rezonanci

při rezonanci mít jen omezenou velikost a ke změně fáze nedochází. S rostoucím tlumením se amplituda zmenšuje a rezonance nastává při nižší budící frekvenci, jak bylo vidět na obr. 7.5. Polohu vrcholu rezonanční křivky lze najít z podmínky  $d\xi/d\eta = 0$ . Derivujeme-li vztah (7.24) podle  $\eta$  a položíme získaný výraz roven nule, dostaneme po úpravě odpovídající hodnotu činitele naladění

$$\eta_v = \sqrt{1 - 2\delta^2} . \quad (7.30)$$

Index „v“ značí, že se jedná o polohu vrcholu rezonanční křivky. Ze vztahu (7.30) také vyplývá, že pro poměrný útlum  $\delta = 1/\sqrt{2}$  je  $\eta_v = 0$ , což znamená, že maximum je v počátku souřadného systému ( $\Omega = 0$ ). Pro větší tlumení ( $\delta > 1/\sqrt{2} = 0,7071$ ) již rezonanční křivka neobsahuje žádné maximum a poměrná amplituda s rostoucími otáčkami plynule klesá. Platí, že pro  $\delta > 1/\sqrt{2}$  je amplituda vynuceného kmitání vždycky menší než výchylka způsobená statickou silou o stejné velikosti.

Maximální poměrná výchylka je dána výrazem

$$\xi_{\max} = 1/[2\delta\sqrt{1 - \delta^2}] , \quad (7.31)$$

což lze pro malé tlumení vyjádřit přibližně vztahem

$$\xi_{\max} \approx 1/(2\delta) . \quad (7.32)$$

Dochází-li nějakým způsobem k tlumení pohybu, potom fázový úhel  $\varphi$  mezi budící silou a výchylkou je pro jakoukoliv frekvenci menší než  $180^\circ$  (obr. 7.6). Při  $\eta < 1$  je  $\varphi < \pi/2$ , při  $\eta > 1$  je  $\varphi > \pi/2$ . Při rezonanci je  $\varphi = \pi/2$ .

Všimněme si ještě jedné důležité věci na obr. 7.5. U netlumeného pohybu ( $\delta = 0$ ) je pod rezonancí vždycky poměrná amplituda  $\xi$  větší než jedna. V oblasti nad rezonancí je  $\xi > 1$  jen pro činitel naladění  $\eta < \sqrt{2}$ . Pro  $\eta > \sqrt{2}$  bude absolutní velikost poměrné amplitudy vždy menší než jedna; to znamená, že dynamické výchylky budou menší než statické. Toho se v praxi využívá ke snížení výchylek kmitajících hmot – stačí, aby pracovní otáčky stroje byly o dost vyšší než otáčky rezonanční. Tlumení v tomto případě není rozhodující. Přispívá však ke snížení dynamických výchylek – ale pouze jich. Netýká se přenosu sil na jiné části, kde jeho vliv je negativní, jak uvidíme v následujícím oddílu.

#### 7.4 Síly přenášené z kmitajícího tělesa do rámu nebo základů

Z obrázku 7.2 kmitající soustavy je zřejmé, že do základů se přenáší síla pružiny  $S$  a síla  $D$  vyvozená tlumičem:

$$R = S + D = kx(t) + b\dot{x}(t) \quad (7.33)$$

Obě složky se mění s časem. Omezíme-li se na případ ustáleného kmitání, dostaneme

$$x(t) = r \sin(\Omega t + \varphi_x) \quad , \quad \dot{x}(t) = \Omega r \cos(\Omega t + \varphi_x) \quad (7.34)$$

Celková síla, přenášená do základu, je

$$R(t) = R_0 \sin(\Omega t + \varphi_R) \quad , \quad (7.35)$$

kde

$$R_0 = r \sqrt{(k^2 + b^2 \Omega^2)} \quad , \quad \varphi_R = \arctg(c \Omega / k) = \arctg(2 \delta \eta) \quad (7.36)$$

Po úpravě dostaneme amplitudu síly přenášené do rámu nebo základů

$$R_0 = F_0 \frac{\sqrt{1 + (2\eta\delta)^2}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\eta\delta)^2}} \quad (7.37)$$

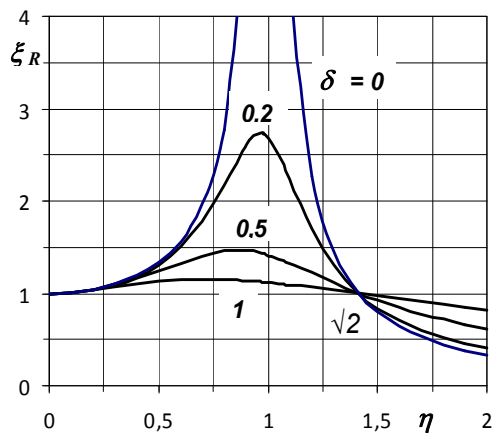
Označíme-li poměr amplitudy síly přenášené do rámu a síly budící jako **součinitel přenosu** nebo **přenosový poměr**  $\xi_R$ ,

$$\xi_R = R_0 / F_0 \quad , \quad (7.38)$$

dostaneme pro něj

$$\xi_R = \frac{\sqrt{1 + (2\eta\delta)^2}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\eta\delta)^2}} \quad (7.39)$$

Závislost součinitele přenosu na budicí frekvenci, resp. součiniteli naladění, je na obr. 7.8. Bodem o souřadnicích  $\xi_R = 1$ ,  $\eta = \sqrt{2}$  procházejí všechny křivky, bez ohledu na velikost tlumení  $\delta$ . Z obrázku je zřejmé, že pružné uložení kmitající hmoty snižuje sílu přenášenou do rámu pouze tehdy, je-li budicí frekvence dostatečně vysoko nad rezonanční frekvencí, to znamená při  $\eta > \sqrt{2}$ . Zároveň vidíme, že v oblasti  $\eta > \sqrt{2}$  přítomnost tlumení situaci zhoršuje, tím více, čím je tlumení větší. Bude-li zařízení pracovat v oblasti dostatečně vzdálené od rezonance, je nejlepší uložení bez jakéhokoliv tlumení.



**Obr. 7.8.** Součinitel přenosu  $\xi_R$  ( $= R_0/F_0$ ) v závislosti na budicí frekvenci  $\eta$  – činitel naladění ( $= \Omega/\omega$ ),  $\delta$  – poměrný útlum ( $= N/\omega$ ).

Tento oddíl lze ukončit shrnutím, že **pro minimalizování sil přenášených z periodicky pracujícího zařízení do rámu nebo základů je nejvýhodnější, jestliže budicí frekvence je o dost vyšší než vlastní frekvence tohoto zařízení.** Existuje ale ještě jedna cesta, vytvoření tzv. dynamického absorbéru vibrací, jehož si všimneme v kapitole 7.10.

## 7.5 Kmitání při kinematickém buzení

Dosud jsme předpokládali, že kmitání je vyvoláno harmonickou silou působící na pružně uložené těleso. Může ale nastat i případ, kdy těleso je zavěšeno na pružině, a periodické pohyby jsou vnucovány jejímu opačnému konci. Sem patří i odpružené vozidlo jedoucí po hrbolaté vozovce. Na obr. 7.9 je tato situace znázorněna pro část vozidla, odpovídající jednomu kolu. Hmota  $m$  spočívá na pružině, jejíž dolní konec je spojen s kolem (nulové hmotnosti), které jede po zvlněné vozovce. Hmota má tendenci kmitat svou vlastní frekvencí  $f$ , ale je mu vnucena frekvence buzení vozovkou. Budeme-li předpokládat, že zvlnění má sinusový průběh, pak po utlumení přechodových jevů vykonává kolo ve svislém směru harmonický pohyb

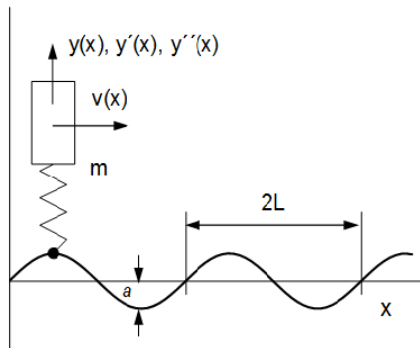
$$y_1 = a \sin(\Omega t) \quad ; \quad (7.40)$$

$a$  je výška půlvlny,  $t$  je čas a  $\Omega$  je úhlová rychlost, která souvisí s rychlostí  $v$  jízdy vztahem

$$\Omega = \pi v / L \quad ; \quad (7.41)$$

$L$  je délka půlvlny nerovností (obr. 7.9). Na těleso  $m$  působí pružina silou úměrnou jejímu stlačení  $y - y_1$ , kde  $y$  je svislé posunutí tělesa z rovnovážné polohy. Pohybová rovnice tělesa  $m$  (vzhledem k absolutnímu prostoru  $x, y$ ) je

$$m\ddot{y} + k(y - y_1) = 0 \quad . \quad (7.42)$$



**Obr. 7.9.** Kinematické buzení. Kolo jedoucí po zvlněné vozovce.

Vyjádříme-li zde  $y_1$  ze vztahu (7.40), dostaneme po úpravě

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega^2 a \sin(\Omega t), \quad (7.43)$$

kde  $\omega^2 = k/m$  je čtverec kruhové frekvence vlastního kmitání hmoty  $m$  na pružině  $k$ . Rovnice (7.43) je podobná rovnici (7.27) a má podobné řešení. Velikost výchylky hmoty  $m$  z rovnovážné polohy je dána vztahem

$$y = a \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \sin(\Omega t) = y_0 \sin(\omega t) \quad (7.44)$$

$y_0$  je amplituda pohybu hmoty ve svislém směru, vzhledem k absolutnímu prostoru.

Vztah (7.44) říká, že pro velmi malé rychlosti jízdy, a tedy pro malé poměry  $\Omega/\omega$ , kopíruje pohyb hmoty  $m$  nerovnosti vozovky. Pro budící frekvenci  $\Omega$ , blíží se k vlastní frekvenci  $\omega$  tělesa na pružině (resonance), bude těleso velmi výrazně kmitat. Při vysokých rychlostech jízdy, tzn. při  $\Omega \gg \omega$ , se bude amplituda kmitání hmoty blížit k nule. Těleso nestačí reagovat na změny a pohybuje se po vozovce poměrně klidně. Kmitá však v protifázi k budící síle. Pro ilustraci následuje jeden příklad.

### Příklad.

Kolo jede po zvlněné vodorovné vozovce stálou rychlostí  $v$  (obr. 7.9). Určete amplitudu svislých kmitů břemene pružně spojeného s nápravou kola při rychlosti: a)  $v = 5$  m/s, b)  $v = 20$  m/s.

Parametry úlohy jsou: hmotnost břemene  $m = 100$  kg, tuhost pružiny  $k = 19620$  N/m (statická deformace pružiny břemenem je  $y_{\text{stat}} = mg/k = 100 \times 9,81/19620 = 0,050$  m). Zvlnění podložky lze aproximovat funkcí sinus o amplitudě  $a = 20$  mm a rozteči vln  $2L = 2,0$  m.

Řešení. Kruhová frekvence vlastního kmitání  $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{19620/100} = 14,01$  s<sup>-1</sup>; odpovídající vlastní kmitočet pohybu je  $f = \omega/(2\pi) = 14,01/(2\pi) = 2,229$  Hz. Kruhová frekvence vynuceného kmitání v případě (a) s rychlostí jízdy  $v = 5,0$  m/s je  $\Omega = \pi v/L = \pi \times 5,0/1,0 = 15,708$  s<sup>-1</sup>. Odpovídající frekvence vertikální složky pohybu je  $f_v = 2,5$  Hz. Po dosazení těchto hodnot do vztahu (7.44) dostaneme

$$y_0 = \left| a \frac{1}{1 - (\Omega/\omega)^2} \right| = \left| 0,02 \frac{1}{1 - (15,71/14,01)^2} \right| = 0,078 \text{ m} = 78 \text{ mm.}$$

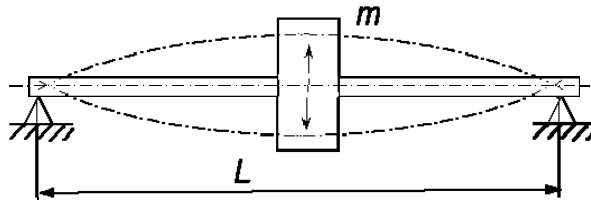


V případě (b), při  $v = 20,0$  m/s, bude kruhová frekvence buzení  $\Omega = 62,83$  s<sup>-1</sup>, a amplituda kmitání ve svislém směru klesne na  $y_0 = 0,001$  m = 1 mm.

V obou případech byla budicí kruhová frekvence  $\Omega$  vyšší než vlastní kruhová frekvence volného kmitání  $\omega$ , takže vypočtené hodnoty byly záporné. Při pomalejší jízdě byla budicí frekvence blízko vlastní frekvenci a amplituda kmitání byla téměř čtyřikrát vyšší než amplituda zvlnění vozovky. Při vyšší rychlosti jízdy byla budicí frekvence čtyřiapůlkrát vyšší než vlastní frekvence, a amplituda svislého kmitání klesla na zlomek amplitudy zvlnění cesty.

## 7.6 Příčné kmitání nosníků

Omezíme se na případ, kdy na štíhlém pružném nosníku nebo hřídeli je břemeno, jehož hmotnost  $m$  je mnohem větší než hmotnost nosníku (obr. 7.10). Situace je pak podobná jako u hmotného bodu na nehmotné pružině podle obr. 7.1,



Obr. 7.10. Příčné kmitání nosníku s břemenem.

a podobně platí i vztah (7.3), kde

$$k = F / y \quad (7.45)$$

je nyní ohybová tuhost nosníku, která odpovídá síle potřebné na vyvolání průhybu jednotkové velikosti. Například při břemenu uprostřed rozpětí platí [8]:

$$y = F l^3 / (48 E J) \quad ; \quad (7.46)$$

$l$  je délka nosníku,  $E$  je jeho modul pružnosti a  $J$  kvadratický moment průřezu. Ze srovnání vztahů (7.45) a (7.46) vyplývá

$$k = 48 E J / l^3 \quad , \quad (7.47)$$

takže určení vlastní kruhové frekvence je snadné. Kruhová frekvence volného

kmitání  $\omega$  je dána vztahem (7.3). Bude-li v místě břemene trvale působit harmonická síla

$$F(t) = F_0 \sin(\Omega t), \quad (7.48)$$

kde  $\Omega$  je její kruhová frekvence, bude nosník s břemenem po doznění přechodových jevů kmitat také kruhovou frekvencí  $\Omega$ , a s amplitudou

$$y_0 = F_0 l^3 / (48EJ) \quad (7.49)$$

Úhlová rychlost  $\Omega$  je vázána s frekvencí vynuceného kmitání  $f$  vztahem

$$\Omega = 2\pi f \quad (7.50)$$

Pro závislost amplitudy výchylky na budicí frekvenci platí vztah (7.18) a obrázek 7.5. Pro přenos síly do podpor platí vztah (7.37) a obr. 7.8.

Skutečný nosník má vždy určitou hmotnost, což ovlivní vlastní frekvenci kmitání soustavy „nosník + břemeno“, podobně jak bylo ukázáno v poznámce v kapitole 7.2. Jako příklad můžeme uvést lávku pro chodce přes Temži v Londýně (tzv. Millenium Bridge), která byla rozkmitávána rytmickou lidskou chůzí [14]. Na problém se přišlo až po uvedení lávky do provozu, a dodatečná instalace přídatných tlumičů zvýšila celkové náklady o 30%.

Otázky kmitání nosníků ve složitějších případech i kmitání dalších těles přesahují rámec této knížky, a v podrobnostech odkazujeme na literaturu, např. [1 – 3]. Náročné technické úlohy (vlastní frekvence a vlastní tvary různých těles) se dnes zpravidla řeší metodou konečných prvků s použitím odpovídajících počítačových programů. O nich se zmíníme na konci kapitoly 7.11.

## 7.7 Krouživé kmitání

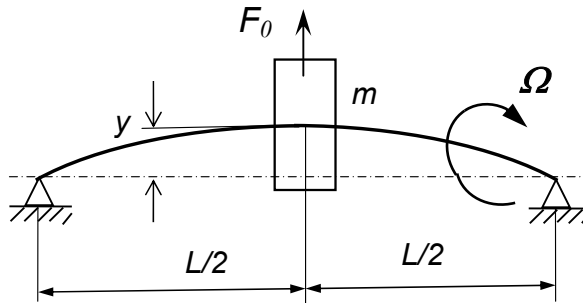
Předpokládejme nyní, že máme rotující nehmotný hřídel s rotorem o hmotě  $m$  uprostřed rozpětí. Těžiště rotoru leží přesně v ose spojnice obou ložisek. Jestliže hřídel krátkodobě prohne (obr. 7.11), bude na hmotu působit odstředivá síla

$$F_0 = my\Omega^2, \quad (7.51)$$

kde  $y$  je průhyb a  $\Omega$  je úhlová rychlost rotace. Tato síla je zachycována ložisky. Pokud je rotor uprostřed, každé ložisko přenáší sílu  $F_0/2$ . Proti prohnutí hřídele

působí jeho ohybová tuhost  $k$ , vyjádřená vztahem (7.47). Příčná síla potřebná na vyvození průhybu  $y$  je

$$F_r = y k . \quad (7.52)$$



Obr. 7.11. Krouživé kmitání

Tato síla roste přímo úměrně s průhybem  $y$ , zatímco odstředivá síla roste se čtvercem úhlové rychlosti. Při nižších otáčkách bude síla, potřebná na vyvolání průhybu  $y$ , větší než odstředivá, takže po pominutí impulsu, který vyvolal prohnutí, se hřídel narovná. Při určitých otáčkách se ale odstředivá síla již dostane do rovnováhy se silou reakční, průhyb se udrží a hmota  $m$  se pak pohybuje po kružnici o poloměru  $y_c$ . Odpovídající úhlová rychlost rotace  $\Omega_c$ , kterou dostaneme z rovnice rovnováhy sil,  $F_0 = F_{r,c}$ , bude

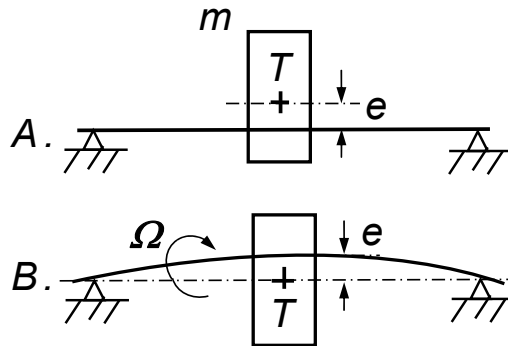
$$\Omega_c = \sqrt{k/m} . \quad (7.53)$$

Tato úhlová rychlost je totožná s úhlovou rychlostí  $\omega$  volného příčného kmitání nosníku s hmotou  $m$ . Prohnutý hřídel s kotoučem se pak otáčí kolem spojnice středů obou ložisek. Vzniklo krouživé kmitání, které je při této rychlosti stabilní. Jestliže ale otáčky z nějakého důvodu vzrostou, bude odstředivá síla vyšší než síla vratná, průhyb začne narůstat (a tím také odstředivá síla) a může dojít k havárii.

## 7.8 Rotace hřídele s excentrickým břemenem

Situace je znázorněna na obr. 7.12. V klidu (obr. A) se těžiště břemene nachází ve vzdálenosti  $e$  od spojnice obou ložisek. Začne-li hřídel rotovat, břemeno vyvozuje odstředivou sílu, která způsobí prohnutí hřídele o hodnotu  $\delta$ . Těžiště je pak vzdáleno od osy o hodnotu  $y = e + \delta$ , takže odstředivá síla je nyní

$$F_0 = m(e + \delta)\Omega^2 . \quad (7.54)$$



**Obr. 7.12.** Krouživé kmitání nosníku s excentrickým břemenem.  
*A – v klidu, B – při vysokých nadrezonančních otáčkách. T – těžiště*

Tato síla musí být stejně velká jako síla potřebná pro vyvození průhybu  $\delta$ , tj.  $F_r = k\delta$ . Z jejich rovnosti dostaneme po úpravě

$$m e \Omega^2 = \delta(k - m\Omega^2), \quad (7.55)$$

odkud vyplyne vztah pro průhyb:

$$\delta = e \frac{\Omega^2}{\frac{k}{m} - \Omega^2} = e \frac{1}{\frac{\omega^2}{\Omega^2} - 1} \quad (7.56)$$

Je vidět, že pokud excentricita neexistuje ( $e = 0$ ), při rotaci průhyb nevzniká. Nyní si ukážeme, jak se průhyb (při  $e \neq 0$ ) mění s rychlostí otáčení hřídele. Je-li kruhová frekvence rotace  $\Omega$  menší než vlastní kruhová frekvence  $\omega$  příčného kmitání hřídele s břemenem, roste průhyb s rostoucí rychlostí a pro  $\Omega \rightarrow \omega$  by rostl nade všechny meze. Jakmile se ale rychlost otáčení dostane nad tuto nebezpečnou oblast,  $\Omega > \omega$ , změní se ve vztahu (7.56) znaménko a průhyb se s rostoucími otáčkami zmenšuje. Pro velmi vysoké otáčky (obr. 7.12B) se bude průhyb blížit k hodnotě  $-e$ . Těžiště soustavy je nyní k ose, spojující obě ložiska, blíže než za klidu. Dochází zde k tak zvanému samocentrování hřídele s břemenem.

## 7.9 Vyvažování rotujících zařízení

Odlišná situace je v případě, kdy hřídel je relativně tuhý. Patří sem například elektromotory, turbíny, kola dopravních prostředků, četné stroje pracovní nebo obráběcí. Ale i u domácích praček vznikají často přídavné síly, které namáhají ložiska a základy. Základní příčinou jsou odstředivé síly, jež vznikají, pokud těžiště rotujícího tělesa neleží přesně v ose rotace. O nich jsme hovořili v předchozím oddílu. Jsou-li navíc rotující hmoty rozloženy podél této osy nerovnoměrně, může dojít ke zvýšení reakčních sil v uložení v důsledku vzniku přídavných momentů. Nemají-li nepříznivé síly vzniknout, musí být splněny dvě podmínky:

1. těžiště tělesa musí ležet na ose rotace,
2. hlavní osa setrvačnosti tělesa se musí shodovat s osou rotace.

Také lze říci, že se musí rovnat nule statické momenty hmoty tělesa k ose rotace a deviační momenty ke dvěma rovinám tvořeným osou rotace a osou k ní kolmou.

Pro splnění těchto podmínek musí být těleso vyvážené: 1) staticky i 2) dynamicky. Prakticky je nemožné vyrobit dokonale vyvážené rotační těleso. Proto u těles, která mají rotovat vyšší rychlostí (víme, že dynamické účinky rostou se čtvercem úhlové rychlosti), se provádí tzv. vyvažování. Spočívá v tom, že se k vyvažovanému tělesu ve vhodném místě buď malá hmota přidá (například navařením nebo přišroubováním), anebo se naopak odebere (odvrtáním nebo odbroušením). **Statické vyvažování** je snazší. Může se provádět například tak, že se rotační těleso položí na dvě vodorovné rovnoběžné tyče ("pravítka") a sleduje se jeho chování. Staticky vyvážené těleso se zastaví v jakékoliv poloze. Není-li vyvážené, začne se po pravítkách samo odvalovat a zastaví se v okamžiku, kdy je jeho těžiště přesně pod osou rotace. Postupným odebráním materiálu na této straně anebo přidáváním hmoty na straně protilehlé se docílí statického vyvážení. To ale ještě neznamená, že při provozu nemohou vznikat přídavné síly. Pro jejich úplnou eliminaci je nutné, aby těleso bylo vyvážené také dynamicky, aby se jeho hlavní osa setrvačnosti ztotožnila s osou rotace. Při **dynamickém vyvažování** se odstraňuje moment, způsobený nevyvážením. V tomto případě se přidávají nebo odebírají hmoty ve dvou od sebe vzdálených rovinách kolmých na osu otáčení, a to tak, aby při otáčení tělesa v pružném uložení bylo jeho chvění co nejmenší. K jejich nalezení tedy musí těleso rotovat. Je-li těleso vyvážené dynamicky, je vyvážené i staticky.

K vyvažování se používají různé vyvažovací aparatury nebo stroje. Ty u roztočeného tělesa měří amplitudy a fáze kmitání anebo dynamické reakce.

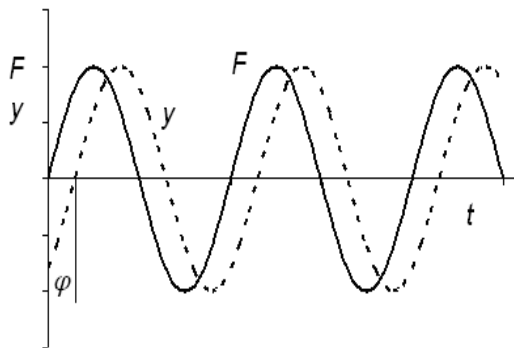
Vhodný počítačový program je vyhodnocuje a ukáže pak velikost nevyvážku ( $m \times r$ ), který odpovídá odstředivé síle při jednotkové úhlové rychlosti, popřípadě ukáže velikost potřebné přídavné hmoty a místo, kde má být upevněna.

Zvláštní způsob vyvažování se používá u moderních domácích praček. Ty mají v uložení bubnu zabudovaný snímač zrychlení. Naplněný buben je nejprve roztočen na nižší otáčky. Je-li naměřené nevyvážení příliš velké, zkouší pračka chodem dopředu nebo zpět docílit vhodnějšího rozložení prádla, což se obvykle na několik pokusů podaří. Teprve potom se buben roztočí na pracovní otáčky.

Více o vyvažování se lze dočíst např. v [9], informace o některých vyvažovacích zařízeních lze najít na webových stránkách výrobců, například [10 – 13].

## 7.10 Energie v kmitajícím systému s tlumením

Je-li přítomno tlumení, vyvozované například třením nebo prouděním viskózní kapaliny, dodávaná energie se rozptyluje a mění v teplo. Na rozdíl od čistě elastického kmitání, kde odezva je prakticky okamžitá, takže síla a dráha jsou ve fázi, při kmitání s tlumením se dráha  $y$  opoždí za silou  $F$  (obr. 7.13).



**Obr. 7.13.** Kmitání s tlumením (hystereze)

Při sinusovém průběhu pro sílu  $F$  a dráhu  $x$  platí

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) , \quad (7.57)$$

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (7.58)$$

Diferenciál práce síly  $F$  je

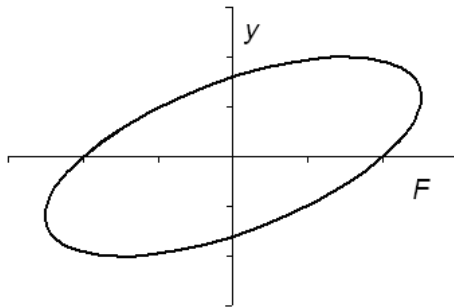
$$dW = F dx = F_0 \sin(\omega t) x_0 \omega \cos(\omega t - \varphi) dt \quad (7.59)$$

a práce za jednu periodu  $T = 2\pi/\omega$  je

$$W = \int F_0 x_0 \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) dt = \pi F_0 x_0 \sin \varphi \quad (7.60)$$

Tato práce se mění v tepelnou energii. Je zřejmé, že pokud je dráha ve fázi se silou (čistě elastické kmitání, tj.  $\varphi = 0$ ), je  $\sin \varphi = 0$  a žádná práce se během jednoho cyklu nezmaří.

Názorný obrázek o spotřebě energie v zatěžovacím cyklu dává graf v souřadném systému „síla – dráha“. V našem případě to je elipsa se šikmými osami (obr. 7.14). Práce v jednom zatěžovacím cyklu je úměrná ploše této elipsy. Je-li dráha ve fázi se silou ( $\varphi = 0$ ), elipsa zdegeneruje na (šikmou) úsečku a práce vykonaná v jednom cyklu je rovna nule. Nejvíce energie se při kmitavém pohybu maří, opoždí-li se dráha za silou o  $90^\circ$ , kdy ve vztahu (7.60) je  $\sin \varphi = 1$ .



**Obr. 7.14.** Hysterezní smyčka.

### 7.11 Dynamický absorbér vibrací

Dosud jsme vyšetřovali situaci, kdy na pružně uložené těleso působí budící harmonická síla. Viděli jsme, že když se frekvence budící síly blíží k rezonanční frekvenci systému, roste amplituda pohybu, a za určitých podmínek by mohlo dojít k poškození nebo zničení zařízení. Ukázali jsme také tři způsoby, jak tomu zabránit: 1) změnit budící frekvenci (což není vždy možné), nebo 2) upravit tuhost uložení tak, aby vlastní frekvence systému byla dostatečně vzdálená od budící frekvence, anebo 3) připojit dostatečně účinný tlumič, například hydraulický nebo třecí. Zde ukážeme čtvrtý způsob, který užívá takzvaný **dynamický pohlcovač vibrací**. Jeho podstata spočívá v tom, že k tělesu, jehož kmitání chceme zmírnit, připojíme pružně ještě jedno těleso. Budící síla působí na první těleso. Při vhodném

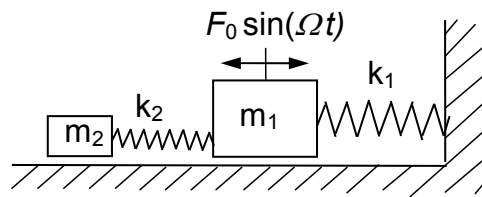
naladění ale bude kmitat pouze druhé, připojené těleso, zatímco původní těleso zůstává v klidu. Zde uvedeme teoretické základy řešení tohoto problému [1 – 3].

Situace je znázorněna na obr. 7.15. Těleso, jehož kmitání chceme utlumit, má všechny veličiny označené indexem 1, a dynamický absorbér kmitů má index 2. Tato soustava má dva stupně volnosti. Pro jednoduchost budeme uvažovat případ bez přídavného tlumení, tzn. pouze se setrvačnými hmotami a silami pružin. Pohybové rovnice pro obě tělesa jsou

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = F_0 \sin(\Omega t + \varphi_{p1}) \quad (7.61)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \quad (7.62)$$

Jedná se o soustavu dvou diferenciálních rovnic. Rovnice (7.62), s nulovou pravou stranou, je homogenní, a rovnice (7.61), s nenulovou pravou stranou, je nehomogenní. Obecné řešení je součtem řešení homogenní rovnice a partikulárního



**Obr. 7.15.** Dynamický absorbér vibrací

řešení rovnice s pravou stranou. Zde se omezíme na partikulární řešení, protože jenom to odpovídá ustálenému provozu. Toto řešení můžeme předpokládat ve tvaru

$$x_1 = A_1 \sin(\Omega t + \varphi_{p1}) \quad , \quad x_2 = A_2 \sin(\Omega t + \varphi_{p1}) \quad (7.63)$$

Po vyjádření  $x_1$  a  $x_2$  v rovnicích (7.61) a (7.62) prostřednictvím vztahů (7.63) a jejich derivací, a po vykrácení výrazem  $\sin(\Omega t + \varphi_{p1})$  s přihlédnutím, že druhá derivace funkce sinus je mínus sinus, dostaneme dvě následující lineární rovnice:

$$-A_1 \Omega^2 m_1 + k_1 A_1 + k_2 (A_1 - A_2) - F_0 = 0 \quad (7.64)$$

$$-A_2 \Omega^2 m_2 + k_2 (A_2 - A_1) = 0 \quad (7.65)$$



Řešením této soustavy je

$$A_1 = \frac{F_0 (k_2 - m_2 \Omega^2)}{(k_1 - m_1 \Omega^2)(k_2 - m_2 \Omega^2) - k_2 m_2 \Omega^2} \quad (7.66)$$

$$A_2 = \frac{F_0 k_2}{(k_1 - m_1 \Omega^2)(k_2 - m_2 \Omega^2) - k_2 m_2 \Omega^2} \quad (7.67)$$

Podívejme se na první z obou výrazů. Jestliže čitatel zlomku (7.66) bude roven nule, bude se rovnat nule amplituda  $A_1$ . To znamená, že těleso 1 nebude vůbec kmitat ! To nastane, jestliže

$$k_2 / m_2 = \Omega^2, \quad \text{resp.} \quad \Omega = \sqrt{k_2 / m_2}. \quad (7.68)$$

V tomto případě působí přídavná hmota 2 na hmotu 1 stejně velkou silou, jako je vnější budící síla, ale opačného smyslu. Vnější síla ( $F$ ) a síla pružiny  $k_2(x_1 - x_2)$  se proto navzájem ruší a výchylka  $x_1$  hmoty 1 je nulová. (Kmitá ale těleso 2 !) Má-li toho být dosaženo, musí rezonanční frekvence volného kmitání tělesa 2 být stejná jako budící frekvence síly  $F_0$ . Toho lze docílit vhodnou volbou hmotnosti tělesa 2 a tuhosti pružiny  $k_2$ .

Situace je ale složitější. Dynamický tlumič pracuje dobře jen při zcela určité frekvenci. Úplné eliminace vibrací tělesa 1 je dosaženo pouze tehdy, je-li kruhová frekvence buzení rovna  $\omega$ . Při jiných frekvencích je situace horší. Z podrobné analýzy [2] vyplývá, že se objeví dvě nové rezonanční oblasti, s výraznějším kmitáním, i když zřetelně slabším, než by bylo kmitání tělesa 1 bez tlumení. Jestliže se při provozu mohou vyskytnout různé budící frekvence, je nutno užít přídavné tlumení, popřípadě vytvořit absorbér kmitů jako laditelný.

Dynamické absorbéry kmitání se užívají nejen u strojů, ale i u velmi malých zařízení nebo naopak u velkých staveb. Uvedeme zde dva extrémní příklady. Prvním je tlumení chvění vibračního holicího strojku [4]. Druhým je mrakodrap Taipei 101 na Taiwanu; u toho je tlumič vytvořen jako ocelová koule o průměru přes 5 metrů a hmotnosti 660 t (!), zavěšená na čtyřech silných ocelových lanech uvnitř mrakodrapu v 88. poschodí [15]. Toto uspořádání funguje jako kyvadlo, které má také svoji vlastní frekvenci.

## 7.12 Kmitání soustav s více stupni volnosti

S výjimkou dynamických absorbérů vibrací jsme se dosud zabývali chováním jednoho tělesa na pružině. Jeho poloha byla popsána jednou souřadnicí a pohyb v čase jednou diferenciální rovnicí. V takovém případě říkáme, že se jedná o kmitání s jedním stupněm volnosti. Máme-li nějakým způsobem spojená dvě pružná tělesa, je jejich kmitání složitější. Viděli jsme to u tzv. dynamického absorbéru (obr. 7.15), kde kmitání bylo popsáno dvěma diferenciálními rovnicemi, (7.61) a (7.62), a existovaly zde dvě rezonanční oblasti a dvě **vlastní frekvence** volného kmitání. Toto byl případ se dvěma stupni volnosti. Zde pro něj naznačíme řešení podle [2], které pak je zobecníme na více stupňů volnosti.

Rovnice (7.61) a (7.62) mají pro volné kmitání následující tvar:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0 \quad (7.69)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \quad (7.70)$$

Zavedeme pomocné konstanty  $a$ ,  $b$ ,  $c$  následujícím způsobem:

$$a = (k_1 + k_2)/m_1, \quad b = k_2/m_1, \quad c = k_2/m_2, \quad (7.71)$$

S nimi přejdou rovnice (7.69) a (7.70) na tvar

$$\ddot{x}_1 + ax_1 - bx_2 = 0 \quad (7.72)$$

$$\ddot{x}_2 - cx_1 + cx_2 = 0 \quad (7.73)$$

Předpokládáme-li jejich řešení ve tvaru

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha), \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha) \quad (7.74)$$

a dosadíme je i s jejich druhými derivacemi podle času do (7.72) a (7.73), dostaneme po úpravě

$$A_1(a - \omega^2) - A_2b = 0 \quad (7.75)$$

$$-A_1c + A_2(c - \omega^2) = 0 \quad (7.76)$$

Toto je soustava dvou rovnic s nulovou pravou stranou. Ta bude mít řešení s nenulovými amplitudami  $A_1$  a  $A_2$  pouze tehdy, bude-li roven nule její determinant, tj. výraz

$$(a - \omega^2)(c - \omega^2) - bc = 0 \quad (7.77)$$

respektive

$$\omega^4 - (a + c)\omega^2 + c(a - b) = 0 \quad (7.78)$$

To je rovnice čtvrtého stupně (tzv. frekvenční rovnice), ale můžeme ji chápat i jako kvadratickou rovnici s neznámou  $\omega^2$ . Kořeny této rovnice budou dva:

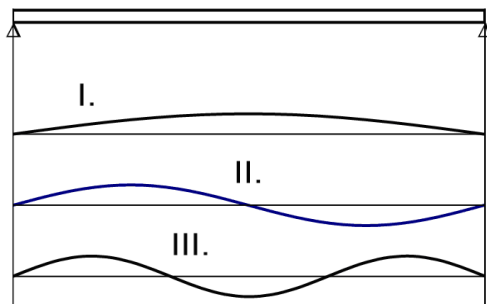
$$\omega_{1,2}^2 = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - c(a-b)} \quad (7.79)$$

Soustava o dvou stupních volnosti má tedy dvě vlastní kruhové frekvence,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ . Podobně mohou existovat případy s třemi i více stupni volnosti, například u kmitání nosníků, hřídelů a mnoha dalších těles, takže vlastních frekvencí je pak více. (Obecně platí, že počet vlastních frekvencí je totožný s počtem stupňů volnosti soustavy.) Pro řešení případů s více stupni volnosti by rozepisování jednotlivých rovnic podle způsobu (7.64) a (7.65) bylo příliš složité, a proto se obvykle užívá maticový zápis. Maticí rozumíme množinu čísel, takzvaných prvků matice, uspořádaných určitým způsobem do řádků a sloupců. S maticemi je možné provádět podobné výpočty jako s čísly, například sečítat nebo násobit, ovšem podle formálních pravidel maticového počtu. Jeho výhodou je velice jednoduchý a názorný zápis. Například vztahy (7.61) a (7.62) vypadají při maticovém zápisu takto:

$$m \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k} \mathbf{y} = \mathbf{F}(t) , \quad (7.80)$$

tedy podobně jako vztah (7.12) pro jednorozměrný případ s hmotným bodem na pružině. Jediný rozdíl je nyní v tom, že  $m$  je matice hmot,  $\mathbf{y}$  je matice posuvů a  $\ddot{\mathbf{y}}$  je matice jejich druhých derivací,  $\mathbf{k}$  je matice tuhostí a  $\mathbf{F}$  je matice budících sil. Je-li přítomno tlumení, bude v rovnici (7.80) navíc matice tlumení  $\mathbf{b}$  a matice rychlostí posuvů  $\mathbf{y}'$ , podobně jako v rovnici (7.12). Vlastní uspořádání jednotlivých hodnot v matici a práce s nimi je otázkou konkrétního programu. Řešení kmitání s více stupni volnosti nezbytně vyžaduje počítač a vhodný software. Také řešení rovnic v maticovém tvaru je dnes záležitostí odpovídajícího software, a běžný uživatel nemusí znát všechny jeho podrobnosti.

Různým vlastním frekvencím odpovídají i rozdílné tvary deformovaného tělesa při rezonanci. Hovoříme pak o **vlastních tvarech**. Příklad tří prvních vlastních tvarů nosníku na dvou podporách jsou znázorněny na obr. 7.16.



**Obr. 7.16.** Nosník na dvou podporách a první tři vlastní tvary kmitání

K analýze deformací nebo kmitání těles složitějšího tvaru se dnes všeobecně užívá tzv. **metoda konečných prvků**, MKP ([16, 17]). Při ní je zkoumané těleso rozděleno myšleně na veliké množství jednodušších těles, tzv. prvků, spojených v uzlech. Prvek může mít například tvar prutu, trojúhelníku, malé jednoduché desky, skořepiny, čtyřstěnu nebo hranolu. Neznámými veličinami jsou posuvy uzlových bodů prvků. Složky posuvů, sil a napětí v jednotlivých bodech tělesa jsou vyjádřeny prostřednictvím matic. Fyzikální podstatou řešení je nalezení takových hodnot posuvů uzlových bodů, kterým bude odpovídat minimální energie soustavy, tvořená energií napjatosti tělesa a potenciální energií zatěžujících sil. V konečné podobě se jedná o řešení velmi rozsáhlých soustav rovnic (stovky až miliony). K těmto účelům byly vyvinuty účinné komerční MKP programy pro analýzu staveb a konstrukcí, včetně řešení dynamických úloh a hledání vlastních frekvencí i tvarů. Blíže viz např. [18 – 21].

O komerčních tlumičích vibrací lze informace najít v prospektech výrobců, např. [22, 23].

### Literatura ke kapitole 7.

1. Brát, V., Brousil, J.: Dynamika. (Učební text ČVUT) SNTL, Praha, 1967. 306 s.
2. Timošenko, Š.: Kmitání ve strojnictví. (TKI) SNTL, Praha, 1960. 362 s.
3. Den Hartog, J. P.: Mechanical vibrations. Dover Publications, New York, 1985.

4. Höschl, C.: Nauka o kmitání. VŠST, Liberec, 1969. 121 s.
5. Gonda, J.: Dynamika pre inžinierov. Vydavateľstvo SAV, Bratislava, 1966. 456 s.
6. Gonda, J.: Základy dynamiky strojov. ALFA, Bratislava, 1969.
7. Koloušek, V., Hořejší, J.: Úvod do teorie kmitání. (Kmitání soustav s jedním stupněm volnosti.) Nakladatelství dopravy a spojů, Praha, 1965. 76 s.
8. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha, 1971. 376 s.
9. Juliš, K., Borůvka, V., Fryml, B.: Základy dynamického vyvažování. SNTL, Praha, 1979. 264 s.
10. C. Schenck GmbH: <https://schenck-rotec.com/products/product-finder.html>
11. <http://www.cemb.cz/> , <http://www.cemb.com/>
12. <https://www.cimat-balancing.com/contact>
13. <http://www.jp-balancer.com/>
14. [https://en.wikipedia.org/wiki/Millennium\\_Bridge\\_London](https://en.wikipedia.org/wiki/Millennium_Bridge_London). (8.2.2018)
15. [https://en.wikipedia.org/wiki/Taipei\\_101](https://en.wikipedia.org/wiki/Taipei_101). (8.2.2018)
16. Kolář V., Němec I., Kanický V.: MKP. Principy a praxe metody konečných prvků. Computer Press, Praha, 1997. 401 s.
17. Bittnar, Z., Řeřicha P.: Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí. SNTL, Praha, 1981. 257 s.
18. Ansys: <https://en.wikipedia.org/wiki/Ansys> , <https://www.ansys.com/>
19. Cosmos: <http://www.swmath.org/software/4289>
20. LS DYNA: <https://en.wikipedia.org/wiki/LS-DYNA>,  
<https://www.svsfem.cz/produkty/explicit/ansys-ls-dyna>
21. ABAQUS. 6.13; Getting started with Abaqus interactive edition. Dassault Systemes Simulia Corp., Providence, RI, 2013.
22. Izolace vibrací, tlumení rázů ENIDINE: <http://www.enidine.com/en-US/Home/>
23. Tlumení rázů a vibrací: <http://www.acecontrols.com/us/products.html>

## 8. Rozměrová analýza a teorie podobnosti

Při vývoji různých zařízení, strojů a staveb, včetně zařízení pro tlumení nárazů a vibrací, je užitečné používat rozměrovou analýzu a teorii podobnosti, neboť umožňují zjednodušit experimenty, zmenšit jejich rozsah a učinit výsledky obecnějšími. (To platí i pro experimenty počítačové!) V této kapitole, která vychází z prací [1 – 4], jsou ukázány různé druhy podobnosti a příklady bezrozměrových veličin a uvedeny pokyny pro jejich vytváření.

### 8.1 Rozměrová analýza

Každá fyzikální veličina je popsána číselnou hodnotou a jednotkou. Číselná hodnota říká, kolikrát je vyšetřovaná veličina větší než její jednotka. Příklad délky je 5,3 m, příklad síly je 25 N, příklad času je 15,6 ms. Kromě základních jednotek (metr, kilogram, sekunda...), definovaných v systému SI, se užívají i různé odvozené jednotky a předpony ( $\mu$ , m, k, M...), které označují řád.

Každá rovnice, která popisuje fyzikální jev, musí být rozměrově homogenní: její levá strana musí mít stejný rozměr jako pravá strana. **Kontrola homogenity rozměrů** by se měla dělat vždy při odvozování a před použitím nového vztahu. Vyšetřujme například vzorec pro výpočet průhybu  $y$  elastického nosníku zatíženého silou  $F$ . Z nauky o pružnosti je známo, že průhyb bude přímo úměrný  $F$  a nepřímo úměrný ohybové tuhosti nosníku, definované jako  $E \times J$ , kde  $E$  je Youngův modul materiálu a  $J$  je moment setrvačnosti průřezu. Průhyb bude také úměrný určité mocnině  $S$  délky nosníku  $L$ . Představme si nyní, že neznáme exponent  $S$ . V takovém případě můžeme napsat základní tvar vzorce:

$$y = C \times F \times L^S / (E \times J); \quad (8.1)$$

$C$  je bezrozměrová konstanta. Nahradíme-li jednotlivé veličiny ve vztahu (8.1) jejich jednotkami, dostaneme

$$m = 1 \times N \times m^S / (Nm^{-2} \times m^4).$$

Rozměr pravé strany musí být stejný jako rozměr levé strany, tj. metr. Součin všech členů vpravo, obsahujících  $m$ , je  $m^S \times m^2 \times m^{-4} = m^{S+2-4} = m^{S-2}$ . Tento exponent musí být stejný jako exponent vlevo. Jejich porovnání dá  $1 = S - 2$ . Z toho vyplývá  $S = 3$ , takže  $y = C \times F \times L^3 / (EJ)$ , což je vztah dobře známý z pružnosti a pevnosti. Podmínka homogenity rozměrů tedy pomohla najít správný tvar vzorce.

Je-li jedna strana rovnice tvořena součtem několika členů, pak všechny musí mít stejný rozměr. Například svislá dráha  $y$  tělesa padajícího v gravitačním poli je obecně

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2. \quad (8.2)$$

$t$  je čas,  $y_0$  a  $v_0$  jsou poloha a rychlost tělesa v čase  $t = 0$ , a  $g$  je tíhové zrychlení. Podmínka rozměrové homogenity říká, že jednotlivé veličiny nemohou existovat ve fyzikální rovnici nezávisle, ale pouze ve skupinách se stejným rozměrem. Vydělíme-li rovnici (8.2) jedním z členů, např.  $y_0$ , změní se na bezrozměrový tvar

$$y/y_0 = 1 + v_0 t/y_0 + \frac{1}{2} g t^2/y_0 \quad (8.3)$$

s normalizovanými veličinami  $y/y_0$ ,  $v_0 t/y_0$  and  $g t^2/y_0$ .

Téměř každou fyzikální rovnici lze přetransformovat na bezrozměrový tvar. Použití normovaných veličin má řadu výhod. Fyzikální rovnice, vyjádřené prostřednictvím bezrozměrových veličin jsou obecnější. Relativní posunutí či dráha,  $y/y_0$ , nezávisí jednotlivě na  $v_0$ ,  $t$  a  $y_0$ , ale na jejich určitých kombinacích, uvedených v rovnici (8.3). Bezrozměrové veličiny tedy umožňují kombinovat výsledky experimentů vykonaných se vzorky o různé počáteční rychlosti a poloze, kdy jedinou podmínkou je jejich správná kombinace. (Na příklad u nosníku hraje roli kombinace jeho rozměrů a materiálu.) Pro formulování určité závislosti je pak možno využít více dat a širší rozmezí parametrů. Výsledky vyjádřené v bezrozměrové formě jsou také univerzálnější, použitelné pro celou třídu podobných objektů, s podobnou geometrií nebo fyzikálními vlastnostmi. Kromě toho, použití bezrozměrových veličin může ušetřit experimentální práci, protože obvykle platí:

***Vztah  $N$  veličin, jejichž rozměry lze vyjádřit pomocí  $D$  základních rozměrů, je možno nahradit vztahem mezi***

$$P = N - D \quad (8.4)$$

***bezrozměrovými parametry  $\Pi$ .***

Podle tohoto Buckinghamova pravidla je pro stanovení menšího počtu regresních konstant zapotřebí méně experimentů. Redukce experimentální práce je významná zejména pokud vyšetřovaný vztah obsahuje mnoho veličin a počet proměnných  $N$  je blízký počtu základních rozměrů  $D$ . To lze ilustrovat na předchozím příkladu padajícího tělesa. Rovnice (8.2) představuje vztah 5 veličin:  $y$ ,  $y_0$ ,  $v_0$ ,  $g$ , a  $t$ ; tj.  $N = 5$ . Tyto veličiny lze vyjádřit pomocí dvou základních rozměrů: metr a sekunda; tedy  $D = 2$ . Podle rovnice (8.4) by počet bezrozměrových parametrů měl být  $P = N - D = 5 - 2 = 3$ . A skutečně, rovnice (8.3) je vztahem pouze tří bezrozměrových parametrů:  $y/y_0$ ,  $v_0t/y_0$  and  $gt^2/y_0$ . Ještě výhodnější bude bezrozměrové vyjádření v následujícím případě. Je-li třeba vyšetřit vliv šesti faktorů, z nichž každý bude na dvou úrovních (nízká a vysoká), počet nezbytných pokusů bude  $2^6 = 64$ . Pokud by počet bezrozměrových parametrů byl pouze 4, počet nutných pokusů klesne na  $2^4 = 16$ , tj. na jednu čtvrtinu!

Uvedené vývody platí i pro modelování počítačové! I jeho rozsah lze zmenšit, jestliže na začátku provedeme obecnou analýzu a správně formulujeme, co na čem závisí.

## 8.2 Podobnost

Použití bezrozměrových veličin je velice užitečné i při studiu chování reálných objektů pomocí modelů. Stavba velkého zařízení nebo konstrukce bývá provázána mnoha nejistotami, a možné ztráty v důsledku chybného návrhu by byly velmi vysoké. Proto se nejprve zpravidla vytvoří a testuje menší model. Pokud však má adekvátně odpovídat chování skutečného objektu, musí mezi nimi existovat podobnost. Existují různé druhy podobnosti, například:

Geometrická podobnost, tj. shodnost tvaru včetně odpovídajících úhlů a úměrnost odpovídajících rozměrů (tzv. měřítko). Platí následující relace:

$$\text{Rozměr modelu} = \text{Měřítko} \times \text{Rozměr skutečného objektu}$$

Například model budovy v měřítku 1:20 má dvacetkrát menší rozměry než skutečný dům.

Statická podobnost: deformace modelu při konstantním zatížení jsou ve stejném poměru jako odpovídající deformace objektu (díla).

Kinematická podobnost: existuje poměr časové úměrnosti mezi odpovídajícími jevy pro model a pro objekt.



Dynamická podobnost: síly, působící v odpovídajících časech a místech na modelu a objektu jsou ve stejném poměru.

**Teorie podobnosti** pracuje s takzvanými **podobnostními čísly**. Čtenáři, kteří absolvovali středoškolskou výuku fyziky, znají např. Reynoldsovo číslo (Re), které pomáhá posoudit, jestli proudění kapaliny je laminární nebo turbulentní. Další příklady jsou uvedeny na konci kapitoly. Podobnostní čísla jsou bezrozměrová; vlastně každá bezrozměrová veličina může sloužit jako podobnostní číslo.

**Bezrozměrové proměnné** lze vytvářet různými způsoby. Nejjednodušší je poměr určité veličiny a její charakteristické hodnoty, např.  $x/x_0$  nebo  $\Delta x/x_0$  pro vzdálenost nebo posunutí. V pružnosti a pevnosti je dobře známé poměrné prodloužení ( $\varepsilon = \Delta L/L$ ), Poissonovo číslo  $\mu$  (poměr relativního zkrácení v příčném směru k relativnímu prodloužení ve směru zatížení), nebo koeficient tření  $f$ , definovaný jako poměr síly, potřebné k posouvání tělesa po jiném tělese, a normálové síly, která obě tělesa přitlačuje k sobě. Jiným příkladem je bezrozměrová poloha bodu v tělese, například

$$\xi = (x - x_{\min}) / (x_{\max} - x_{\min}) \quad (8.5)$$

$x_{\max}$  a  $x_{\min}$  představují krajní hodnoty souřadnic. Podobně lze vyjádřit i čas. Bezrozměrová teplota,  $\theta = (T - T_{\infty}) / (T_0 - T_{\infty})$ , se užívá pro univerzální popis přenosu tepla ( $T_0$  je počáteční teplota a  $T_{\infty}$  je konečná teplota). V tomto případě také poloha vyšetřovaného místa může být v bezrozměrové podobě. Formální postupy pro vytváření bezrozměrových parametrů lze najít například v [1 – 4].

Bezrozměrové musí být i argumenty v matematických funkcích typu sin, cos, log nebo exp. V opačném případě by jakákoliv změna jednotek (např. metry místo mm) změnila numerickou hodnotu výsledku. Bezrozměrové jsou také argumenty v rozděleních pravděpodobnosti. Například normální (Gaussovo) rozdělení užívá argument  $\{1/2[(x - \mu)/\sigma]^2\}$ , kde  $\mu$  a  $\sigma$  jsou střední hodnota a směrodatná odchylka. Výraz v hranatých závorkách ale není nic jiného, než standardizovaná proměnná, která vyjadřuje vzdálenost  $x$  od střední hodnoty  $\mu$  jako násobek směrodatné odchylky  $\sigma$ .

### 8.3 Další doporučení

1) Tvar bezrozměrového parametru někdy neodpovídá našim záměrům nebo experimentálním možnostem. Všeobecně lze vytvářet nové parametry nebo

podobnostní čísla jako součin nebo poměr původních bezrozměrových parametrů, či použít jejich převrácenou hodnotu nebo mocninu. Protože původní parametry byly bezrozměrové, jsou i takto vzniklé nové veličiny bezrozměrové. Někdy je vhodné zkusit vytvořit více bezrozměrných parametrů a vybrat z nich nejvhodnější, zejména takové, které mají určitý fyzikální smysl.

2) Vyskytuje-li se v úloze několik veličin se stejným rozměrem, lze vytvářet bezrozměrové parametry přímo jako jejich poměry a snížit tak počet argumentů. Ilustrovat to lze na příkladu průhybu nosníku  $y$  s obdélníkovým průřezem ( $b \times h$ ) a délkou  $L$ , zatíženého osamělou silou  $P$ . Modul pružnosti materiálu je  $E$ . Proměnné a jejich rozměry jsou:  $y(m)$ ,  $w(m)$ ,  $h(m)$ ,  $L(m)$ ,  $P(N)$ ,  $E(Nm^{-2})$ . To je 6 proměnných se dvěma rozměry. Počet bezrozměrových parametrů, potřebných pro popis problému, je  $P = N - D = 6 - 2 = 4$ . Okamžitě můžeme vytvořit tři parametry  $\Pi_1 = y/h$ ,  $\Pi_2 = b/h$  a  $\Pi_3 = L/h$ . Zbývají dvě veličiny ( $P$  a  $E$ ), které musí být obsaženy ve čtvrtém parametru. S přihlédnutím k jejich rozměrům a k podmínce bezrozměrnosti musí být do  $\Pi_4$ , zahrnuta také jedna geometrická veličina, například  $h$  nebo jeho mocnina. Tak dostaneme tento parametr jako  $\Pi_4 = P/(Eh^2)$ . Vyšetřovaný vztah lze tedy zapsat v následujícím bezrozměrovém tvaru:

$$y/h = f[P/(Eh^2), L/h, b/h]. \quad (8.6)$$

Vidíme, že pro zkoumání relativního průhybu  $y/h$  jsou důležité nikoliv jednotlivé veličiny  $L$  nebo  $P$ , atd., ale jejich poměry.

3) U některých úloh se vždy vyskytují bezrozměrové veličiny. Příklady jsou součinitel tření, Poissonovo číslo  $\mu$  nebo úhel  $\varphi$  (rad). Tyto veličiny se automaticky stávají argumenty v bezrozměrových vztazích.

4) Vytváříme-li bezrozměrové parametry, snažíme se využít existující znalosti o vyšetřovaném problému nebo podobných úlohách. Víme například, že průhyb pružného nosníku je přímo úměrný zatížení a nepřímo úměrný modulu pružnosti. Někdy známe analytické řešení úlohy pro velmi malé nebo velmi vysoké hodnoty určité proměnné. I silně zjednodušené řešení může pomoci při hledání tvaru argumentů. Někdy je známo, že některé veličiny musí vystupovat v určité kombinaci. Tuto kombinaci pak můžeme uvažovat jako novou proměnnou, čímž se sníží celkový počet proměnných. Vyšetřujeme-li na příklad tření mezi dvěma tělesy, je možno přitlačnou silou  $F$  (N) a kontaktní plochu  $S$  ( $m^2$ ) nahradit kontaktním tlakem  $p = F/S$  ( $N/m^2$ ).

5) Připravujeme-li určitý experiment, je nutné uvažovat všechny veličiny, které by mohly hrát roli. Jinak bychom mohli dostat nesprávné a zavádějící výsledky. Je méně nebezpečné zahrnout veličinu, jejíž důležitost je nejistá, a později se může ukázat, že ji lze pominout, než vynechat veličinu, která se později ukáže jako důležitá. Použití rozměrové analýzy někdy odhalí závažné nedostatky. Například objeví-li se určitý rozměr jenom u jedné veličiny, potom tato veličina z bezrozměrové rovnice vypadne a nebude zahrnuta do žádného bezrozměrového parametru. Je-li však zřejmě nezbytná pro popis vyšetřovaného jevu, je nutné přidat ještě další veličinu, která bude mít stejný rozměr. Lze to ilustrovat na příkladu vyšetřování intenzity opotřebení brzdové destičky. Veličiny, které hrají roli, jsou: rychlost opotřebení  $w$  (m/s), rychlost vzájemného pohybu  $v$  (m/s) a tlak v kontaktní ploše  $p$  (N/m<sup>2</sup>). Bezrozměrový parametr lze hledat v obecném tvaru

$$\Pi = w^{x_1} v^{x_2} p^{x_3}. \quad (8.7)$$

Tento výraz můžeme přepsat prostřednictvím rozměrů jednotlivých veličin  $m$ ,  $s$ ,  $N$  jako

$$[m]^0 [s]^0 [N]^0 = [m \times s^{-1}]^{x_1} \times [m \times s^{-1}]^{x_2} \times [N \times m^{-2}]^{x_3} \quad (8.8)$$

Levá strana odpovídá bezrozměrovému vyjádření. Z podmínky rovnosti exponentů u stejného základu vyplývá  $N^0 = N^{x_3}$ , takže  $x_3 = 0$ . Z experimentů je ale známo, že rychlost opotřebení závisí na kontaktním tlaku  $p$ , takže  $x_3$  nemůže být rovno 0. Je tedy nutné přidat ještě nějakou další veličinu, která bude mít také rozměr  $Nm^{-2}$ . Může to být například tvrdost  $H$  (Nm<sup>-2</sup>), která charakterizuje odpor materiálu. Obecný tvar bezrozměrového parametru pak bude

$$\Pi = w^{x_1} v^{x_2} p^{x_3} H^{x_4} \quad (8.9)$$

Z tohoto výrazu můžeme snadno formulovat vhodný vztah bezrozměrových parametrů jako  $w/v = f(p/H)$ , a provést řadu experimentů pro nalezení vhodného tvaru funkce  $f$ .

## 8.4 Omezení principu podobnosti

Princip podobnosti platí jenom za určitých podmínek, a mimo ně ztrácí svoji platnost. Příkladem je přechod od pružných deformací k plastickým u kovových materiálů. Jsou-li napětí nižší než mez kluzu, platí přímá úměrnost mezi napětími a přetvořeními, a lze užívat princip superpozice, kdy deformace a napětí od několika zatížení působících současně počítáme jako součet deformací nebo napětí

od jednotlivých zatížení. Zákony pružno-plastického deformování jsou ale nelineární, takže situace musí být řešena pro různá zatížení individuálně. Jiným případem je závislost pevnosti součástí z křehkých materiálů na velikosti zatížené plochy nebo objemu. Křehký lom obvykle začne na nejslabším místě, s nějakou vadou. Menší velikost zatížené oblasti znamená menší pravděpodobnost výskytu větší vady. Menší defekt může sloužit jako východisko poruchy pouze při vyšším napětí. Velmi malé předměty jsou proto pevnější. Podobně závisí na velikosti i mez únavy kovových součástí.

Někdy se ve vyšetřovaném problému mohou současně vyskytnout veličiny, které závisí na různých mocninách jiné veličiny. Například energie, spotřebovávaná při lomu, je úměrná lomové ploše ( $m^2$ ), zatímco energie napjatosti akumulovaná v tělese je úměrná jeho objemu, a tedy  $m^3$ . Chceme-li tlumení nárazů zkoumat experimentálně na modelu o jiných rozměrech, musíme uvážit, co je hlavním mechanismem disipace energie, resp. jsou-li obě složky energií stejně důležité, a popřípadě jednu z nich zanedbat.

Procesy při rychlém plastickém deformování materiálu někdy závisí na rychlosti přetváření (strain-rate). Jestliže chceme zkoumat účinky rázového zatížení na modelu, který má menší rozměry ( $L_m$ ) než skutečný objekt ( $L_p$ ), pak nesmíme zapomenout, že pro dosažení stejné rychlosti přetváření by měla být rozdílná i rychlost nárazu  $v_0$ , aby platilo

$$v_{0m}/v_{0p} = L_m/L_p ; \quad (8.10)$$

indexy  $m$  a  $p$  označují model a prototyp.

Je nutno mít také na paměti, že někdy se vyšetřovaná veličina mění se změnami určitého parametru poměrně pomalu, ale při dosažení jeho jisté úrovně se může změnit velmi rychle. Vztah, popisující jisté chování nebo proces, často platí jenom v určitém rozmezí parametrů. Pokud je příslušný proces popsán prostřednictvím bezrozměrových veličin, jsou podmínky pro přechod z jednoho režimu do druhého charakterizovány tzv. **kritickou hodnotou** takovéto veličiny. Známým případem je přechod od laminárního proudění k turbulentnímu při dosažení kritické hodnoty Reynoldsova čísla. Je tedy nutno vždy nejprve uvažovat všechny možné vlivy, a počet faktorů snížit až po důkladné analýze; popřípadě stanovit, pro jaké rozmezí parametrů bude náš model platit.

## 8.5 Příklady bezrozměrových veličin

### Materiálové vlastnosti

$E_1/E_2, H_1/H_2$	poměr modulů pružnosti nebo tvrdostí; indexy označují součásti nebo fáze v materiálu
$E(x)/E_0, H(x)/H_0$	poměry jako výše; index 0 označuje charakteristickou hodnotu
$H/Y, E/Y, E/H$	poměr tvrdosti a meze kluzu nebo modulu pružnosti,
$\sigma/Y, \sigma/\sigma_u, Y/\sigma_u$	poměr napětí k mezi kluzu $Y$ nebo pevnosti

### Geometrie

$x/d$	$x$ – vzdálenost, deformace, $d$ – charakteristický rozměr vzorku nebo materiálu (výška nebo průměr)
$\Delta/L$	poměrné posunutí nebo prodloužení; $L$ – základní délka

### Síly a napětí

$F/F_0$	poměr zatížení $F$ a charakteristické síly
$\sigma/\sigma_m$	poměr napětí $\sigma$ ke střednímu napětí nebo tlaku $\sigma_m$

### Čas

$t/t_0$	$t_0$ – charakteristický čas (trvání nárůstu zatížení apod...)
---------	--

## 8.6 Příklady podobnostních čísel

Zkrácené označení naznačuje jméno vědce, po němž je číslo pojmenováno.

Euler	$Eu = \Delta p / \rho u^2$ ; $\Delta p$ – rozdíl tlaku, $\rho$ – hustota, $u$ – charakteristická rychlost
Fourier	$Fo = a \tau / d^2$ ; $a$ – teplotní vodivost, $\tau$ – čas, $d$ – charakteristický rozměr
Froude	$Fr = u^2 / gd$ ; $u$ – charakteristická rychlost, $g$ – gravitační zrychlení, $d$ – charakteristický rozměr
Galilei	$Ga = gd^3 / \nu^2$ ; $g$ – gravitační zrychlení, $d$ – charakteristický rozměr, $\nu$ – kinematická viskozita

Nusselt	$Nu = \alpha d / \lambda$ ; $\alpha$ – součinitel přestupu tepla, $d$ – charakteristický rozměr, $\lambda$ – tepelná vodivost okolního prostředí
Péclet	$Pe = ud/a$ ; $u$ – rychlost, $d$ – charakteristický rozměr, $a$ – teplotní vodivost
Prandtl	$Pr = \nu/a$ ; $\nu$ – kinematická viskozita, $a$ – teplotní vodivost
Reynolds	$Re = ud\rho/\eta = ud/\nu$ ; $u$ – charakteristická rychlost, $d$ – charakteristický rozměr, $\rho$ – hustota kapaliny, $\eta$ – dynamická viskozita, $\nu = \eta/\rho$ = kinematická viskozita
Stokes	$Stk = ut/d$ ; $u$ – rychlost, $t$ – relaxační doba, $d$ – charakteristický rozměr

### Literatura ke kapitole 8.

1. Menčík, J.: Úvod do experimentální analýzy. Univerzita Pardubice, Pardubice, 2017. Volně dostupné na: <http://hdl.handle.net/10195/66960>. (13.02.2018)
2. Kožešník, J.: Teorie podobnosti a modelování.) Academia, Praha, 1983. 216 s.
3. Zlokarnik, M.: Scale-up in Chemical Engineering. 2nd Edition, Wiley, 2006, 296 s.
4. Szirtes, T.: Applied Dimensional Analysis and Modeling, McGraw-Hill, New York, 1997, 2nd ed. 2007. 856 s.

## Rejstřík (číslo v závorce značí kapitolu)

absorbér vibrací dynamický	111 (7)
airbag	84 (6)
amplituda poměrná	97 (7)
amplitudová charakteristika	97 (7)
analýza rozměrová	118 (8)
bezrozměrová veličina	121, 125 (8)
bezrozměrový parametr	119 (8)
boulení	58 (5), 79 (6)
brzdění	31, 32, 33 (4)
Buckinghamovo pravidlo	120 (8)
buněčná struktura	78 (6)
buzení kinematické	103 (7)
činitel naladění	96 (7)
číslo podobnostní	121, 125 (8)
číslo Poissonovo	27 (3)
diagram bilineární	48, 49 (5)
diagram pracovní	47, 48, 49 (5)
doba do zastavení	32 (4)
energie, zákon zachování	11, 19 (2)
energie kinetická (pohybová)	11, 12, 18 (2), 36 (4)
energie potenciální (polohová)	17, 18 (2), 36 (4)
energie zmařená (disipovaná)	13 (2)
etapa stlačení	10 (2)
etapa odpružení	10 (2)
faktor intenzity napětí	62 (5)
fázová charakteristika	97, 99 (7)
fázový posun	97 (7)
frekvence budící	95 (7)
frekvence kruhová (úhlová rychlost)	93 (7)
frekvence vlastní	93 (7)
homogenita rozměrů	118 (8)
houževnatost vrubová	50 (5)
hystereze	110, 111 (7)

kloub plastický	56 (5)
kmitání krouživé	106 (7)
kmitání příčné	105 (7)
kmitání s tlumením	94, 110 (7)
kmitání volné	92, 93, 94 (7)
kmitání vynucené	95, 96 (7)
kompozity	82 (6)
koncentrace napětí	60 (5)
kritické napětí, kritické zatížení	59 (5), 79, 80 (6)
kruhová frekvence	93 (7)
kyvadlo balistické	17 (2)
lamináty vláknové	82 (6)
lom odtržením	52 (5)
lomová houževnatost	62 (5)
lomová mechanika	62 (5)
materiály křehké	47 (5)
materiály houževnaté (pružnoplastické)	49 (5)
materiály tvárné	48 (5)
materiály viskoelastické	51 (5)
metoda konečných prvků	116 (7)
mez kluzu	47, 48, 49 (5)
mez pevnosti	47 (5)
modul objemové pružnosti ( $K$ )	29 (3)
modul průřezu v ohybu elastický	55 (5)
modul průřezu v ohybu plastický	56, 57 (5), 74 (6)
modul pružnosti v tahu ( $E$ )	24 (3)
modul pružnosti ve smyku ( $G$ )	28 (3)
modul zpevnění	28 (3), 48 (5)
napětí kritické	59 (5)
napětí zbytkové	57 (5)
napjatost kontaktní	67 (5)
napjatost ohybová	66 (5)
nárazník pružný	20 (2)
Newtonova houpačka	26 (3)
ohyb pružnoplastický (elastickoplastický)	54, 55 (5)
parametr bezrozměrový	119 (8)



podobnost	120 (8)
polštáře vzduchové	84 (6)
poměrná amplituda	97 (7)
poměrná hustota buněčné struktury	78 (6)
poměrné prodloužení	24 (3)
poměrný útlum	42 (4), 94 (7)
pórovitost	78 (6)
porušení křehké	52 (5)
porušení tvárné	52 (5)
prstence	73, 76 (6)
pružina	19 (2), 34 (4)
pružiny v sérii a paralelně	36, 37 (4)
pružnoplastický materiál bez zpevnění	48, 49 (5)
pružnoplastický ohyb	54 (5)
prvky pro tlumení rázů	72 (6)
přechodová teplota	53 (5)
přenosový poměr	101 (7)
ráz hydraulický	28 (3)
ráz nepružný	12 (2)
ráz polopružný	13 (2)
ráz pružný	11 (2)
rezonanční křivka	97, 98 (7)
rozměrová (dimenzionální) analýza	118 (8)
rychlost šíření vln plastických	28 (3)
rychlost šíření vln elastických	24 (3)
rychlost úhlová (kruhová frekvence)	92 (7)
rychlost uvolňování energie	64 (5)
sendvičové prvky	82 (6)
síla při rázu, maximální	19, 20 (2)
síla odporová	31, 32, 33 (4)
síla přenášená do základů	101 (7)
součinitel přenosu	101, 102 (7)
součinitel restituce	14 (2)
soustava s více stupni volnosti	114 (7)
standardní lineární těleso (SLS)	51 (5)
štíhlost prutu	59 (5)

tažnost	50 (5)
těleso Kelvinovo – Voigtovo	51 (5)
těleso Maxwelllovo	51 (5)
teorie podobnosti	121 (8)
tlumení	38, 40 (4)
tlumení kritické	42 (4)
tlumení nadkritické	43 (4)
tlumení podkritické	42 (4)
tlumení smykovým třením	31, 39 (4)
tlumení úměrné čtverci rychlosti	44 (4)
tlumení úměrné rychlosti	41 (4)
tlumič rázů hydraulický	86, 87 (6)
tlumič s konstantním zpomalením	86, 87 (6)
tlumič třecí	31, 39 (4)
trhliny, vliv	61, 62 (5)
trubice, trhání, přetvarování	80, 81 (6)
tření smykové	31, 39 (4)
tuhost pružiny	34, 36 (4)
vesta neprůstředná	83 (6)
vlastní frekvence	93, 114 (7)
vlastní tvary	116 (7)
vlny napětí elastické	23, 24, 25, 26, 27 (3)
vlny napětí plastické	28 (3)
volné kmitání bez tlumení	92 (7)
volné kmitání s tlumením	94 (7)
voštiny	78 (6)
vruby – koncentrace napětí	60 (5)
vrubová houževnatost	50 (5)
vyvažování (statické, dynamické)	109 (7)
Youngův modul	24 (3)
zákon zachování energie	11, 19 (2), 36 (4)
zákon zachování hybnosti	11, 18 (2)
zarážení pilot	17 (2)
zatížení kritické	59 (5), 78 (6)
zpomalení maximální	20 (2)
ztráta stability boulením	58 (5)

Název: Rázy a vibrace. Základy mechaniky a zmírňování účinků  
Autor: prof. Ing. Jaroslav Menčík, CSc.  
Vydavatel: Univerzita Pardubice  
Vydáno: květen 2018  
Stran: 132  
Vydání: první

Tato publikace neprošla jazykovou korekturou.

ISBN 978-80-7560-146-9 (tisk)

ISBN 978-80-7560-147-6 (pdf)

Kniha je volně přístupná na <http://hdl.handle.net/10195/70531> a <https://e-shop.upce.cz>

ISBN 978-80-7560-147-6 (pdf)