

**Univerzita Pardubice  
Fakulta ekonomicko-správní  
Ústav systémového inženýrství a informatiky**

**Riziko dlouhověkosti**

**Bc. Jana Salfická**

**Diplomová práce  
2017**

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Jana Salfická**  
Osobní číslo: **E15656**  
Studijní program: **N6209 Systémové inženýrství a informatika**  
Studijní obor: **Pojistné inženýrství: Management finančních rizik**  
Název tématu: **Riziko dlouhověkosti**  
Zadávající katedra: **Ústav matematiky a kvantitativních metod**

### Z á s a d y   p r o   v y p r a c o v á n í :

Diplomová práce se zabývá rizikem dlouhověkosti, tzv. Longevity Risk. Cílem práce je popsat modely mortality, které jsou stochastické, a které umožňují výpočet trendu úmrtnosti, její predikci a určení očekávané délky života v budoucnu. Parametry pro výpočet se odhadnou z dostupných dat platných pro Českou republiku.

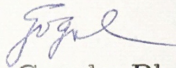
#### Obsah:

- Demografický vývoj v České republice.
- Metody modelování rizika dlouhověkosti.
- Využití modelů na vybraných datech.
- Prognóza rizika dlouhověkosti.

Rozsah grafických prací: —  
Rozsah pracovní zprávy: cca 50 stran  
Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická  
Seznam odborné literatury:

- CIPRA, Tomáš. *Matematické metody demografie a pojištění*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1990. ISBN 80-03-00222-2.
- DICKSON, D. C. M., Mary HARDY a H. R. WATERS. *Solutions manual for actuarial mathematics for life contingent risks*. 2nd pub. New York: Cambridge University Press, 2012. International series on actuarial science. ISBN 978-1-107-62026-1.
- GRAY, Roger J. a Susan M. PITTS. *Risk modelling in general insurance: from principles to practice*. New York: Cambridge University Press, 2012. ISBN 9780521863940.
- KALIBOVÁ, Květa. *Úvod do demografie*. 2. vyd. Praha: Karolinum, 2001. Učební texty Univerzity Karlovy v Praze. ISBN 80-246-0222-9.
- KOSCHIN, Felix. *Aktuárská demografie: (úmrtnost a životní pojištění)*. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, 1997. ISBN 80-7079-112-8.

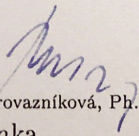
Vedoucí diplomové práce:

  
RNDr. Ján Gogola, Ph.D.

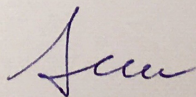
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: 4. září 2016

Termín odevzdání diplomové práce: 28. dubna 2017

  
doc. Ing. Romana Provazníková, Ph.D.  
děkanka

L.S.

  
doc. RNDr. Bohdan Linda, CSc.  
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 4. září 2016

## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil/a, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako Školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

-

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 9/2012, bude práce zveřejněna v Univerzitní knihovně a prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 15. 8. 2017

Bc. Jana Salfická

## **PODĚKOVÁNÍ:**

Tímto bych ráda poděkovala svému vedoucímu práce RNDr. Jánu Gogolovi, Ph.D. za jeho odborné rady, trpělivost, vstřícnost a poskytnuté důležité materiály, díky nimž mohla být tato diplomová práce zpracována. Děkuji také své rodině, která mi byla po celou dobu velkou oporou.

## **ANOTACE**

*Předložená práce se zabývá demografickou situací České republiky. Vysvětluje základní pojmy a nejčastější používané postupy k předpovědi modelování míry úmrtnosti. Dále se věnuje charakteristice významu pojmu riziko dlouhověkosti a s ním spojenými finančními a jinými důsledky. Následně je toto riziko kvantifikováno na konkrétních datech pomocí stochastického modelu Lee-Carter. Cílem práce je popsat modely mortality, které umožňují výpočet trendu úmrtnosti, její predikci a určení očekávané délky života v budoucnu. Parametry pro výpočet budou odhadnuty z dostupných dat platných pro Českou republiku.*

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

*Dlouhověkost, úmrtnost, modelování, Lee-Carter*

## **TITLE**

Longevity risk

## **ANNOTATION**

*This diploma thesis deals with the demographic situation of the Czech Republic. The basic concepts and most common used procedures to predict modeling of mortality rates, are explained in this thesis. Further, it deals with the significance of the concept of the risk of longevity and its associated financial and other consequences. In next part, this risk is quantified on specific data using the Lee-Carter stochastic model. The aim of the thesis is to describe mortality models, which allow calculation of mortality trend, prediction and determination of expected life expectancy in the future. Parameters for calculation will be estimated from available data valid for the Czech Republic.*

## **KEYWORDS**

*Longevity, mortality, modeling, Lee-Carter*

# OBSAH

ÚVOD.....	10
<b>1. DEMOGRAFICKÝ VÝVOJ POPULACE V ČESKÉ REPUBLICE.....</b>	<b>11</b>
1.1. DEMOGRAFIE.....	11
1.1.1. Porodnost.....	12
1.1.2. Úmrtnost.....	13
1.1.3. Potratovost.....	14
1.1.4. Sňatečnost.....	14
1.1.5. Rozvodovost.....	15
1.1.6. Migrace.....	15
1.2. DEMOGRAFICKÝ VÝVOJ POPULACE V ČESKÉ REPUBLICE .....	15
1.3. ÚMRTNOSTNÍ TABULKY.....	21
1.3.1. Ukazatele a konstrukce úmrtnostních tabulek .....	21
1.3.2. Druhy úmrtnostních tabulek .....	24
1.3.3. Úmrtnostní tabulky nezávislé na pohlaví .....	25
1.4. RIZIKO DLOUHOVĚKOSTI.....	25
1.4.1. Struktura obyvatelstva .....	28
<b>2. MODELOVÁNÍ ÚMRTNOSTI .....</b>	<b>32</b>
2.1. DETERMINISTICKÉ MODEL Y .....	33
2.1.1. Exponenciální formule .....	33
2.1.2. Další projekční formule .....	33
2.2. STOCHASTICKÉ MODELOVÁNÍ ÚMRTNOSTI.....	34
2.2.1. Lee-Carterova metoda projekce úmrtnosti .....	35
2.2.2. CBD model.....	40
<b>3. ANUITY .....</b>	<b>42</b>
3.1. ŽIVOTNÍ ANUITA .....	43
3.2. MODELOVÁNÍ ŽIVOTNÍCH ANUIT .....	43
<b>4. RIZIKO DLOUHOVĚKOSTI NA KONKRÉTNÍCH DATECH.....</b>	<b>45</b>
4.1. VÝBĚR DAT.....	45
4.2. LEE-CARTER MODEL.....	50
4.2.1. Parametry modelu.....	50
4.2.2. Modelování parametru $\kappa_t$ a predikce.....	53
4.3. PŘEDPOVĚĎ VÝŠE ANUITY.....	56
<b>ZÁVĚR.....</b>	<b>62</b>
<b>POUŽITÁ LITERATURA .....</b>	<b>64</b>
<b>SEZNAM PŘÍLOH.....</b>	<b>66</b>

## SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Index stáří a jeho vývoj v letech 1950–2016.....	27
Tabulka 2: Vývoj hodnot životní dočasné anuity v letech 2000–2017.....	58
Tabulka 3: Vyčíslení zvýšení anuity v závislosti na prodloužení délky života o 1 rok .....	59

## SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Vývoj míry úmrtnosti v logaritmickém měřítku pro muže v letech 1950–1999 ...	47
Obrázek 2: Vývoj míry úmrtnosti v logaritmickém měřítku pro ženy v letech 1950–1999 ....	47
Obrázek 3: Vývoj míry úmrtnosti v logaritmickém měřítku pro ženy v letech 1950–1999 ....	48
Obrázek 4: Vývoj míry úmrtnosti v logaritmickém měřítku pro jednotlivé věky žen .....	48
Obrázek 5: Vývoj míry úmrtnosti v logaritmickém měřítku pro jednotlivé věky mužů.....	49
Obrázek 6: Vývoj míry úmrtnosti v logaritmickém měřítku pro jednotlivé věky celé populace.....	49
Obrázek 7: Vývoj parametru $\alpha x$ pro muže, ženy a celkovou populaci .....	51
Obrázek 8: Vývoj parametru $\beta x$ pro muže, ženy a celkovou populaci.....	52
Obrázek 9: Vývoj parametru $kt$ pro muže, ženy a celkovou populaci v letech od 1950–2014 .....	52
Obrázek 10: Data ČR muži – Predikovaný vývoj parametru $kt$ .....	54
Obrázek 11: Data ČR ženy – Predikovaný vývoj parametru $kt$ .....	54
Obrázek 12: Data ČR celá populace – Predikovaný vývoj parametru $kt$ .....	55

## SEZNAM GRAFŮ

Graf 1: Vývoj počtu zemřelých oproti narozených v letech 1950–2013 .....	13
Graf 2: Věková struktura obyvatelstva v roce 1950.....	29
Graf 3: Věková struktura obyvatelstva v roce 1980.....	29
Graf 4: Věková struktura obyvatelstva v roce 2015.....	30
Graf 5: Přirozený přírůstek obyvatelstva v ČR v letech 1950–2016.....	31
Graf 6: Očekávaná délka života při narození v letech 1950–2014.....	46
Graf 7: Vývoj pravděpodobnosti přežití pro ženy z predikovaných hodnot .....	55
Graf 8: Vývoj pravděpodobnosti přežití pro muže z predikovaných hodnot .....	56
Graf 9: Vývoj $\ddot{a}_{x:n }$ pro muže ve věku 60 let a TÚM 1,3 % v letech 2000–2014.....	57
Graf 10: Vývoj $\ddot{a}_{x:n }$ pro ženy ve věku 60 let a TÚM 1,3 % v letech 2000–2014.....	57
Graf 11: Vývoj $\ddot{a}_{x:n }$ pro celkovou populaci ve věku 60 let a TÚM 1,3 % v letech 2000–2014.....	58
Graf 12: Střední délka života mužů ve věku 60 let .....	59
Graf 13: Vývoj střední délky života u žen ve věku 60 let.....	60
Graf 14: Vývoj střední délky života u celkové populace ve věku 60 let.....	60
Graf 15: Rektangularizace dožívání v ročních intervalech .....	61



## SEZNAM ZKRATEK

ADF	Augmented Dickey–Fuller test
CBD	Cairns-Blake-Dowdův model
ČR	Česká republika
ČSÚ	Český statistický úřad
EU	Evropská unie
FES	Fakulta ekonomicko-správní
HMD	The Human Mortality Database
KPSS	Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin test
LC	Lee-Carter model
MZ	Ministerstvo zdravotnictví
OECD	Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj
Sb.	Sbírka zákonů
Tzv.	Tak zvaně
ÚT	Úmrtnostní tabulka

# ÚVOD

Dlouhověkost je fenoménem již od nepaměti lidstva. Již v dávných dobách bohatí panovníci platili vědcům a alchymistům, aby pro ně mimo jiné vynalezli elixír nesmrtelnosti (nebo cokoliv, co jim prodlouží jejich život). Při pohledu do aktuálních statistických dat objevíme, že to, co bylo před několika staletími pouhé a rozmařilé přání, se stává v 21. století realitou.

Prodlužování průměrné délky života, které lze v dnešní době považovat za aktuální téma, se začalo významněji projevovat již na začátku 20. století a má samozřejmě vliv na spoustu aspektů každodenního života. Zhruba od počátku 90. let můžeme pozorovat příklon k dynamickému modelování úmrtnosti pomocí stochastických modelů, které disponují lepší schopností zachytit proměnlivost pozorovaných hodnot a generovaných výstupů.

Cílem této diplomové práce je charakterizovat modely mortality, které umožňují výpočet trendu úmrtnosti, predikci tohoto trendu a odhad očekávané délky života v budoucnu.

První část diplomové práce je zaměřena na vysvětlení pojmu demografie a jednotlivé demografické ukazatele. Dále je analyzován demografický vývoj populace České republiky včetně s dopodrobna popsanými úmrtnostními tabulkami a strukturou obyvatelstva ČR. Další část práce je poté zaměřena na konkrétní metody modelování a projekce úmrtnosti se zaměřením na stochastické modely používané v praxi. Podrobnější výklad je věnován vybranému Lee-Carter modelu, který byl použit v praktické části této diplomové práce. V rámci třetí části mé práce se věnujeme tématu týkajícího se anuity. Teoreticky a výpočetně jsou popsány jednotlivé druhy anuit včetně detailnějšího popisu nejpoužívanějších z nich.

Teoreticky popsané poznatky jsou realizovány na demografických datech České republiky v poslední části diplomové práce. Zde jsou hlavně modelovány projekce důležitých demografických ukazatelů (pro mužskou, ženskou a sloučenou populaci), které nám poslouží k lepšímu pochopení nastalého populačního problému. Následně je práce zaměřena konkrétně na jeden z extrapolačních stochastických modelů, Lee-Carter. Pomocí programu R byl tento model realizován a vypočítané parametry posloužily k dalším krokům. Na jediný časově závislý parametr byla aplikována Box-Jenkinsonova metodologie, která posloužila k extrapolaci očekávaných hodnot a predikcí do budoucna. K tomuto procesu byl využit program Gretl.

Na základě výstupů z předchozích postupů byla data využita při výpočtech životní anuity a také pro porovnání jejího vývoje. V závěru shrnujeme získané výsledky, analyzujeme jejich příčiny a jejich dopady na vývoj budoucích trendů.

# 1. DEMOGRAFICKÝ VÝVOJ POPULACE V ČESKÉ REPUBLICE

## 1.1. Demografie

Demografie je věda, která zkoumá reprodukci lidských populací. Předmětem jejího studia je demografická reprodukce – obnova lidských populací rozením a vymíráním. Základními tématy demografie jsou změny počtu obyvatel a populační přírůstek. Početní stav obyvatelstva přímo ovlivňují následující tři aspekty:

- proces porodnosti (narození)
- úmrtnost (úmrť)
- prostorová mobilita (stěhování).

Demografie se zaměřuje na hledání obecných pravidelností a zákonitostí reprodukce lidských populací, ale také na jejich specifické projevy u konkrétních populací.

Při studiu populačního vývoje spolupracuje demografie s geografii obyvatelstva (ta se zabývá migracemi a rozmístěním obyvatelstva), protože populační vývoj je nejen výsledkem přirozené obnovy populace – rozením a vymíráním, ale také výsledkem prostorové mobility – migrace.

Demografické události (jevy) jsou určité události v průběhu lidského života, které jako hromadné jevy tvoří průběh demografické reprodukce. Mezi nejvýznamnější demografické události patří narození a úmrtí, z nichž jsou odvozeny procesy porodnosti a úmrtnosti. Zvláštním typem úmrtí jsou potraty, z nich se odvozuje potratovost. Ostatní události ovlivňující demografickou reprodukci nepřímo (zprostředkovaně) jsou sňatečnost (uzavírání sňatků) a rozvodovost (rušení sňatků), které ovlivňují porodnost, a nemoci (nemocnost) ovlivňující úmrtnost. Proto je důležité si při studiu reprodukce všimnout také jevů a událostí jako je sňatek, rozvod, ovdovění, nemoc a podobně.

Tyto události se ovšem evidují a poté studují jako hromadné jevy, nikoli tedy jako individuální události v životě jednoho jedince. Nejdříve se zapracují do procesů porodnosti, úmrtnosti, sňatečnosti, rozvodovosti, potratovosti, a poté se pečlivě analyzují a hledají se pravidelnosti a důležité charakteristiky jejich vývoje. [1]

### Demografické procesy

Demografický proces (jev) znamená, že daný jedinec prožívá změnu svého stavu, což představuje pro tohoto jedince skutečný přechod z jednoho stavu do druhého, jde tedy o

uskutečnění procesu. (Např. úmrtnost – proces, při kterém jedinec přechází ze stavu "žijící" do stavu "zemřelý"; úmrtí – uskutečnění přechodu ze stavu žijící do stavu zemřelý pro určitého daného jedince.)

Každý z demografických procesů se projevuje demografickou událostí:

- porodnost narozením
- úmrtnost úmrtím
- potratovost potratem
- sňatečnost uzavřením manželství
- rozvodovost rozvodem
- migrace stěhováním

### **Lidská populace**

Lidská populace je souborem lidí, mezi kterými dochází na daném a vymezeném území k reprodukci. Základem populace je její dlouhodobá existence na společném území. Dnešní lidské populace většinou vznikly důsledkem migrací a míšením různých původních populací.

### **Obyvatelstvo**

Termínem obyvatelstvo označujeme soubor lidí, kteří žijí na určitém území (kontinentu, státu, města apod.). Obyvatelstvo se může skládat z různých populací, etnik a také národů. V praxi se často můžeme setkat s použitím obou termínů – obyvatelstvo a populace – jako synonyma. Údaje o obyvatelstvu se zjišťují pomocí správní administrativy, naproti tomu jen výjimečně existují údaje za jednotlivé populace. [2]

#### **1.1.1. Porodnost**

Porodnost je jedním z klíčových demografických jevů a spolu s úmrtností představuje základní složku demografické reprodukce populací.

Úroveň porodnosti závisí na plodnosti, což je schopnost muže a ženy rodit děti. Jejím výsledným efektem, vyjádřeným počtem narozených dětí, je právě plodnost (fertilita). Úroveň porodnosti je samozřejmě ovlivněna i vnějšími "nebiologickými" faktory jako např. válečná situace na daném území, populační politika státu, finanční možnosti partnerů, uplatnění na trhu práce, hodnotový systém partnerů, náboženské vyznání a řada dalších aspektů.

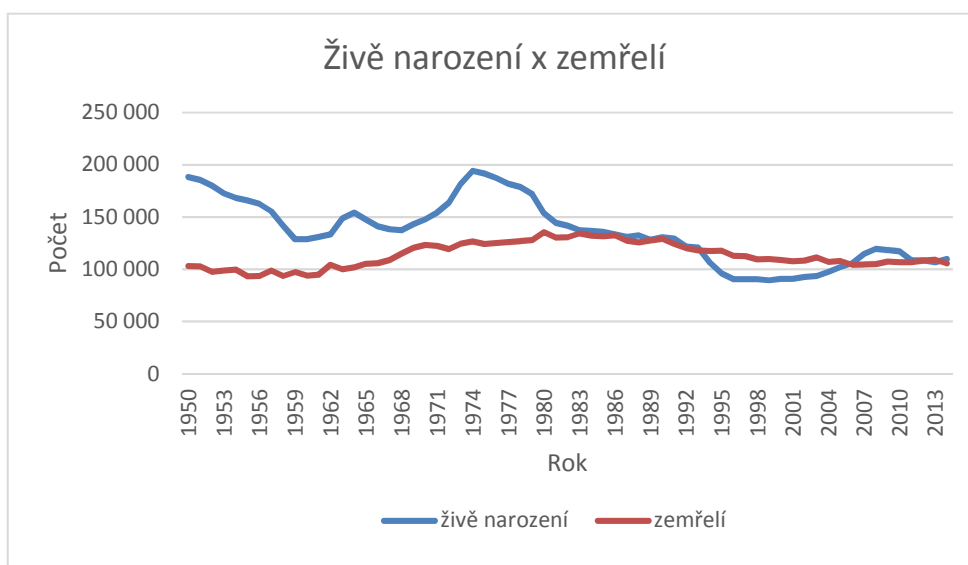
Při analýze procesu porodnosti se vychází ze statistických údajů založených na počtu narozených dětí, nestuduje se samotná událost porodu, ale narozené děti. Porody se dělí na základě počtu narozených dětí na jednočetné a vícečetné. [3]

### 1.1.2. Úmrtnost

Úmrtnost je dalším z klíčových demografických procesů, spolu s porodností představuje základní složku demografické reprodukce populací.

Doplněna nemocností je úmrtnost jedním z hlavních ukazatelů vypovídajících mimo jiné o celkovém zdravotním stavu populace. Zdravotní stav, nemocnost a úmrtnost jsou determinovány řadou faktorů. V zásadě je možné tyto faktory rozdělit na 3 hlavní skupiny:

- genetické faktory – např. vyšší úmrtnost mužů (ženy mají nižší úmrtnost a žijí déle, proto studujeme úmrtnost vždy odděleně za jednotlivá pohlaví)
- ekologické faktory – např. klimatické podmínky, životní prostředí, socioekonomické faktory
  - individuální: životní úroveň, úroveň vzdělání, postoj ke zdraví, péče o vlastní zdraví a využívání preventivních opatření, stravovací návyky, výživa, fyzická aktivita
  - vlivy prostředí: úroveň zdravotnictví, dostupnost a kvalita lékařské péče, rozvoj medicíny a lékařské techniky, systém zdravotní politiky, systém sociálního zabezpečení, ekonomická situace. [4]



Graf 1: Vývoj počtu zemřelých oproti narozených v letech 1950-2013

Zdroj: vlastní podle [5]

### 1.1.3. Potratovost

Potratovost je demografický proces, který se váže k oběma základním procesům lidské reprodukce – jak porodnosti, tak i k úmrtnosti.

Hlavní faktory ovlivňující úroveň potratovosti:

- legislativní ustanovení
- antikoncepce (dostupnost, rozšíření, metody)
- společenské klima
- individuální vlivy (náboženské přesvědčení, úroveň vzdělání, ekonomická situace)
- reprodukční zdraví populace

Zdravotnická zařízení mají povinnost hlásit všechny potraty podle vyhlášky MZ ČSR 11/1988 Sb., o povinném hlášení ukončení těhotenství, úmrtí dítěte a úmrtí matky. Statistika potratovosti je zajišťována Ústavem zdravotnických informací a statistiky ČR (ÚZIS ČR). Údaje o potratech jsou publikovány také Českým statistickým úřadem (ČSÚ). [6]

### 1.1.4. Sňatečnost

Sňatečnost je další demografický proces, který studuje zakládání manželství na základě zákonem daných podmínek. Sňatek je demografická událost opakovatelného charakteru, která na rozdíl od narození a úmrtí, nemusí nastat u každého. Limitujícími faktory uzavírání sňatků jsou:

- minimální sňatkový věk – v České republice 18 let
- rodinný stav – sezdaní již nemohou vstoupit do manželství
- určitý stupeň pokrevnosti – v přímé linii, tj. rodiče s dětmi a sourozenci nemohou uzavřít sňatek, bratranec se sestřenicí se již vzít mohou.
- pohlaví novomanželů – v České republice mohou uzavřít sňatek pouze osoby odlišného pohlaví. Zákon o registrovaném partnerství byl v ČR schválen (zákon č. 115/2006 Sb.), ale registrované partnerství není rovnocenné s uzavřením manželství a není tedy ani centrálně statisticky evidováno.

Ve sňatečnosti je možné vyzorovat určité sezónní trendy. V České republice je například nižší sňatečnost v květnu, což má zřejmě souvislost s tradičním rčením "svatba v máji,

manželství do roka na máry", ale aspektů ovlivňující datum sňatku je mnohem víc. Velký vliv má např. předpokládané počasí či možná finanční kolize s tradičními svátky, jako jsou Vánoce.

Sňatky jsou evidovány pomocí dokumentu Hlášení o uzavření manželství, které v České republice shromažďuje Český statistický úřad a každoročně vydává publikaci „Pohyb obyvatelstva“ [7]. V té je možné, mimo jiné, nalézt statistické informace o sňatcích. [8]

### **1.1.5. Rozvodovost**

Rozvod je právním ukončením manželství, který se uskutečňuje na základě žádosti a dojde k němu na základě rozhodnutí soudu. Do roku 1949 zanikala manželství buď rozvodem (bez možnosti uzavřít další sňatek), nebo rozlukou, která další sňatek umožňovala. Zákon č. 265/1949 sb., o právu rodinném zavedl rozvod jako jedinou formu právního zániku manželství za života manželů.

Evidenci rozvodů provádějí okresní soudy, které vyplňují formulář Hlášení o rozvodu a tato hlášení odesílají dvakrát měsíčně příslušnému krajskému soudu. Všechna hlášení pak zpracovává Český statistický úřad, který publikuje absolutní i relativní údaje o rozvodech. [9]

### **1.1.6. Migrace**

Migrace je chápána jako změna trvalého pobytu. Z tohoto hlediska můžeme migraci dělit na vnitřní a mezinárodní. Vnitřní migrace je definována jako změna trvalého pobytu za hranice určité administrativní jednotky, zpravidla obce. Mezinárodní migrace je definována jako změna obvyklého pobytu za hranice státu, OSN stanovuje limitní hranici jednoho roku pobytu za hranicemi daného státu. Zatímco vnitřní migrace je z hlediska statistiky podchycena v Hlášení o stěhování, sledování mezinárodní migrace je značně problematické.

Problematickou oblastí zůstává i po našem vstupu do Evropské unie nelegální migrace. Zapojením České republiky do Schengenského systému, v jehož rámci se zachycení nelegální migranti vrací do první "bezpečné" země, do které vkročili, se ČR dostala do tzv. bezpečnostní zóny. [10]

## **1.2. Demografický vývoj populace v České republice**

### **Historický vývoj populace**

Co se vývoje populace na území České republiky týče, můžeme v průběhu dějin zaznamenat několik významných změn a tendencí. V nejstarších obdobích dějin a v průběhu celého středověku byl stav počtu obyvatelstva pod vlivem častých válek, epidemií a hladomorů. Tyto všechny tři faktory spolu úzce souvisely a byly též provázány s vnějšími podmínkami,

jako je například klima, počasí a úrodnost. Z těchto důvodů byla v Čechách poměrně vysoká míra úmrtnosti – hrubá míra úmrtnosti se pohybovala okolo 35–40 ‰.

Vysoká úmrtnost nastala především s rozšířením viru moru, který se kolem roku 1347 začal šířit po Evropě v souvislosti s dálkovým obchodem a následně vyvolal vlnu epidemií. První vlna morové epidemie na konci 40. let a v průběhu 50. let se českým zemím vyhnula (s výjimkou Moravy, Brna) i přes to, že panovník Karel IV. z Prahy učinil centrum své říše (celoevropské centrum), avšak české země byly zničeny morem již kolem roku 1380. Vysoká byla především kojenecká úmrtnost a úmrtnost dětí do 5 let. Střední délka života se pak pohybovala okolo 25–30 let, s čímž souvisela i nedostatečná lékařská a zdravotní péče.

Dalším významným dějinným faktorem, který ovlivnil stav počtu obyvatelstva, byly husitské války v první polovině 15. století. Zároveň v této době končí období klimatického optima a lidé se musejí potýkat s hladomorem. Růst počtu obyvatel nenastal ani po skončení válek. V Čechách v poslední třetině 15. století a v první třetině století 16. opět propukaly morové rány a lidé museli čelit též četným přírodním katastrofám (povodním a požárům). Kolem roku 1500, kdy již tradičně začínáme hovořit o novověku, počet obyvatelstva v českém království poklesl až o 30 %, což je v protikladu s trendem růstu v západní Evropě, která se rozvíjela v souvislosti se zámořskými objevy a rozvojem zámořského obchodu.

V průběhu 16. století a 17. století začíná úmrtnost klesat, avšak velký zlom v poklesu úmrtnosti přichází až v průběhu 18. století s rozvojem vědy a techniky. Dochází ke změnám v hospodářství (často pod vlivem osvícenských panovnických reforem) a tím se zlepšují i sociální podmínky. Vliv na sociální podmínky měla i průmyslová revoluce (industrializace), která se vyznačovala především zaváděním strojů do výroby, což přinášelo nejenom klady, ale také i stinné stránky. Též dochází k rozvoji v lékařství a ke zlepšení lékařské péče (začíná se např. očkovat). V této době začíná uvědomělé ovlivňování demografických procesů. V českých zemích v roce 1770 žilo kolem 4,5 milionů lidí, avšak toto číslo prudce narůstalo – na počátku 18. století to již bylo 5,5 milionů lidí. [1]

### **Vývoj populace v období 1918–1937**

Pro období začátku první světové války je pro populaci českých zemí charakteristický zrychlený pokles plodnosti a snižování ročních počtů narozených dětí. Došlo k příznivému poklesu úmrtnosti pod hranici 20 ‰ ročně, i tak byla tato hodnota stále na vysoké úrovni (naděje dožití v dané době necelých 45 roků). V té době vrcholila emigrace do ciziny v rozpětí 25–30 tisíc osob ročně. Můžeme také zaregistrovat zužující se základnu pravidelného věkového složení prokazující vysoce extenzivní průběh reprodukce (rychlé snižování počtu žijících od



nízkého věku, které bylo způsobeno vysokou úmrtností i emigrací mladých lidí). Válečné ztráty se výrazně promítly ve věkovém složení obyvatelstva, konkrétně počtem "nenarozených" v letech 1915–1919, také však v deformaci počtů a podílu mužů ve věku zhruba 20–40 let následkem ztrát na bojištích a nepřímo také zvýšenou úmrtností civilního obyvatelstva ve válečných letech.

Podle dostupných výpočtů se snížil počet živě narozených o 550 tisíc, ve válce padlo 300 tisíc mužů a "navíc" zemřelo 60 tisíc osob. Reprodukční ztráty tedy činily celkem 610 tisíc osob (tj. 5,9 % z celkového počtu obyvatelstva z roku 1914 v České republice - na Slovensku 6,7 % z celkového počtu obyvatelstva), včetně ztrát na bojištích 910 tisíc osob (tj. pro ČR 8,8 % resp. 10,5 % pro Slovensko). Podle dostupných odhadů měly 28. října 1918 české země 9,99 mil. obyvatel. S tímto historickým aspektem a také s následky epidemie španělské chřipky, která zasáhla střední Evropu v roce 1918, vstupovalo obyvatelstvo Českých zemí po skončení války do samostatného státu. První údaje o složení obyvatelstva jsou z dat sčítání lidu provedeného k 15. únoru 1921, které obsahově i zpracováním navázalo na dřívější rakouská sčítání. Další sčítání v roce 1930 v této tradici pokračovalo, ovšem již na kvalitativně vyšší úrovni (provedení vykazovalo širší obsah a podrobnější zpracování). Sčítání připravované pro rok 1940 se již neuskutečnilo, takže strukturální změny probíhající po roce 1930 je možné pouze odvozovat na základě podrobného zpracování dat o pohybu obyvatelstva. Věkové složení obyvatelstva a věková struktura populace Českých zemí byla deformována hlavně snížením počtu živě narozených dětí v letech 1915-1919 o více než 40 %, a to se promítalo až do poloviny třicátých let v nízkém podílu dětí ve věku do 15 let (v roce 1921 pouze 27,8 %, pro srovnání v roce 1910 to bylo ještě 33,9 %). Až do roku 1937 (a samozřejmě ještě později) působila tedy na vývoj obyvatelstva výrazná anomálie věkové struktury i změněná relace mezi počty mužů a žen (např. snížený počet ženichů).

Po výrazném snížení porodnosti v letech první světové války vzrostl počet živě narozených dětí již v roce 1919 více než o polovinu ve srovnání s předchozími dvěma roky. Tento vzestup trval zhruba až do roku 1923 (vrchol tohoto růstu byl v roce 1921 – přes 257 tisíc, tj. 25,7 ‰). Od této doby se roční počty živě narozených dětí (s výjimkou v roce 1930) nepřetržitě snižovaly k minimu v roce 1937 (pouze 156 tisíc – 14,3 ‰).

Počet obyvatel v produktivním věku (15–59 let) se zvýšil v letech 1921–1930 z 6 257 tisíc na 6 976 tisíc, tedy o 721 tisíc (11,5 %), a počet ekonomicky činných osob o 833 tisíc (16,2 %). Zvýšila se hlavně intenzita ekonomické aktivity žen.

Vlivem poklesu specifických úmrtností postupně vzrůstala naděje dožití – z předválečných necelých 45 let na 49 let, v období po válce až na 58,5 let. Průměrné

roční prodlužování naděje dožití činilo jen 0,6 roku. Přitom převážná část tohoto prodlužování byla důsledkem poklesu kojenecké a dětské úmrtnosti. Zdravotní stav staršího obyvatelstva byl zřejmě silně "zatížen" strádáním za války (u 250 tisíc invalidů v Československu následky válečných zranění). To a jen mírné zlepšování hygieny a péče o vlastní zdraví se negativně promítalo u většiny obyvatelstva.

### **Vývoj populace v období 1937–1938**

Politická, hospodářská a sociální i demografická situace Českých zemí byla v letech 1937–1938 velmi chmurná. Teprve v květnu 1937 bylo v objemu průmyslové výroby dosaženo úrovně z roku 1929, počátkem roku 1938 došlo opět k poklesu. Po vyhrocení vztahů s nacistickým Německem ztratily České země mnichovským diktátem 37 % svého území a 36 % obyvatelstva (podle dat sčítání 1930 – ve skutečnosti to bylo ještě více o pozdější přírůstky), přičemž na zabraném území žilo z 3 870 tisíc obyvatel 855 tisíc Čechů, kteří představovali 12 % české populace z roku 1930. Zhruba polovina z nich však odešla ze zabraného pohraničí do vnitrozemí. Dlouholeté snížení sňatečnosti, pokles plodnosti na nebývalou úroveň, který vyvolával oprávněné obavy z perspektivních úbytků obyvatelstva, a zachování nepříznivé výše úmrtnosti – to byly demografické následky krizových let. Ve většině evropských zemí nebyla však situace příliš odlišná. V poměrně krátkém období existence Československa při nutnosti řešit problémy hospodářské a národnostní nezbyl ani čas, ani prostředky na formování a realizaci dlouhodobějších koncepcí. Nevznikla ani koncepce nějaké populační politiky. Poskytováním dvanáctitýdenní mateřské dovolené, přídatků na děti státním zaměstnancům a svobodnou možností vystěhování se však patřilo Československo mezi pokrokové země.

### **Vývoj populace v období 1938–1945**

Pro toto období bohužel platí, že demografická data nejsou kompletní, čímž je snížena jejich spolehlivost. Většinu demografických dat, zvláště relativních ukazatelů, je proto nutné přijímat kriticky. Údaje o počtech obyvatelstva a jeho pohybu byly v různých pramenech publikovány ve čtverém územním členění: za německé obyvatelstvo Protektorátu, za úhrn obyvatelstva Protektorátu, za obyvatelstvo žijící v zabraném pohraničí a za úhrn Českých zemí. Od roku 1938 však nezahrnují data za německé státní příslušníky, která byla zpracována samostatně německými úřady, ani údaje o osobách, které zemřely ve vězení a v koncentračních táborech, v terezínském ghettu nebo mimo území Českých zemí (např. při totálním nasazení v Německu).

Vzhledem ke zlepšeným přirozeným přírůstkům obyvatelstva Českých zemí v období 1938–1944 populace přibývala, sice poměrně pomalu (během 6 let o 2,1 %, tedy v průměru o 3–4 ‰ ročně). V tomto období přibylo v Protektorátu jen 0,5 % obyvatelstva (40 tisíc lidí – s úbytky v letech 1941–1943), kdežto v pohraničí 5,4 % (absolutně 192 tisíce). Reálnou skutečností tedy zůstává, že počet obyvatelstva v obou částech rozdělených Českých zemí během války vzrostl. Je pravděpodobné, že v pohraničí k tomu přispěla také imigrace Němců z německých měst postižených leteckými nálety (v letech 1943 a 1944). Přirozené přírůstky ve srovnání s předchozími lety sice výrazně klesly, ale celkové přírůstky se zvýšily. Je však třeba mít stále na paměti fakt, že dostupná data jsou nekompletní.

### **Poválečný vývoj populace**

V letech před první světovou válkou dosahovala míra úmrtnosti 20 ‰, do třicátých let klesla na 13 ‰, za války však znovu vzrostla na 14 ‰. Vysoká úmrtnost v prvních poválečných letech byla projevem doznívání válečných událostí. Po roce 1947 následoval trvalý pokles počtů zemřelých až na úroveň 94 tisíc v letech 1960–1961 (9,8 ‰). V té době se poměrně příznivý pokles úmrtnosti, včetně té kojenecké, zastavil, protože byl vyčerpán efekt ještě za války připravené koncepce zdravotní péče. Československo tehdy patřilo k zemím s nejrychlejším poklesem úmrtnosti, v úrovni naděje dožití bylo v Evropě na desátém místě, v úrovni kojenecké úmrtnosti na osmém. Organizace zdravotní péče se nerozvíjela, technické vybavení zdravotnických zařízení zaostávalo a kapacitně nedostačovalo. Ve vyspělých zemích míra úmrtnosti klesala a zvyšovala se naděje dožití, v Československu a v dalších socialistických zemích pokračovala stagnace v podstatě až do konce osmdesátých let. S přispěním rostoucího podílu staršího obyvatelstva vzrostly roční počty zemřelých až nad hranici 130 tisíc (12,9 ‰) v letech 1980–1984 a teprve v závěru osmdesátých let se mírně snížily.

Poté, co byly vyloučeny zkreslující vlivy měnícího se věkového složení obyvatelstva, vypočtená střední délka života (naděje dožití) činila v roce 1937 jen 58,5 roku, v období 1949–1951 se prodloužila na 64,6 roků a v letech 1960–1961 dosáhla hranice až 70,5 roků. Veliký vliv na to měl velmi příznivý pokles kojenecké a dětské úmrtnosti. V dalších 25 letech se naděje dožití udržovala v podstatě na stejné úrovni (s mírnými výkyvy pro muže a ženy). V roce 1990, tedy po třicetileté stagnaci, činila naděje dožití pouhých 71,8 roků. Úroveň úmrtnosti obyvatelstva ČR (zvláště mužů) byla na jednom z posledních míst v Evropě. Změny hladiny úmrtnosti v jednotlivých věkových skupinách podle pohlaví ukazují nejlépe specifické úmrtnosti. U mužů a žen do 30 let se snížily postupně na přijatelnou výši se zvyšujícím se věkem, a zvláště u mužů zůstaly posledních 30 let na nepříznivé úrovni. U žen pokračoval velmi

pomalý pokles specifických úmrtností až do nejvyššího věku, u mužů ve věku nad 35 let se úmrtnost naopak zvyšovala. Ve věku 35–64 let umírá v České republice relativně více než dvojnásobek mužů oproti vyspělým zemím, žen ve věku 45–69 let více než o polovinu. Extenzivní způsob reprodukce obyvatelstva spíše zesílil.

Zhoršení zdravotního stavu mužů a tím zvýšení jejich úmrtnosti se projevovalo v trvalém vzestupu nadúmrtnosti mužů. Počátkem 50. let nebyla v žádné věkové skupině specifická úmrtnost mužů dvojnásobně vyšší než úmrtnost žen, počátkem šedesátých let byl tento nepoměr zjištěn ve věku 15–34 a 55–64 let. V roce 1980 umírali muži více než dvakrát častěji než ženy ve věkovém rozpětí 15–64 let, v roce 1990 až do 70 let: přitom ve věku 20–29 let byla úmrtnost mužů ve srovnání s úmrtností žen již trojnásobná. Ve vyspělých zemích se tato dvojnásobná nadúmrtnost mužů udržuje jen ve věku 15–35 let a je způsobena jedine rozdílnou úmrtností na vnější příčiny smrti, kdežto u nás v širším věkovém rozpětí také na nemoci kardiovaskulárního systému. Československo mělo dlouhodobě vysokou kojeneckou úmrtnost. V Českých zemích umíralo před druhou světovou válkou z tisíce živě narozených dětí více než 100 ‰, v roce 1946 ještě 94 ‰. Postupným soustředěním převážné většiny porodů do ústavů (od roku 1957 přes 95 %, od roku 1964 přes 99 %), rozšiřováním perinatální péče i výborným informačním systémem, umožňujícím v podrobném územním členění vyhodnocovat příčiny úmrtí kojenců, se podařilo snížit kojeneckou úmrtnost na 45 ‰ v roce 1952 a na úroveň kolem 20 ‰ na počátku šedesátých let. Přispěly k tomu ovšem i změny definice živě narozeného dítěte (a tím také zemřelého kojence), kterými docházelo v letech 1953–1964 k nadlepšování ukazatelů (prokázalo se to vzestupem o 3,2 ‰ při návratu k mezinárodním definicím od roku 1965). Teprve koncem 80. let se snížila novorozenecká a kojenecká úmrtnost na mezinárodně přijatelnou úroveň. Úmrtnost kojenců se stále více soustřeďovala do prvních dnů a týdnů života.

Celkem plynulý pokles počtu zemřelých osob byl do poloviny šedesátých let jen v několika letech přerušen následky chřipkových epidemií, při kterých vždy zemřel větší počet lidí (řádově tisíce) a to v roce 1957, 1959 a 1962. Většinou šlo vždy o nadúmrtnost starších osob. Další chřipkové epidemie probíhaly již v období stagnace nebo zhoršování úmrtnosti a celkový trend výrazněji neovlivnily.

Zatímco v kapitalistických zemích od 70. let dochází ke zlepšování úmrtnosti především vlivem uvědomělého přístupu ke zdraví a důrazem na zdravější životní styl, klesá úmrtnost na kardiovaskulární nemoci, což platí až do 80. let. K poklesu úmrtnosti dochází až po pádu komunismu. Úmrtnost v ČR po roce 1989 klesá, střední délka života se zvýšila na současných 72 a 79 let, kojenecká úmrtnost se snížila na 4 ‰. V posledních 3 letech dochází nejen k nárůstu

počtu zemřelých, což je logickým důsledkem stárnutí obyvatelstva, ale také ke zpomalení poklesu standardizovaných ukazatelů úmrtnosti.

I přes velice rychlý pokles úmrtnosti v průběhu 90. let však bývalé komunistické země v současné době stále ještě výrazně zaostávají za ostatní Evropou a střední délka života je zde přibližně o 4–5 let nižší. [11]

Celkový historický vývoj populace ČR již od roku 1785 do roku 2013 lze vidět v příloze A (viz. [12]). V dané příloze jsou zvýrazněny významné a největší poklesy počtu obyvatel ve sledovaném období vlivem světových válek. Pro období 1785–1899 jsou znázorněna data za území Čech, Moravy a celého českého Slezska, kde jsou za rok 1800, 1807 a 1815 data za Moravu a Slezsko pouze odhadnuta. Počínaje rokem 1900 jsou počty obyvatel přepočteny na současné území České republiky.

### **1.3. Úmrtnostní tabulky**

Úmrtnostní tabulky jsou specifickou metodou užívanou k popsání řádu vymírání určité populace. Tyto tabulky vycházejí z ukazatele pravděpodobnosti úmrtí v jednotlivých věkových kategoriích, kde počet zemřelých vztahujeme k počátečnímu počtu osob vystavených riziku úmrtí, nikoliv ke střednímu stavu obyvatelstva.

Na základě ukazatele pravděpodobnosti úmrtí můžeme přejít z reálné populace k tabulkové (fiktivní) populaci, která vychází ze zaokrouhleného počtu narozených osob, obvykle 100 000 osob – a toto číslo nazýváme kořen tabulky. Dále aplikací těchto reálných pravděpodobností úmrtí na danou tabulkovou (fiktivní) populaci (100 000 obyvatel) dostáváme prostřednictvím specifických výpočtů tabulkové počty jak zemřelých, tak žijících. Hlavně tím ale získáváme důležitý výstup úmrtnostní tabulky, a to střední délku života, která je definovaná jako průměrný počet let zbývajících osobě ve věku  $x$  ještě do konce života prožít.

#### **1.3.1. Ukazatele a konstrukce úmrtnostních tabulek**

Při vytváření úmrtnostních tabulek podle metodických poznámek ČSÚ [13] vycházíme z pravděpodobnosti úmrtí  $q_x$ , která je odvozena ze specifických měr úmrtnosti  $m_x$ . Vstupními daty pro výpočet specifických měr úmrtnosti je počet skutečně zemřelých obyvatel  $D_x$  ve věku  $x$  z dané populace a daného pohlaví a střední stav populace  $P_x$  ve věku  $x$ . Uvažujeme o populaci homogenní, tedy takovou populaci, která se liší pouze věkem a pohlavím a dále uvažujeme, že populace nepřijímá nové jedince a ztrácí jedince pouze úmrtím.

Střední stav populace je jednou ze základních charakteristik, kterou v rámci demografické statistiky sledujeme. Jedná se o počet  $x$ -letých obyvatel v daném kalendářním roce, kteří se dožijí středu sledovaného období. Střed kalendářního roku je pro tyto účely stanoven ČSÚ na půlnoc z 30. června na 1. července daného kalendářního roku. Střední stav populace se v úmrtnostních tabulkách označuje jako  $P_x$ . Počet skutečně zemřelých osob ve věku  $x$  je v tabulkách označen jako  $D_x$ . Východiskem pro výpočet jednotlivých ukazatelů uváděných v úmrtnostních tabulkách a pro samotnou konstrukci úmrtnostních tabulek jsou pravděpodobnost úmrtí ve věku  $x$  a pravděpodobnost dožití ve věku  $x$ .

Pravděpodobnost úmrtí  $x$ -letého jedince se značí jako  $q_x$  a udává, s jakou pravděpodobností se osoba dožívající se věku  $x$  let v daném období nedožije věku  $x+1$  let, tedy že zemře před dosažením věku  $x+1$  let. Dle definice se pravděpodobnost počítá jako:

$$q_x = 1 - e^{-m_x}, \quad (1.1.)$$

kde  $m_x$  označuje poměr celkového počtu zemřelých z jednotlivých generací  $D_x$  ke střednímu stavu populace  $P_x$ . Tento poměr se nazývá specifická míra úmrtnosti:

$$m_x = \frac{D_x}{P_x}. \quad (1.2.)$$

S využitím Taylorova rozvoje platí:

$$q_x = 1 - e^{-m_x} \sim 1 - (1 - m_x) = m_x. \quad (1.3.)$$

Můžeme tedy říci, že  $q_x \sim m_x$ . Vynásobíme-li specifickou míru úmrtnosti 1000krát, dostaneme počet zemřelých na 1000 obyvatel. Pravděpodobnost úmrtí ve věku 0 let (tzv. kojenecká úmrtnost) je rovna podílu zemřelých ve věku 0 a živě narozených:

$$q_0 = \frac{D_0}{N^v}, \quad (1.4.)$$

kde  $N^v$  označuje počet živě narozených osob v daném období a v dané populaci. Doplnkem pravděpodobnosti úmrtí  $x$ -letého jedince  $q_x$  je pravděpodobnost dožití ve věku  $x$ . Tuto pravděpodobnost označujeme jako  $p_x$ , které udává, s jakou pravděpodobností se osoba dožívající se přesného věku  $x$  let v daném období dožije věku  $x+1$  let. Pravděpodobnost dožití se věku  $x+1$  se počítá jako:

$$p_x = 1 - q_x. \quad (1.5.)$$

Musí proto platit následující rovnost:

$$q_x + p_x = 1. \quad (1.6.)$$

Dalším ukazatelem úmrtnostních tabulek je tabulkový počet dožívajících, ty se označují  $l_x$ . Zmíněný ukazatel je brán za hypotetický počet osob, které se dožijí věku  $x$  let ze 100 000 živě narozených. Tento tabulkový počet dožívajících se vypočítá jako:

$$l_{x+1} = p_x * l_x, \quad (1.7.)$$

kde kořen tohoto rekurentního vzorce je roven:

$$l_0 = 100\,000.$$

Tabulkový počet zemřelých, který označujeme  $d_x$ , což vyjadřuje hypotetický počet zemřelých osob v dokončeném věku  $x$  let, se počítá jako rozdíl dvou po sobě jdoucích tabulkových počtů dožívajících  $l_x$  a  $l_{x+1}$ :

$$d_x = l_x - l_{x+1}. \quad (1.8.)$$

Tabulkový počet žijících, označuje se  $L_x$ , je hypotetický průměrný počet žijících v dokončeném věku  $x$  let. Počítá se jako průměr ze dvou po sobě jdoucích tabulkových počtů dožívajících (kromě věku 0) a jedná se o tzv. celkový počet „člověkoroků“, které osoby ve věku  $x$  let do věku  $x+1$  let prožijí:

$$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}. \quad (1.9.)$$

Ukazatel  $T_x$  je tzv. pomocný ukazatel a udává, kolik let života má tabulková generace v daném věku  $x$  ještě před sebou.

$$T_x = T_{x+1} + L_x. \quad (1.10.)$$

Tento ukazatel se počítá jako kumulace počtu žijících osob  $L_x$  od nejvyššího věku v tabulce až po zjišťovaný věk  $x$ :

$$T_x = L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \dots + L_\omega, \quad (1.11.)$$

nebo také:

$$T_x = \sum_{i=\omega-1}^x L_i, \quad (1.12.)$$

kde  $\omega$  značí nejvyšší věk v úmrtnostní tabulce a sčítací index tedy nabývá hodnot od  $\omega-1$  až po počítaný věk  $x$ .

Poslední z ukazatelů je tzv. naděje dožití  $e_x$ , též označováno jako *střední délka života*. Ta udává průměrný počet let, kterých má osoba právě  $x$ -letá naději dožít se při zachování řádu úmrtnosti za sledované období. Střední délka života se spočítá jako:

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}. \quad (1.13.)$$

### 1.3.2. Druhy úmrtnostních tabulek

Klasifikace úmrtnostních tabulek:

- *Okamžikové úmrtnostní tabulky*

Okamžikové úmrtnostní tabulky jsou založeny na hypotetickém sledování současně narozených osob. Na tuto hypotetickou populaci se aplikují pravděpodobnosti úmrtí podle věku dané populace. S tímto druhem úmrtnostních tabulek se dnes setkáváme nejčastěji.

- *Generační úmrtnostní tabulky*

Generační úmrtnostní tabulky představují záznamy skutečného průběhu života konkrétní populace současně narozených jedinců od narození až do smrti posledního z nich. Konstrukce těchto tabulek je velice obtížná, předpokládá totiž sledování populace v průběhu dlouhé doby. S generačními úmrtnostními tabulkami se dnes již moc nesetkáváme, z již uvedených důvodů je totiž jejich konstrukce z časového hlediska velice náročná.

Dále můžeme úmrtnostní tabulky dělit podle **sledovaného věkového intervalu** na:

- *Úplné úmrtnostní tabulky*

V úplných úmrtnostních tabulkách se pracuje s věkovými intervaly o délce jednoho roku.

- *Zkrácené úmrtnostní tabulky*

Ve zkrácených úmrtnostních tabulkách se vyskytují věkové intervaly delší než jeden rok. Zpravidla obsahují věkové intervaly o délce 5 let. Např.: 0–4 roky, 5–9 let, 10–14 let, atd.



Úplné úmrtnostní tabulky poskytují mnohem přesnější informaci o závislosti úmrtnosti na věku, proto v této práci pracujeme s daty vycházejícími z úplných úmrtnostních tabulek. [14]

### **1.3.3. Úmrtnostní tabulky nezávislé na pohlaví**

V Evropské unii již od roku 2003 probíhá diskuze týkající se diskriminace žen v oblasti přístupu ke zboží a službám. V oblasti služeb se tato problematika týká hlavně životního pojištění a penzijního připojištění, včetně ostatních finančních produktů sloužících k finančnímu zabezpečení obyvatel ve stáří. Výsledkem diskuze je novela o rovném přístupu přijatá 21. prosince 2012, která zakazuje rozlišování pohlaví při kalkulaci pojistného, a to zejména u nově uzavřených smluv týkajících se životního pojištění či penzijního připojištění.

Je obecně známo, že průměrný muž se dožívá zhruba o 6–7 let nižšího věku než průměrná žena, která byla ještě v loňském roce pro pojišťovnu méně riziková, proto platila za stejné životní pojištění mnohem nižší částku než muž.

## **1.4. Riziko dlouhověkosti**

Významným demografickým trendem současné doby je stárnutí populace, a proto druhá polovina tohoto století bude patřit seniorům. Aktuální trend prodlužování délky života, spolu s nižším počtem narozených dětí, bude mít za následek výrazné navýšení podílu osob starších 65 let v celkové populaci. Dle dostupných odhadů v roce 2060 vystoupá jejich podíl až na 34 % ze všech obyvatel České republiky. Což by mělo znamenat celkem 3,2 miliony seniorů. V porovnání s dostupnými daty ze zemí západní nebo severní Evropy je tento vývoj z demografického hlediska naprosto přirozený a nijak nevybočuje z Evropského trendu.

### **Růst důchodového věku**

Výrazný nárůst počtu seniorů ale nebude automaticky znamenat výrazný nárůst počtu starobních důchodců. Dochází totiž k posunu důchodové hranice. V současné době je důchodový věk zhruba 65 let, ten se současně nerozlišuje u mužů a žen, které porodily 2 děti. V roce 2060 má být důchodový věk mužů i žen mnohem vyšší – prognózy hovoří o výši až 69 let. V současné době tvoří osoby s nárokem na starobní důchod zhruba 18,8 % obyvatelstva. I přes prodlužující se věkovou hranici osob s nárokem na důchod se bude tato skupina postupně zvyšovat a na počátku padesátých let tohoto století by měla tvořit zhruba 28 % obyvatelstva. Podle očekávaných trendů se následně v druhé půlce století bude opět snižovat a na jeho konci století se pravděpodobně vrátí na dnešní hodnotu.

## **Roste počet lidí nad 80 let**

Současné demografické změny lze mimo jiné také označit jako stárnutí staré populace, protože dochází k novému trendu v populačním vývoji. Nastává disproporce, kdy přibývá nebývalým způsobem počet velmi starých lidí, což je dáno zejména prodlužováním naděje dožití ve vyšším věku. V roce 2050 budou pravděpodobně lidé ve věku 80 let a starší představovat významnou část seniorské populace. V České republice odhady hovoří o 33,9 %, na Slovensku o 17,4 %, ve Švédsku o 31,4 %, a v Německu až o 44,1 %. [15]

## **Ekonomické důsledky stárnutí populace**

Stárnutí obyvatelstva a rostoucí podíl seniorů bude mít pravděpodobně za následek růst ekonomické zátěže celého systému důchodového zabezpečení. Zatímco do roku 2008 byl důchodový účet ČR každoročně v přebytku, od roku 2009 je mimo jiné díky ekonomické krizi a snížení pojistného některých skupin obyvatelstva celkový úhrn vybraného pojistného nižší než úhrn peněz nutných na výplaty důchodů. Pokud bude nadále pokračovat trend současných nepříznivých ekonomických výsledků, měl by se deficit neustále zvyšovat. V roce 2060 by částka na výplatu důchodů měla být odhadem zhruba o 60 % vyšší než úhrn vybraného pojistného stanoveného dle platné důchodové politiky.

Ekonomické důsledky stárnutí populace se také projevují v dalších oblastech, například v oblasti financování zdravotní péče. Z logiky věci vyplývá, že náklady na zdravotní péči jsou odlišné, pokud porovnáme dvě skupiny – lidé v mladším věku potřebují v průměru zdravotní péči méně často a v menším rozsahu než lidé ve věku vyšším. Přitom výše pojistného na zdravotní pojištění (kterou za důchodce platí do systému zdravotního pojištění stát) je nižší než pojistné placené osobami v produktivním věku. Poměr nákladů na zdravotní péči proti úhrnu vybraného pojistného roste a tento růst bude pokračovat, i když nebude tak velký jako růst zátěže důchodového systému. [16]

Stárnutí populace je jev, který spočívá ve zvyšování podílu starých lidí v populaci. Příčinou tohoto jevu je demografická revoluce a konkrétně potom pokles porodnosti a současně prodlužování naděje dožití (tzv. střední délka života). Stárnutí populace se měří za pomoci indexu stáří ( $is$ ), což je podíl postreprodukční ( $P_{65+}$ ) a dětské složky ( $P_{0-14}$ ) obyvatelstva uváděný v procentech.

$$is = \frac{P_{65+}}{P_{0-14}}. \quad (1.14.)$$

**Tabulka 1:** Index stáří a jeho vývoj v letech 1950–2016

věk	Počet obyvatel v milionech							
	1950	1970	1980	1990	2000	2005	2010	2016
<b>65+</b>	0,76	1,19	1,37	1,3	1,42	1,46	1,64	1,99
<b>15-64</b>	6,02	6,53	6,51	6,87	7,18	7,29	7,38	6,94
<b>&lt;15</b>	2,2	2,08	2,41	2,19	1,66	1,5	1,52	1,65
<b>Celkem</b>	8,98	9,81	10,29	10,36	10,27	10,25	10,53	10,58
<b>Index stáří (65+/0-14)</b>	<b>0,35</b>	<b>0,57</b>	<b>0,57</b>	<b>0,59</b>	<b>0,86</b>	<b>0,97</b>	<b>1,08</b>	<b>1,21</b>

*Zdroj: vlastní zpracování podle [5]*

Důvodem zájmu o sledování stárnutí populace jsou sociální a ekonomické důsledky tohoto jevu, protože dochází ke zvýšení podílu ekonomicky neaktivních osob v populaci. Opakem je proces mládnutí populace, které je způsobeno převážně zvýšením úrovně porodnosti.

Jak je vidět v tabulce 1, mládnutí se české populace netýká, spíše naopak. Při pohledu na vývoj hodnot indexu stáří je zřejmé, že tento podíl se od roku 1950 rapidně zvýšil o 0,86 procentních bodů, což je způsobeno nárůstem jedinců ve věkové kategorii 65+ a poklesem porodnosti.

Podle aktuálně dostupných dat ČSÚ v roce 2016 zemřelo celkem 107 750 lidí. Z toho 54 880 byli muži a zbylých 52 870 činily ženy. Pro porovnání, v roce 1989 bylo v České republice 127 747 úmrtí. Prodlužování života můžeme také vidět u postupně rostoucí míry naděje dožití. Ta u mužů narozených v roce 1989 činila hodnotu 68 let a u žen 75 let. V roce 2016 však naděje dožití při narození ženy vystoupala na věk 82,05 let, u mužů pak na věk 76,22 let.

Porodnost v České republice v roce 2016 dosáhla míry 112 663 živě narozených dětí – chlapců se narodilo 57 837 a dívek 54 826. V porovnání s rokem 1989 došlo ke snížení, v roce 1989 bylo narozeno totiž 128 356 živých dětí. Zajímavý je také fakt, že se průměrný věk matky při narození dítěte zvyšuje, v roce 1989 ženy rodily nejčastěji ve věku 24,8 let, kdežto v roce 2016 už je průměrný věk matky 30,7 let. Roste také věk početí prvního dítěte, v roce 1989 bylo matkám prvorodičkám v průměru 22,5 let, v roce 2016 průměrný věk prvorodiček je 28,9 let.

Z těchto dostupných informací můžeme konstatovat, že dochází k jevu, kdy starých lidí přibývá a napříč tomu se rodí méně dětí než dříve.

## **Dopady na sociální politiku**

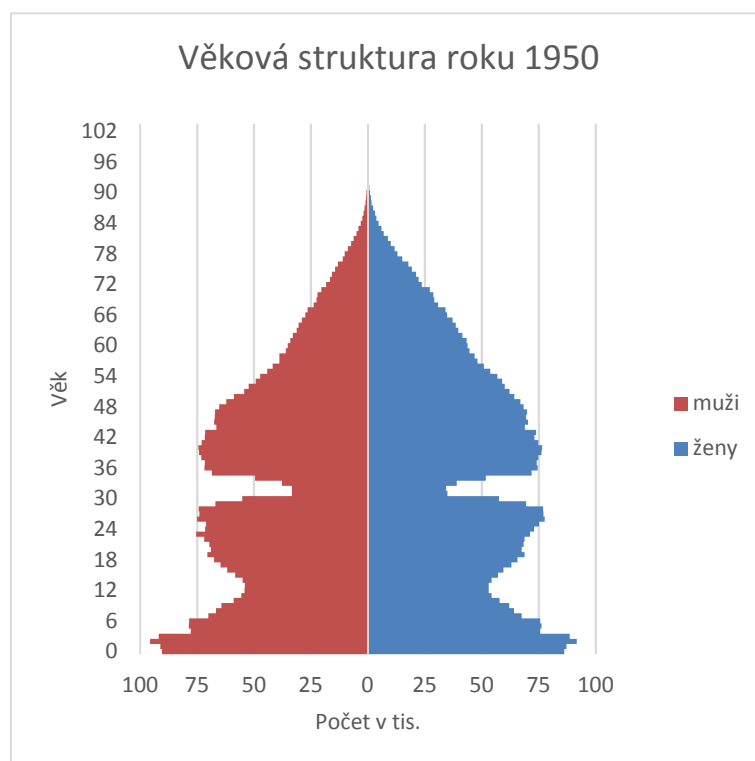
Nejvýznamnější dopad bude mít stárnutí populace na důchodovou politiku, neboť počet seniorů stále roste (v roce 2016 18,8 % české populace) a důsledkem toho bude i to, že bude přibývat více nároků na starobní důchod.

Demografické studie uvádějí, že míra závislosti u starších lidí bude v roce 2050 až ztrojnásobená oproti nynější situaci. V praxi to znamená, že na 1,5 člověka v ekonomicky aktivním věku bude připadat jedna osoba starší věku 65 let, to je významný rozdíl v porovnání například s rokem 2003, v tomto roce připadalo na zhruba 5 lidí v ekonomicky aktivním věku jeden člověk ve věku nad 65 let. Mladé generace se tak pravděpodobně budou muset potýkat např. s očekávanými většími výdaji, které v roce 2050 mohou dosáhnout až hranice 15 % HDP, na starobní důchody. Avšak zvýšení veřejných výdajů bude nutné i v dalších odvětvích, např. ve zdravotní péči a v jiných oblastech. [17, 18]

### **1.4.1. Struktura obyvatelstva**

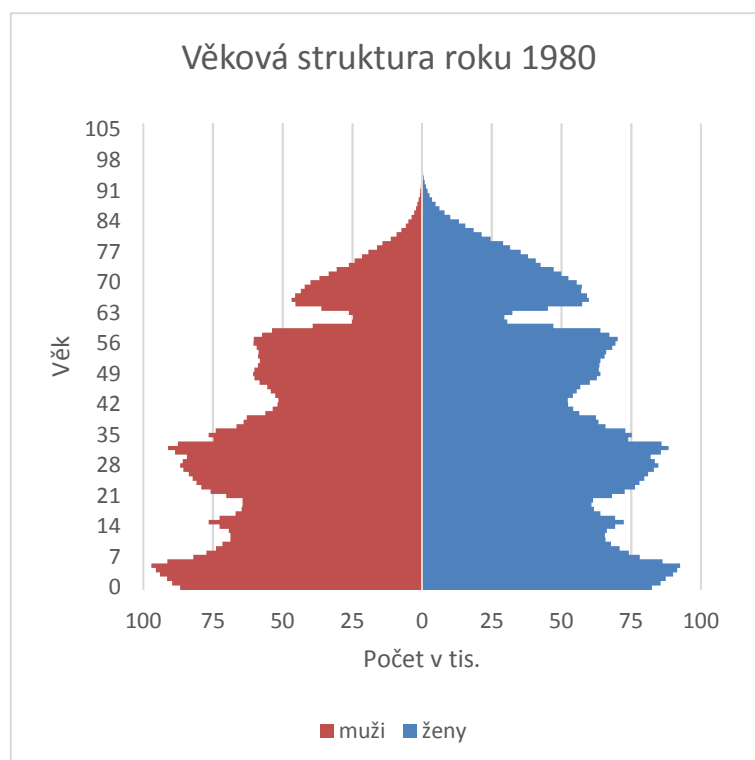
Vývojové trendy věkové struktury obyvatelstva České republiky nejsou v posledních letech příliš optimistické vzhledem k jeho stárnutí. Poslední opravdu velká porodnost (tzv. „babyboom“) byla zaznamenána v první polovině 80. let 20. století, známé také pod pojmem „husákovy děti“. V posledních deseti letech sice porodnost také začala stoupat, nicméně se nedá hovořit o výrazné změně, která bude mít zásadní vliv na věkovou strukturu obyvatelstva. Stále tudíž dochází k významné podílové ztrátě v kategorii předproduktivního věku (0–14) zejména v porovnání s kategorií postproduktivního věku (65+). V příštích letech se dá očekávat další nárůst podílu nejstarší složky a pokles podílu nejmladší. Následkem toho se budou zvyšovat nároky na důchodové zabezpečení, zdravotní a sociální služby atp.

Dalším často používaným ukazatelem věkové struktury obyvatelstva je index stáří, o kterém už bylo pojednáváno. Vývoj indexu stáří logicky kopíruje vývoj ve věkové struktuře obyvatelstva ČR.



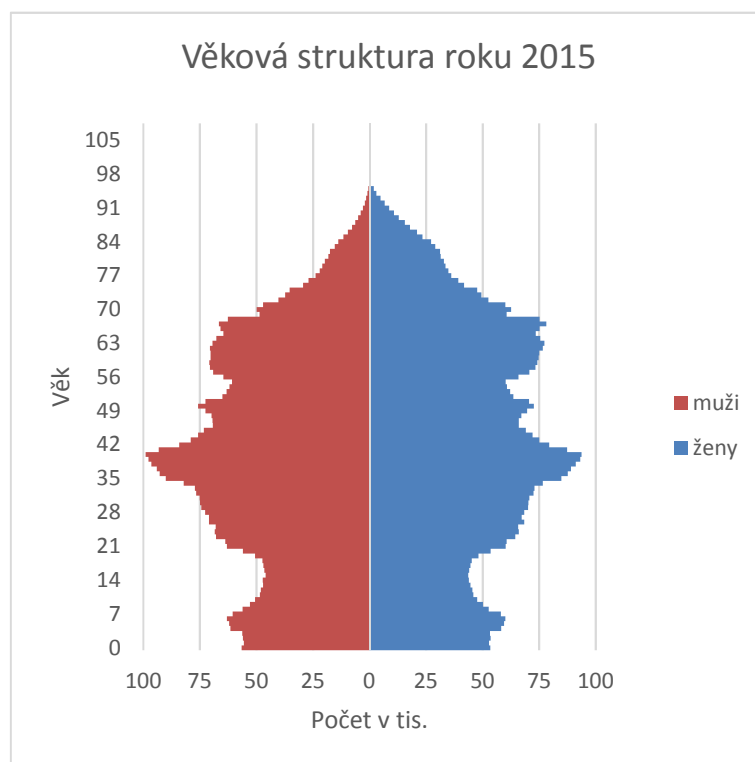
**Graf 2:** Věková struktura obyvatelstva v roce 1950

*Zdroj: vlastní zpracování podle [5]*



**Graf 3:** Věková struktura obyvatelstva v roce 1980

*Zdroj: vlastní zpracování podle [5]*



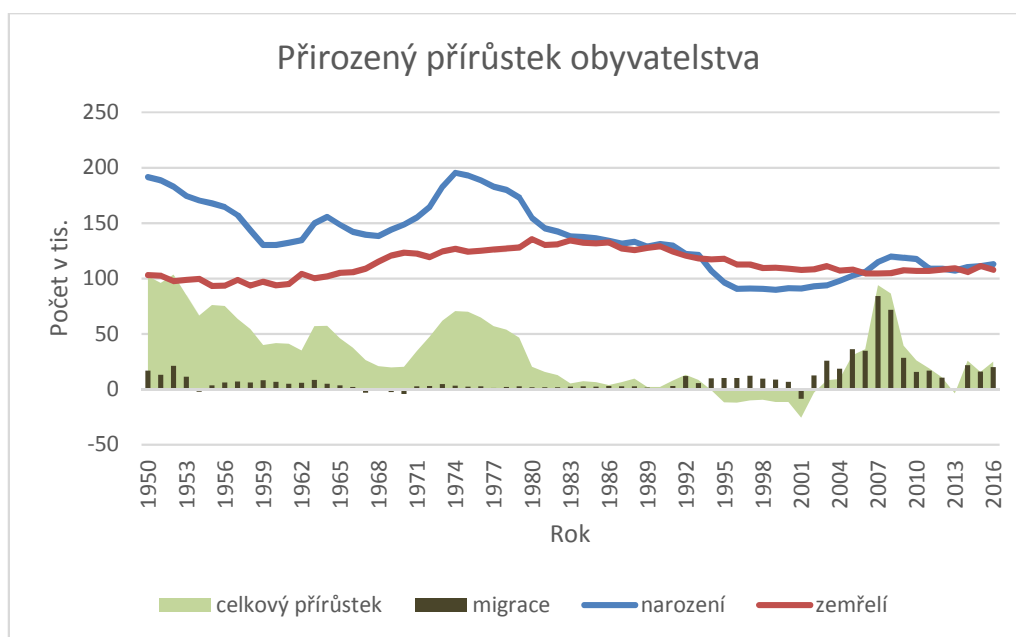
**Graf 4:** Věková struktura obyvatelstva v roce 2015

*Zdroj: vlastní zpracování podle [5]*

Na grafu 2 si můžeme všimnout několika zajímavých faktů. Nejprve bychom mohli zmínit, že v tomto období převažuje dětská populace nad populací takzvaně postreprodukční, z čehož vyplývá výše hodnoty indexu stárí 0,35 %. Dále si můžeme všimnout již popsané skutečnosti poklesu porodnosti během první i druhé světové války a také plynulého snižování populace v širším věkovém měřítku (přibližně interval 45–85 let).

Následující strom života pro rok 1980 (graf 3) znázorňuje posuny výkrojů z předchozího obrázku, týkající se světových válek a finanční hospodářské krize. Výrazná změna nastává ve skupině populace vyššího věku. Zde je názorně vidět, že se vyššího věku dožívá čím dál více obyvatel v rámci obou pohlaví – generace 65+ se téměř zdvojnásobila. Počet dětí v tomto období má stejnou tendenci růstu jako generace 65+. Tento ročník patří v rámci porodnosti mezi nejsilnější – tzv. „babyboom“.

Nejzajímavějším a také nejvíce obávaným vývojem populace, který můžeme vidět na grafu 4, je výrazně snížená porodnost dětí (pokles o téměř 30 %) a stále výrazně rostoucí trend počtu obyvatel dožívajícího se čím dál vyššího věku. Kombinace těchto trendů jasně poukazuje na aktuální problém tzv. stárnutí populace. Tento strom života je regresivním typem, který je všeobecně ale nejméně žádaným.



**Graf 5:** Přirozený přírůstek obyvatelstva v ČR v letech 1950–2016

*Zdroj: vlastní podle [19]*

Co se týče celkového přírůstku obyvatelstva v ČR, je z grafu 5 viditelný rozdíl v letech 1950 a 2016. V poválečném období růst obyvatelstva ovlivňoval hlavně převažující počet narozených dětí oproti zemřelé populaci, což lze brát za pozitivní přínos české populace. V časovém horizontu do 80. let 20. století celkový přírůstek neovlivňovala migrace, na rozdíl v posledních přibližně dvaceti letech. Jak je vidět, od roku 1994 až do roku 2006 dochází k největšímu problému, a to k převýšení úmrtnosti nad porodností. Od tohoto období dochází také ke zvýšení přírůstku pouze díky pozitivnímu nárůstu migrace a tím také ke zvyšování počtu obyvatel. Největší nárůst migrace byl v roce 2007. Od tohoto roku začíná být porodnost a úmrtnost přibližně ve stejné výši, což vede k aktuálnímu populačnímu problému.

## 2. MODELOVÁNÍ ÚMRTNOSTI

Poznatky z posledních let jasně ukazují, že se úmrtnost s postupem času mění, proto se k modelování úmrtnosti přistupuje dynamicky. To mimo jiné znamená, že například očekávaná doba života ve věku  $x$ , označovaná  $e_x$  v nedynamickém kontextu, bude nově označovaná  $e_x(t)$  jako funkce kalendářního roku  $t$  apod. Neexistuje jednoznačná hierarchie a dělení mezi různými metodami a modely používanými na předpovídání úmrtnosti. Jeden z možných přístupů je následující:

První skupinu přístupů k předpovědi úmrtnosti tvoří modely založené na extrapolaci, tzn. odvození budoucích pravděpodobností úmrtí na základě dat z minulosti. V tomto přístupu se tedy předpokládá, že trend v datech analyzovaný v minulosti bude pokračovat i v budoucnosti. Při tomto postupu je třeba si uvědomit, že nemusí být brány v potaz různé biologické faktory, rozvoj medicíny, ale také změny životního stylu. Tyto změny nebývají významné v krátkém časovém období, proto tyto modely založené na extrapolaci jsou vhodné zejména na krátkodobé předpovědi. I přesto se používají i pro dlouhodobé předpovědi (např. Lee-Carterův model). Tyto modely jsou používané nejčastěji.

Druhá skupina spočívá v tom, že se úmrtnost dělí podle příčiny úmrtí a předpovídají se míry úmrtnosti zvlášť. Tyto modely se označují jako vysvětlující (příčinné). Výhodou je, že lze lépe porozumět příčinám změn v úmrtnosti. Významný problém spočívá v tom, že mezi jednotlivými příčinami úmrtí existují různé vzájemné vztahy, které se složitě přesně identifikují. Navzdory tomu se běžně používá předpoklad nezávislosti. Velkou nevýhodou je nespolehlivost rozdělených dat oproti agregovaným údajům, ale také problém určit příčinu smrti u starších lidí. Z uvedených příčin raději analytici používají předpovídání jen pomocí agregování míry úmrtnosti, tedy přímo tyto modely moc nevyužívají. Dále se budeme věnovat pouze extrapolačním modelům, které budou vycházet ze zdroje [20].

Extrapolační modely se dělí na stochastické nebo deterministické. Základní rozdíl je v tom, že při stochastickém přístupu k modelování se díváme na pozorované hodnoty jako na realizace náhodných proměnných, v deterministickém přístupu považujeme pozorované hodnoty za pevně daná a neměnná čísla. Hlavní výhoda stochastického přístupu je v tom, že dokážeme určit jak jednotlivé bodové odhady, tak také intervaly spolehlivosti pro budoucí úmrtnost. Nevýhodou ovšem je, že často potřebujeme vhodné statistické předpoklady.

Pokud hovoříme o pozorováních úmrtnosti pro danou populaci, tak se skládají z pozorování pro různé věky, které můžeme zahrnout do množiny  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ . Každá pozorovaná



veličina zahrnuje i čas pozorování, který je z množiny  $\mathbf{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ . V případě, kdy se jedná o odhady parametrů, označujeme je  $\hat{\kappa}_t, \hat{\mu}_x$  apod.

## 2.1. Deterministické modely

Uvažujeme předpoklad, že hodnoty pozorované v minulosti (v množině roků  $T$ ) se dají proložit určitým trendem pomocí například exponenciální funkce, která se používá nejčastěji. Tento trend bude pravděpodobně pokračovat i v budoucnosti, a proto ho poté stačí extrapolovat do budoucnosti k získání požadovaných odhadů. Důležitým faktorem je hlavně volba množiny  $T$ . Pokud jsou k dispozici hodně stará pozorování, nemusí být vhodné je zahrnout všechny, ale v tomto případě by bylo spíše lepší se omezit na kratší časový úsek. Dávna pozorování v minulosti by měla mít na předpověď jen malý vliv, ale při jejich zahrnutí do množiny  $T$  mohou budoucí hodnoty ovlivnit výrazně.

### 2.1.1. Exponenciální formule

Často se využívá jednoduchý přístup, který předpokládá budoucí vývoj logaritmu pravděpodobnosti úmrtí  $q_x$  jako lineární. To znamená, že pro  $h = 1, 2, \dots, n-1$  existuje hodnota  $\delta_x$ , pro kterou platí:

$$\ln q_x(t_{h+1}) - \ln q_x(t_h) \approx -\delta_x(t_{h+1} - t_h), \quad (2.1.)$$

tedy

$$\frac{q_x(t_{h+1})}{q_x(t_h)} \approx \exp(-\delta_x(t_{h+1} - t_h)). \quad (2.2.)$$

Existují další různé exponenciální formule, které se často v praxi používají a v něčem také vylepšují vlastnosti základního vzorce. Tyto přístupy spočívají v analýze úmrtnostního profilu v čase, které zastupují tak zvaný horizontální přístup.

### 2.1.2. Další projekční formule

Na projekci pravděpodobnosti úmrtí je vhodné použít exponenciální funkci nebo její transformaci. Pokud pozorované zlepšení úmrtnosti naznačuje lineární průběh logaritmu nahodilosti, používá se tato formule:

$$\ln \frac{q_x(t)}{p_x(t)} = \alpha_x + \beta_x t. \quad (2.3.)$$

Tuto formuli můžeme vyjádřit následovně:

$$q_x(t) = \frac{\exp^{\alpha_x + \beta_x t}}{1 + \exp^{\alpha_x + \beta_x t}}. \quad (2.4.)$$

Lineární extrapolační metodu vyjadřuje:

$$q_x(t) = \alpha_x + \beta_x t, \quad (2.5.)$$

kde  $\beta_x < 0$ , pokud úmrtnost klesá. Běžně se toto však nepoužívá z důvodu záporné předpovězené úmrtnosti pro velké  $t$ .

## 2.2. Stochastické modelování úmrtnosti

Většina základních metod projekce úmrtnosti nedovoluje plně reflektovat stochastickou povahu úmrtnostních dat. Proto se používají stochastické modely, které dokáží zachytit náhodnost sledovaných hodnot i předpovědí. Základem těchto modelů je předpoklad, že počet úmrtí ve věku  $x$  je náhodná veličina. Důležitou součástí modelu je potom pravděpodobnostní rozdělení této veličiny. Stochastická projekce úmrtnosti tak oproti ostatním metodám zahrnuje bodové i intervalové odhady budoucích úmrtnostních měř a jiných demografických ukazatelů.

Tyto modely můžeme rozdělit do těchto základních skupin:

- Age-period modely

Tyto modely ztvárňují trend měnící se úmrtnosti v závislosti na věku a čase – okamžik úmrtí. Do této skupiny lze zařadit LC-model a také CBD-model, které budou dále podrobněji popsány.

- Age-period-cohort modely

Tato skupina dodává závislost úmrtnostního trendu na roku narození, tzv. kohortní efekt. Analýza úmrtnosti z hlediska roku narození pomáhá vysvětlit rozdílnou rychlost v měnící se úmrtnosti pro různé generace (kohorty). Modely, které sem lze přiřadit jsou APC-model Renshawa a Habermana z roku 2006.

- Analýza hlavních komponent (Principal component analysis - PCA)

Toto je jeden z nejnovějších přístupů, který bere v úvahu věkové posuny ve snižování úmrtnosti, pomocí kterých lze stejně jako Age-period-cohort modely, vysvětlit rozdílnou rychlost v měnící se úmrtnosti pro jednotlivé věkové kategorie. Lze do této skupiny zařadit Tchajwanský PCA-model, který navrhuje dvě hlavní komponenty – lineární funkce času a zachycení věkového posunu. Jedná se o

aproximaci LC modelu, podle které můžeme tuto terminologie chápat jako PCA-model s jednou komponentou.

Tyto výše zmíněné stochastické modely úmrtnosti nejsou zdaleka všechny. Jedná se pouze o základní kategorie modelů a jedním z nich (LC model) se budeme později zabývat v praktické části práce.

### 2.2.1. Lee-Carterova metoda projekce úmrtnosti

Tento model se stal jedním z nejvíce používaných a rozšířených projekčních modelů úmrtnosti. Model v roce 1992 navrhli Ronald D. Lee a Lawrence R. Carter. Jedná se o relativně jednoduchý stochastický model, který se většinou používá na dlouhodobé předpovědi agregovaných veličin úmrtnosti, jako je očekávaná délka života. Svůj zájem si získal i u aktuárů zajímající se o výpočty životních anuit a rezerv. [21]

Lee-Carterova metodologie se jeví jako elegantní a efektivní řešení k předpovídání demografických ukazatelů, včetně úmrtnosti. Dokonce i získal široké uznání, o čemž svědčí i fakt, že jej používá americký statistický úřad (US Bureau of the Census) nebo byl použit ke konstrukci modelových úmrtnostních tabulek Organizace spojených národů [18].

#### Model

Nechť  $m_{x,t}$  je míra úmrtnosti ve věku  $x$  a v kalendářním roce  $t$ . LC model používá logaritmus míry úmrtnosti, pro který předpokládá:

$$\ln m_{x,t} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{x,t} \quad (2.6.)$$

nebo alternativně:

$$m_{x,t} = e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{x,t}}, \quad (2.7.)$$

kde  $\alpha_x$  a  $\beta_x$  jsou věkově-specifické konstanty, kdežto  $\kappa_t$  je časově závislý index. Konkrétně  $\alpha_x$  interpretujeme jako průměrnou věkově-specifickou složku úmrtnosti, která reflektuje průměrnou úroveň úmrtnosti nezávislou v čase, pomocí  $\beta_x$  vyjadřujeme citlivost míry úmrtnosti pro daný věk  $x$  na indexu úmrtnosti (úrovni úmrtnosti v čase  $t$ )  $\kappa_t$ .  $\epsilon_{x,t}$  definujeme jako chybu modelu, která zahrnuje věkově-specifické historické vlivy, které model opomíjí. Předpokládáme, že  $\epsilon_{x,t}$  je tzv. bílý šum – tedy jsou to nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou 0 a rozptylem  $\sigma_\epsilon^2$ . Důležitou vlastností  $\epsilon_{x,t}$  je tedy homoskedasticita, tj. stejný rozptyl  $\epsilon_{x,t}$  pro všechny věky. Toto kritérium bývá také považováno za největší slabinu modelu.

Parametry modelu není možné jednoznačně určit, a proto je vhodné zavedení daných omezení. Nejčastěji se setkáme s normalizací, kterou původně navrhli Lee a Carter:

$$\begin{aligned}\sum_x \beta_x &= 1, \\ \sum_t \kappa_t &= 0,\end{aligned}\tag{2.8.}$$

která dále specifikuje  $\alpha_x$  přímo jako průměr logaritmuů měr úmrtností přes všechny kalendářní roky. Je důležité, že tato omezení nemají vliv na kvalitu modelu a budeme je v této práci také využívat. [22]

### Odhad modelu

Model nelze odhadnout klasickými regresními metodami, protože nejsou dané žádné regresory (pozorované hodnoty) na pravé straně rovnice 2.6. Máme zde pouze parametry a neznámý index  $\kappa_t$ . Lee a Carter doporučují k odhadu použít *metodu nejmenších čtverců*, další možností je např. *metoda maximální věrohodnosti*.

#### 1) Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců slouží k odhadu parametrů 2.6 tak, jak byly popsány v dřívějším textu. Označme  $\hat{m}_x$  pozorovanou intenzitu úmrtnosti ve věku  $x$  během roku  $t$ , kde  $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  a  $t \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ ...

Prostředkem k nalezení řešení metody nejmenších čtverců je pro Lee a Cartera singulární rozklad (Singular value decomposition, SVD), který aplikují na matici logaritmuů úmrtnostních měr, od kterých odečetli průměrnou věkově-specifickou složku  $\alpha_x$ .

Popíšeme si celý postup podrobně:

- hledáme parametry  $\alpha_x, \beta_x$  a  $\kappa_t$ , které minimalizují:

$$OLS(\alpha, \beta, \kappa) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln \hat{m}_{x,t} - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2\tag{2.9.}$$

- pro určení odhadu parametrů používá Lee a Carter postup pomocí metody singulárního rozkladu (Singular value decomposition, SVD):

Věta 2.1. Pro libovolnou reálnou matici  $A$  dimenze  $m \times n$  existuje rozklad  $A = U\Sigma V^T$ ,

kde  $\Sigma = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $U$  je reálná ortonormální matice typu  $m \times m$ ,  $V$  je reálná ortonormální matice typu  $n \times n$  a  $S$  je reálná diagonální matice ( $S = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ ,  $(\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0)$ ).

Aplikujme nyní SVD na 2.9. Když položíme  $\frac{\partial}{\partial \alpha_x} O_{LS} = 0$ , dostaneme:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \ln \hat{m}_{x,t} = (t_n - t_1 + 1) \alpha_x + \beta_x \sum_{t=t_1}^{t_n} \kappa_t. \quad (2.10.)$$

Z omezení 2.8. potom jednoduše plyne odhad  $\alpha_x$

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_n - t_1 + 1} \sum_{t=t_1}^{t_n} \ln \hat{m}_{x,t}, \quad (2.11.)$$

který nám udává, jak už bylo zmíněno výše, průměr logaritmů pozorovaných hodnot v čase.

Nechť dále  $\alpha_{x,t} = \ln \hat{m}_{x,t} - \hat{\alpha}_x$  jsou prvky matice  $A$  z věty 2.1. Požadované odhady  $\hat{\beta}_x$ ,  $\hat{\kappa}_t$  pak minimalizují:

$$\hat{O}_{LS}(\beta, \kappa) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (\alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2. \quad (2.12.)$$

Řešení získáme singulárním rozkladem matice  $A$ . Označme  $u_1$  jako vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu čtvercové matice  $A^T A$  s rozměry  $(t_n - t_1 + 1) \times (t_n - t_1 + 1)$ . Ekvivalentně vlastní vektor  $v_1$  odpovídá čtvercové matici  $AA^T$  dimenze  $(x_m - x_1 + 1)$ . Nejlepší aproximace matice prvního řádu  $A$  ve smyslu metody nejmenších čtverců s využitím jen první nejvyšší hodnoty je potom dána vztahem:

$$A \approx A^* = \sqrt{\lambda_1} v_1 u_1^T, \quad (2.13.)$$

odkud s ohledem na 2.5 a za podmínky, že  $\sum_{j=1}^{x_n - x_1 + 1} v_{1j} \neq 0$ , můžeme odvodit závěr:

$$\hat{\beta} = \frac{v_1}{\sum_{j=1}^{x_n - x_1 + 1} v_{1j}}, \quad (2.14.)$$

$$\hat{\kappa} = \sqrt{\lambda_1} \left( \sum_{j=1}^{x_n - x_1 + 1} v_{1j} \right) u_1. \quad (2.15.)$$

Alternativním procesem k nalezení parametrů  $\hat{\alpha}_x$ ,  $\hat{\beta}_x$  a  $\hat{\kappa}_t$  je jejich číselný výpočet založený na základě Newton-Raphsonova algoritmu. [21]

- Index úmrtnosti  $\hat{\kappa}_t$  lze odhadnout tak, aby minimalizoval chyby logaritmu úmrtnostních měř namísto přímo chyb úmrtnostních měř, proto je na závěr vhodné provést ještě jednou jeho odhad, tentokrát však na základě hodnot již získaných metodou singulárního rozkladu nebo Newton-Raphsonovou metodou. Jak navrhuje Lee a Carter, jednou z možností je úprava  $\hat{\kappa}_t$  podle reálně pozorovaných počtu úmrtí  $\sum_{x=x_1}^{x_m} D_{x,t}$  v roce  $t$  tak, aby reálné pozorované počty úmrtí odpovídaly vypočteným hodnotám. Index úmrtnosti  $\hat{\kappa}_t$  je v tomto případě pro každé  $t$  řešením následující rovnice:

$$\sum_{x=x_1}^{x_m} D_{x,t} = \sum_{x=x_1}^{x_m} E_{x,t} e^{\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t}, \quad (2.16.)$$

kde  $E_{x,t}$  je centrální expozice úmrtnosti, tedy velikost populace čelící riziku úmrtí ve věku  $x$  v čase  $t$ ,  $D_{x,t}$  je počet zemřelých ve věku  $x$  a v čase  $t$ . Předěšlá rovnice nemá explicitní řešení, je tedy potřebné postupovat numericky pomocí Nexton-Raphsonovým algoritmu.

- Odhadnuté parametry jednotlivými metodami nesplňují podmínky 2.8., provedeme tedy na závěr následující úpravu:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_x^{(F)} &= \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \bar{\kappa} \\ \hat{\kappa}_t^{(F)} &= (\hat{\kappa}_t - \bar{\kappa}) \hat{\beta}_\bullet \\ \hat{\beta}_x^{(F)} &= \frac{\hat{\beta}_x}{\hat{\beta}_\bullet}, \end{aligned} \quad (2.17.)$$

kde  $\bar{\kappa} = \frac{1}{t_n - t_1 + 1} \sum_{t=t_1}^{t_n} \hat{\kappa}_t$  a  $\hat{\beta}_\bullet = \sum_{x=x_1}^{x_m} \hat{\beta}_x$ . Horní index (F) označuje finální odhady.

## 2) Metoda maximální věrohodnosti

Jiným velmi používaným přístupem k odhadu modelu je metoda maximální věrohodnosti, kterou budeme i my používat v praktické části. Při tomto odhadu musíme mít k dispozici počty zemřelých  $D_{x,t}$  a k tomu odpovídající expozice  $E_{x,t}$ . U této metody předpokládáme, že náhodná veličina  $D_{x,t}$  má Poissonovo rozdělení s parametrem  $E_{x,t} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)$ .

Tvar věrohodnostní funkce můžeme sestavit následovně:

$$L(\alpha, \beta, \kappa) = \prod_{x=x_1}^{x_m} \prod_{t=t_1}^{t_n} \frac{(E_{x,t} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t))^{D_{x,t}}}{D_{x,t}!} \exp(-E_{x,t} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)) \quad (2.18.)$$

a poté logaritmická věrohodnostní funkce, která je výhodnější z výpočtového hlediska:

$$l(\alpha, \beta, \kappa) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (D_{x,t} (\alpha_x + \beta_x \kappa_t) - E_{x,t} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)) + c, \quad (2.19.)$$

kde konstanta  $c$  vyjadřuje členy nezávislé na parametrech. Požadované odhady parametrů dostaneme maximalizací logaritmické funkce podle parametrů. V tomto případě není potřebné na rozdíl od předešlé metody upravovat parametr  $\kappa_t$ , protože používáme přímo počty úmrtí. Odhady se ještě upraví analogicky jako při metodě odhadu parametrů, aby splňovaly daná omezení (2.8.).

### Predikce

Projekce úmrtnosti je v LC-modelu založena na klasické analýze časových řad. Cílem je nalézt vhodný model vystihující chování úmrtnostního indexu  $\kappa_t$ , který je jedinou časově závislou proměnnou v 2.7. Lee a Carter navrhují použít standardní Box-Jenkinsonovu metodologii, která vede k nalezení nejvhodnějšího ARIMA modelu.

### Modelování časového indexu úmrtnosti

Dynamika  $\kappa_t$  je tedy obecně popsána modelem ARIMA(p; d; q):

$$\nabla^d \kappa_t = \phi_1 \nabla^d \kappa_t + \dots + \phi_p \nabla^d \kappa_t + \xi_t + \psi_1 \xi_{t-1} + \dots + \psi_p \xi_{t-q}, \quad (2.20.)$$

kde  $\phi_p \neq 0$ ,  $\psi_p \neq 0$  a  $\xi_t$  je Gaussovský bílý šum, pro který  $\sigma_\xi^2 > 0$ .

**Definice 2.2** (Slabá stacionarita). *Náhodný proces  $\{X_t, t \in T\}$  s konečnými druhými momenty se nazývá slabě stacionární, má-li konstantní střední hodnotu  $\mu_t = \mu$  pro všechna  $t \in T$  a je-li jeho autokovarianční funkce  $R(s,t)$  funkcí pouze  $s - t$ .*

Pokud úmrtnostní index  $\kappa_t$  není stacionární podle Definice 2.2, je nutné odstranit trend. Nejčastěji volíme  $d = 1$  (případně  $d > 1$ ). Jestli je proces stacionární nebo ne můžeme přibližně odhadnout z jeho grafu. Střední hodnota je konstantní, pokud je horizontální trend funkce neklesající a zároveň nerostoucí. [23]

Dalším znakem stacionárního procesu je autokorelační funkce klesající geometrickou rychlostí. Jakákoliv odchylka je pravděpodobně znakem nestacionarity. Pro testování, zdali

(ne)jsou první diference odhadnutého procesu  $\kappa_t$  stacionární, použijeme např. ADF test (Augmented Dickey-Fuller test) a KPSS test. V případě existence jednotkového kořene volíme  $d > 1$ , v opačném případě pokračujeme analýzou autokorelační a parciální autokorelační funkce  $\kappa_t$  a volbou úvodních hodnot  $p$  a  $q$ . [24]

Klady Lee-Carterova modelu:

- robustnost
- jednoduchý model s jediným faktorem vyjadřujícím dynamiku úmrtnosti v čase
- dobrý fit přes širokou škálu věků

Zápory Lee-Carterova modelu:

- nedostatečná hladkost ve věkovém parametru  $x$  (hlavně v malých populacích)
- neumožňuje zahrnout zlepšení úmrtnosti v jednotlivých věcích v různých časech
- věkový parametr  $\alpha_x$  ovlivňuje trend a nejistotu v určitém věku, a proto to vede k možnému podcenění nejistoty v pozorované úmrtnosti, zvláště ve vysokých letech
- úmrtnostní míry v rámci různých věků jsou perfektně korelované, protože je to jednofaktorový model

### 2.2.2. CBD model

Nastíněný model je stochastický model navržený na modelování mortality hlavně ve vyšších věcích. Využívá poměrnou jednoduchost, téměř linearitu logaritmu  $q_x(t)$ , křivky úmrtnosti ve vyšších věcích. Zařazuje se mezi modely s dvěma faktory a používá přímo pravděpodobnosti úmrtí  $q_x(t)$  místo míry úmrtnosti  $m_x(t)$ . Model můžeme definovat jako:

$$\ln \frac{q_x(t)}{p_x(t)} = \kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]} x. \quad (2.21.)$$

Podstatný rozdíl oproti modelu Lee-Carter popsanému v předchozí kapitole je, že CBD model má dvě časové řady  $\kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}$ . Tyto řady ovlivňují různé věky odlišným způsobem, což znamená nekorelovanost úmrtnostních měř v různých věcích v průběhu času. Lee-Carterův model naznačuje přesný opak, tedy dokonalou korelaci. CBD model je oproti Lee-Carterovu modelu výhodnější se zvyšující se délkou dat, které používáme při kalibraci modelu. Na odhad parametrů lze znovu použít metodu nejmenších čtverců.



Konkrétně pomocí regresního modelu:

$$\ln \frac{q_x(t)}{p_x(t)} = \kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}x + \epsilon_x(t), \quad (2.22.)$$

kde  $\epsilon_x(t)$  značí chybové členy, nezávislé, identicky rozdělené s normálním rozdělením se střední hodnotou 0 a s konstantním rozptylem  $\sigma_\epsilon^2$ . Funkce, kterou minimalizujeme, má tvar:

$$O_t(\kappa) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \left( \ln \frac{q_x(t)}{p_x(t)} - \kappa_t^{[1]} - \kappa_t^{[2]}x \right)^2. \quad (2.23.)$$

Uvažujme, že v tomto případě je dvojice  $(\kappa_t^{[1]}, \kappa_t^{[2]})$  odhadovaná pro každé  $t$  zvlášť, na rozdíl od LC modelu. Jsou známy i jiné způsoby odhadu parametrů, které tu neuvádíme, podobně jako to bylo u předchozího modelu.

Klady Cairns-Blake-Dowdova modelu:

- založen na pozorování, že logaritmus úmrtnostních měř je přibližně lineární při věku nad 40 let
- používá dva periodické parametry zachytávající trendové zlepšení úmrtnosti a různou dynamiku při různých věcích
- robustnost
- jednoduché věkové parametry
- možnost snadno zahrnout nejistotu v parametrech

Zápory Cairns-Blake-Dowdova modelu:

- dobrý odhad při větším rozsahu vstupních dat, avšak všeobecně není tak dobrý jako LC (lepší zachycení nelinearity v úmrtnostních křivkách při nižších letech).

### 3. ANUITY

Termín anuita vyjadřuje závazek finanční instituce (pojišťovny, penzijní společnosti) vyplácet pravidelné dávky v předem sjednané výši a dohodnutého harmonogramu výměnou za vložené prostředky. Princip anuity je jednoduchý, avšak samotný produkt je poměrně komplikovaný z pohledu dané finanční instituce. Její fungování závisí na několika faktorech, kde jedním z nich jsou úmrtnostní tabulky (viz. 1.3). Jedním z problémů při výpočtu anuity je průměrná doba dožití, která je stanovena dle ÚT a může se v budoucnosti zvyšovat.

Budeme rozlišovat tyto druhy anuit:

- Anuita s pevnou dobou výplaty (jistá anuita/důchod) znamená posloupnost plateb trvající předem daný počet let bez ohledu na to, zda je příjemce naživu či nikoli. Pokud příjemce zemře před dobou trvání této anuity, jednotlivé anuitní platby se stanou součástí příjemcovy pozůstalosti. Tyto anuity jsou z tohoto důvodu podobné klasickým kupónovým dluhopisům i v tom případě, že struktura plateb je odlišná.
- Životní anuita (penze, anuita) je na rozdíl od předchozího druhu posloupnost plateb podmíněných dobou trvání života. Pokud jedinec zaplatí příslušnou jednorázovou cenu anuity (pojistné), musí mu příslušná pojišťovna nebo penzijní fond vyplácet v pravidelných splátkách určitou částku až do okamžiku jeho smrti. Tato anuita může být i nástrojem, který bude čelit riziku dlouhověkosti a sociální nedostatečnosti.
- Dočasná anuita je vyplácena jen tehdy, když je oprávněná osoba naživu a maximálně jen do doby, která je předem sjednána. To znamená, že výplaty anuit skončí, pokud příjemce zemře nebo vyprší sjednaná doba.
- Odložená anuita je takový druh anuity, kde první výplata je odložena na pozdější výplatní období. V tomto případě se ale může stát, že nedojde ani k jedné anuitní výplatě.

Existují i další druhy anuit, které lze najít například v [25]. V této práci se ale dále budeme zabývat hlavně životní anuitou, konkrétně dočasnou životní anuitou, jelikož se nejvíce týká rizika dlouhověkosti.

### 3.1. Životní anuita

Životní anuity se v praxi většinou sjednávají jako součást starobní penze. Nejčastějšími prodejci bývají životní pojišťovny, protože některé penzijní fondy v dnešní době figurují jen v akumulární fázi životního anuitního cyklu (většinou spojeno s určitými motivačními a daňovými podněty), zatímco dekumulační fáze anuitního cyklu (tykající se vlastních anuitních plateb) je čím dál více přenechávána do rukou životních pojišťoven. Ty často na anuitních trzích v rámci tohoto cyklu nabízejí své služby a produkty. Existence a rozsah těchto anuitních trhů ovšem závisí na důchodovém systému konkrétní země. Mezi země s rozvinutým anuitním trhem, a tím pádem nevýznamnou rolí státních penzí, patří například UK, USA, Švýcarsko a naopak země, které jsou sociálně štedré a dominuje v nich státní penzijní systém nad omezených anuitním systémem, jako je Německo, Itálie, Japonsko apod.

V České republice řada penzijních fondů deklaruje zaručenou úrokovou míru, a tak využívá postupy komerčního důchodového pojištění. Toto pojištění má většinou dlouhodobý charakter, proto pojišťovny zahrnují do svých výpočtů také faktor času, proto pro diskontování pojistného používají technickou úrokovou míru, kterou Česká národní banka stanovila v roce 2015 ve výši 1,3 %. [14, 25, 26]

### 3.2. Modelování životních anuit

Modelování penzí, jejichž doba vyplácení je náhodná, neboť je závislá na náhodně zbývajícím době života příslušné pojištěné osoby. Na rozdíl od anuit s pevnou dobou výplaty zde můžeme počítat jen střední počáteční hodnoty životních anuit (penze) jako kapitálové částky, které umožní vyplácení anuit jen v průměru přes jejich větší portfolio. Exaktně se jedná o střední hodnoty náhodných veličin, které vznikají kumulací náhodného počtu finančních toků (penzijní platby), které se diskontují k okamžiku výpočtu předpokládané úrokové míry. Tyto střední počáteční hodnoty budeme označovat vhodnými aktuárskými symboly (např.  $a_x$ ).

- Roční jednotková polhůtní anuita vyplácená od věku  $x$  příslušného jedince:

$$a_x = \frac{{}_1p_x}{1+r} + \frac{{}_2p_x}{(1+r)^2} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{{}_ip_x}{(1+r)^i} \quad (3.1.)$$

Kde  ${}_ip_x$  vyjadřuje víceletou pravděpodobnost dožití (tj., že se jedinec, který je naživu ve věku  $x$  se dožije věku  $x+i$ ) a  $i$  je fixní roční úroková míra. Polhůtní anuita znamená, že se příjemci vyplatí penzijní platba na konci každého výplatního roku v jednotkové výši.

V případě předlůtní anuity, kdy se penzijní platba vyplácí na začátku každého výplatního roku, můžeme předchozí vzorec aproximovat do tvaru:

$$\ddot{a}_x = 1 + \frac{1p_x}{1+r} + \frac{2p_x}{(1+r)^2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i p_x}{(1+r)^i} = 1 + a_x, \quad (3.2.)$$

kde formálně  ${}_0p_x = 1$ .

- Dočasná roční jednotková polhůtní anuita:

$$\ddot{a}_{x:n|} = \frac{1p_x}{1+r} + \frac{2p_x}{(1+r)^2} + \dots + \frac{np_x}{(1+r)^n} = \sum_{i=1}^n \frac{i p_x}{(1+r)^i}, \quad (3.3.)$$

kde  $n$  vyjadřuje dobu smluvně omezující výplatu dočasné penze. Uplatnění této doby je jen v případě jejího dožití. Tento druh anuity budeme později v praktické části počítat.

- Odložená roční jednotková polhůtní anuita:

$${}_m|a_x = \frac{m+1p_x}{(1+r)^{m+1}} + \frac{m+2p_x}{(1+r)^{m+2}} + \dots = \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{i p_x}{(1+r)^i}, \quad (3.4.)$$

kde  $m$  je doba odkladu, po kterou se penze ještě zpočátku nevyplácí. Výpočty dalších druhů anuit lze nalézt v [25].

V praxi většinou bývají numerické výpočty předchozích aktuárských vzorců pro výpočet anuity v diskrétním čase založeny na tzv. komutačních číslech. Komutační čísla kombinují demografické nástroje s nástroji finančními. Příkladem některých komutačních čísel jsou:

$$\begin{aligned} D_x &= l_x v^x, \\ C_x &= d_x v^{x+1}, \\ N_x &= \sum_{i=0}^{\infty} D_{x+i}, \\ M_x &= \sum_{i=0}^{\infty} C_{x+i}, \end{aligned} \quad (3.5.)$$

ve kterých  $D_x$  znamená diskontovaný počet dožívajících se věku  $x$ ,  $C_x$  je diskontovaný počet zemřelých se věku  $x$ ,  $N_x$  a  $M_x$  jsou odpovídající komutační čísla vyššího řádu a  $v$  značí diskontní faktor<sup>1</sup>. Pomocí těchto čísel můžeme dále zjednodušovat předchozí vzorce pro výpočet anuity. [14]

---

<sup>1</sup> Diskontní faktor se vypočítá jako  $v = \frac{1}{(1+i)}$ , kde  $i$  značí technickou úrokovou míru.

## 4. RIZIKO DLOUHOVĚKOSTI NA KONKRÉTNÍCH DATECH

Cílem praktické části je modelování stochastického modelu úmrtnosti. V této diplomové práci byl pro výpočet vybrán stochastický model Lee-Carter. Úmrtnost bude konstruována pro česká dostupná data vybraná ze zdroje [5]. Motivací pro tento výběr výpočtů byla data publikovaná v článku *The Economist* [27], která se týkala Velké Británie.

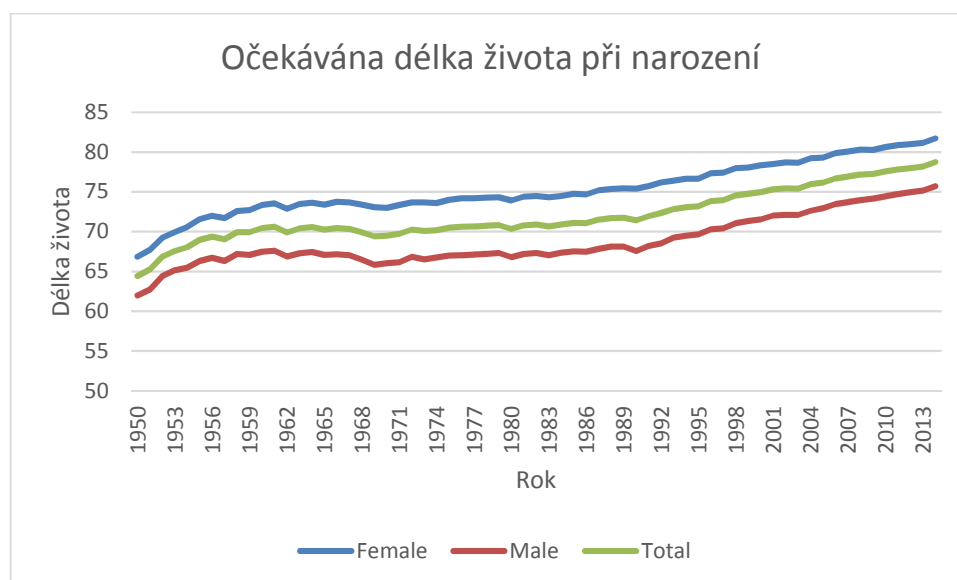
K modelování byl nejprve použit program R, ve kterém byly vypočítány parametry  $\hat{\alpha}_x$ ,  $\hat{\beta}_x$  a  $\hat{\kappa}_t$  zvlášť pro ženy, muže a celou populaci. Následně jsme tato data zpracovali a došli ke grafickému znázornění v tomto programu. Další program, který nám posloužil, byl Gretl. Pomohl ke zpracování Box-Jenkinsonovy metodologie, konkrétně v ověření stacionarity, k výpočtu modelu ARIMA a predikcím vybraného modelu.

### 4.1. Výběr dat

Pojďme se nyní podrobněji podívat na konkrétní data České republiky. V této práci budeme brát jako největší motivaci pro stochastické modelování úmrtnosti právě riziko dlouhověkosti a snahu o predikci tohoto aktuálního fenoménu. Pokud se podíváme na česká data z hlediska stárnutí populace, můžeme z reálných dat potvrdit, že i v České republice dochází k prodlužování života.

V tomto případě jsme data převážně čerpali z mezinárodních webových stránek mortality.org [5], která byla použita i při modelování úmrtnosti metodou LC. V některém případě jsme také převzali data o obyvatelstvu ČR od ČSÚ. Nejvíce nám zajímala věková skupina od 60 let, díky níž jsme si mohli sami potvrdit demografické problémy populace v České republice.

Zprvu, jak můžeme vidět na grafu 6, kde se nám zobrazuje vývoj očekávané délky života při narození, dochází ke značnému posunu délky života. V grafu jsou znázorněny vývoje zvlášť pro jednotlivá pohlaví a celou populaci. Je zřejmé, že se délka života od roku 1950 do roku 2014 zvýšila o více než 13 let života u mužů, u žen je to dokonce o necelých 15 let.



**Graf 6:** Očekávaná délka života při narození v letech 1950–2014

Zdroj: vlastní zpracování podle [5]

Zde si uvedeme několik příkladů kódů v R jazyce (pomocí [20]) pro konkrétní data ČR:

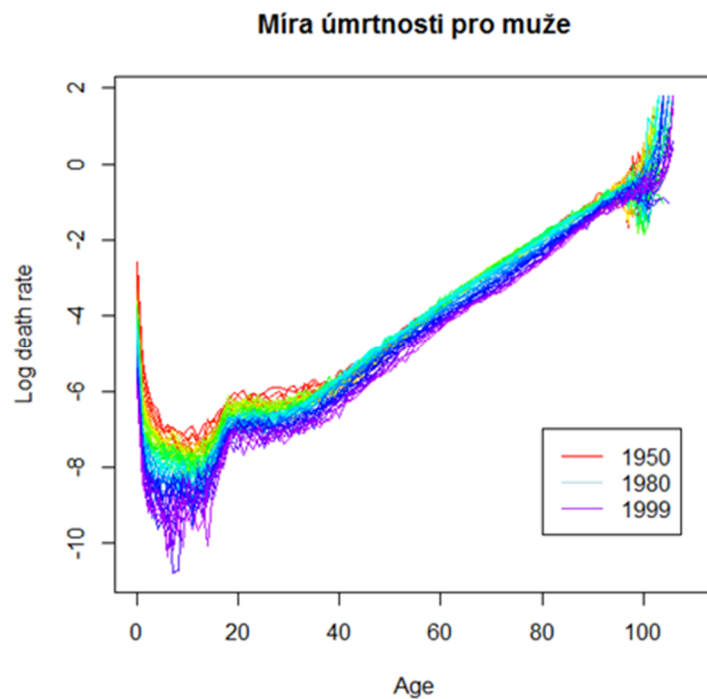
```
library(demography)
library(forecast)
library(lifecontingencies)
```

Po načtení těchto funkčních balíčků (*Packages*) dochází už přímo k importu českých dat z *The Human Mortality Database* (HMD) a vytvoření objektu *demogdata* z datové struktury HMD. Pomocí funkce *hmd.mx* se stáhnou všechny dostupné roční údaje v jednotlivých věkových kategoriích.

```
Demo<-hmd.mx(country="CZE",username="j***.s*****@gmail.com",
password="s*****", label="Czech")
load(file="mortalityDatasets.RData")
```

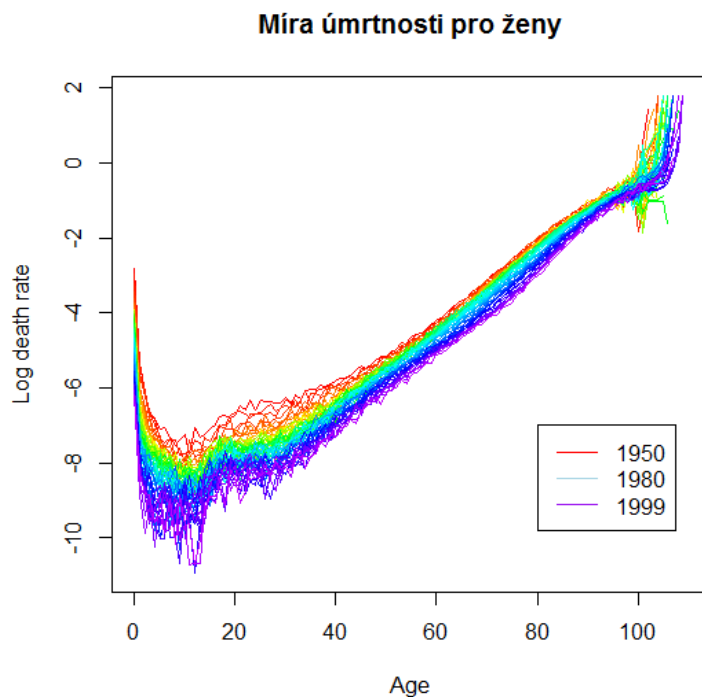
Funkce *plot* je k dispozici v balíčku *demogdata* a pomocí ní se nám graficky zobrazí vývoj logaritmických měr úmrtnosti podle věku a času jednotlivě pro muže, ženy a celkovou populaci.

```
plot(Demo,series="male",datatype="rate", main="Míra úmrtnosti pro muže")
legend(80,-7,legend=c("1950","1980","1999"),col=c("red","light blue","purple"),lty=1:1)
plot(Demo,series="female",datatype="rate", main="Míra úmrtnosti pro ženy")
legend(80,-7,legend=c("1950","1980","1999"),col=c("red","light blue","purple"),lty=1:1)
plot(Demo,"total",datatype="rate", main="Míra úmrtnosti celkem")
legend(80,-7,legend=c("1950","1980","1999"),col=c("red","light blue","purple"),lty=1:1)
```



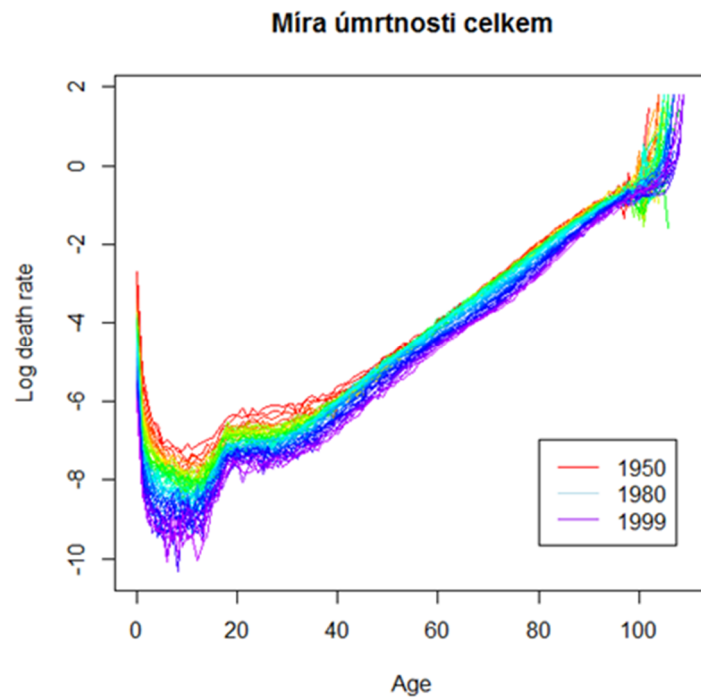
**Obrázek 1:** Vývoj míry úmrtnosti v logaritmickém měřítku pro muže v letech 1950–1999

*Zdroj: vlastní zpracování*



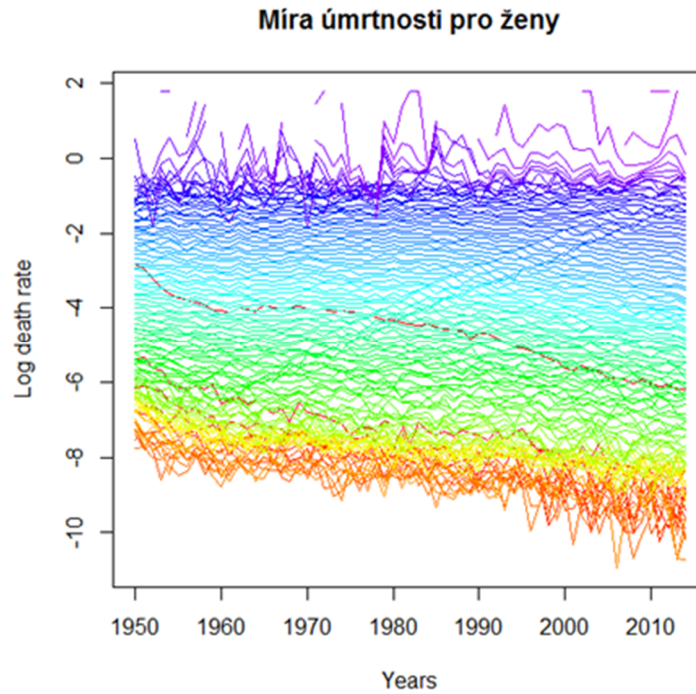
**Obrázek 2:** Vývoj míry úmrtnosti v logaritmickém měřítku pro ženy v letech 1950–1999

*Zdroj: vlastní zpracování*



**Obrázek 3:** Vývoj míry úmrtnosti v logaritmickém měřítku pro ženy v letech 1950–1999

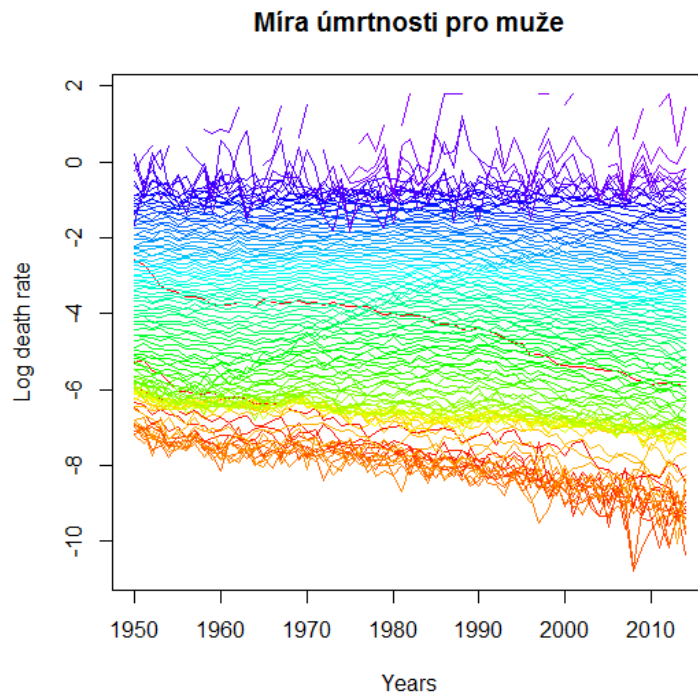
*Zdroj: vlastní zpracování*



**Obrázek 4:** Vývoj míry úmrtnosti v logaritmickém měřítku pro jednotlivé věky žen

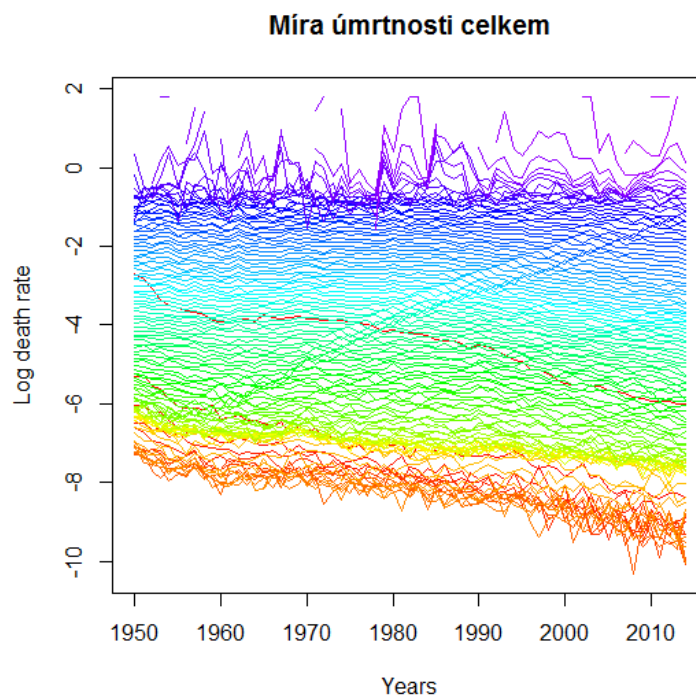
*Zdroj: vlastní zpracování*





**Obrázek 5:** Vývoj míry úmrtnosti v logaritmickém měřítku pro jednotlivé věky mužů

*Zdroj: vlastní zpracování*



**Obrázek 6:** Vývoj míry úmrtnosti v logaritmickém měřítku pro jednotlivé věky celé populace

*Zdroj: vlastní zpracování*

Obrázky 1, 2 a 3 zobrazují vývoj míry úmrtnosti, žen, mužů a celé populace pro roky 1950–1999. Hodnoty v grafech jsou v logaritmickém měřítku z důvodu velice nízkých hodnot pravděpodobnosti úmrtí. Míra úmrtnosti se postupně od roku 1950 snižuje s různou intenzitou v jednotlivých věcích, což je viditelné pomocí barevné škály v grafu, která začíná červenou barvou a končí fialovou. Největší pokles je u novorozenecké úmrtnosti, poté má od věku 40 let v podstatě stejný růstový trend a na konci, od věku přibližně 85 let, je zde zřejmá vysoká volatilita, což je způsobeno malým počtem jedinců žijící v této věkové kategorii. Z tohoto důvodu má velký vliv na rozkolísanost přežití nebo úmrtí i jednoho člověka v tomto věku.

Na obrázcích 4, 5 a 6 je znázorněn stejný vývoj měř úmrtnosti pro jednotlivá pohlaví jako v předchozím popisu jen s tou změnou, že jsou zde zobrazena data pro jednotlivé roky. Barevná škála zde tedy vykresluje hodnoty pro vývoj ve věkových kategoriích po nejmladší po nejstarší (červená až fialová). Toto grafické znázornění je namodelováno podle příkazu:

```
plot(Demo,series="male",datatype="rate",plot.type="time", main="Míra úmrtnosti pro muže",xlab="Years")
plot(Demo,series="female",datatype="rate", plot.type="time", main="Míra úmrtnosti pro ženy",xlab="Years")
plot(Demo,series="total",datatype="rate", plot.type="time", main="Míra úmrtnosti celkem",xlab="Years")
```

## 4.2. Lee-Carter model

Pro modelování úmrtnosti v této práci jsme aplikovali stochastický model Lee-Carter. V následujících kapitolách budeme konkrétně sestavovat LC model, kde jeho parametry budou vypočítány také v programu R pomocí příkazů v R jazyce. Jediný parametr, který je časově závislý, budeme modelovat jako časovou řadu a hledat pro něj nejvhodnější neparametrický model v programu Gretl. Pomocí tohoto modelu následně vygenerujeme predikované hodnoty, které porovnáme se skutečnými.

### 4.2.1. Parametry modelu

Zde jsme postupně pomocí přihlášení se do webového portálu mortality.org namodelovali parametry  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  pro 60–90 leté osoby a parametr  $\kappa_t$ , který je jako jediný parametr závislý na čase, pro roky 1950–1999.

Pro zapojení modelu Lee-Carter (bez průběhu logaritmů) lze použít funkci *lca*. LC model se zde aplikuje odděleně pro muže, ženy a celkovou populaci a zvažuje maximální věk, který se rovná 95.

```

LcaM<-lca(Demo,series="male",max.age=95)
LcaF<-lca(Demo,series="female",max.age=95, interpolate = TRUE)
LcaT<-lca(Demo,series="total",max.age=95)

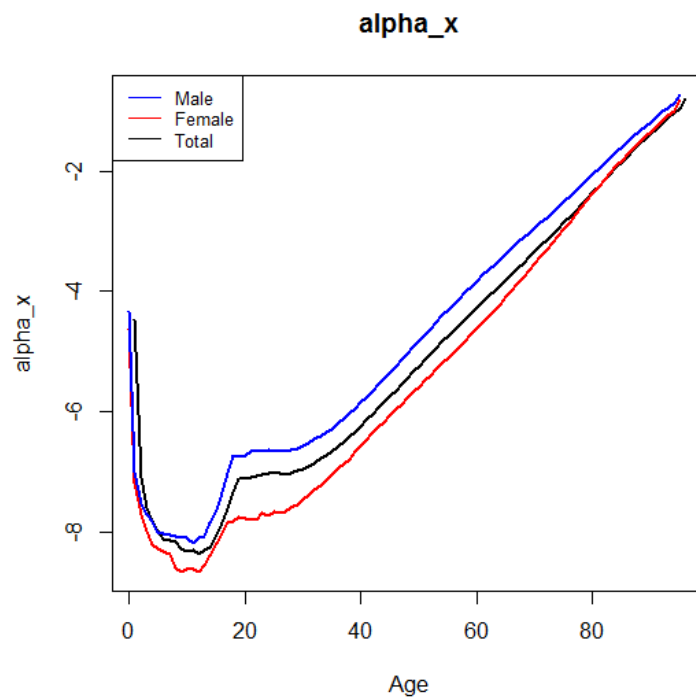
```

*Lca* objekt nám umožňuje vygenerovat  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ , a  $\kappa_t$ , jejichž čísla nám představují hodnoty odhadovaných parametrů.

```

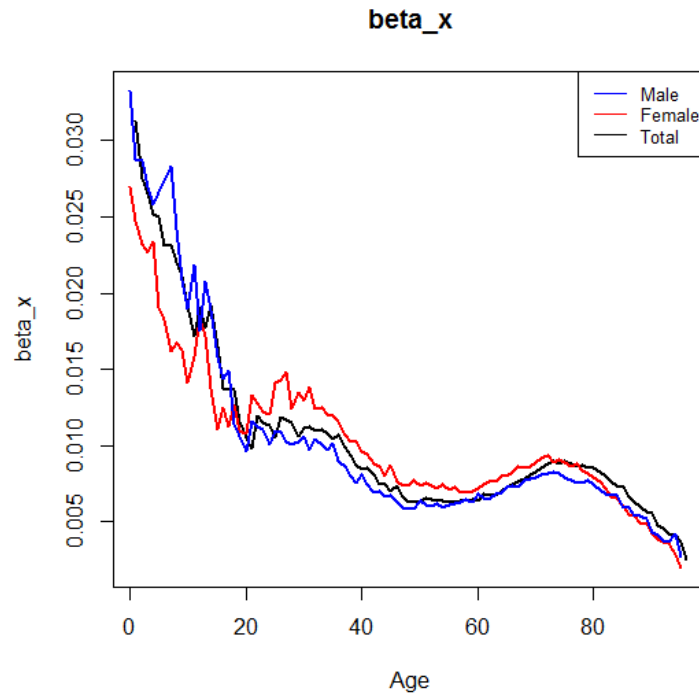
plot(LcaT$sax, main="alpha_x", xlab="Age",ylab="alpha_x",type="l", lwd=2,
ylim=range(LcaT$sax,LcaF$sax,LcaM$sax))
lines(x=LcaF$age, y=LcaF$sax, lwd=2, main="alpha_x", col="red")
lines(x=LcaM$age, y=LcaM$sax, lwd=2, main="alpha_x", col="blue")
legend("topleft", c("Male","Female","Total"), cex=0.8,col=c("blue","red","black"),lty=1)

```



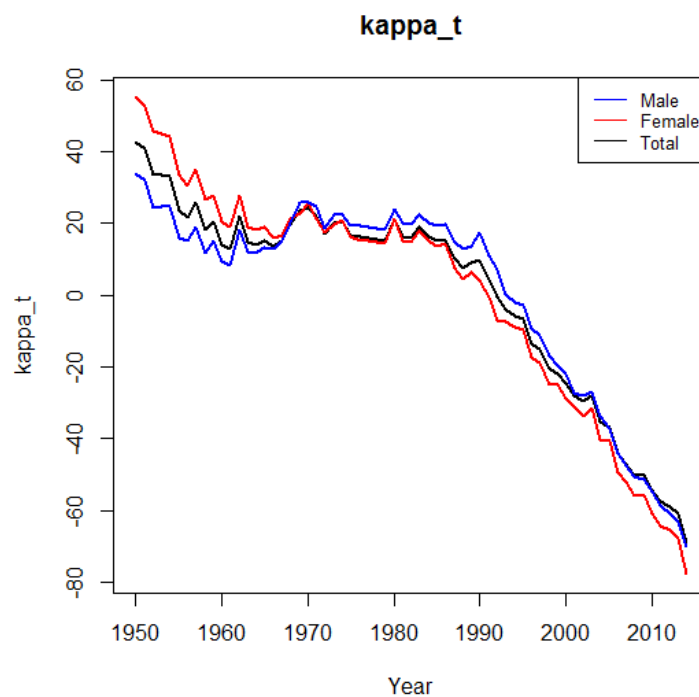
**Obrázek 7:** Vývoj parametru  $\alpha_x$  pro muže, ženy a celkovou populaci

*Zdroj: vlastní zpracování*



**Obrázek 8:** Vývoj parametru  $\beta_x$  pro muže, ženy a celkovou populaci

*Zdroj: vlastní zpracování*



**Obrázek 9:** Vývoj parametru  $\kappa_t$  pro muže, ženy a celkovou populaci v letech od 1950–2014

*Zdroj: vlastní zpracování*

Odhadnuté parametry splňují naše očekávání, která jsou uvedená v kapitole 2.2.1. Konkrétně  $\alpha_x$  charakterizuje průměrnou úroveň úmrtnosti a od přibližného věku 10 let má stále růstovou

tendenci-nejvíce prudký nárůst je vidět okolo 20-tého roku života u všech třech sledovaných kategorií. U parametru  $\beta_x$  jsou hodnoty nejvíce rozkolísané. Více hladké začínají být až ve vyšších věkových kategoriích, což nám naznačuje, že vhodnější je kalibrovat modely pro vyšší věky. Poslední a časově závislý parametr  $\kappa_t$  má zjevný prudký pokles do roku 1965. Po tomto roce má přibližně konstantní charakter a od roku 1990 by se dalo říci, že klesá lineárně, což je z části ovlivněno náhlým předcházejícím poklesem do zmíněného roku 1965. Tyto uvedené parametry jsou namodelovány pro ženy, muže i celkovou populaci zvlášť a jejich výsledky se nijak diametrálně neliší. Největší rozdíl je zřejmý pouze u parametru  $\alpha_x$ , kde ženská populace ČR má po celé sledované období nižší průměrnou úroveň úmrtnosti.

#### 4.2.2. Modelování parametru $\kappa_t$ a predikce

Model LC má časově závislý parametr  $\kappa_t$ . Na základě analýzy časových řad jsme se rozhodli tento parametr modelovat pomocí neparametrického modelu ARIMA(0,2,2) pro ženy a muže. Pro celkovou populaci byl použit model ARIMA(1,1,2).

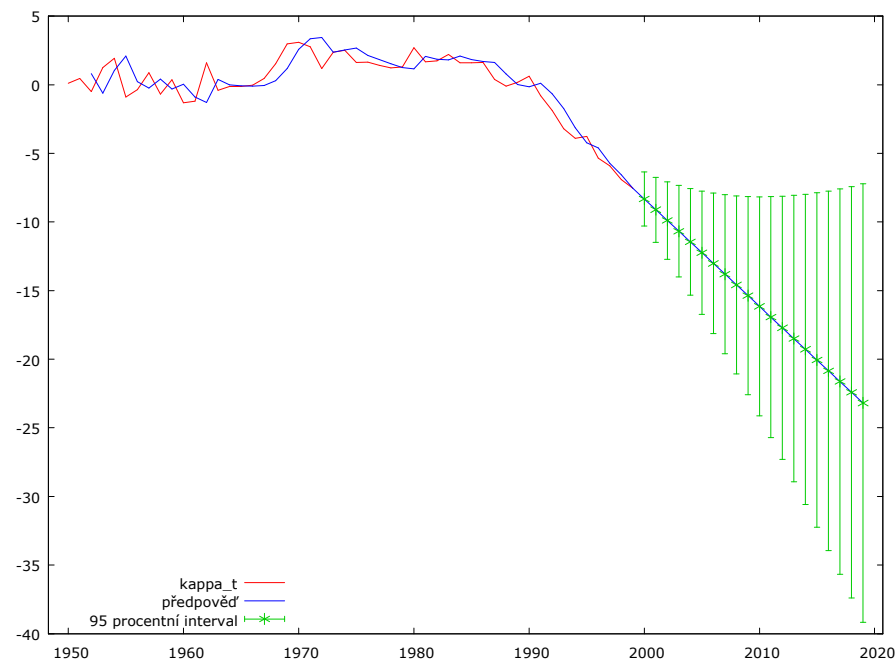
Nejprve jsme zjišťovali stacionaritu časové řady, abychom mohli zvolit správný model a vyšly nám tak co nejbližší výsledky predikovaných hodnot. Toto ověření bylo provedeno pomocí KPSS testu a rozšířeného Dickey-Fullerova testu (ADF test).

U časových řad pro ženy a muže byla potvrzena stacionarita, pomocí těchto dvou testů, po dvou diferencích. Pro celkovou populaci nebylo možné po první diferenci o stacionaritě rozhodnout, proto jsme zkusili extrapolovat data pro řád  $d = 1, 2$ , z čehož vyšel nejlépe model po první diferenci.

O vhodnosti vybraných modelů nás dále přesvědčila informační kritéria, na jejichž základě jsme rozhodli o řádech  $q$  a  $p$  a vzájemně je porovnali. Zaměřovali jsme se zásadně na Schwartzovo a Akaikeho kritérium.

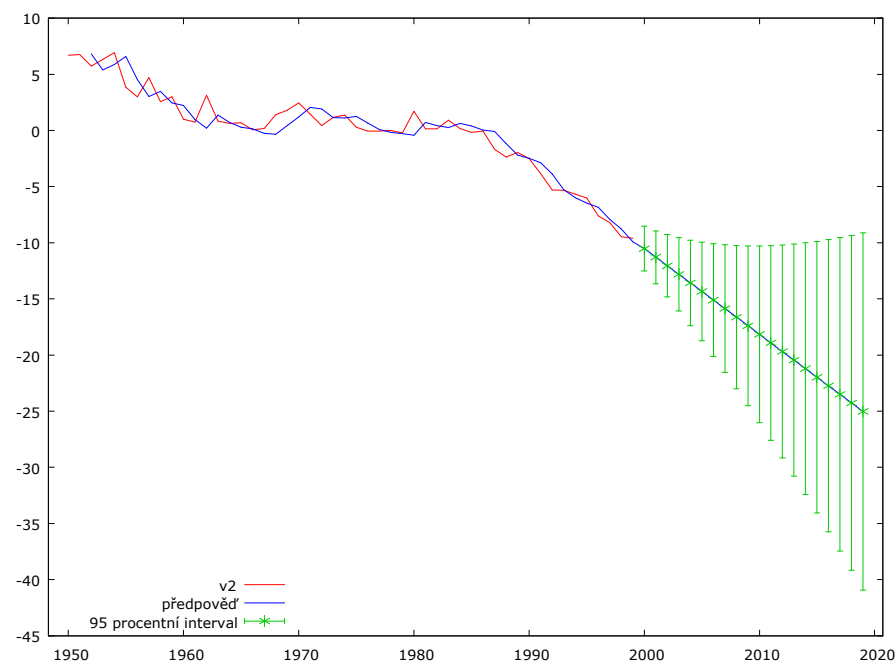
Tímto způsobem vyšly jako nejvhodnější modely pro jednotlivé kategorie již zmíněné ARIMA procesy s danými řády, kde hodnoty těchto informačních kritérií vycházely jako nejnižší.

Obrázky 10, 11 a 12 zachycují výsledné predikované hodnoty parametru  $\kappa_t$  pro ženy, muže a celou českou populaci s proložením reálných hodnot časového indexu. Od roku 2000 je nastíněna předpověď vývoje s 95 % intervalem spolehlivosti, která má stále klesající tendenci. Zde je ovšem nutné zohlednit, že není možné, aby vývoj klesal do „nekonečna“, neboť zvyšování dožívajících se let je určitým způsobem biologicky omezené. Tato skutečnost je brána za negativum zvoleného stochastického modelu.



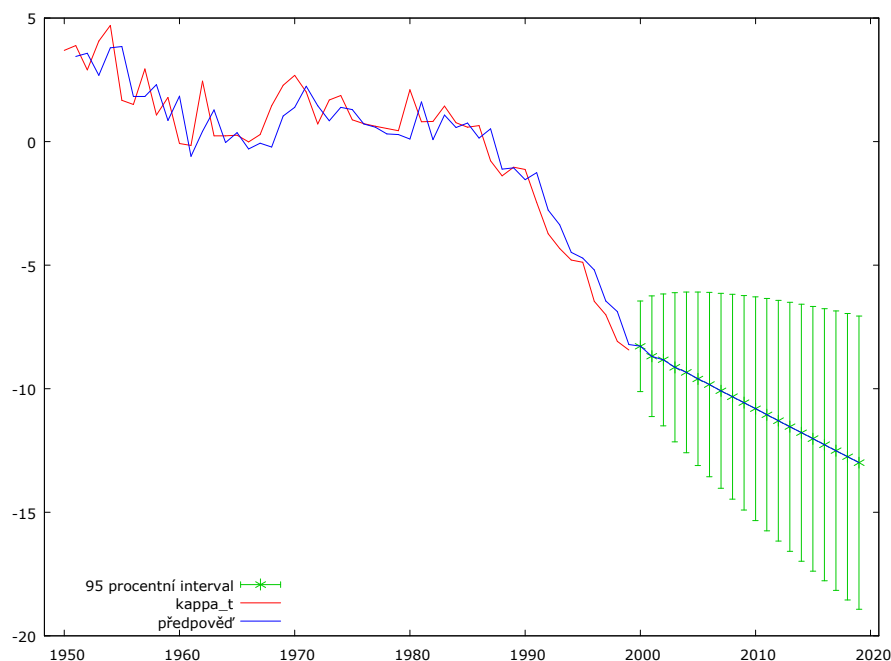
**Obrázek 10:** Data ČR muži – Predikovaný vývoj parametru  $\kappa_t$

*Zdroj: vlastní zpracování*



**Obrázek 11:** Data ČR ženy – Predikovaný vývoj parametru  $\kappa_t$

*Zdroj: vlastní zpracování*

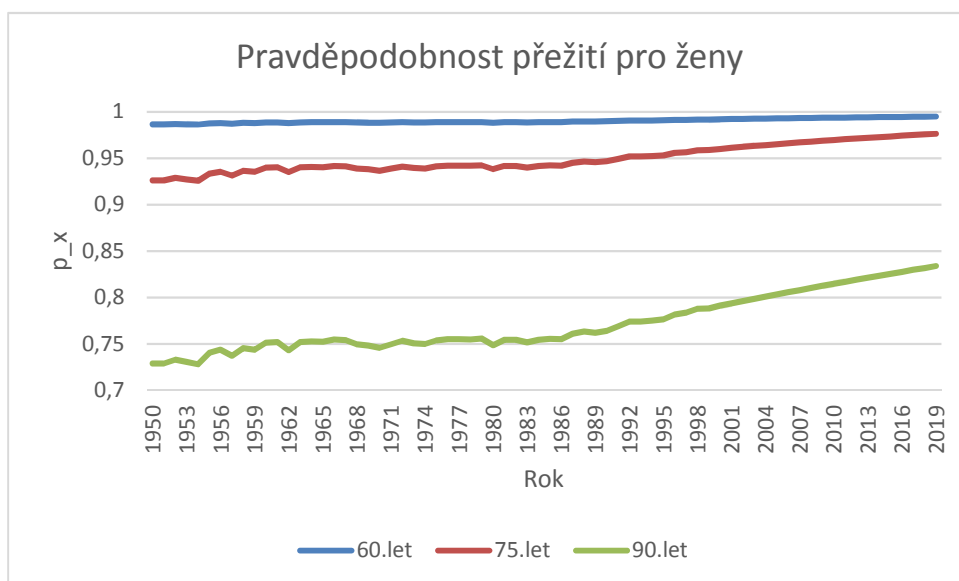


**Obrázek 12:** Data ČR celá populace – Predikovaný vývoj parametru  $\kappa_t$

*Zdroj: vlastní zpracování*

Přesné predikované hodnoty parametru  $\kappa_t$  pro ženy, muže a celou populaci v letech 2000-2019 jsou názorně ukázány v příloze B.

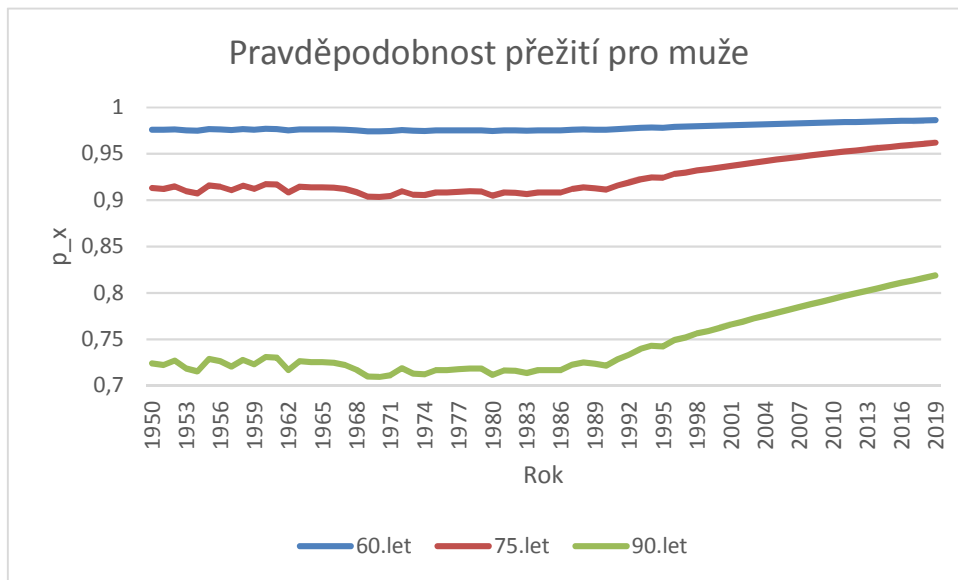
S využitím modelového časového indexu byla poté jednoduše sestrojena úmrtnostní tabulka pro ženy, muže a celkovou populaci. To platí pro generaci ve věku 60–95 let týkající se období 2000–2019. Pro ilustraci je v grafu 7 a 8 vidět vývoj pravděpodobnosti přežití vypočtený z predikovaných hodnot pro muže a ženy. Nejvíce zřejmý růstový trend těchto hodnot je pro



**Graf 7:** Vývoj pravděpodobnosti přežití pro ženy z predikovaných hodnot

*Zdroj: vlastní zpracování podle*

věk 70 a 90 let. Ve věku 90 let je předpověď pravděpodobnosti přežití pro rok 2019 0,8 (ženy), 0,82 (muži) a jedná se o nejvyšší skok vývoje ze sledovaných kategorií od roku 1950, o nárůst přibližně 10 %. Pro 70 leté je hodnota pro ženy 0,98 a muže 0,96. Jednotlivé hodnoty predikované pravděpodobnosti přežití v letech 1950-2019 pro muže, ženy i celou populaci jsou zobrazeny v příloze C.



**Graf 8:** Vývoj pravděpodobnosti přežití pro muže z predikovaných hodnot

*Zdroj: vlastní zpracování*

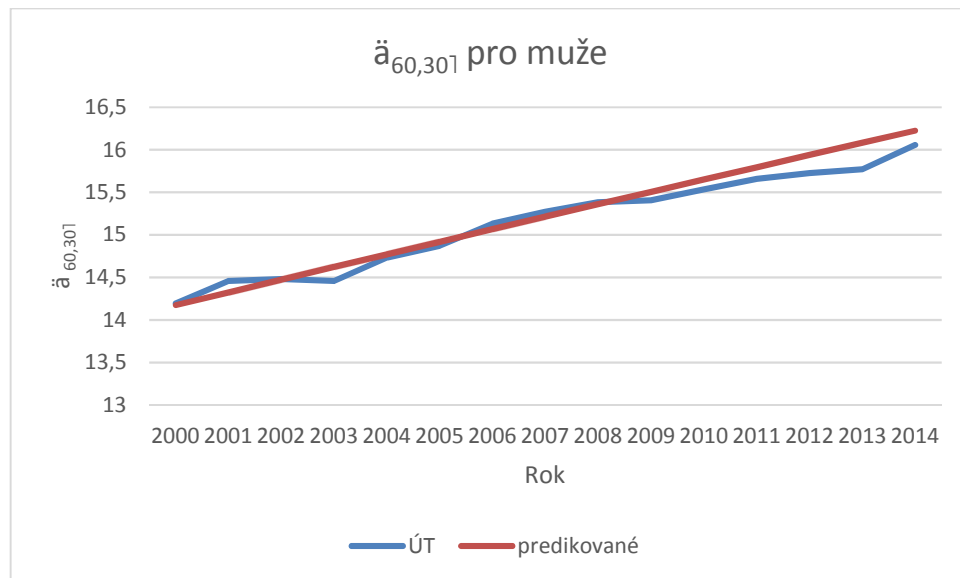
### 4.3. Předpověď výše anuity

V této kapitole se podíváme na očekávanou současnou hodnotu jednotkové roční dočasné anuity ve výšce jedné vyplácené pojistné smlouvy po dobu 30 let od 60. roku života muže, ženy a celé populace (3.3.).

Máme vypočítané hodnoty  ${}_k p_x$  pro muže, ženy a celou populaci ve věku 60 let. Bereme v úvahu časové rozmezí od roku 2000-2014. Tyto hodnoty je potřeba diskontovat technickou úrokovou mírou 1,3 % a tím získáme současné hodnoty v jednotlivých letech a věkových kategoriích. Po součtu těchto výstupů získáme současné hodnoty anuity pro jednotlivé roky ve sledovaném období.

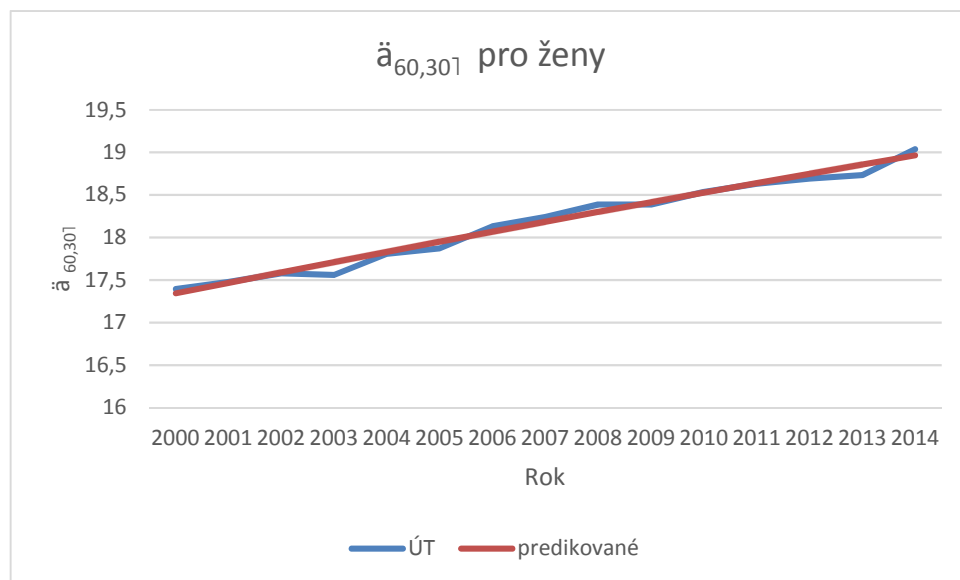
Takto vypočítané samotné hodnoty jsou pro nás bezvýznamné, proto je budeme porovnávat s hodnotami získanými z ÚT. Je třeba zde opomenout fakt, že předpovědi pomocí stochastických modelů, zde konkrétně LC modelu, jsou spojeny s nejistotou, která se odráží v šířce intervalu spolehlivosti. Úmrtnostní tabulky pro ČR z roků 2000–2014 jsou získané z [5].





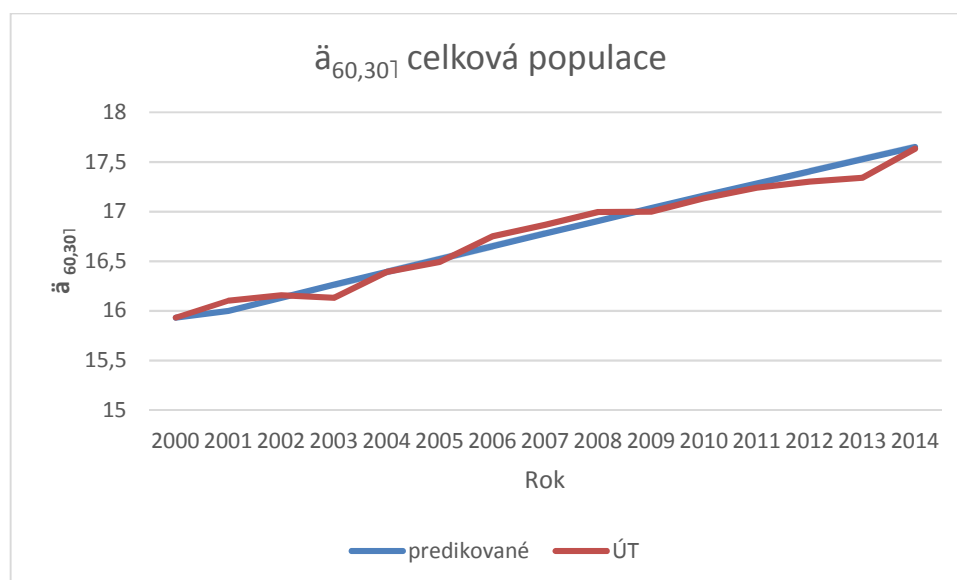
**Graf 9:** Vývoj  $\ddot{a}_{x,n1}$  pro muže ve věku 60 let a TÚM 1,3 % v letech 2000–2014

*Zdroj: vlastní zpracování*



**Graf 10:** Vývoj  $\ddot{a}_{x,n1}$  pro ženy ve věku 60 let a TÚM 1,3 % v letech 2000–2014

*Zdroj: vlastní zpracování*



**Graf 11:** Vývoj  $\ddot{a}_{x,n}$  pro celkovou populaci ve věku 60 let a TÚM 1,3 % v letech 2000-2014

*Zdroj: vlastní zpracování*

Na první pohled je v předchozích třech grafech vidět, že hodnoty anuity počítané podle obou způsobů, mají přibližně stejnou tendenci růstu. Lze si pouze povšimnout toho, že anuita vypočítaná z ÚT nemá po celou dobu konstantní rostoucí trend jako křivka z predikovaných hodnot.

Pokud se podíváme přímo na hodnoty, jsou zde určité rozdíly mezi muži a ženami. Předhlútní anuita dočasného důchodu pro ženy je o více než 3 jednotky vyšší oproti mužům. Tyto odlišnosti jsou ale názorně ukázány na modelovém příkladu a v tabulce 2.

### Modelový příklad:

Uvažujme výšku očekávané roční penze 50 000 Kč. Pojištěnému je 60 let a chce, aby mu byla tato částka vyplácena následujících 30 let. Bereme v úvahu aktuální výši TÚM 1,3 %, kterou ČNB stanovila v Úředním sdělení ČNB ze dne 14. ledna 2015.[28]

**Tabulka 2:** Vývoj hodnot životní dočasné anuity v letech 2000-2017

Pohlaví	Hodnoty životní anuity v tisících Kč						
	2000	2004	2008	2010	2012	2014	2017
<b>Muži</b>	708,79	738,58	768,05	782,61	797,02	811,27	<b>832,28</b>
<b>Ženy</b>	867,19	891,59	915,04	926,39	937,49	948,31	<b>964,05</b>
<b>Celkově</b>	796,56	819,66	845,35	857,93	870,32	882,50	<b>900,36</b>

*Zdroj: vlastní zpracování*

Pro lepší ilustraci máme v tabulce 2 vývoj jednotkové roční doživotní anuity v letech 2000–2014 a následně i pro představu predikci pro aktuální rok 2017. Hodnoty se týkají pojištěnců ve věku 60 let s délkou výplat na 30 let. Můžeme zde vidět významnost rozdílu díky neustále zvyšující se pravděpodobnosti přežití ve vyšším věku. Očekávané navýšení současné hodnoty závazků na výplatu anuit je markantní i při malé procentní změně. Například od roku 2000 se v roce 2017 očekává nárůst o 17,4 % pro muže, o 11,17 % pro ženy a o 13,03 % pro celou populaci.

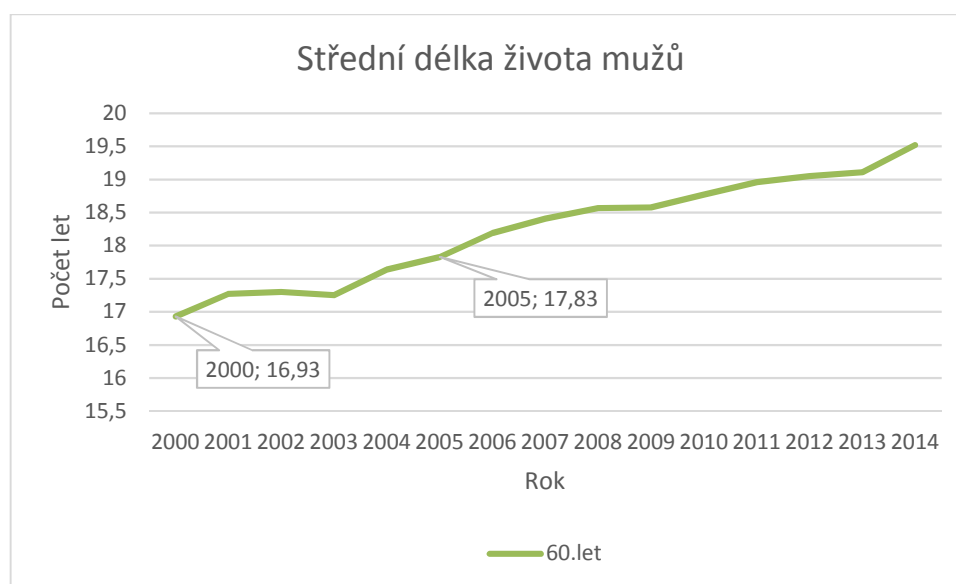
Jeden z reálných dopadů prodlužování střední délky života můžeme také vidět v grafech číslo 12, 13 a 14. Střední délka u mužů i žen, ve věku 60 let, se prodloužila z roku 2000 do roku 2014 o 2,59 let s tím rozdílem, že ženy se dožívají o 4,28 let vyššího věku (platí pro rok 2014).

Toto posouvání hranice úmrtnosti se značně projeví právě na zvyšující se výši finančního zatížení v rámci výplaty anuity. Z následujících hodnot lze vyčíslit finanční konsekvence z hlediska prodlužování střední délky života přibližně o jeden rok. Tyto dopady jsou procentuálně vyjádřené v následující tabulce:

**Tabulka 3:** Vyčíslení zvýšení anuity v závislosti na prodloužení délky života o 1 rok

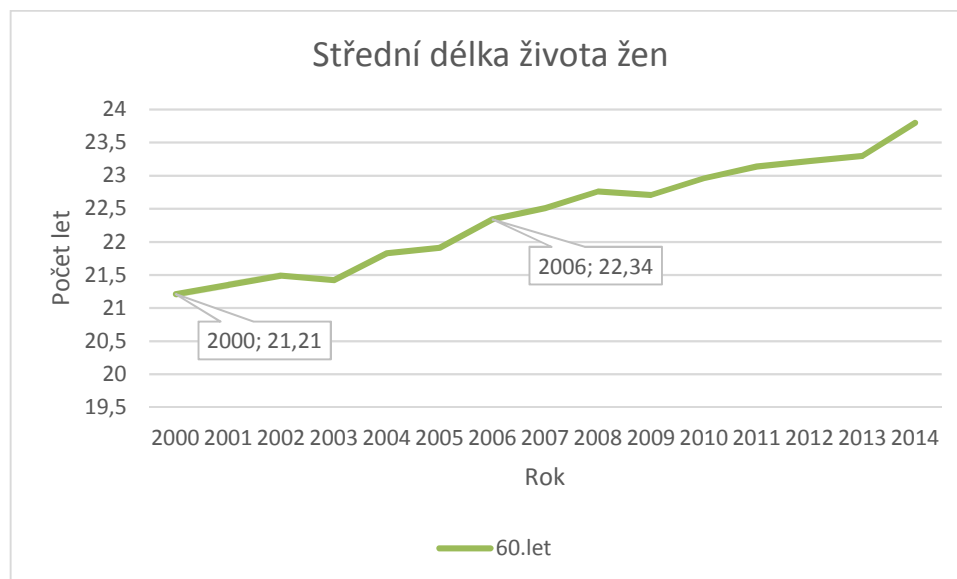
	Muži	Ženy	Celkově
Predikované hodnoty	5,25 %	4,18 %	4,52 %
Hodnoty z ÚT	4,78 %	4,25 %	5,15 %

Zdroj: vlastní zpracování



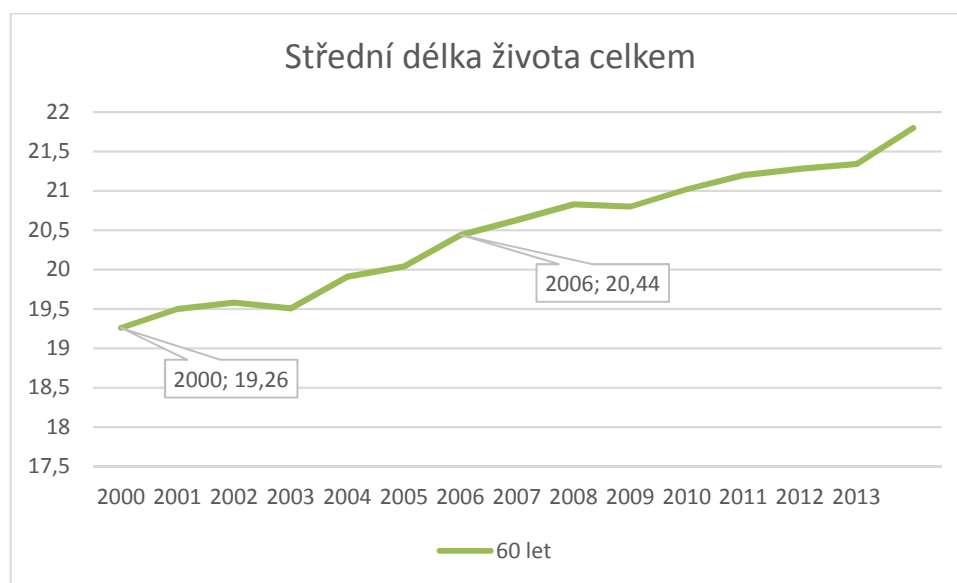
**Graf 12:** Střední délka života mužů ve věku 60 let

Zdroj: vlastní podle [5]



**Graf 13:** Vývoj střední délky života u žen ve věku 60 let

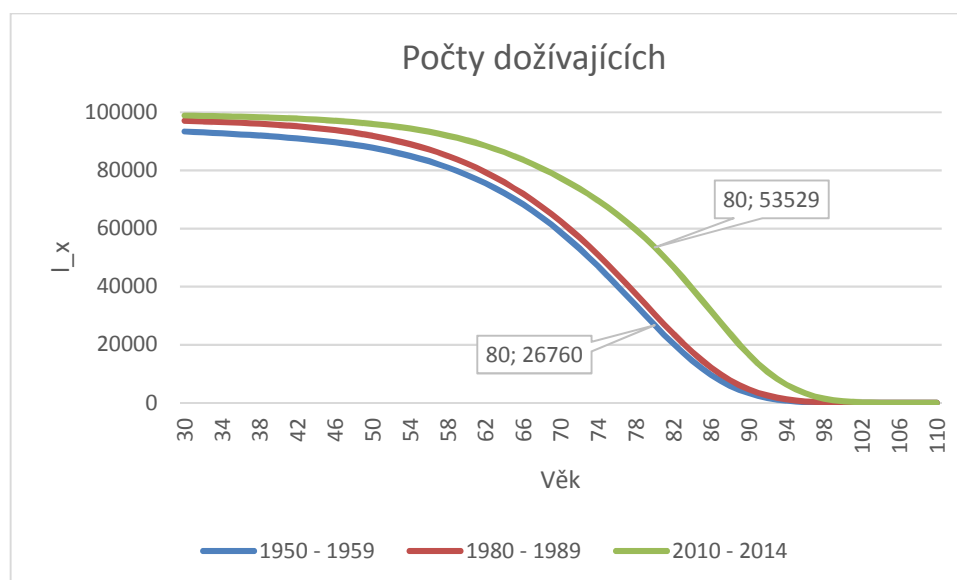
*Zdroj: vlastní podle [5]*



**Graf 14:** Vývoj střední délky života u celkové populace ve věku 60 let

*Zdroj: vlastní podle [5]*

Očekávaná délka života při narození se nejčastěji používá k diskusi o dlouhověkosti, ačkoliv je nejvíce relevantní pro riziko dlouhověkosti délka života v důchodovém věku. Jak je ale vidět na grafu 15, tvar křivky se změnil nejvíce ve vysokém věku, což znamená, že se ho dožívá čím dál více lidí. Proto je tento fakt brán jako nejvyšší hrozba populace, ať v ČR nebo i v ostatních zemích světa.



**Graf 15:** Rektangularizace dožívání v ročních intervalech

*Zdroj: vlastní zpracování podle [29]*

Tento graf ilustruje vývoj tabulkového počtu dožívajících se věku  $x$  let ze 100 000 živě narozených v jednotlivých ročních rozmezích. Od období 1950–1959 se počet dožívajících věku 80 let zvýšil o celých 100 % do nejaktuálnějšího časového intervalu 2010–2014.

I když se stále více lidí dožívá mimořádně vysokého věku, v rámci biologického hlediska existuje zároveň určitý strop možností lidského organismu. Hranicí je z hlediska pokroků ve výživě a medicíně v dnešní době považován věk kolem 120 let. Například nejstarší dosud žijící ženou světa byla Francouzka Jeanne Louise Calment, která žila 122 let a nejstarším mužem byl Jiroemon Kimura z Japonska, který se dožil 116 let [30].

Proto můžeme předpokládat, že se nebude do „nekonečna“ zvyšovat věk nejstarších občanů, ale bude nadále docházet k navyšování věkového průměru v celkovém počtu obyvatel.

## ZÁVĚR

V této práci jsme se dopodrobna věnovali pojmu dlouhověkost neboli stárnutí populace. Naším počátečním předpokladem bylo, že dochází k postupnému stárnutí populace a že z tohoto jevu plynou různá rizika. Samozřejmě nebylo mou ambicí rozepsat všechna potenciální rizika, ale zaměřili jsme se pouze na možnosti zajištění osob ve stáří, konkrétně na vývoj životních anuit.

V první části práce jsme se nejdříve věnovali porozumění základních pojmů z oblasti demografie a jejich případné využití pro stanovení a předpověď vývojových trendů populace. Dále jsme se podrobněji podívali na dostupná data o vývoji populace České republiky. Historický vývoj a studium faktorů, které výrazně změnily a ovlivnily populační křivky, byly důležitým aspektem pro naše budoucí analýzy. Následně jsme se věnovali specifickému nástroji pro popsání vývoje populace – úmrtnostním tabulkám, porozumění jednotlivým ukazatelům – ale také samotná konstrukce úmrtnostních tabulek byla klíčová pro správné použití dostupných dat v praktické části této diplomové práce. Poslední část teoretické části se věnuje všeobecně jednotlivým rizikům dlouhověkosti, jejím ekonomickým důsledkům a vývoji struktur obyvatelstva (včetně konkrétního porovnání dostupných dat pro roky 1950, 1980 a 2015).

Druhá část je věnována teorii modelování úmrtnosti, kde jsou dopodrobna popsány různé modely a přístupy. Velký prostor je věnován zejména stochastickým modelům. Zde jsme se zaměřili především na Lee-Carter model, který má jednu časově závislou proměnnou. Tato proměnná byla vypočítána pomocí příkazů v R jazyce a dále modelována na základě Box-Jenkinsonovy metodologie, díky níž byl projektován vývoj trendu úmrtnosti do budoucnosti.

V další části mé práce jsou podrobně rozepsány jednotlivé druhy hlavních anuit s podrobnějším výkladem námi vybrané životní anuity, která je vypočítána v praktické části

Poslední, praktická část byla zaměřena hlavně na modelování rizika dlouhověkosti pro konkrétní data. Cílem bylo analyzovat vývoj úmrtnosti zvlášť pro muže a ženy, ale také pro celkovou populaci ČR. Modelování pomocí Lee-Carter modelu nám dovolilo analyzovat vývoj  $\alpha_x, \beta_x, \kappa_t$  parametrů a jejich predikce. Pro časově závislý parametr byla použita Box-Jenkinsonova metodologie v programu Gretl, která posloužila k výpočtu predikovaných hodnot a dalším výpočetním procedurám.

Na základě těchto vypočítaných dat byla vyčíslena dočasná životní anuita pro ženy, muže a celkovou populaci ve věku 60 let. Tato data nám ukazují stále zvyšující se vývoj anuity mezi jednotlivými roky, která se například od roku 2000 do predikovaného roku 2017 zvýšila

o 13,03 % pro celkovou populaci ČR. To má za následek finanční zatížení pojišťoven a penzijních fondů. Tento fakt poukazuje i na to, že tyto instituce budou muset držet stále vyšší rezervy, což zapříčiňuje i neustále se zvyšující počet dožívajících se vyššího věku, což je nejvíce zřejmé z grafu rektangularizace dožívání obyvatelstva. Postupy a výpočty uvedené v praktické části této diplomové práce jsou případně aplikovatelné i na jiné země, které mají dostupná potřebná data.

Při pohledu na výsledky je viditelné, že riziko dlouhověkosti se nevyplatí podceňovat. Pokud se neobjeví závažné vlivy, které razantně ovlivní vývoj populačních křivek (jako byly v naší historii války nebo epidemie vážných nemocí), celá společnost musí být připravena na nelichotivý vývoj současného trendu. Zejména finanční instituce musí být připravené se speciální nabídkou pro zajištění populace ve stáří, samozřejmě správně vypočítanou tak, aby pomohla lidem se bezpečně finančně zajistit ve stáří, ale také vmodelovanou takovým způsobem, aby poskytování takovéto služby bylo finančně zajímavé a výhodné pro ně samotné. Jedinými institucemi, které tímto problémem profitují, jsou životní pojišťovny. Ty nabízejí životní produkty, které lidé platí déle v důsledku stárnutí populace a prodloužení délky života, a díky tomu jim přináší větší příliv peněžních prostředků.

## POUŽITÁ LITERATURA

- [1] BURCIN, Boris, Ludmila FIALOVÁ, Jitka RYCHTAŘÍKOVÁ a A KOL. *Demografická situace České republiky*. B.m.: Sociologické nakladatelství, 2010. ISBN 978-80-7419-024-7.
- [2] *Demografie* [online]. Dostupné z: [http://www.demografie.info/?cz\\_obecne=](http://www.demografie.info/?cz_obecne=)
- [3] *Porodnost* [online]. Dostupné z: [http://www.demografie.info/?cz\\_porodnost=](http://www.demografie.info/?cz_porodnost=)
- [4] *Úmrtnost* [online]. Dostupné z: [http://www.demografie.info/?cz\\_umrtnost=](http://www.demografie.info/?cz_umrtnost=)
- [5] *The human mortality database* [online]. Dostupné z: <http://www.mortality.org/cgi-bin/hmd/country.php?cntr=CZE&level=1>
- [6] *Potratovost* [online]. Dostupné z: [http://www.demografie.info/?cz\\_potratovost=](http://www.demografie.info/?cz_potratovost=)
- [7] *Pohyb obyvatelstva - 2016* [online]. B.m.: Český statistický úřad. 2017. Dostupné z: <https://www.czso.cz/csu/czso/cri/pohyb-obyvatelstva-rok-2016>
- [8] *Sňatečnost* [online]. Dostupné z: [http://www.demografie.info/?cz\\_snatecnost=](http://www.demografie.info/?cz_snatecnost=)
- [9] *Rozvodovost* [online]. Dostupné z: [http://www.demografie.info/?cz\\_rozvodovost=](http://www.demografie.info/?cz_rozvodovost=)
- [10] *Migrace* [online]. Dostupné z: [http://www.demografie.info/?cz\\_migrace=](http://www.demografie.info/?cz_migrace=)
- [11] KUČERA, Milan. *Populace České republiky 1918-1991*. Praha: Česká demografická společnost, 1994. ISBN 80-901674-7-0.
- [12] *Obyvatelstvo Česka* [online]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Obyvatelstvo\\_Česka](https://cs.wikipedia.org/wiki/Obyvatelstvo_Česka)
- [13] *Úmrtnostní tabulky - metodika* [online]. Dostupné z: <https://www.czso.cz/csu/czso/umrtnostni-tabulky-metodika>
- [14] CIPRA, T. *Pojistná matematika - teorie a praxe*. Praha: EKOPRESS, 2006. ISBN 80-86929-11-6.
- [15] *Populační prognóza ČR do r.2050* [online]. Dostupné z: <https://www.czso.cz/csu/czso/populacni-prognoza-cr-do-r2050-n-g9kah2fe2x>
- [16] *Stárnutí populace a jeho důsledky* [online]. Dostupné z: <https://www.i60.cz/clanek/detail/6424/starnuti-populace-a-jeho-dusledky>
- [17] *Stárnutí populace* [online]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/St%C3%A1rnutí%C3%AD\\_populace](https://cs.wikipedia.org/wiki/St%C3%A1rnutí%C3%AD_populace)
- [18] *The financial impact of longevity risk, Chapter 4*. B.m.: International Monetary Found. 2012
- [19] *Obyvatelstvo - roční časové řady* [online]. podzim 2017. Dostupné z: [https://www.czso.cz/csu/czso/obyvatelstvo\\_hu](https://www.czso.cz/csu/czso/obyvatelstvo_hu)



- [20] SPEDICATO, Gian Paolo. *Mortality projection with demography and lifecontingencies packages*. B.m.: Catholic University of Milan
- [21] PITACCO, E., DENUIT, M., HABERMAN, S., OLIVIERI, A.M. *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*. B.m.: Oxford University Press, nedatováno. ISBN 978-0-19-954727-2.
- [22] RICHARDS, S. J. a I. D. CURRIE. *Longevity risk and annuity pricing with the Lee-Carter model*. B.m.: Faculty of Actuaries. 2009
- [23] *Introduction to ARIMA* [online]. Dostupné z: <https://people.duke.edu/~rnau/411arim.htm#les>
- [24] CIPRA, T. *Finanční ekonometrie*. B.m.: EKOPRESS, 2008. ISBN 978-80-86929-43-9.
- [25] CIPRA, T. *Penze: kvantitativní přístup*. B.m.: EKOPRESS, 2012. ISBN 978-80-86929-87-3.
- [26] ANTOLIN, P. *Longevity risk and private pension*. B.m.: OECD. 2007
- [27] Live long and prosper. *The Economist* [online]. 2010. Dostupné z: <https://www.economist.com/news/books-and-arts/21699886-how-plan-long-long-life-live-long-and-prosper>
- [28] *Úřední sdělení České národní banky* [online]. jaro 2015. Dostupné z: [http://www.cnb.cz/cs/legislativa/vestnik/2015/download/vestnik\\_2015\\_02\\_20215560.pdf](http://www.cnb.cz/cs/legislativa/vestnik/2015/download/vestnik_2015_02_20215560.pdf)
- [29] *ČSÚ, věková struktura* [online]. Dostupné z: <https://www.czso.cz/staticke/animgraf/cz/index.html?lang=cz>
- [30] *Nejstarší člověk* [online]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Nejstarší\\_člověk](https://cs.wikipedia.org/wiki/Nejstarší_člověk)

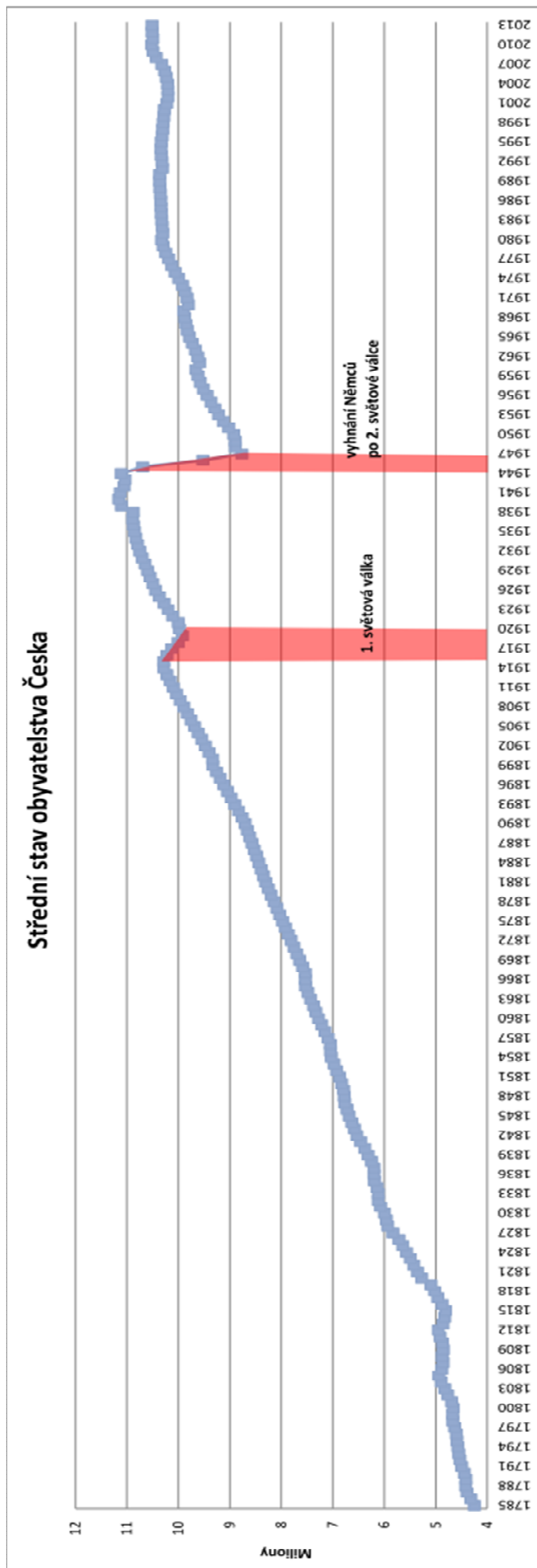
## SEZNAM PŘÍLOH

**Příloha A:** Historický vývoj středního stavu obyvatelstva ČR v letech 1785–2013

**Příloha B:** Predikované hodnoty parametru  $\kappa_t$  pomocí zvolených modelů

**Příloha C:** Predikované hodnoty pravděpodobnosti přežití pro vybrané věkové skupiny mužů, žen a celé populace v letech 1950-2019

# Příloha A



## Příloha B

Rok	Predikce parametru kappa		
	K(t)_ženy	K(t)_muži	K(t)_celkem
2000	-10,5303	-8,3274	-8,2846
2001	-11,2934	-9,1097	-8,6885
2002	-12,0565	-9,8920	-8,8316
2003	-12,8196	-10,6743	-9,1361
2004	-13,5827	-11,4566	-9,3407
2005	-14,3458	-12,2390	-9,6071
2006	-15,1089	-13,0213	-9,8352
2007	-15,8719	-13,8036	-10,0871
2008	-16,6350	-14,5859	-10,3243
2009	-17,3981	-15,3683	-10,5705
2010	-18,1612	-16,1506	-10,8112
2011	-18,9243	-16,9329	-11,0553
2012	-19,6874	-17,7152	-11,2972
2013	-20,4505	-18,4976	-11,5405
2014	-21,2136	-19,2799	-11,7830
2015	-21,9767	-20,0622	-12,0260
2016	-22,7398	-20,8445	-12,2687
2017	-23,5029	-21,6269	-12,5115
2018	-24,2659	-22,4092	-12,7543
2019	-25,0290	-23,1915	-12,9971

## Příloha C

Rok	p_x muži			p_x ženy			p_x celá populace		
	60.let	75.let	90.let	60.let	75.let	90.let	60.let	75.let	90.let
1950	0,9761	0,9131	0,7243	0,9865	0,9264	0,7291	0,9815	0,9214	0,7297
1951	0,9759	0,9121	0,7226	0,9865	0,9262	0,7288	0,9814	0,9209	0,7287
1952	0,9764	0,9150	0,7272	0,9869	0,9289	0,7330	0,9818	0,9236	0,7335
1953	0,9754	0,9096	0,7187	0,9867	0,9273	0,7306	0,9813	0,9203	0,7279
1954	0,9750	0,9074	0,7154	0,9864	0,9258	0,7281	0,9810	0,9185	0,7248
1955	0,9766	0,9161	0,7290	0,9877	0,9335	0,7404	0,9824	0,9268	0,7393
1956	0,9764	0,9145	0,7265	0,9880	0,9354	0,7436	0,9824	0,9273	0,7401
1957	0,9757	0,9108	0,7206	0,9873	0,9314	0,7370	0,9818	0,9235	0,7333
1958	0,9765	0,9155	0,7280	0,9881	0,9364	0,7453	0,9826	0,9284	0,7421
1959	0,9759	0,9123	0,7230	0,9880	0,9354	0,7436	0,9823	0,9265	0,7388
1960	0,9769	0,9173	0,7310	0,9887	0,9399	0,7513	0,9831	0,9313	0,7474
1961	0,9768	0,9170	0,7305	0,9888	0,9404	0,7522	0,9831	0,9314	0,7478
1962	0,9752	0,9084	0,7170	0,9879	0,9351	0,7430	0,9820	0,9248	0,7356
1963	0,9764	0,9147	0,7267	0,9888	0,9402	0,7519	0,9830	0,9305	0,7460
1964	0,9762	0,9138	0,7254	0,9888	0,9406	0,7526	0,9830	0,9305	0,7460
1965	0,9762	0,9139	0,7254	0,9888	0,9405	0,7524	0,9830	0,9304	0,7459
1966	0,9762	0,9135	0,7250	0,9890	0,9418	0,7548	0,9831	0,9311	0,7471
1967	0,9759	0,9120	0,7226	0,9890	0,9415	0,7543	0,9830	0,9304	0,7458
1968	0,9753	0,9087	0,7173	0,9886	0,9390	0,7498	0,9825	0,9274	0,7404
1969	0,9744	0,9040	0,7102	0,9884	0,9381	0,7482	0,9821	0,9252	0,7364
1970	0,9743	0,9036	0,7096	0,9882	0,9366	0,7457	0,9819	0,9242	0,7345
1971	0,9745	0,9047	0,7113	0,9885	0,9388	0,7495	0,9822	0,9260	0,7377
1972	0,9755	0,9098	0,7191	0,9889	0,9410	0,7533	0,9828	0,9293	0,7438
1973	0,9748	0,9060	0,7132	0,9886	0,9395	0,7506	0,9824	0,9268	0,7392
1974	0,9747	0,9055	0,7125	0,9886	0,9390	0,7498	0,9823	0,9263	0,7384
1975	0,9752	0,9084	0,7170	0,9890	0,9414	0,7539	0,9827	0,9289	0,7430
1976	0,9752	0,9083	0,7168	0,9891	0,9420	0,7551	0,9828	0,9293	0,7437
1977	0,9753	0,9090	0,7179	0,9891	0,9420	0,7551	0,9828	0,9295	0,7442
1978	0,9754	0,9096	0,7188	0,9891	0,9419	0,7549	0,9829	0,9298	0,7446
1979	0,9754	0,9094	0,7185	0,9891	0,9424	0,7557	0,9829	0,9300	0,7450
1980	0,9746	0,9049	0,7116	0,9885	0,9383	0,7486	0,9822	0,9257	0,7373
1981	0,9752	0,9083	0,7167	0,9890	0,9416	0,7544	0,9827	0,9291	0,7434
1982	0,9751	0,9080	0,7163	0,9890	0,9416	0,7544	0,9827	0,9290	0,7433
1983	0,9749	0,9065	0,7140	0,9887	0,9400	0,7516	0,9825	0,9275	0,7404
1984	0,9752	0,9085	0,7170	0,9890	0,9416	0,7543	0,9828	0,9292	0,7436
1985	0,9752	0,9084	0,7170	0,9891	0,9423	0,7556	0,9828	0,9296	0,7444
1986	0,9752	0,9084	0,7169	0,9891	0,9420	0,7551	0,9828	0,9295	0,7441
1987	0,9759	0,9123	0,7229	0,9896	0,9453	0,7611	0,9834	0,9330	0,7506
1988	0,9762	0,9137	0,7253	0,9898	0,9466	0,7636	0,9836	0,9344	0,7533
1989	0,9760	0,9129	0,7239	0,9897	0,9459	0,7622	0,9835	0,9336	0,7518
1990	0,9758	0,9115	0,7218	0,9899	0,9469	0,7641	0,9835	0,9338	0,7522
1991	0,9766	0,9158	0,7286	0,9903	0,9494	0,7689	0,9841	0,9369	0,7582
1992	0,9772	0,9189	0,7337	0,9907	0,9520	0,7740	0,9846	0,9397	0,7637
1993	0,9779	0,9226	0,7399	0,9907	0,9520	0,7740	0,9848	0,9410	0,7663
1994	0,9783	0,9245	0,7431	0,9908	0,9526	0,7752	0,9850	0,9419	0,7683
1995	0,9782	0,9241	0,7424	0,9909	0,9531	0,7763	0,9850	0,9421	0,7687
1996	0,9790	0,9282	0,7495	0,9914	0,9558	0,7818	0,9856	0,9453	0,7753
1997	0,9793	0,9296	0,7520	0,9915	0,9567	0,7838	0,9858	0,9464	0,7775
1998	0,9798	0,9321	0,7564	0,9919	0,9586	0,7879	0,9861	0,9484	0,7819
1999	0,9801	0,9336	0,7592	0,9919	0,9588	0,7884	0,9863	0,9491	0,7833
2000	0,9804	0,9354	0,7625	0,9921	0,9601	0,7914	0,9862	0,9488	0,7827
2001	0,9808	0,9372	0,7658	0,9923	0,9612	0,7939	0,9863	0,9495	0,7844
2002	0,9812	0,9389	0,7691	0,9925	0,9623	0,7963	0,9864	0,9498	0,7849
2003	0,9815	0,9405	0,7723	0,9927	0,9633	0,7987	0,9865	0,9503	0,7861
2004	0,9819	0,9422	0,7755	0,9929	0,9643	0,8011	0,9866	0,9507	0,7870
2005	0,9822	0,9438	0,7787	0,9930	0,9653	0,8034	0,9866	0,9512	0,7880
2006	0,9825	0,9453	0,7818	0,9932	0,9662	0,8057	0,9867	0,9516	0,7889
2007	0,9828	0,9468	0,7849	0,9934	0,9671	0,8081	0,9868	0,9520	0,7899
2008	0,9832	0,9483	0,7879	0,9935	0,9680	0,8103	0,9869	0,9524	0,7908
2009	0,9835	0,9497	0,7909	0,9937	0,9689	0,8126	0,9870	0,9528	0,7918
2010	0,9838	0,9511	0,7939	0,9938	0,9697	0,8148	0,9870	0,9532	0,7927
2011	0,9841	0,9524	0,7968	0,9940	0,9705	0,8170	0,9871	0,9537	0,7937
2012	0,9844	0,9537	0,7997	0,9941	0,9713	0,8192	0,9872	0,9541	0,7946
2013	0,9847	0,9550	0,8026	0,9942	0,9721	0,8214	0,9873	0,9545	0,7955
2014	0,9849	0,9562	0,8054	0,9944	0,9729	0,8235	0,9873	0,9549	0,7965
2015	0,9852	0,9574	0,8082	0,9945	0,9736	0,8256	0,9874	0,9553	0,7974
2016	0,9855	0,9586	0,8109	0,9946	0,9743	0,8277	0,9875	0,9556	0,7983
2017	0,9858	0,9598	0,8137	0,9948	0,9750	0,8298	0,9876	0,9560	0,7992
2018	0,9860	0,9609	0,8163	0,9949	0,9757	0,8319	0,9876	0,9564	0,8001
2019	0,9863	0,9619	0,8190	0,9950	0,9764	0,8339	0,9877	0,9568	0,8010