MODELOVÁNÍ OPTIMALIZAČNÍCH ÚLOH

MODELLING OF OPTIMIZATION PROBLEMS

Ondřej Míča

Abstrakt

V současné době je stále více optimalizačních úloh řešeno pomocí výpočetní techniky, díky které jsme schopni řešit čím dál tím složitější problémy. Pokud ale má být řešení korektní a kvalitní, je třeba správně definovat reprezentaci reálného světa (model), se kterým bude výpočetní technika pracovat.

Tento text obsahuje ucelený obecný postup, kterého je vhodné se držet při tvorbě takových modelů.

Klíčová slova: *optimalizace, modelování, matematické programování*

Abstract

In these days more and more optimization problems are solved by computers, which is why we are able to solve increasingly complex problems. However, if the solution is to be correct and of good quality, it is necessary to correctly define the representation of the real world (model) with which the computers will work.

This paper contains a comprehensive general approach that should be followed when creating such models.

Key words: *optimization, modelling, mathematical programming*

1 OPTIMALIZACE

Optimalizace je základní myšlenkou v různých oborech znalostí, jako jsou: operační výzkum, správa, finance, telekomunikace atd., které se používají při návrhu, analýze a rozhodování v systémech.

Na základě výše uvedeného lze termín „optimalizace“ chápat jako soubor znalostí, principů, teorií, technik, užitečných nástrojů a potřebných k řešení problémů matematického programování.

Obecně řečeno, řešení problému je racionální proces, který zahrnuje identifikaci problému a provedení některých akcí za účelem jeho odstranění nebo snížení. Tento proces musí být systematický a řídit se dostupnými znalostmi o systému.

„Optimalizační problém“ může být vyjádřen jako zjištění hodnoty některých rozhodovacích proměnných, pro které určitá účelová funkce (nebo několik účelových funkcí) dosáhne své maximální nebo minimální hodnoty podle charakteristik problému. Někdy hodnota rozhodovacích proměnných podléhá souboru omezení.

„Model“ je selektivní reprezentace nebo abstrakce (kvantitativní nebo kvalitativní) vlastností systému. Každý problém optimalizace musí být formulován pomocí „matematického modelu“, protože tyto modely stručně a jednoznačně popisují vztahy nebo podmínky problému řešené jazykovými a matematickými strukturami, které umožňují použití matematických a výpočetních technik [1].

2 MODELY POUŽÍVANÉ V MATEMATICKÉM PROGRAMOVÁNÍ

Matematické modely se obecně skládají z následujících prvků [4]:

- Rozhodovací proměnné: jedná se o *n* číselných proměnných, jejich hodnota ovlivňuje kvalitu výsledného řešení.
- Omezující podmínky: představují množinu podmínek (vyjádřených jako rovnice nebo nerovnice), které musí výsledné řešení splňovat.
- Účelová funkce: jedná se o kvantitativní měření kvality řešení problému. Vyjadřuje se jako matematická funkce rozhodovacích proměnných.

Modelování je tvůrčí a intelektuální proces generování modelů, který musí být systematický, racionální a teoreticky řízený, jehož cílem je analyzovat a řešit problémy. Modelování problémů s optimalizací je řešeno, studováno a systematizováno vědní disciplínou zvanou operační výzkum. Modelování má zásadní význam, protože umožňuje vytvářet nástroj pro popis, studium, analýzu a porozumění chování systému.

3 PROCES TVORBY OPTIMALIZAČNÍCH MODELŮ

Proces tvorby optimalizačních modelů lze rozložit do dílčích fází. Obecně se ve všech fázích aplikuje princip logické úspornosti, který říká, že použité entity se nemají zmnožovat více, než je nutné (tzv. Occamova břitva).

Současně se také používá logický konstrukt, který stanoví, že dva protichůdné soudy o předmětu nebo události nemohou být současně platné v jeden okamžik. Proto stačí uznat platnost jednoho z nich, aby druhý byl formálně popřen. Jinými slovy: dvě navzájem se vylučující charakteristiky nelze přiřadit stejnému konceptu za stejných podmínek a ve stejnou chvíli. [2]

Při tvorbě optimalizačního modelu je vhodné postupovat po jednotlivých iteracích, jak je popisují následující podkapitoly.

3.1 Identifikace problému

V této fázi jsou zjišťovány, definovány a popisovány problémy v systému, které se dále analyzují. Činnosti tvořící tuto fázi jsou:

- Určení hranic systému.
- Charakteristika prostředí, ve kterém systém pracuje.
- Identifikace, charakteristika a analýza funkcí, cílů a prostředků systému.
- Vyhodnocení aktuálního stavu systému.
- Zjištění možných problémů.
- Identifikace důsledků těchto problémů.

3.2 Definice problému

V této fázi se vytváří model zkoumaného problému. Z toho důvodu tato fáze významně ovlivňuje výsledky a závěry získané z modelování, protože je obecně obtížné získat „správnou“ odpověď na „špatný“ problém [3]. V této fázi je rozhodnuto o tom, který z problémů v systému by měl být řešen. Činnosti prováděné v této fázi jsou:

- Definice problému, který se bude zkoumat.
- Určení předpokladů, za kterých bude systém modelován.
- Identifikace a popis alternativních řešení.
- Určení cílů studie.
- Sběr informací o problému.
- Slovní popis problému.

3.3 Vytvoření matematického modelu

V této fázi se nahrazuje kognitivní objekt jeho matematickým obrazem. Vytvoření vhodného modelu skutečnosti je zásadním krokem k dosažení uspokojivého řešení skutečného problému. Pro vytvoření matematického modelu se musí postupně definovat vlastnosti rozhodovacích proměnných, struktura rovnic nebo nerovnic, které správně reprezentují vztahy mezi rozhodovacími proměnnými a reálným problémem, účelová funkce a omezující podmínky. Jedná se o kreativní fázi, ve které je třeba věnovat pozornost přesnosti formulace.

3.4 Řešení modelu

Po vytvoření modelu se používají mechanismy (obecně algoritmy), s cílem nalézt optimální (nebo suboptimální) řešení daného problému. Během této fáze je možný vývoj nebo úprava některých algoritmů pro řešení matematického modelu.

Obecně se algoritmy dělí na:

- Exaktní algoritmy – vždy naleznou optimální řešení, použitelné jsou pro konkrétní typ úlohy.
- Heuristické algoritmy – nehledají optimální řešení, ale suboptimální řešení. Výhodou je jejich rychlost. Jsou navržené opět pro konkrétní typ úlohy.
- Metaheuristické algoritmy – nehledají optimální řešení, ale suboptimální řešení. Výhodou je jejich rychlost. Na rozdíl od heuristických algoritmů se jedná o obecné návrhy, které je možné po přizpůsobení použít na různé typy úloh.

3.5 Ověření modelu a získaného řešení

Cílem této fáze je zdokonalit navrhovaný model takovým způsobem, aby byl vhodným nástrojem pro analýzu a předvídání chování sledovaného systému. Pro dosažení výše uvedeného účelu se modelovací proces obvykle rekurzivně prochází od konstrukční fáze modelu po fázi ověřování a je dokončen až do dosažení rozumné predikce systému; to znamená, že každý navržený model musí být důkladně testován, aby bylo možné nalézt a napravit co nejvíce vad. Je nutné zajistit, aby model přiměřeně reprezentoval systém, ačkoliv existuje možnost, že v modelu existují některé skryté vady (které se nikdy nedají rozpoznat).

3.6 Interpretace řešení

Číselné výsledky získané v modelu jsou interpretovány jako soubor instrukcí, úkolů nebo rozhodnutí vydávaných jasným a srozumitelným způsobem pro účastníky systému.

4 KLASIFIKACE MATEMATICKÝCH MODELŮ

Vytvoření vhodného modelu reálného světa je rozhodujícím krokem k dosažení uspokojivého řešení skutečného problému. Modely matematického programování lze klasifikovat podle jejich vlastností následujícím způsobem [2]:

4.1 Modely spojité vs. diskrétní

Jestliže všechny rozhodovací proměnné modelu mohou nabývat libovolnou hodnotu $\mathbb{R}$, pak se říká, že optimalizační model je spojitý model. Naopak, když alespoň jedna rozhodovací proměnná nabývá hodnoty v $\mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{N}$, pak se říká, že optimalizační model je diskrétní.

Pokud všechny proměnné nabývají hodnoty v $\mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{N}$, je model považován za čistě diskrétní. Naproti tomu, pokud existuje nějaká spojitá proměnná, říká se, že model je smíšený.

4.2 Modely lineární vs. nelineární

Lineární model znamená, že všechny omezující rovnice a účelové funkcí se dají vyjádřit pomocí lineárních rovnic a nerovnic. Pokud tomu tak není, jedná se o nelineární model.

4.3 Modely monokriteriální vs. vícekriteriální

Ve vícekriteriálním modelu se objevuje soubor účelových funkcí (dvě nebo více) v konfliktu mezi sebou. Existence více účelových funkcí vyvolává zásadní rozdíl oproti monokriteriálnímu modelu: neexistuje jediné řešení problému, ale soubor řešení, která představují různé kompromisy mezi hodnotami funkcí, které mají být optimalizovány.

4.4 Modely deterministické vs. stochastické

Deterministický model je ten, ve kterém se předpokládá, že jsou s jistotou známy všechny relevantní údaje. To znamená, že pro libovolnou sadu hodnot rozhodovacích proměnných je s určitostí známo, zda jsou omezující podmínky splněny nebo nikoliv. Naproti tomu ve stochastických modelech se předpokládá, že některé proměnné jsou náhodné. Hodnota takových proměnných se řídí náhodným pokusem a není možné je určit předem.

4.5 Modely statické vs. dynamické

Statický model se používá k analýze systému v daném časovém okamžiku, takže se nebere v úvahu časový posun. Naopak v dynamickém modelu se předpokládá, že alespoň jeden rozhodovací prvek se vyvíjí nebo mění s ohledem na čas; proto model popisuje rozhodovací proměnné jako funkce času.

5 ZÁVĚR

S nástupem výpočetní techniky se značně rozšířily možnosti optimalizace. Pro to, optimalizační nástroje poskytovaly řešení odpovídající realitě, je nutné, aby pracovaly s kvalitními modely, které co možná nejdetailněji odpovídají reálnému světu.

Je jasné, že celý reálný svět nelze přenést do podoby jedniček a nul, se kterými počítače pracují. Proto se při tvorbě matematických modelů používá zjednodušení a abstrakce, aby model obsahoval pouze ty vlastnosti a charakteristiky, které přímo ovlivňují sledované chování modelu.

Tento text obsahuje ucelený obecný postup, kterého je vhodné se držet při tvorbě takových modelů.

Použitá literatura

1. LINDA, Bohdan a Josef VOLEK. *Lineární programování*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2007. ISBN 978-80-7395-038-5.
2. JABLONSKÝ, Josef. *Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování*. 3. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3.
3. JANÁČEK, Jaroslav. *Optimalizace na dopravních sítích*. Žilina 2006 ISBN 80-8070-586-0.
4. JANÁČEK, Jaroslav a Ľubomír BUZNA. *Optimization in networks*. Žilina: University of Žilina, 2009. ISBN 9788080709853.

Kontaktní údaje

Ing. Ondřej Míča
Univerzita Pardubice,
Dopravní fakulta Jana Pernera,
Katedra informatiky v dopravě,
Studentská 95, Pardubice 532 10.
Tel: +420 466 036 428
Email: ondrej.mica@upce.cz