

**Univerzita Pardubice  
Fakulta ekonomicko-správní**

**Teorie chaosu v ekonomických modelech**

**Jindřich Röhrich**

**Bakalářská práce  
2017**

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Jindřich Röhrich**  
Osobní číslo: **E14042**  
Studijní program: **B6209 Systémové inženýrství a informatika**  
Studijní obor: **Management finančních rizik**  
Název tématu: **Teorie chaosu v ekonomických modelech**  
Zadávací katedra: **Ústav matematiky a kvantitativních metod**

### Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Cílem práce je popsat a kriticky zhodnotit možnosti využití teorie chaosu v ekonomických aplikacích a její úspěšnost při odhadování krátkodobého i dlouhodobého vývoje.

Osnova:

- Základní poznatky teorie chaosu, její vznik, vývoj a možnosti aplikace v různých vědních odvětvích.
- Nelineární dynamické systémy s chaotickým chováním v ekonomii.
- Příklady využití teorie chaosu při popisu ekonomických jevů.

Rozsah grafických prací: –  
Rozsah pracovní zprávy: cca 35 stran  
Forma zpracování bakalářské práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

- ÇAMBEL, Ali Bulent. Applied chaos theory: a paradigm for complexity. Boston: Academic Press, 1993. ISBN 0-12-155940-8.  
DOSTÁL, P., RAIS, K., SOJKA, Z.: Pokročilé metody manažerského rozhodování: konkrétní příklady využití metod v praxi. Grada, 2005, 166 s. ISBN 80-247-1338-1.  
GLEICK, James, Jaroslav SEDLÁŘ a Martin NĚMEC. Chaos: vznik nové vědy. Brno: Ando Publishing, 1996. Nová věda. ISBN 80-86047-04-0.  
MEDIO, A., GALLO, G.. Chaotic Dynamics Theory and Applications to Economics. Cambridge: Cambridge University Press, 1993, 364 s. ISBN 0-521-48461-8.  
PETERS, E. Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility, 2nd Edition. New York: Wiley, 1996, 288 s. ISBN 978-0-471-13938-6.

Vedoucí bakalářské práce:

  
Mgr. Libor Koudela, Ph.D.

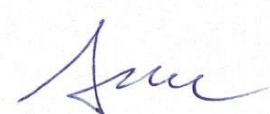
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání bakalářské práce: 4. září 2016

Termín odevzdání bakalářské práce: 28. dubna 2017

  
doc. Ing. Romana Provozničková, Ph.D.  
děkanka

L.S.

  
doc. RNDr. Bohdan Linda, CSc.  
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 4. září 2016

## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji:

Tuto práci vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako Školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 9/2012, bude práce zveřejněna v Univerzitní knihovně a prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 28. 4. 2017

Jindřich Röhrich

## **PODĚKOVÁNÍ:**

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu práce panu Mgr. Liborovi Koudelovi, Ph.D. za veškerou pomoc a ochotu při tvorbě této práce a za poskytnutí materiálů. Dále bych chtěl poděkovat i dalším konzultantům z fakulty ekonomicko-správní za rady a připomínky.

## **ANOTACE**

*Cílem práce je seznámit čtenáře se základy teorie chaosu, popsat a kriticky zhodnotit její použití v ekonomických modelech. Teorie chaosu se nepoužívá pouze v ekonomii, ale zasahuje i do dalších vědních oborů, například do meteorologie, kosmologie či biologie. Jedná se o jeden z největších objevů 20. století. Závěrem práce je zhodnocení teorie chaosu a výsledků jejího použití.*

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

*teorie chaosu, fraktální geometrie, dynamické systémy, nelineární systémy*

## **TITLE**

*Chaos Theory and Its Applications in Economics*

## **ANNOTATION**

*The aim of the thesis is to acquaint readers with the foundation of Chaos Theory and subsequently describe and critically analyse its application on economic models. Not only is Chaos Theory used in economics but it also related to other scientific disciplines such as meteorology, cosmology and biology. It is one of the biggest discoveries of the 20th century. Finally, the thesis evaluates Chaos Theory and the results of its application.*

## **KEYWORDS**

*Chaos Theory, fractals, dynamics systems, non-linear systems*

# OBSAH

ÚVOD.....	10
1. VZNIK A VÝVOJ .....	11
1.1. LORENZŮV PŘÍNOS .....	11
1.2. BENOIT MANDELBROT .....	18
1.3. PODIVNÉ ATRAKTORY .....	24
1.3.1. Hénonův atraktor .....	24
1.3.2. Rösslerův atraktor.....	26
2. ZÁKLADNÍ POZNATKY TEORIE CHAOSU .....	27
2.1. POJEM CHAOS .....	27
2.2. FRAKTÁLNÍ GEOMETRIE .....	29
2.3. HURSTŮV EXPONENT .....	32
2.4. R/S ANALÝZA .....	35
2.5. LJAPUNOVŮV EXPONENT.....	36
2.6. ELLIOTTOVY VLNY .....	37
3. NELINEÁRNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY.....	41
3.1. SYSTÉMY .....	41
3.2. DYNAMICKÝ NELINEÁRNÍ SYSTÉM.....	42
3.3. CHAOS V EKONOMII .....	43
4. PŘÍKLADY VYUŽITÍ TEORIE CHAOSU PŘI POPISU EKONOMICKÝCH JEVŮ .....	44
4.1. KAPITÁLOVÉ TRHY.....	44
4.2. KURZ.....	50
ZÁVĚR.....	53
POUŽITÁ LITERATURA .....	55

## SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Lorenzův graf počasí.....	12
Obrázek 2: Lorenzovo vodní kolo.....	13
Obrázek 3: Lorenzův atraktor.....	14
Obrázek 4: Motýlí křídla.....	15
Obrázek 5: Přiblížení k levé části Lorenzova atraktoru I.....	15
Obrázek 6: Přiblížení k levé části Lorenzova atraktoru II.....	16
Obrázek 7: Přiblížení k levé části Lorenzova atraktoru III.....	16
Obrázek 8: Přiblížení k levé části Lorenzova atraktoru IV.....	16
Obrázek 9: Kochova křivka.....	20
Obrázek 10: Mandelbrotova množina 1.....	22
Obrázek 11: Mandelbrotova množina 2.....	23
Obrázek 12: Hénonův atraktor.....	25
Obrázek 13: Rösslerův atraktor.....	26
Obrázek 14: Změny systému v čase.....	27
Obrázek 15: Bifurkační diagram.....	28
Obrázek 16: Soběpodobnost euklidovských objektů.....	30
Obrázek 17: Soběpodobnost fraktálních objektů.....	31
Obrázek 18: Odhad Hurstova exponentu.....	36
Obrázek 19: Základní Elliottova vlna, a – vzestup, b – sestup.....	38
Obrázek 20: Impulzní vlna rozšířená na první, třetí a páté podvlně.....	38
Obrázek 21: Diagonální pátá vlna.....	39
Obrázek 22: Neúspěšná pátá vlna.....	39
Obrázek 23: Korekční vlna cik-cak, rovina a trojúhelník.....	40
Obrázek 24: Průběh ceny akcie v roce 2015.....	44
Obrázek 25: Průběh ceny akcie v roce 2016.....	45
Obrázek 26: Výpočet Hurstova exponentu pro rok 2015.....	45
Obrázek 27: Graf R/S analýzy pro rok 2015.....	46
Obrázek 28: Výpočet Hurstova exponentu pro rok 2016.....	47
Obrázek 29: Graf R/S analýzy pro rok 2016.....	47
Obrázek 30: Průběh ceny akcie v roce 2017.....	48
Obrázek 31: Výpočet Hurstova exponentu v Excelu.....	49
Obrázek 32: Vývoj kurzu USD/CZK 2015 – 1. pol.....	50
Obrázek 33: Vývoj kurzu USD/CZK 2015 – 2. pol.....	51
Obrázek 34: Zobrazení průměrného kurzu 2015 – 1. pol.....	51
Obrázek 35: Zobrazení průměrného kurzu 2015 – 2. pol.....	52



## **SEZNAM TABULEK**

Tabulka 1: R/S analýza.....	35
-----------------------------	----

## ÚVOD

Teorie chaosu a fraktální geometrie jsou poměrně novým objevem. Můžeme tvrdit, že chaos je jedním z největších objevů 20. století. Práce je rozdělena do tří částí.

V první části je popsán vznik a vývoj teorie chaosu. Jsou zde zaznamenány některé důležité objevy týkající se právě teorie chaosu, ale i matematického zobrazení světa jako celku. Dále je čtenáři zjednodušeně přiblížena teorie chaosu, popis jejího vzniku a vývoje v době, kdy vysoce uznávaní matematikové neměli k dispozici dokonalé výpočetní stroje, jaké máme dnes. A tak i z našeho pohledu jednoduché přírodní jevy byly pro ně předmětem bádání. V této části je také popsána využitelnost teorie chaosu a jak zasahuje do velmi důležitých vědních oborů, jako je například chirurgie či meteorologie.

V druhé části jsou shrnuty základní poznatky o teorii chaosu a fraktální geometrii. Jsou zde popsány výpočty a vzorce, které jsou nejvíce používány právě při odhadu časových řad s chaotickým chováním.

Třetí kapitola obsahuje nelineární dynamické systémy a zvlášť ty, které se vyskytují v ekonomii. Jsou zde vysvětlené nelineární dynamické systémy a také příklady takových systémů. Co to nelineární systém vlastně je? Lze předvídat či vypočítat chování takových systémů?

Ve čtvrté kapitole se budeme zabývat použitím teorie chaosu v kapitálových trzích a u vývoje kurzu USD/CZK. Použijeme základní poznatky teorie chaosu k predikci dalšího vývoje, a zjistíme, zda dokážeme spolehlivě ovládnout chaos.

Závěr práce obsahuje zhodnocení a vyjádření k celkové použitelnosti či věrohodnosti teorie chaosu v ekonomických modelech.

# 1. VZNIK A VÝVOJ

Chaos chápeme mnohdy jako neuspořádanost či nepravidelnost, nebo také jako zmatek. V podstatě si představujeme nepořádek bez jakéhokoliv řádu.

Definice chaosu je stále nedostatečná, nicméně přijmeme definici navrženou na konferenci Royal Society v Londýně v roce 1986: „Stochastické chování vyskytující se v deterministickém systému“. [1, s. 4]

Můžeme tedy říct, že chaos se vyskytuje tehdy, když se deterministický systém chová zdánlivě náhodně. Je to jakýsi stav s vysokou neuspořádaností. Můžeme ovšem i v chaosu objevit jistý řád nebo dokonce předpovědět, co se stane s takovým systémem v budoucnosti?

Skutečnost, že jednoduché, nelineární, málo rozměrné systémy mohou vykazovat velmi komplikované a na první pohled náhodné chování, byla známa již před několika stoletími. Nicméně se nikdo rozvojem deterministických a zároveň stochastických systémů nezabýval, protože soubor diferenciálních rovnic sloužící obvykle k jejich popisu byl obtížně řešitelný.

## 1.1. Lorenzův přínos

Vývoj v podstatě začal v roce 1959, kdy Edward Lorenz pracoval na výpočtu atmosférických turbulencí. Edward Lorenz byl meteorolog, ačkoliv srdcem byl spíše matematik. Během druhé světové války pracoval pro armádní letectvo a předpovídal počasí. Předpověď počasí je založena na souboru hodně složitých, diferenciálních rovnic. Vzhledem k náročnosti výpočtů bylo zapotřebí použít moderní výpočetní techniku. V roce 1962 Barry Saltzman se zabýval prouděním kapalin, resp. stoupáním horkého plynu nebo kapaliny známým pod názvem konvekce. Povedlo se mu sestavit rovnice pro jednoduchý typ proudění. Saltzman uhodl přibližný tvar řešení těchto rovnic a zpozoroval, že řešení vypadají, jako by náhodně fluktovala. Lorenze to zaujalo a všiml si, že v tomto jevu jsou nejdůležitější tři rovnice: [2]

$$\frac{dx}{dt} = -10x + 10y \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = 28x - y - xz \quad (2)$$

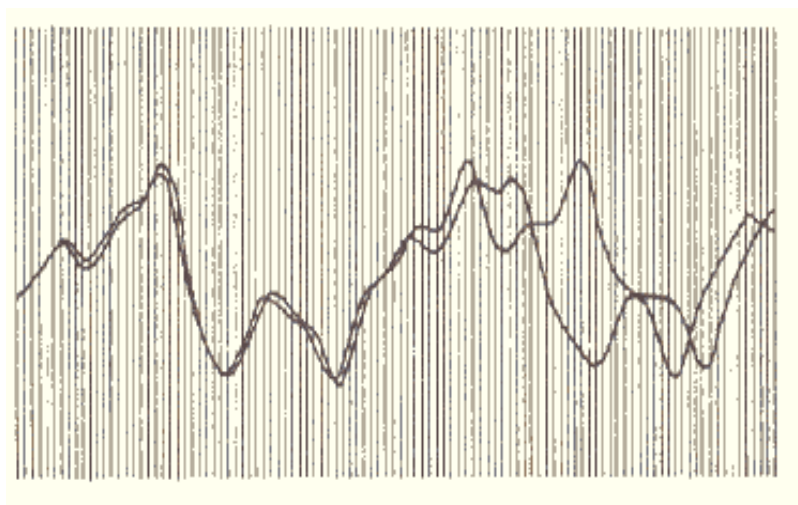
$$\frac{dz}{dt} = -\frac{8}{3}z + xy \quad (3)$$

Lorenz pomocí svého primitivního počítače meteorologický model maximálně zjednodušil. Jenže řádek po řádku se vítr a teploty na Lorenzových výpisech začínaly chovat podobně jako

v reálném počasí. Odpovídaly jeho pěstované intuici o počasí, díky níž vytušil, že se počasí opakuje. Po čase se začaly zobrazovat známé vzorce. Zjistil, že když je klesající čára rovná, bez výkyvu, příště se objeví výkyvy dva. Napadlo ho, že by se toto pravidlo dalo v předpovědích použít, ale opakování nebylo nikdy přesné. Byly tu určité vzorce, ale nepravidelné.

Aby bylo možné vzorce prohlížet, vytvořil si Lorenz primitivní způsob zobrazení. Místo tisku řádku číslic nechal počítač tisknout určitý počet mezer, za nimiž následovalo písmeno  $\alpha$ . Rozhodl se prozkoumat jednu sekvenci podrobněji. Nechal počítač tisknout data s kratšími intervaly. Zkrátil čísla na 3 desetinná místa, aby tak zkrátil i celý výpočet. Myslel si, že desetitisícina je tak nepodstatná, že se o další číslice nemusí starat.

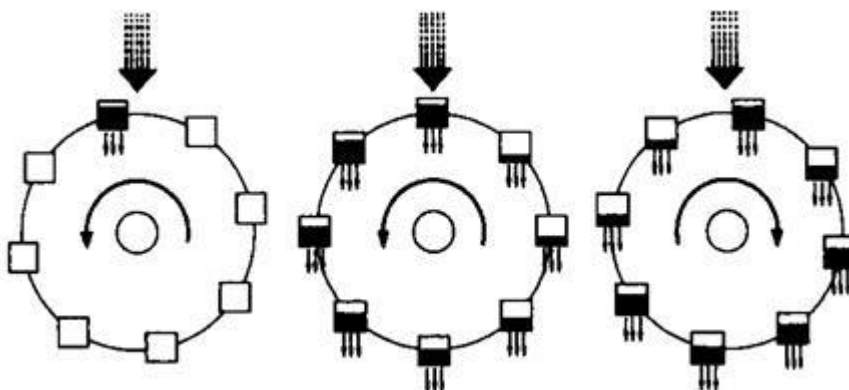
Po prozkoumání výsledků zjistil, že velmi malá změna na počátku (zaokrouhlení na desetitisíciny), způsobí velké rozdíly. Výpočet byl spuštěn téměř se stejnými podmínkami, jen s několika málo chybami. S časem tyto chyby narostly. Zhruba každé čtyři dny se zdvojnásobily a za dva měsíce se zdvojnásobily zhruba 15krát a dvě řešení vypadala úplně odlišně. Po proložení grafů je zřetelně vidět, že se předpovědi pomalu začínají lišit až se kompletně změní (viz obrázek 1). [2, s. 17-23]



**Obrázek 1: Lorenzův graf počasí**

*Zdroj: [3]*

Prvním slavným chaotickým systémem je tzv. Lorenzovo vodní kolo. Jedná se o jednoduché zařízení, a přitom je schopno překvapivě komplikovaného chování.



**Obrázek 2: Lorenzovo vodní kolo**

*Zdroj: [4]*

Jak vidíme na obrázku 2, shora proudí rovnoměrně voda, která naplňuje nádoby. Nádoby pomalu ztrácí vodu. Pokud je proudění velmi pomalé, nádoba se nenaplní a kolo se neroztočí. Pokud je proudění vody rychlejší, hmotnost první nádoby uvede kolo do pohybu (obrázek 2 první zleva). Voda rovnoměrně naplňuje nádoby a kolo se točí rovnoměrně stejným směrem. Nyní ještě více zrychlíme proud a otáčení se může stát chaotickým. Nádoby mají málo času, aby se naplnily. Jestliže se kolo točí opravdu rychle, nádoby mohou začít stoupat na druhou stranu dříve než se stačí vyprázdnit. Nádoby na druhé straně mohou otáčení zpomalit a poté obrátit jeho směr. Lorenz tak zjistil, že z dlouhodobého hlediska se smysl otáčení může změnit mnohokrát, otáčení se nikdy neustálí v rovnoměrném tempu a nikdy se neopakuje předpověditelným způsobem.

Pohyb tohoto systému dokonale popisují tři rovnice o třech proměnných. Lorenz nechal počítačem vytisknout hodnoty těchto proměnných, které se neustále měnily. Rozhodl se z dat vytvořit obrazec, a tak proměnné použil jako souřadnice polohy bodu v trojrozměrném prostoru. Body se změnilly v dráhu představující chování systému. Mapa zobrazila něco jako nekonečnou složitost. Zůstávala v mezích, nevystupovala ze stránky a nikdy se neopakovala. Vytvořil dvojité spirály v trojrozměrném prostoru, která připomíná motýlí křídla. Aniž by si to Lorenz uvědomil, zobrazil první podivný atraktor. [2][5]

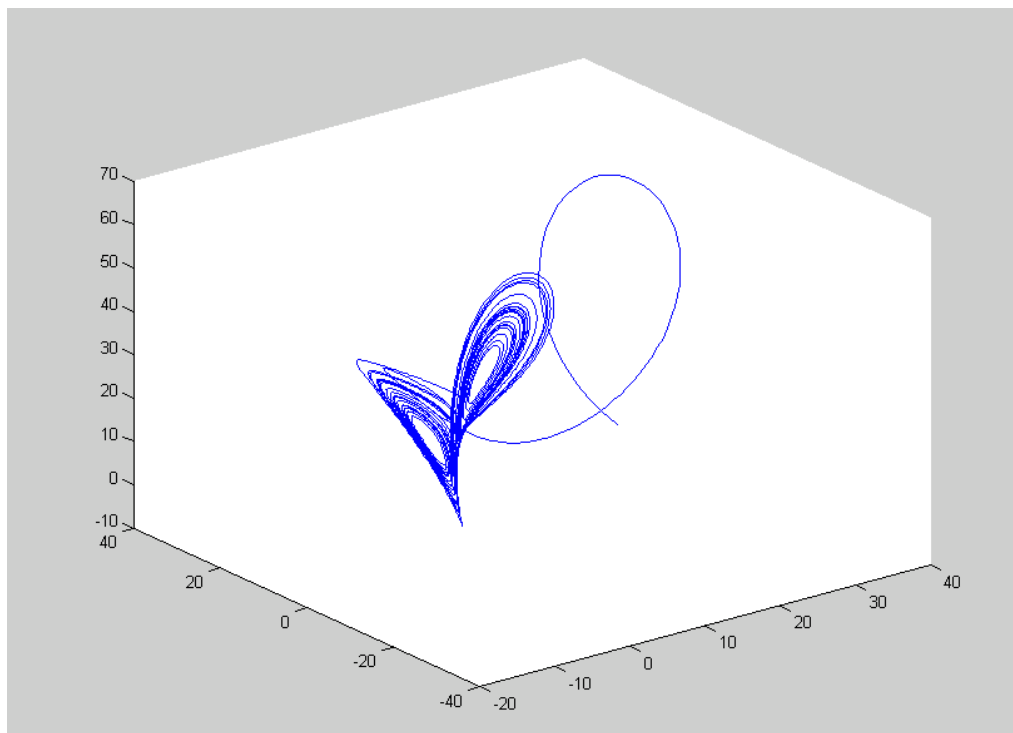
Pomocí softwaru Matlab si můžeme takový atraktor vymodelovat. Pro vymodelování Lorenzova atraktoru použijí tento kód:

```
x(1)=rand*30+5;      /Počáteční podmínky
y(1)=rand*35-3;
z(1)=rand*40-5;

for t=2:9999         /Cyklus výpočtu
    x(t)=x(t-1)+0.003*10*(y(t-1)-x(t-1));
    y(t)=y(t-1)+0.003*(x(t-1)*(28-z(t-1))-y(t-1));
    z(t)=z(t-1)+0.003*(x(t-1)*y(t-1)-8/3*z(t-1));
end

plot3(x,y,z);      /Vykreslí graf [6]
```

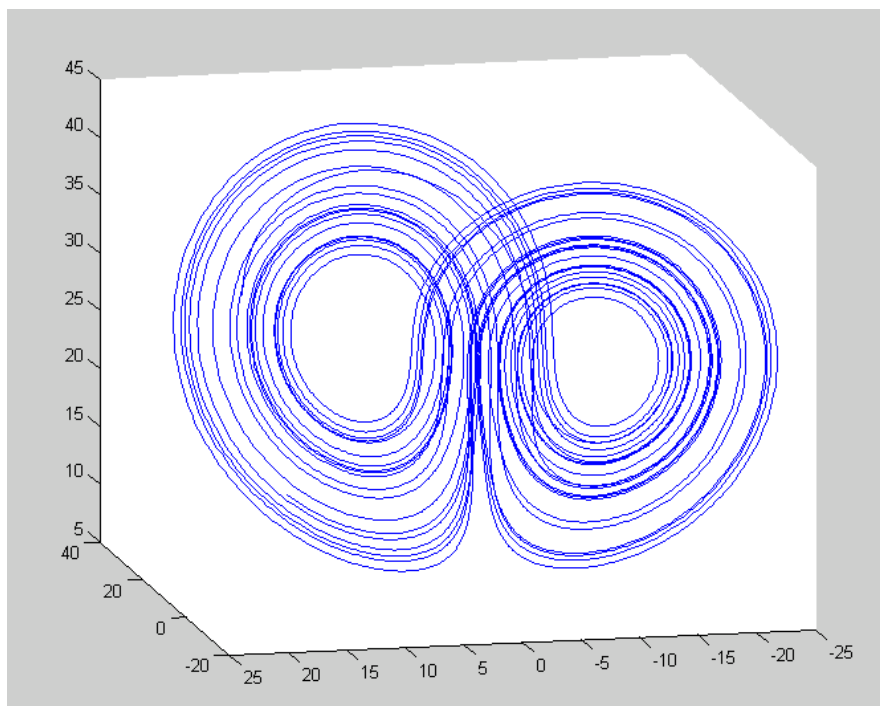
Dostaneme tento graf.



**Obrázek 3: Lorenzův atraktor**

*Zdroj: vlastní zpracování*

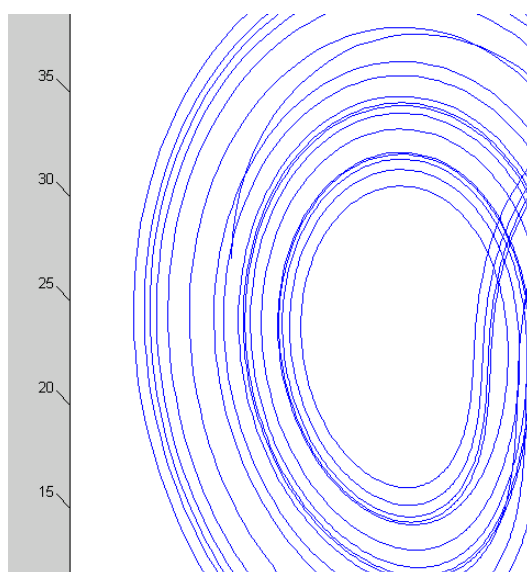
Po natočení graf vypadá jako motýlí křídla.



**Obrázek 4: Motýlí křídla**

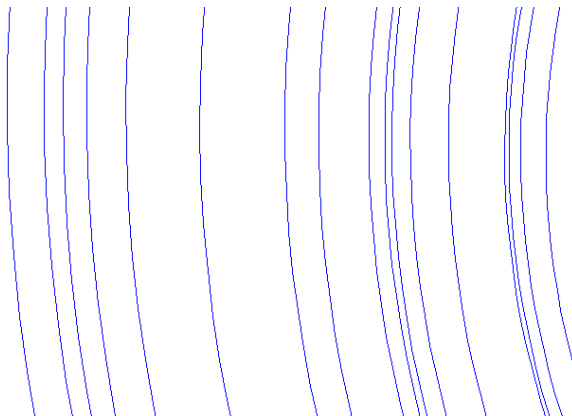
*Zdroj: vlastní zpracování*

Z obrázku to jasně nevyplývá, nicméně pokud bychom se co nejvíce přiblížili k oněm křivkám, uviděli bychom, že žádná z nich se neprotíná. Pokud se pokusíme maximálně přiblížit k těmto křivkám v softwaru Matlab, uvidíme síť mnoha přímek, které vypadají jako by se protínaly, ale není tomu tak. Nyní se postupně přiblížujeme k levé části:



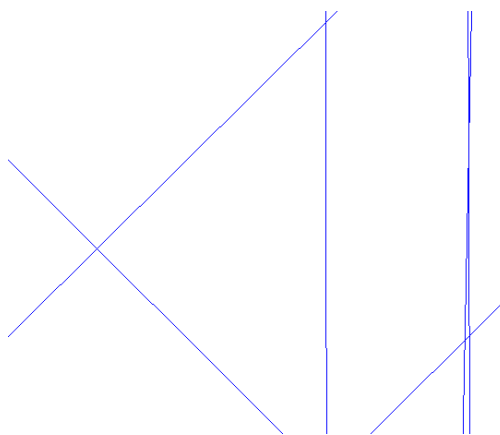
**Obrázek 5: Přiblížení k levé části Lorenzova atraktoru I**

*Zdroj: vlastní zpracování*



**Obrázek 6: Přiblížení k levé části Lorenzova atraktoru II**

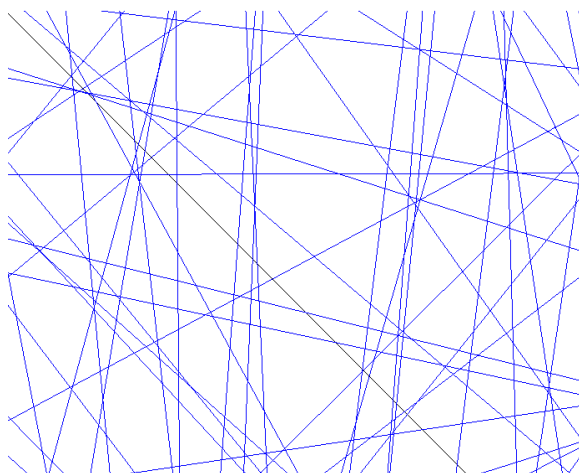
*Zdroj: vlastní zpracování*



**Obrázek 7: Přiblížení k levé části Lorenzova atraktoru III**

*Zdroj: vlastní zpracování*

Už na obrázku 6 vidíme, že se struktura změnila v jakousi podivnou síť. V dalších přiblíženích se síť komplikuje až vypadá naprosto chaoticky. Takže ukáži už jen maximální přiblížení, které software Matlab dovolí.



**Obrázek 8: Přiblížení k levé části Lorenzova atraktoru IV**

*Zdroj: vlastní zpracování*



Možná to na první pohled vypadá, že se čáry kříží a protínají, ale pokud bychom si objekt otočili ve třech dimenzích, viděli bychom, že se ani jednou neprotínají. Tento graf představuje jakýsi systém popsáný ve třech rovnicích za určitých počátečních podmínek. Vidíme, že systém se drží v jedné spirále a má své krajní hranice. Také vidíme, že se neustále jeho dráha opakuje. Takže můžeme i takový chaotický systém popsat, ale dokážeme přesně určit, kde a kdy bude další krok?

Dalším důvodem, proč se tomuto objevu začalo říkat motýlí efekt, je, že i nepatrné rozechvění vzduchu, jako je mávnutí motýlími křídly, může způsobit řetězovou reakci, která ovlivní počasí na druhém konci světa. Můžeme tedy říci, že motýlí efekt znamená citlivou závislost na počátečních podmínkách. [7]

Tento efekt znamená, že i ty nejmenší chyby v měření znemožňují předpovědi ve fyzikálních systémech. Můžeme předpovědět jaký bude další stav, ale pokud se budeme snažit dosáhnout delší předpovědi, chyby budou narůstat až do úplného chaosu. To vyvrací teorii, že pro přesnou předpověď je zapotřebí pouze přesné měření. A právě známý francouzský matematik a fyzik Pierre Simon Laplace vyřkl myšlenku, že pokud dokážeme přesně změřit pozici a pohyb každého bodu ve vesmíru, bude předpověď zbytku věčnosti záležitostí počítání sum. [7]

Jeden z největších matematiků všech dob Henri Poincaré, si uvědomil, že by vesmír měl běžet jako hodinový strojek, a přesto funguje velmi složitě až nepředvídatelně. Právě on aplikoval novou geometrii a pokoušel se pochopit dynamiku přírody, ale vždy se ocital na pokraji matematického zmatku a chaosu. Ian Stewart ve své knize uvádí: „*Aby se člověk dostal z pasti, tak místo, lidé, kultura i čas, všechno musí být správně. Poincaré byl správným člověkem, Francie správným místem – ale čas a kultura byly špatně. Lorenz byl správným člověkem, MIT správným místem, kultura pro chaos je kultura počítačová a ta byla dobře rozjetá.*“ [5, s. 142–143]

Problémem je, že nic v přírodě neznáme dokonale. V předvídatelném systému, jako je puštěný míček na rovnou zem, je jednoduché odhadnout jeho dráhu. Pokud pokus s míčkem zopakujeme, pokaždé se chová stejně i když se dráhy minimálně liší. Pokud ale míček naráží do malých bílých kolíčků, bude dráha vypadat úplně jinak. Když pustíme další míčky úplně stejným způsobem, uvidíme, že dráhy se po chvíli kompletně liší. I to je motýlí efekt jen v jiném podání. Malá změna v počátečních podmínkách (v tomto případě použití bílých kolíčků) vyvolala chaos v dráze míčku. Míček vykazuje chaotické, nepředvídatelné chování. Nemůžeme dopředu s jistotou určit dráhu míčku. [7]

## 1.2. Benoit Mandelbrot

Benoit Mandelbrot byl francouzským matematikem, který se zasloužil o základ fraktální geometrie. Byl profesorem na Yaleově univerzitě a pracoval pro společnost IBM v USA.

*„Matematik mnoha talentů Henri Poincaré (1854 – 1912) poznamenal, že některé otázky musí lidé promyšleně formulovat, kdežto jiné jsou „přirozené“ a kladou se samy. Můj život byl takových otázek plný: jaký tvar má hora, pobřeží, řeka nebo hranice mezi dvěma povodími? Jaký je tvar mraků, plamenů nebo svařovaných spojů? Jaká je hustota rozložení galaxií ve vesmíru? Jak popsat – tak, aby se tím dalo řídit – kolísání cen na finančních trzích? Jak porovnávat a měřit slovní zásobu různých spisovatelů? Čísla měří obsahy ploch a délky. Mohla by nějaká jiná čísla měřit „celkovou hrubost“ zrezivělého železa nebo roztráštěného kamene, kovu či skla? Nebo míru složitosti hudební skladby či abstraktního obrazu? Může geometrie splnit to, co slibuje řecký kořen tohoto slova – pravdivě měřit nejen obdělávaná pole podél Nilu, ale i celou Zemi s veškerou její nespoutanou přírodou?“*

Z knihy Fraktalista: rebelem ve vědě, Benoit Mandelbrot [8]

Mandelbrot se rozhodl přejít od 0, 1, 2, 3 atd. dimenzí k tzv. neceločíselným dimenzím. Nebyl první, kdo se zabýval neceločíselnými dimenzemi, ale díky nim rozvíjel svou myšlenku o měření přírodních tvarů, které vykazovaly soběpodobnost. Ve skutečnosti byl první, komu se podařilo přirovnat novou geometrii k takovým přírodním objektům. Neceločíselná dimenze nám umožňuje měřit vlastnosti, které jinak nejsou přesně definovány: míru drsnosti, nerovnosti nebo nepravidelnosti objektu. Přestože je například nerovné pobřeží pomocí délky neměřitelné, má určitý charakteristický stupeň hrubosti. Mandelbrot vypracoval metody pro výpočet zlomkové dimenze reálných objektů na základě postupu konstrukce určitého tvaru nebo na základě určitých dat a umožnil, aby jeho geometrie vypovídala o nepravidelných přírodních útvarech, jejichž studiu se věnoval. Stupeň nepravidelnosti zůstává v různých měřítkách konstantní. Rozhodl se svoji geometrii pojmenovat, a tak vzniklo nové slovo fraktál (z latinského „fractus“ - zlomený) [4, s. 102]

Benoit Mandelbrot ve svých knihách i přednáškách neustále opakoval, že mraky nejsou koule, hory nejsou kužele a že blesk se nešíří po přímce. Fraktální geometrie je obrazem vesmíru, který je hrbolatý, nikoliv rovný a podřobaný, nikoliv hladký. Je to geometrie důlků, jamek a hrbolů, pokřivenin, spleť a deformací.

Fraktální geometrie přináší nový pohled na svět. Základní aspekt našeho světa je velmi hrubý už od pradávna. Skutečnost se zdála být nesmírně komplexní, samý zmatek, žádný řád. Nicméně se objevily stopy, a to velmi silné, které naznačovaly jistý řád v těchto hrubostech. [7]

Mandelbrot ve své přednášce s názvem Fraktály a umění hrubosti uvádí příklad s květákem. Jeho povrch je hrubý a těžko by se nám měřila jeho plocha. Pokud vezmeme ostrý nůž a rozkrojíme ho napůl, dostaneme dvě části připomínající tvarem celý květák. Pokud ukrojíme jednu paličku, dostaneme další květák, ale velmi zmenšený. Takhle bychom mohli pokračovat dál a dál a pořád bychom dostávali ten stejný tvar jen v menší a menší podobě. Vzhledem k tomu, že květák je známá zelenina již od starověku, víme, že kolem nás byly vždy nějaké věci, které mají tuto vlastnost, že část celku vypadá stejně jako celek samotný. Této vlastnosti se říká soběpodobnost. Takže „fraktální“ nyní znamenalo také vnitřně si podobný. [9]

V úvodu je uvedeno, že se teorie chaosu může týkat i jiných vědních odvětví než jen ekonomie. Zde je další příklad: Mandelbrotova fraktální geometrie pomohla chirurgům ve studii plicních onemocnění. Struktura plic je velmi složitá. Dodnes se anatomové ptou, jaká je ve skutečnosti plocha plic. Někteří říkají, že je to podobné jako plocha jednoho basketbalového míče a jiní tvrdí, že je to jako plocha pěti basketbalových míčů. To jsou obrovské rozdíly. Plocha plic je totiž něco velmi neurčitého. Průduškové větve se dělí na další menší větve a tak dále, dokud nenarazí na limity představující hlen v plicích. A právě díky fraktální geometrii je možné tento chaos vyjádřit číslem. [7]

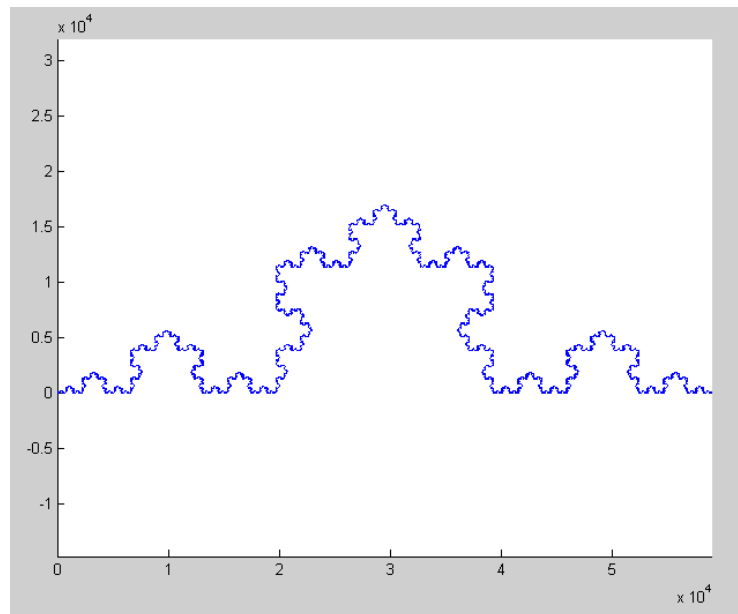
Známým příkladem matematického fraktálu je Kochova sněhová vločka. Je to obrazec vytvořený třemi jednoduchými pravidly. Vycházíme z trojúhelníku o stranách délky 1. Doprostřed každé strany přidáme další trojúhelník třetinové velikosti a postup znovu zopakujeme. Velikost obvodu Kochovy vločky bychom mohli vyjádřit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty \quad (4)$$

Přesto obsah trojúhelníku zůstává menší, než je plocha kruhu opsaného původnímu trojúhelníku. Nekonečně dlouhá čára tedy ohraničuje plochu o konečném obsahu. [4, s. 103]

Podobnými jednoduchými pravidly lze vytvořit Kochovu křivku. V Matlabu lze vytvořit Kochovou křivku pomocí následujícího kódu. Autorem kódu je Janaka Wasapura a vypadá takto:

```
clear all
k = 10;
q = [0, pi/3, -pi/3, 0];
n = 4^k;
W2 = zeros(k,n);
W2(1,:) = reshape repmat(q,1,4^(k-1)),n,1);
for i=2:k
    W2(i,:) = reshape(repmat(q,4^(i-1),4^(k-i)),n,1);
end
W = sum(W2);
x0 = 0;
y0 = 0;
x=[x0];y=[y0];
for i=1:length(W)
    theta = W(i);
    x(i+1)=x(i)+cos(theta);
    y(i+1)=y(i)+sin(theta);
end
line(x,y)
axis equal [10]
```



**Obrázek 9: Kochova křivka**

*Zdroj: vlastní zpracování*

Podle Mandelbrota jsou fraktály objekty, jejichž Hausdorffova dimenze (viz 2. kapitola) je větší než jejich dimenze topologická. Sám Mandelbrot později připustil, že jeho definice je na jedné straně příliš úzká a vylučuje z kategorie fraktálů objekty, které tam pro jiné své vlastnosti patří. Na druhé straně ponechává otevřenou hranici se „skutečným geometrickým chaosem“, tj. s objekty, které nemají z hlediska případného dalšího zkoumání žádné rozumné vlastnosti.

Na definici fraktálů mají matematici různé pohledy. Taylor navrhl jinou definici fraktálu založenou na porovnání Hausdorffovy dimenze a tzv. packing dimension. Fraktálem nazývá borelovskou množinu v  $\mathbb{R}^n$ , pro kterou obě dimenze mají stejnou hodnotu. Barnsley chápe fraktály jako prvky „prostoru fraktálů“, tak nazývá systém všech neprázdných kompaktních podmnožin nějakého metrického prostoru. Zdůrazňuje však, že pojem fraktálu je otevřený a je zpravidla vymezen pomocí množství příkladů, obrázků a vztahů.

Falconer volí podobný neformální přístup a popisuje fraktály jako množiny bodů, vyznačující se jistými typickými vlastnostmi, ne nutně ale všemi najednou. Následující vlastnosti jsou podle něj pro fraktály charakteristické:

- jemná struktura, patrná při libovolném zvětšení;
- nemožnost nebo obtížnost popisu jazykem tradiční geometrie;
- jednoduchá (často rekurzivní) definice;
- fraktální dimenze větší než dimenze topologická;
- určitá forma soběpodobnosti. [11, s. 198-199]

Jedním z nejznámějších fraktálů je tzv. Mandelbrotova množina pojmenovaná po jejím objeviteli. V podstatě je to množina bodů  $c$  v komplexní rovině, pro které je posloupnost  $z_n$  daná předpisem (5):

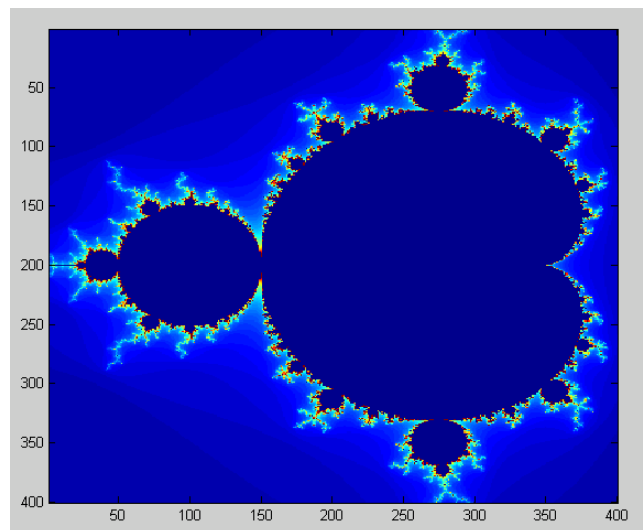
$$z_{n+1} = z_n^2 + c. \quad (5)$$

omezená. V rovnici 5 jsou  $z$  a  $c$  komplexní čísla,  $x$  představuje souřadnice vykreslovaného bodu a  $c$  konstantu. Je to potvrzení teorie, že i jednoduché systémy mohou vykazovat chaotické chování. Zajímavé je, že když se libovolně přiblížíme, můžeme objevovat stále nové a nové detaily. Mandelbrotova množina je fraktál.

Opět pomocí softwaru Matlab si můžeme takovou Mandelbrotovu množinu vymodelovat za použití tohoto kódu:

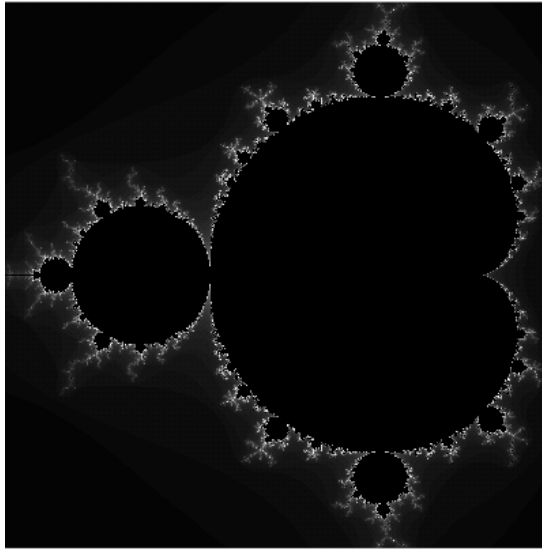
```
tic; %spuštění vnitřních hodin
obr=0;
for x=1:400 %krokování a výpočet barvy pixelu
    x_v=(x-300)/200; %krok pixelu
    for y=1:400
        y_v=(y-200)/200;
        q(1)=(x_v)+(y_v)*i;
        for n=2:100 % maximální počet interakci
            q(n)=(q(n-1))^2+q(1);
            if abs(q(n))>2
                obr(y,x)=n;
                break
            end
        end
    end
end
end
imageview(obr); %vykreslení obrázku
image(obr); [6]
```

A jako výsledný obrázek dostaneme Mandelbrotovu množinu ve dvou provedeních (viz obrázek 10, 11).



**Obrázek 10: Mandelbrotova množina 1**

*Zdroj: vlastní zpracování*



**Obrázek 11: Mandelbrotova množina 2**

*Zdroj: vlastní zpracování*

Kdybychom se mohli přibližovat do těchto množin, viděli bychom nové a krásné útvary a mohli bychom se přibližovat do nekonečna a stále by se objevovaly nové a nové útvary.

Benoit Mandelbrot studoval fraktální vlastnosti nejen v pohybu cen, ale třeba i v poruchách telekomunikačního vedení. Dále také studoval tisícileté záznamy o stavu Nilu. Na základě toho definoval dva efekty, které proti sobě působí v různých měřítkách. Je to:

- Noemův efekt – je nespojitost, když se veličina může měnit téměř libovolnou rychlostí (např. burza, kde se ceny mění skokem během minuty)
- Josefův efekt – znamená naopak tendenci k setrvalému stavu

Lorenz i Mandelbrot položili základy chaosu, ale byli to fyzikové, kteří z chaosu vytvořili novou vědu. [12]

### 1.3. Podivné atraktory

Atraktor (angl. Attractor, odvozeno z attraction – přitahovat) je zhruba řečeno stav dynamického systému, do kterého je systém v čase přitahován. Atraktorů je několik druhů:

- Pevné body
- Periodické a kvaziperiodické body (cyklické)
- Chaotické / podivné atraktory

Pevné body jsou nejjednodušším atraktorem. Příkladem může být kyvadlo, které se časem zastaví na jednom místě. Dalším jednoduchým případem jsou tzv. cyklické atraktory. V čase se systém zacyklí a jeho dráha či pohyb se bude opakovat. Například mlýnské kolo – pokud neustále proudí voda, jeho atraktorem je právě kruh. Dalším typem jsou atraktory, které vykazují chaotické chování. Mají velkou citlivost na malou změnu počátečních podmínek a nelze je předem jasně určit. Dobrým příkladem je míček postavený na špičce jehlanu. Atraktorem jsou místa pod jehlanem. Míček se nějakým vnějším jevem dostane pokaždé na jiné místo a nelze předem určit na které.

Edward Lorenz byl právě prvním, kdo zobrazil podivný atraktor, aniž by si to uvědomil. Jeho motýlí křídla jsou atraktorem dynamického systému popsaného pomocí tří diferenciálních rovnic (viz oddíl 1.1). Existují další známé typy podivných atraktorů a některé z nich zde popíšu.

#### 1.3.1. Hénonův atraktor

Hénonovo zobrazení je dáno dvojicí rovnic (6 a 7):

$$x_{n+1} = y_n + 1 - 1,4x_n^2 \quad (6)$$

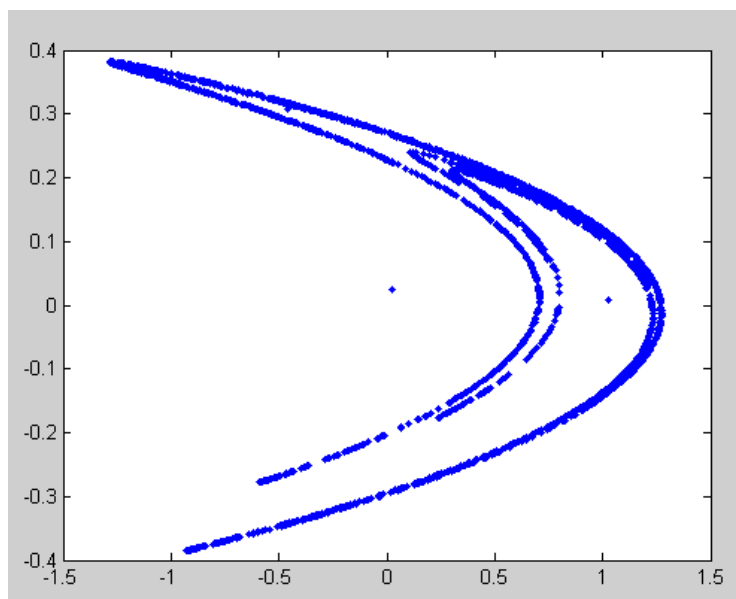
$$y_{n+1} = 0,3x_n \quad (7)$$

kde  $x_n$  a  $y_n$  představují souřadnice bodů v rovině. Chování posloupnosti  $\{x_n, y_n\}$  závisí na volbě počátečního bodu: v některých případech diverguje, v některých vede k podivnému atraktoru. Tento fraktál dostal název po svém francouzském objeviteli Michelu Hénonovi. Ten jej původně kreslil ručně a výpočty prováděl na kapesní kalkulačce. V dnešní době je to problém, protože počítače jsou velmi rychlé, ale při pomalém výpočtu je vidět, že body se objevují zcela nahodile, a bez výpočtů předchozího bodu nelze odhadnout umístění následného bodu. Při zjemňování struktury se ukazuje, že jednotlivé křivky nejsou pouze křivkami, ale nekonečným množstvím párů křivek "vedle" sebe.



Pokud budeme chtít Hénonův atraktor vymodelovat v softwaru Matlab, použijeme následující kód:

```
tic;  
x(1)=0.025;      %Počáteční podmínky  
y(1)=0.025;  
for t=2:2999    %cyklus výpočtu  
    x(t)=y(t-1)+1-1.4*(x(t-1)^2);  
    y(t)=0.3*x(t-1);  
end  
plot(x,y, '.'); %vykreslení grafu  
toc; [6]
```



**Obrázek 12: Hénonův atraktor**

*Zdroj: vlastní zpracování*

### 1.3.2. Rösslerův atraktor

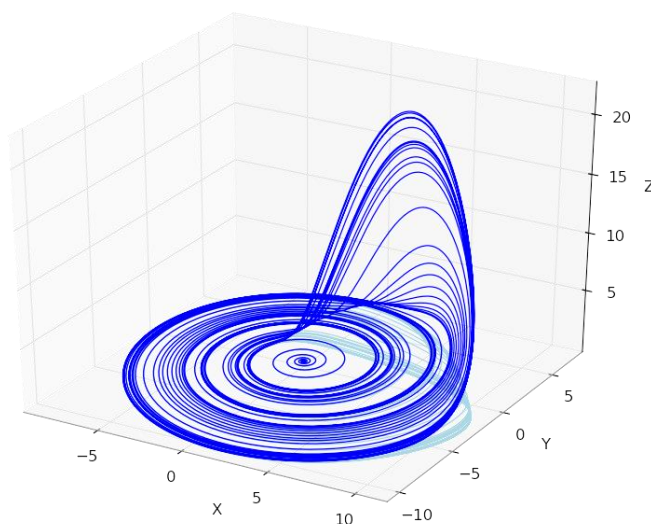
System tří nelineárních diferenciálních rovnic

$$\frac{dx}{dt} = -y - z \quad (8)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay \quad (9)$$

$$\frac{dz}{dt} = b + (x - c)z \quad (10)$$

s parametry buď  $a = 0,2$  ;  $b = 0,2$  ;  $c = 5,7$  nebo  $a = 0,1$  ;  $b = 0,1$  ;  $c = 14$ . Atraktor je opět pojmenován po svém německém tvůrci Otto Rössler. Rössler vytvořil atraktor již v roce 1976, nicméně až později se ukázalo, že tyto rovnice lze využít při modelování rovnováhy v chemických reakcích. Tyto tři rovnice (8, 9 a 10) definují dynamický systém, který vykazuje chaotické chování a fraktální vlastnosti. Tento atraktor vykazuje podobnou strukturu jako Lorenzův atraktor, ale je jednodušší a má pouze jednu varietu.



Obrázek 13: Rösslerův atraktor

Zdroj: [13]

## 2. ZÁKLADNÍ POZNATKY TEORIE CHAOSU

V této kapitole jsou popsány některé poznatky o teorii chaosu. Hlavní částí této kapitole je právě fraktální geometrie, která s teorií chaosu úzce souvisí. Více se ovšem zaměříme na chaos v ekonomii.

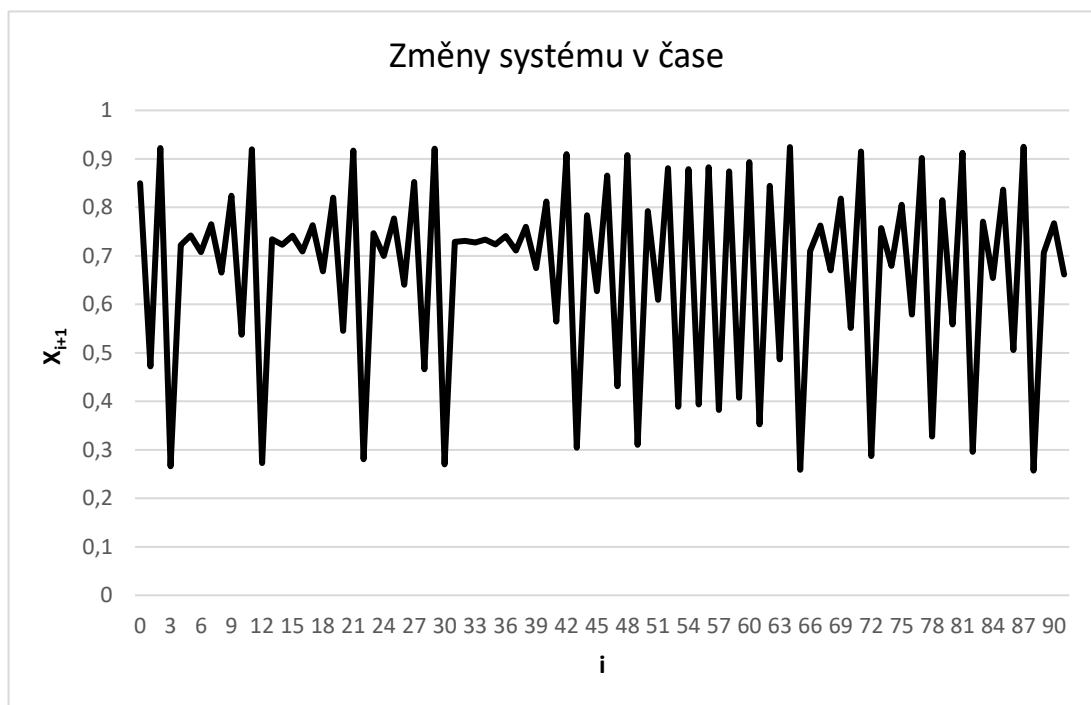
### 2.1. Pojem chaos

Příklad na vysvětlení pojmu „chaos“ je uveden v knize od Petra Dostála [14]. Jde o příklad dynamického systému popsaného jednou rekurentní rovnicí. Chování takového systému za jistých okolností vykazuje chaotické rysy.

Z předchozí kapitoly víme že, chaos je jev, který má nějaký skrytý řád. Můžeme si představit systém popsaný touto rovnicí:

$$x_{i+1} = r * x_i(1 - x_i), \quad (11)$$

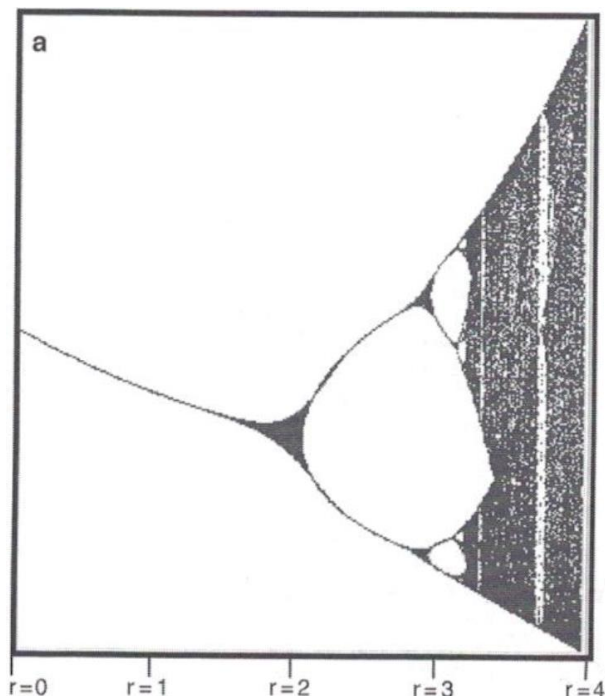
kde  $r$  značí konstantu a  $x_i$  je simulovaná proměnná. Na obrázku 14 je graf generovaný právě touto rovnicí s počáteční hodnotou  $x_0$  rovnou 0,85 a hodnotou  $r$  rovnou 3,7. Na vodorovné ose jsou hodnoty  $i$  a na svislé ose hodnoty  $x_{i+1}$ . [14, s. 100]



Obrázek 14: Změny systému v čase

Zdroj: vlastní zpracování

A právě grafické znázornění vlivu řídicího parametru  $r$  se někdy znázorňuje pomocí tzv. bifurkačního diagramu (viz obrázek 15). Parametr  $r$  vyneseny na vodorovnou osu byl volen v rozmezí 1 až 4. [14, s. 100]



**Obrázek 15: Bifurkační diagram**

*Zdroj: [14, s. 101]*

Bifurkační diagram uvedené rekurentní rovnice lze popsat pro hodnoty  $r < 2$  jako ustálený stav. Při dalším nárůstu řídicího parametru  $r$  dochází ke zdvojení periody a při dalším jeho nárůstu dochází k dalšímu zdvojení již zdvojené periody až vývoj přejde do chaotického průběhu. Znázornění průběhu rekurentní rovnice s hodnotou řídicího parametru  $r$  rovnou 4 odpovídá pravé krajní úsečce v bifurkačním diagramu. Daný graf vykazuje fraktální charakter, protože zdvojení se v přesném měřítku opakují. Kdykoliv bychom si toto zdvojení periody zvětšili, vypadal by graf stejně jako jeho celek. Takhle bychom mohli periodu zvětšovat neustále a vždy bychom viděli v podstatě stejný graf. [14, s. 101]

## 2.2. Fraktální geometrie

Vznik fraktální geometrie je popsán v první kapitole. V předchozí kapitole je také uvedeno několik definic fraktálů. Přestože fraktály jsou známé od 70. let 20. století, dodnes neexistuje jediná přesná definice.

Jak již bylo zmíněno dříve, klasická geometrie neumožňuje popisovat komplikované struktury, jako jsou např. strom, mraky, pohyb tržních cen atd. Tento problém řeší použití fraktální geometrie. Klasická geometrie popisuje čáru dimenzí 1, plochu dimenzí 2 a objem dimenzí 3. Všechny tyto dimenze jsou celočíselné. U fraktální geometrie toto neplatí a dimenze může být neceločíselná. [14, s. 102]

Vlastnost fraktálů zvanou soběpodobnost použil Mandelbrot pro jinou definici: „Fraktál je tvar tvořený částmi, které jsou podobné celku.“ Je možné tak definovat soběpodobnostní dimenzi, z které můžeme odvodit fraktální dimenzi. Soběpodobnost však není postačující podmínkou. K tomu abychom mohli mluvit o fraktálu, musí být splněny ještě další podmínky.

Například ve fraktální geometrii má přerušovaná čára dimenzi větší jak 0 a menší jak 1, přímka má fraktální dimenzi rovnou 1, čára vykreslená na ploše má dimenzi větší jak 1 a menší jak 2 (lze říci, že čím více časová řada „zaplnjuje“ plochu, tím má vyšší fraktální dimenzi).

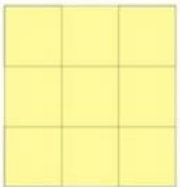
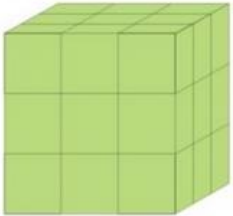
Další, snad nejvíce používaná definice, je opět od Mandelbrota: „Fraktál je množina, jež Hausdorffova dimenze převyšuje její topologickou dimenzi.“ Topologická dimenze se nejčastěji používá v topologii, která se zabývá vlastnostmi geometrických útvarů, které se deformací, otáčením nebo stlačováním mění. V topologii je důležité, zda je daný objekt spojitý, zda obsahuje otvory, zda je zauzlený a podobně.

Topologická dimenze ( $D_T$ ) je vždy celočíselná. Objekt, který je možné homomorfně převést stlačováním a ohýbáním na jeden ze simplexů, má stejnou topologickou dimenzi jako simplex. Topologická dimenze je často spojována s charakteristickými objekty pro tuto dimenzi. Pro většinu množin (objektů) je možné určit jejich topologickou dimenzi pomocí „pokrývací“ dimenze. Jejich hodnoty se rovnají.

Definovat Hausdorffovu dimenzi by bylo příliš komplikované, a tak pokud by čtenáře zajímala tato dimenze, může nahlédnout například do knihy O pojetí křivky, nebo také do knihy Fractal Geometry: Mathematical foundations and applications.

Definice fraktálů pomocí fraktální a topologické dimenze: Útvar je fraktálem, pokud platí vztah:  $D_H > D_T$ . [15]

Dále bychom mohli definovat fraktály pomocí soběpodobnostní dimenzi  $D_S$ . Nyní víme, že fraktál je tvar tvořený částmi, které jsou podobné celku. Tato definice využívá tedy pojem soběpodobnosti (angl. self-similarity). Nicméně soběpodobnost není postačující podmínkou pro to, aby bylo možné daný objekt označit jako fraktál. Úsečka, čtverec a krychle uvedené na obrázku 16, jsou rozděleny na malé kopie celku pomocí faktoru změny měřítka  $s=3$ .

	$D_T$	$s$	$N(s)$	$N(s)=s^{D_S}$
Úsečka 	1	3	3	$3^1$
Čtverec 	2	3	9	$3^2$
Krychle 	3	3	27	$3^3$

Obrázek 16: Soběpodobnost euklidovských objektů

Zdroj: [16]

Vztah mezi počtem částí  $N$ , na které se těleso rozdělí (faktor změny délky) a faktorem změny měřítka  $s$  je dán:

$$N(s) = s^{D_S} \quad (12)$$

Vztah lze pak upravit dále na:




$$D_S = \frac{\log N(s)}{\log s} \quad (13)$$

$D_S$  je soběpodobnostní dimenze.  $D_S = 1$  pro přímku,  $D_S = 2$  pro plochu a  $D_S = 3$  pro krychli. Tyto dimenze jsou shodné jak s Hausdorffovou dimenzí  $D_H$ , tak i s topologickou dimenzí  $D_T$ .

V případě Kochovy křivky byly všechny úsečky rozděleny na tři části. Faktor změny měřítka  $s$  je tedy 3. V každém kroku byly vloženy dvě úsečky na místo jedné o délce  $1/3$  celkové délky. Počet částí  $N$  (faktor změny délky) na které se těleso rozdělilo v každém kroku je pak 4. Tedy:

$$D_S = \frac{\log n}{\log s} = \frac{\log 4}{\log 3} = D_H = 1,2619 \quad (14)$$

Kochova křivka má soběpodobnostní dimenzi  $D_S=1,269$  a ta je rovna Hausdorffově dimenzi  $D_H$ . Výsledek není celočíselný, fraktální dimenze je vyšší než topologická ( $D_T \text{ Koch}=1$ ). Kochova křivka je fraktál.

	$D_T$	$s$	$N(s)$	$D_S = \frac{\log N(s)}{\log s}$
Cantorova množina 	0	3	2	0,63
Sierpinského těsnění 	1	2	3	1,58
Sierpinského koberec 	1	3	8	1,89

**Obrázek 17: Soběpodobnost fraktálních objektů**

*Zdroj: [17]*

Na obrázku 17 je uvedeno několik příkladů matematických deterministických fraktálů. Je zde uvedena topologická dimenze  $D_T$  a soběpodobnostní dimenze  $D_S$ . Sierpinského těsnění je spíše znám pod názvem Sierpinského trojúhelník.

Cantorova množina (angl. Cantor set) je generovaná odstraněním prostřední třetiny úsečky. V následujících krocích je opět u všech úseček odstraněna prostřední třetina. Při opakování v tomto algoritmu do nekonečna je získána Cantorova množina.

V tomto případě je faktor změny měřítka  $s=3$  (stejně jako u Kochovy křivky). Protože nebyla žádná úsečka vkládaná, je počet částí  $N$  (faktor změny délky), na které se těleso v každém kroku rozdělí  $N=2$ . Po dosazení do vztahu (13) obdržíme fraktální dimenzi pro Cantorovu množinu  $D_H=0,6309$ . Tento útvar je více než izolovaný bod, ale méně než hladká křivka.

Sierpinského koberec je generován podobně jako trojúhelník, ale iniciátorem je čtverec. Tuto proceduru si lze představit jako rozdělení čtverce na devět malých čtverců a vyjmutím prostředního. Objekt má pak fraktální dimenzi  $D_H=1,8928$ . [15]

Dále bychom mohli definovat fraktály pomocí kapacitní dimenze. Pokud by čtenáře zajímala další definice doporučuji nahlédnout na webové stránky [15], nebo do knihy Fractal geometry [21].

Měli bychom uvést vlastnosti fraktálů. Některé z nich můžeme popsat na příkladu již známé Kochovy křivky, která má několik zajímavých vlastností typických pro fraktály:

- Křivka je spojitá, sama sebe nikde neprotíná a nemá nikde derivaci.
- Jedná se o křivku striktně soběpodobnou, tedy malá část této množiny bude vždy přesnou zmenšenou replikou původní množiny – je měřítkově nezávislá.
- Délka Kochovy křivky je nekonečná (po nekonečně mnoha iteracích), ačkoliv se vyskytuje na konečné ploše. Je tak vlastně možno zahlédnout nekonečno. K pochopení tohoto problému si stačí uvědomit, že při každém kroku je křivka prodloužena o 1/3 délky původní. Při nekonečném počtu kroků je zřejmé, že nekonečně mnoho prodloužení povede k nekonečné délce.
- V případě měření délky Kochovy křivky pomocí různých měříttek, by délka byla pokaždé jiná. Tato délka by se prodlužovala se zmenšující se délkou měřidla.
- Tato křivka má neceločíselnou (fraktální) dimenzi. Fraktální dimenze Kochovy křivky je 1,2619, tedy je z hlediska topologického něčím mezi přímkou (která má dimenzi 1) a hladkou plochou (která má dimenzi 2). Neceločíselné dimenze je dosaženo značnou strukturovaností křivky a toto číslo (fraktální dimenze) uvádí „míru složitosti křivky“.

Uvedené vlastnosti Kochovy křivky jsou platné pro většinu fraktálů ale zdaleka ne vždy můžeme nalézt všechny. Například mnoho fraktálů není striktně soběpodobných. Nicméně popis fraktálů a jejich vlastností se liší často podle autorů. [15]

### **2.3. Hurstův exponent**

Nejprve bychom měli definovat co je to časová řada. Pojmem časová řada se obecně míní jakákoli posloupnost dat  $y_1, \dots, y_n$  chronologicky uspořádaná v čase. To by mohlo opravňovat zjednodušující deterministický přístup pohlížející na časovou řadu pouze jako na soubor čísel s časovým uspořádáním.

Na druhé straně dalším výrazným rysem takových posloupností je vedle jejich dynamiky také náhodnost. Proto je kvůli adekvátnosti analýzy nutné používat modely, které jsou založeny na principech náhodnosti (tj. na teorii pravděpodobnosti) a jsou schopny generovat



časové posloupnosti podobné (ve smyslu náhodnosti) konkrétní časové řady, kterou právě analyzujeme. Takové modely se označují jako náhodné procesy.

Na finančním trhu se obchoduje s úvěry, půjčkami, akciemi, cennými papíry, komoditami, měnami atd. Základní informací finančního trhu je cena jednotlivých aktiv. Časové řady popisující ceny a jejich dynamiku vývoje a nazývají se finanční časové řady.

Základním znakem finančních časových řad je vysoká frekvence pozorování, což vede k zesílení vlivů nesystematických faktorů na vývoj těchto časových řad. Důsledkem je pak relativně vysoká, v čase se obvykle měnící, volatilita.

Modely finančních časových řad pak bývají označovány jako modely podmíněné heteroskedasticity. Jedná se o rozsáhlou skupinu modelů, jejichž základy položil Engle (1982) popisem modelu ARCH. Tyto modely se zabývají variabilitou, tj. druhým podmíněným momentem. Jejich přínos spočívá v tom, že umožňují zachytit měnící se podmínky nejistoty na trhu, což je také v souladu s vývojovými trendy moderní ekonomické teorie.

Možnosti praktické aplikace těchto modelů jsou značné. Jejich prostřednictvím lze empiricky ověřovat různé ekonomické a finanční teorie týkající se finančního trhu. Lze je využít např. při tvorbě optimálního portfolia či analýze VaR (Value at Risk). V neposlední řadě tyto modely umožňují zpřesnění intervalových předpovědí v časových řadách.

Jedním z mnoha ukazatelů popisujících finanční časové řady je právě Hurstův exponent. Je pojmenován po svém objeviteli Haroldu Hurstovi. Harold Hurst byl britský hydrolog, který studoval prakticky celý svůj život změny hladiny v Nilu. Tyto poznatky pak později využil Benoit Mandelbrot při hledání fraktálních jevů. Hurstův exponent „H“ určuje míru chaotičnosti časové řady, dokáže rozlišit chaotickou (fraktální) časovou řadu od náhodné a nalézt dlouhodobý paměťový cyklus u chaotické časové řady.

Výpočet Hurstova koeficientu spočívá v posloupnosti výpočtů (11–15):

$$\bar{x}(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} x_i \quad (11)$$

$$X(t, \tau) = \sum_{i=1}^t [x_i - \bar{x}(\tau)], \quad t = 1, 2, \dots, \tau \quad (12)$$

$$S(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} [x_i - \bar{x}(\tau)]^2} \quad (13)$$

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) \quad (14)$$

$$H(\tau) = \frac{\log \frac{R(\tau)}{S(\tau)}}{\log \tau} \quad (15)$$

kde  $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_t)$  je posloupnost hodnot časové řady a  $t$  je počet jejich hodnot,  $\bar{x}$  je aritmetický průměr,  $X(t, \tau)$  je suma odchylek od průměru,  $S(\tau)$  je směrodatná odchylka,  $R(\tau)$  je rozdíl mezi nejvyšší a nejmenší odchylkou od průměru a  $H(\tau)$  je Hurstův exponent.

Je-li hodnota  $H$  rovna 0,5, je časová řada normálně rozložená neboli nemá dlouhodobý paměťový cyklus. Hodnota 0,5 také značí geometrický Brownův pohyb, resp. náhodnou procházku. Náhodná procházka je obecně známý pojem, a tak zde nebude popisován.

Hodnota Hurstova exponentu  $H < 0,5$  znamená, že časová řada nemá trvalý trend, nicméně se často vrací k průměrné hodnotě. [18]

Pokud je hodnota  $H > 0,5$  tak časová řada má trvalý trend, který se časem opakuje. Blíží-li se hodnota Hurstova exponentu k 0 nebo 1, pak to značí, že časová řada obsahuje dlouhodobý paměťový cyklus.

Zkoumáme-li Hurstův exponent z hlediska časové posloupnosti a je-li splněna podmínka  $H_i < H_{i+1}$ , pak trend časové řady bude oslaben; tedy jestliže časová řada stoupala v předcházející periodě, je pravděpodobné, že ve většině případů bude klesat v následující periodě a naopak. Když bude splněna podmínka  $H_i > H_{i+1}$ , pak trend časové řady bude posílen. Tedy jestliže časová řada stoupala v předcházející periodě, je pravděpodobné, že ve většině případů bude stoupat a naopak.

Hurstův exponent také měří „rozeklanost“ časové řady a fraktální dimenzi. Čím je hodnota  $H$  menší, tím více je časová řada rozeklaná (zaplňuje více plochy) a naopak. Fraktální dimenze časové řady označená „ $D$ “ se počítá ze vzorce  $D = 2,0 - H$ . [14, s. 103]

## 2.4. R/S analýza

R/S analýza (z angl. „Rescaled Range Analysis / Statistic“) je statistický nástroj pro odhalení dlouhodobé závislosti v časových řadách a také poskytuje metodu pro odhad Hurstova exponentu. Hurstův exponent je velmi dobrým indikátorem stavu náhodnosti časové řady. R/S analýza je jednoduchá a přímočará, nicméně vyžaduje hodně pozorování, tedy dlouhé časové řady a mnoho výpočtů.

Používá se zejména na kapitálových trzích. Díky této analýze lze nalézt fraktální strukturu a neperiodické cykly. Při studiu finančních časových řad jsme pracovali se softwarem Gretl, ve kterém lze zjistit hodnotu Hurstova exponentu z časové řady. Software Gretl také používá R/S analýzu. Zde je krátce uveden postup pro odhad Hurstova exponentu. R/S analýzu nalezneme podrobněji v knize Chaos and order in capital markets. [19][20]

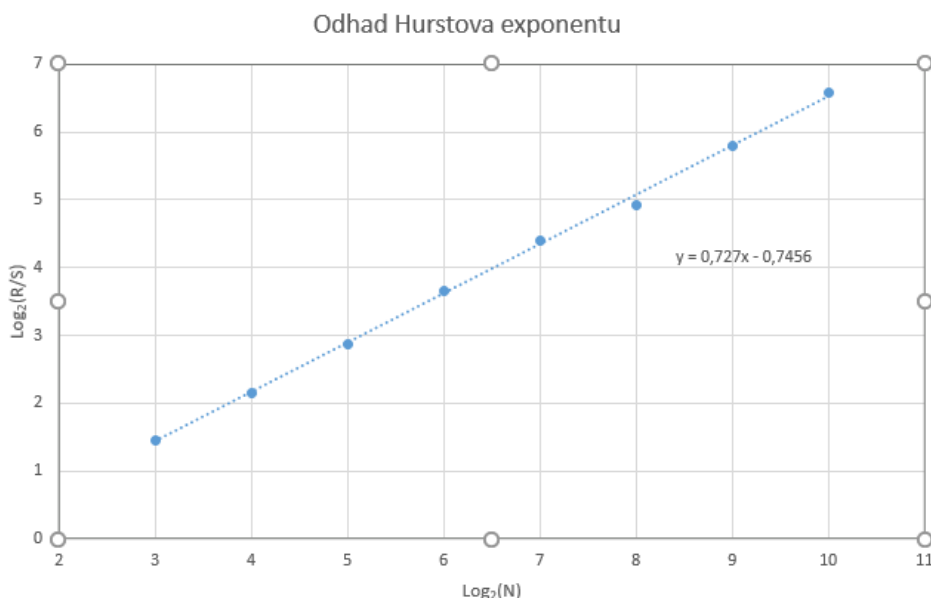
Nejprve musíme zjistit „Rescaled range“ pro celou časovou řadu. Vypočítáme průměr hodnot a od každé skutečné hodnoty ho odečteme. Tím získáme odchylky od průměru. Poté vypočítáme kumulativní hodnoty těchto odchylek. Z kumulativních hodnot je nutné zjistit rozsah, tzn. že najdeme nejvyšší hodnotu a hodnotu nejnižší a odečteme je ( $R = \max(x) - \min(x)$ ). Následně z odchylek vypočítáme směrodatnou odchylku  $S$ . „Rescaled range“ získáme tak, že vydělíme rozsah a směrodatnou odchylku neboli  $R/S$  (odtud R/S analýza). Poté rozdělíme řadu na dva stejně velké klastry a opět zjistíme  $R/S$ . Tentokrát to bude průměrná hodnota  $R/S$  z obou klastrů. Následně proces zopakujeme alespoň třikrát. Zde záleží na počtu pozorování. Nyní zjistíme logaritmy z  $R/S$  o základu 2 a také logaritmy z počtu pozorování  $N$  o základu 2. Získáme např. takovéto hodnoty uvedené v tabulce 1.

<b>N = počet pozorování</b>	<b>R/Sav = průměr R/S</b>	<b><math>X_i ; \log_2(N)</math></b>	<b><math>Y_i ; \log_2(R/Sav)</math></b>
<b>1024</b>	96.4451	10	6.5916
<b>512</b>	55.7367	9	5.8006
<b>256</b>	30.2581	8	4.9193
<b>128</b>	20.9820	7	4.3911
<b>64</b>	12.6513	6	3.6612
<b>32</b>	7.2883	5	2.8656
<b>16</b>	4.4608	4	2.1573
<b>8</b>	2.7399	3	1.4541

Tabulka 1: R/S analýza

*Zdroj: vlastní zpracování*

Z hodnot  $X_i$  a  $Y_i$  si vytvoříme bodový graf a proložíme jím lineární trend. Pomocí lineární trendové funkce zjistíme sklon přímky (metoda nejmenších čtverců). Konstanta, která značí sklon přímky je Hurstův exponent viz obrázek 18.



**Obrázek 18: Odhad Hurstova exponentu**

*Zdroj: vlastní zpracování*

Je tedy zřejmé, že odhad Hurstova exponentu je 0,727 a časová řada má paměťový cyklus.

## 2.5. Ljapunovův exponent

Citlivá závislost na počátečních podmínkách neboli tendence přilehlých trajektorií navzájem se vzdalovat vedla Lorenze k uvědomění si toho, že deterministické dlouhodobé předpovědi počasí nejsou možné. Je možné změřit nepředvídatelnost?

Odpověď na tuto otázku podávala ruská koncepce, a to v podobě Ljapunovova exponentu. Název nese po svém ruském objeviteli Aleksanderu Ljapunovovi. Toto číslo je měřítkem právě těch topologických vlastností, které odpovídají pojům mezi než patří nepředvídatelnost. Ljapunovovy exponenty určitého systému poskytují možnost měření protichůdných účinků roztahování, smršťování a přehýbání, odehrávajících se ve fázovém prostoru atraktoru. Dávaly představu všech vlastností systému, které vedou k jeho stabilitě nebo nestabilitě. Exponent větší než nula znamená rozpínání – přilehlé body se oddělí. Exponent menší než nula znamená kontrakci. Pro atraktor představovaný pevným bodem jsou všechny Ljapunovovy exponenty záporné, protože působení směřuje ke konečnému stavu rovnováhy. Atraktor ve formě periodické oběžné dráhy má jeden exponent přesně roven nule

a ostatní exponenty záporné. Ukázalo se, že podivný atraktor musí mít alespoň jeden Ljapunovův exponent kladný. [2, s. 257]

Chaotické atraktory jsou charakterizovány citlivostí na počáteční podmínky. Každý systém má své vlastní Ljapunovovy exponenty. Pozitivní Ljapunovův exponent vyjadřuje expanzi a negativní kontrakci. Pro chaotický atraktor je jeden Ljapunovův exponent pozitivní, jeden negativní a jeden roven nule. Největší kladný Ljapunovův exponent, označený  $L$ , určuje spolehlivost predikce. Pro výpočet se používá Wolfova algoritmu, v němž se využívá poměru dvou sousedních drah  $D'(t_{i+1})$  a  $D(t_i)$  ve tvaru

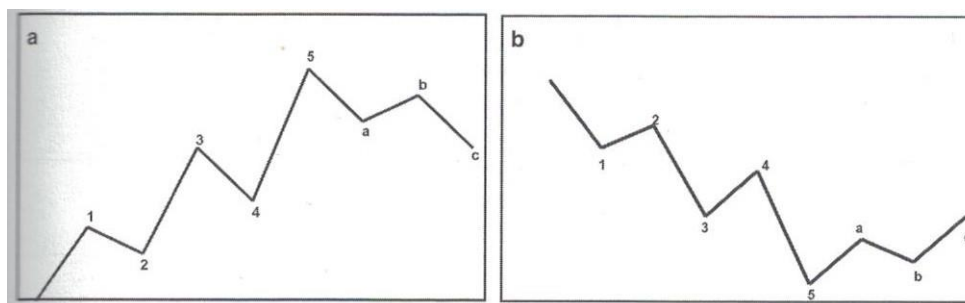
$$L(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^t \log_2 \left[ \frac{D'(t_{i+1})}{D(t_i)} \right]. \quad (16)$$

Čím větší je hodnota největšího kladného Ljapunovova exponentu, tím rychlejší je ztráta „síly“ predikce, což znamená kratší čas spolehlivé predikce časové řady. Prediktabilita, označovaná  $P$ , se počítá jako převrácená hodnota, tj.  $P = \frac{1}{L}$  a vyjadřuje kvalitu predikce. [14, s. 104]

## 2.6. Elliottovy vlny

Jak již bylo zmíněno, u časových řad lze najít prvky soběpodobnosti, a právě takových podobností se využívá v teorii Elliottových vln. Teorie Elliottových vln byla vytvořena ve 30. letech 20. století, avšak k jejímu použití ve větším měřítku přispěly v 90. letech 20. století až počítače. Časové řady tvořené hodnotami indexů, cenami akcií, komodit a kurzů měn, jsou odrazem složitého ekonomického a psychologického chování investorů. R. Elliott zkoumáním časových řad naměřených na burzách v minulém století došel k empirickým poznatkům, jako by se průběh časových řad podobal a opakoval. Nejnovější poznatky z teorie fraktálů potvrzují, že jde o opakování motivu, což je vlastnost fraktálů.

Elliottova teorie je popsána vlnami, které se skládají ze dvou fází. První fáze je impulzní (vývoj je ve směru vzrůstajícího trendu, popř. klesajícího trendu) a druhá fáze je korekční (vývoj proti směru vzrůstajícího trendu, popř. klesajícího trendu). Impulzní fáze se skládá z 5 zlomů, označených 1-5 a korekční fáze skládající se ze 3 zlomů, označených a-c. Viz obrázek 19, kde „a“ je pro vzestup a „b“ pro sestup. [14, s. 106–107]



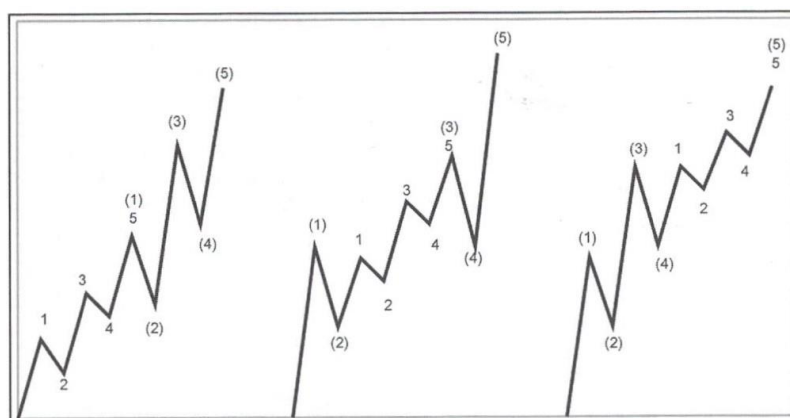
**Obrázek 19: Základní Elliottova vlna, a – vzestup, b – sestup**

*Zdroj: [14, s. 107]*

Elliottovy vlny se vyskytují u časových řad s různou periodou vzorkování, např. roční, měsíční, týdenní, denní, hodinovou, minutovou. Hovoříme o tzv. úrovních vln, které označujeme anglickými slovy: Grand Supercycle, Supercycle, Cycle, Primary, Intermediate, Minor, Minute, Minuette, Subminuette. Impulzní vlny jsou značeny kvůli rozlišení římskými a arabskými číslicemi, bez závorek, se závorkami, bez podtržení, s podtržením, případně se zakroužkováním. Korekční vlny jsou značeny velkými a malými písmeny, bez závorek, se závorkami, bez podtržení a s podtržením.

Elliottova základní vlna se v praxi objevuje v různých modifikacích a různém zkrácení. Základní impulzní vlna může nabývat těchto základních modifikací: impulzní vlna rozšířená, diagonální pátá a neúspěšná pátá.

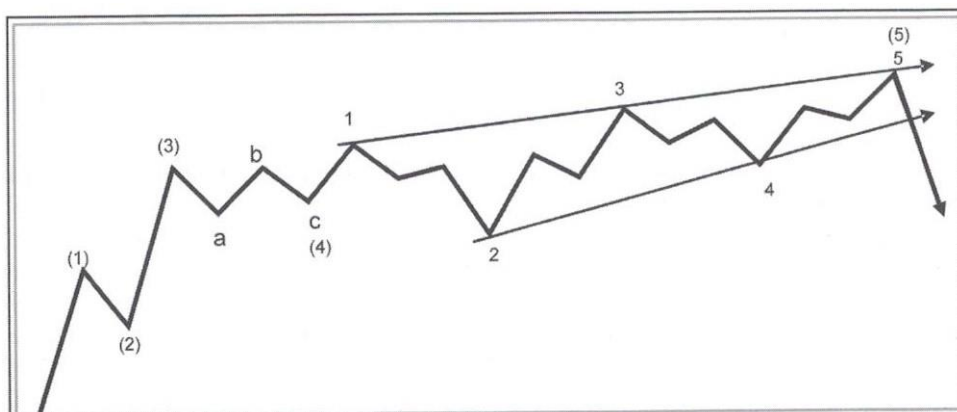
Rozšířená impulzní vlna je typem vlny, která má jednu ze svých impulzních podvln (první, třetí nebo pátou) nahrazenou zmenšeným obrazem sama sebe. Nejčastěji bývá rozšířena třetí vlna, méně často pak první a pátá (viz obrázek 20) [14, s. 107]



**Obrázek 20: Impulzní vlna rozšířená na první, třetí a páté podvlně**

*Zdroj: [14, s. 108]*

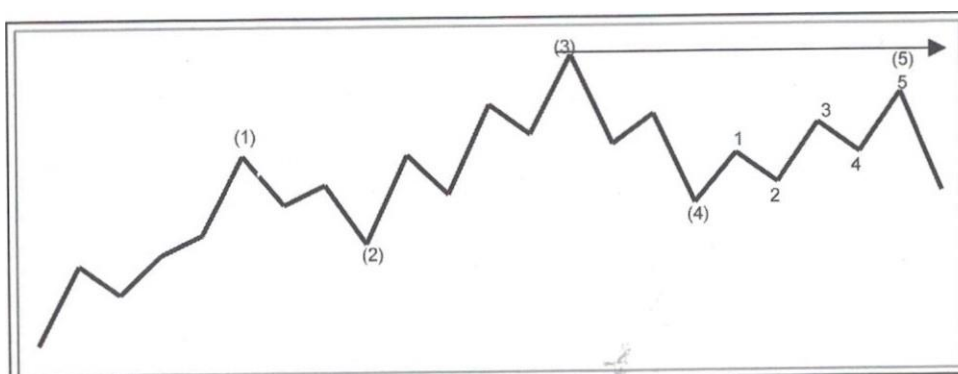
Diagonální pátá vlna je modifikací, v níž dochází k deformaci páté vlny tak, že „vyjde“ z pomyslného trojúhelníku opačným směrem, než jakým se ubírá trend (viz obrázek 21).



**Obrázek 21: Diagonální pátá vlna**

*Zdroj: [14, s. 108]*

Neúspěšná pátá vlna je vlnou, která má vrchol níže než vrchol třetí vlny (viz obrázek 22).

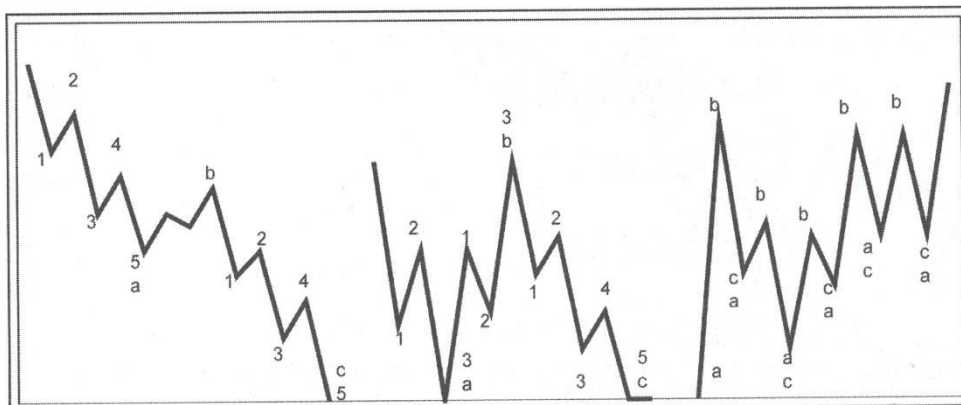


**Obrázek 22: Neúspěšná pátá vlna**

*Zdroj: [14, s. 108]*

Korekční vlny se objevují po vlně impulzní a jsou rozvinuty proti trendu impulzní vlny a korigují ji. Základní vlny jsou cik-cak, rovina a trojúhelník.

Typ vlny cik-cak se vyskytuje ve formaci 5-3-5, tj. první vlna se skládá z 5 podvln, druhá vlna ze 3 podvln a třetí vlna z 5 podvln. Typ vlny rovina se vyskytuje ve formaci 3-3-5, tzn., že první vlna se skládá z 3 podvln, druhá vlna ze 3 podvln a třetí vlna z 5 podvln. Typ vlny trojúhelník se vyskytuje ve formaci 3-3-3-3-3 (viz obrázek 23). [14, s. 107]



**Obrázek 23: Korekční vlna cik-cak, rovina a trojúhelník**

*Zdroj: [14, s. 108]*



### 3. NELINEÁRNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY

V této kapitole jsou přiblíženy nelineární dynamické systémy v ekonomii. Nejdříve je uvedeno, co to je systém a následně co to je nelineární dynamický systém. Ve druhé části této kapitoly je popsáno několik příkladů takových systémů používaných v ekonomii.

#### 3.1. Systémy

Systémem rozumíme obecně soubor prvků, mezi nimiž existují vzájemné vztahy a jako celek má určité vztahy ke svému okolí. Existuje mnoho definic systému. Uvedu dvě známé definice:

- systém je komplex prvků nacházejících se ve vzájemné interakci;
- systém  $S$  je množinou  $S=(P,R)$ , kde  $P$  je neprázdna množina prvků a  $R$  je neprázdna množina všech vztahů (relací, vazeb) mezi nimi.

Tyto definice se v základních rysech shodují a mají společné znaky, mezi které patří objekt, prvky (části), vazby (interakce) mezi prvky, vlastnosti prvků a vazeb, účel a chování systému.

Definice systému  $S$  vycházejí z představy objektu (hmotného i ideového) sestávajícího z navzájem rozlišitelných prvků, jež mají různé vlastnosti. Mezi nimi existují různé vazby, které určují vlastnosti daného objektu jako celku. K nim patří i chování, tj. způsob projevu, resp. způsob realizace jeho cílů, reakce na podmínky aj.

Systém je tvořený:

- prvky;
- vazbami (vazba mezi prvky, vstup a výstup prvku);
- okolím (od okolí je systém oddělen hranicí);
- strukturou a chováním. [21]

Systémy lze dělit dle různých kritérií. Uvedu zde základní dělení na tvrdé a měkké systémy. Tvrdé systémy jsou pevně dány, dobře ohraničeny a lze je ztotožnit s reálným objektem. Varieta systému je známá a relativně nízká. Chování systému má deterministický charakter nebo stochastický charakter se známými pravděpodobnostmi. Pokud nedochází k vnějšímu zásahu, fungují nezávisle na lidském činiteli. Mají omezený počet významných vazeb do okolí nebo vůbec žádné. Cíle systému lze dobře formulovat a existuje kritériální funkce. Prvky, komponenty systému, jejich vazby a funkce jsou zřetelné a lze je dobře poznat i popsat. O systému existují objektivní údaje, které jsou většinou dobře měřitelné a mají

kvantitativní charakter. Pro řešení problémů v systému lze použít exaktní formalizované postupy. Jedná se většinou o technické a neživé systémy, kde významnou roli hrají síla, energie a rovnováha. Příkladem takového systému může být operační systém, konstrukce výrobků nebo vaření špaget podle receptu.

Naproti tomu existují měkké systémy. Takové systémy nejsou dost zřetelné a je nutné je odlišovat od reálného objektu. Varieta systému není známa, nebo je velmi vysoká až nekonečná. Chování systému je složité, má stochastický charakter a neznámé pravděpodobnosti stavů. Chování je neurčité a nelze předpovídat. Člověk je aktivním prvkem systému a ovlivňuje jej svou cílevědomou činností. Nezřetelný systém je ve značné interakci s okolím a je nutné respektovat řadu vnějších vazeb. Cíle systému jsou složité, bývají obtížně definovatelné a mohou se pro jednotlivé prvky lišit. Prvky, komponenty a vazby systému jsou nejasné a při dodržení stejného cíle mohou být různé. Údaje o systému jsou obtížně zjistitelné a mívají subjektivní povahu a kvalitativní charakter. Pro řešení je třeba používat intuici, expertní metody a odhady. Obvykle jde o živé systémy se složitou organizací, kde je důležitá uspořádanost, entropie a informace. Příkladem takového systému může být řízení hospodářské politiky, řízení bankovní instituce nebo ministerstva.

### **3.2. Dynamický nelineární systém**

Dynamický systém sestává ze stavového prostoru, jehož souřadnice popisují stav systému v daném čase a z dynamických podmínek, které popisují změnu tohoto systému v čase. Stav systému je potom popsán vektorem, který leží celý ve stavovém prostoru. Dynamické podmínky jsou většinou zadány soustavou diferenciálních rovnic, které popisují změnu stavového vektoru v čase. Změna stavu dynamického systému se děje provedením těchto diferenciálních rovnic a nahrazením starého stavového vektoru vektorem novým.

Dynamický systém může být deterministický nebo stochastický (náhodný). Deterministický dynamický systém lze poměrně přesně popsat, zatímco u systému stochastického jsme odkázáni pouze na statistické vlastnosti takového systému (například střední hodnota, disperze, směrodatná odchylka, centrální moment a jiné). [22]

Nelineární systém je takový systém, kde neplatí princip superpozice. Princip superpozice je splnění dvou určitých podmínek. Tyto podmínky jsou popsány v [23]. V nelineárním systému platí princip superpozice pouze pro malou množinu izolovaných bodů, kterým říkáme fixní body.

Je-li systém nelineární a nelze tedy využít principu superpozice, je nutné pro výpočet změny stavu systému řešit diferenciální rovnice, což je mnohdy velmi složité. Také není zaručeno, že se nám podaří předpovědět stav systému i do budoucnosti. Někdy se takový systém pro zjednodušení výpočtů linearizuje, tj. nelineární závislost se nahradí závislostí lineární. [22]

### 3.3. Chaos v ekonomii

Benoit Mandelbrot využil svojí fraktální geometrii při zkoumání časových řad. Všiml si, že některé finanční časové řady vykazují prvky soběpodobnosti. Šlo o časové řady, které měly různé vzorkování, den, hodina, deset minut atd. a byly normované tak, aby nejvyšší hodnota měla hodnotu 1 a nejnižší hodnotu 0. A právě průběh s periodou „den“ byl podobný řadě s periodou „hodina“ a ta je podobná řadě s periodou „deset minut“ atd. Této podobnosti se využívá v teorii Elliottových vln. [14, s.102-103]

A proč se zabýváme finančními časovými řadami? Právě proto, že tyto řady vykazují chaos a jejich predikce se stává velice složitým procesem. Dalším problémem je také jejich prediktabilita. Prediktabilita určuje na kolik kroků dopředu jsme schopni spolehlivě předpovědět vývoj. Prediktabilita je volně přeloženo schopnost předpovídat. Díky teorii chaosu je možné pochopit systémy se skrytým řádem a využít poznatky k nalezení právě takového řádu. Mohli bychom také vyjádřit právě onu prediktabilitu nebo například rozeklanost časové řady a pomocí těchto poznatků spolehlivě řešit předpovědi.

Nyní už víme, že se chaos skrývá i v ekonomii. Jsou to například akciové trhy, kde není jednoduché předpovědět, zda hodnota daného cenného papíru bude stoupat či klesat. Celkově je teorie chaosu hlavně využívána na kapitálových trzích. Samozřejmě pro její náročnost je potřebná jistá odborná způsobilost člověka. Nezáleží tedy jen na softwaru, do kterého vložíme data, abychom dostali okamžitý výsledek. Každý člověk má svůj subjektivní názor a zde velmi záleží na posuzovateli, zda je ochoten podstoupit riziko, které ani pomocí teorie chaosu není eliminováno.

Dále jsme schopni využít teorii chaosu při predikci některých ekonomických ukazatelů. Dokonalá predikce by pro stát mohla znamenat mnohé, ale hlavně připravenost na nadcházející ekonomické situace. Objevují se pokusy použít teorii chaosu na zjištění opakujících se procesů v různých indikátorech jako jsou například HDP nebo inflace.

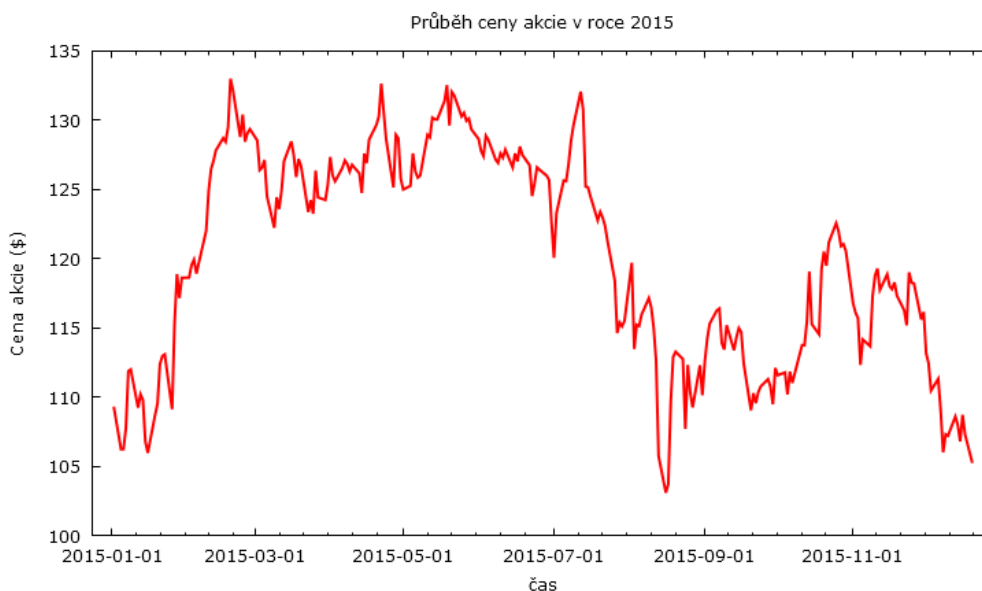
## 4. PŘÍKLADY VYUŽITÍ TEORIE CHAOSU PŘI POPISU EKONOMICKÝCH JEVŮ

V této kapitole bude využití teorie chaosu ukázána na dvou příkladech. Jako první příklad bude použito teorie chaosu na akciových trzích, resp. na finančních časových řadách, které jsou nelineárními dynamickými systémy a vytvoření odpovídajícího modelu je složité. Dále bych rád ukázal využití teorie chaosu na vývoji kurzu měn.

### 4.1. Kapitálové trhy

Jako příklad použití teorie chaosu na kapitálových trzích je zvolena predikce růstu či poklesu ceny akcie, konkrétně akcie společnosti Apple. Data pochází z oficiálních stránek trhu Nasdaq. Jedná se o denní uzavírací hodnoty akcie společnosti Apple za rok 2015 a 2016. Nejprve si zobrazíme časovou řadu na grafu. Analýza je zpracována v softwaru Gretl, který jsme používali při studiu finančních časových řad.

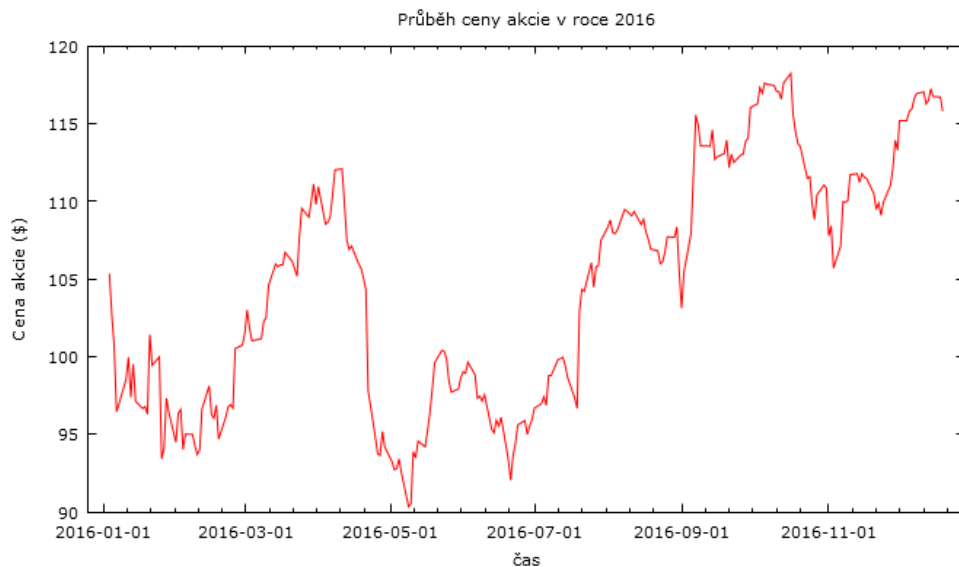
Úplně prvním krokem při analýze časové řady je vytvoření grafu. Na obrázku 24 je okamžitě zřejmé, že takový průběh časové řady je nahodilý a vytvoření odpovídajícího modelu vyžaduje znalost takových modelů jako jsou modely Arch a Garch. Konkrétně u finančních časových řad je složité sestavit odpovídající model.



Obrázek 24: Průběh ceny akcie v roce 2015

*Zdroj: vlastní zpracování*

Dále si zobrazím graf za rok 2016 a i zde očekávám podobný průběh (viz obrázek 25).



**Obrázek 25: Průběh ceny akcie v roce 2016**

*Zdroj: vlastní zpracování*

Na obrázku 25 vidíme opět komplikovaný průběh, stejně komplikovaný jako v roce 2015. Nyní zjistíme hodnotu Hurstova exponentu u obou časových řad, abychom dokázali existenci dlouhodobého paměťového cyklu. Pro jeho kalkulaci v Gretlu je třeba alespoň 128 pozorování. Software použije R/S analýzu popsanou v podkapitole 2.4. Počet intervalů si software zvolí sám a po spuštění získáme tabulku, ve které je zobrazen výpočet Hurstova exponentu a také graf, který ukazuje sklon přímky. Po spuštění výpočtu dostaneme takovýto výsledek (obrázek 26).

Obrázky s přeškálovaným rozsahem pro Close  
(logaritmy jsou se základem 2)

Velikost	RS (avg)	log (Velikost)	log (RS)
252	111,08	7,9773	6,7955
126	40,034	6,9773	5,3231
63	24,577	5,9773	4,6192
31	12,206	4,9542	3,6095
15	5,4785	3,9069	2,4538

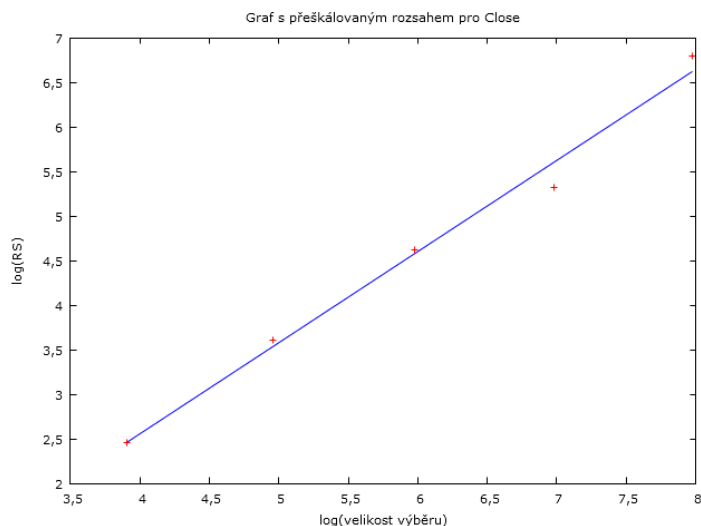
Výsledky regrese (n = 5)

	koef.	směr.	chyba
Intercept	-1,5343		0,37248
Směrnice	1,0228		0,060768

Odhadovaný Hurstův exponent = 1,02282

**Obrázek 26: Výpočet Hurstova exponentu pro rok 2015**

*Zdroj: vlastní zpracování*



**Obrázek 27: Graf R/S analýzy pro rok 2015**

*Zdroj: vlastní zpracování*

Na obrázku 26 vidíme podobnou tabulku jako v podkapitole 2.4. Výsledek Hurstova exponentu je 1,02282 pro rok 2015. Tato hodnota zároveň vyjadřuje sklon přímky na obrázku 27. Hurstův exponent nabývá hodnot od 0 do 1 nicméně pomocí R/S analýzy je možné dosáhnout hodnoty větší než 1. Na burzovním fóru [18] je pouze vyjádření, že pokud Hurstův exponent přesahuje své hranice, resp. je větší než 1, tak pravděpodobně nemá žádný význam. Svědčí to nejspíše o tom, že použitý postup nedává vždy spolehlivé výsledky a charakter časové řady by bylo nutné zkoumat jinými metodami. Možná to znamená, že časová řada má dlouhodobý paměťový cyklus, tedy není tvořena jako náhodná procházka. Nyní zjistíme Hurstův exponent u ceny akcií za rok 2016.

Obrázky s přeškálovaným rozsahem pro Close  
(logaritmy jsou se základem 2)

Velikost	RS (avg)	log(Velikost)	log(RS)
252	99,213	7,9773	6,6325
126	48,709	6,9773	5,6061
63	25,869	5,9773	4,6932
31	13,213	4,9542	3,7239
15	5,8689	3,9069	2,5531

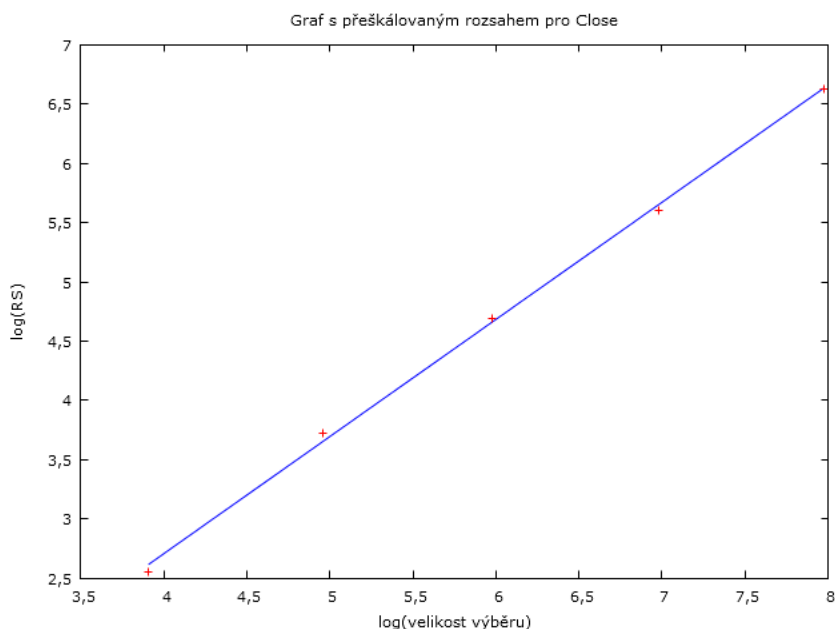
Výsledky regrese (n = 5)

	koef.	směr. chyba
Intercept	-1,2463	0,12168
Směrnice	0,98816	0,019851

Odhadovaný Hurstův exponent = 0,988162

**Obrázek 28: Výpočet Hurstova exponentu pro rok 2016**

*Zdroj: vlastní zpracování*



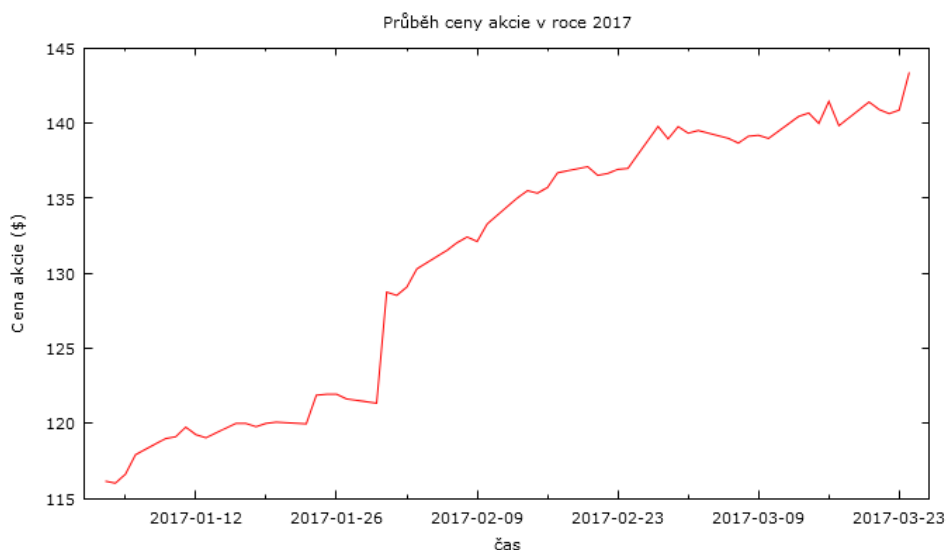
**Obrázek 29: Graf R/S analýzy pro rok 2016**

*Zdroj: vlastní zpracování*

Vidíme, že hodnota Hurstova exponentu se blíží jedné i pro rok 2016. Pokud bychom ignorovali pravidlo, že Hurstův exponent nabývá pouze hodnot od 0 do 1, pokračovali bychom porovnáním hodnot mezi periodami. Platí  $1,02282 > 0,988162$ , resp. hodnota předchozího období je větší než hodnota následujícího období ( $H_i > H_{i+1}$ ). Víme tedy, že trend časové řady bude posílen. Nyní musíme zjistit, zda v roce 2016 hodnota akcie častěji stoupala nebo klesala. Jednoduchým pravidlem zjistíme, že hodnota akcie častěji stoupala,

a to přesně 133x z 251 pozorování. Podle pravidla zmíněného v podkapitole 2.3. je tedy pravděpodobné, že v roce 2017 bude cena akcie Apple častěji stoupat.

Hodnota ceny akcie společnosti Apple za rok 2016 stoupla o 10,47 \$. Jaký bude rok 2017 se ukáže až časem, nyní mohu zobrazit hodnoty akcie pouze za necelé 3 měsíce.



**Obrázek 30: Průběh ceny akcie v roce 2017**

*Zdroj: vlastní zpracování*

Z grafu (obrázek 30) vidíme, že cena akcie Apple zatím opravdu stoupá častěji, nicméně konec roku 2017 je momentálně ještě daleko a věrohodnost předpovědi častějšího stoupání je v tuto chvíli nepotvrzená.

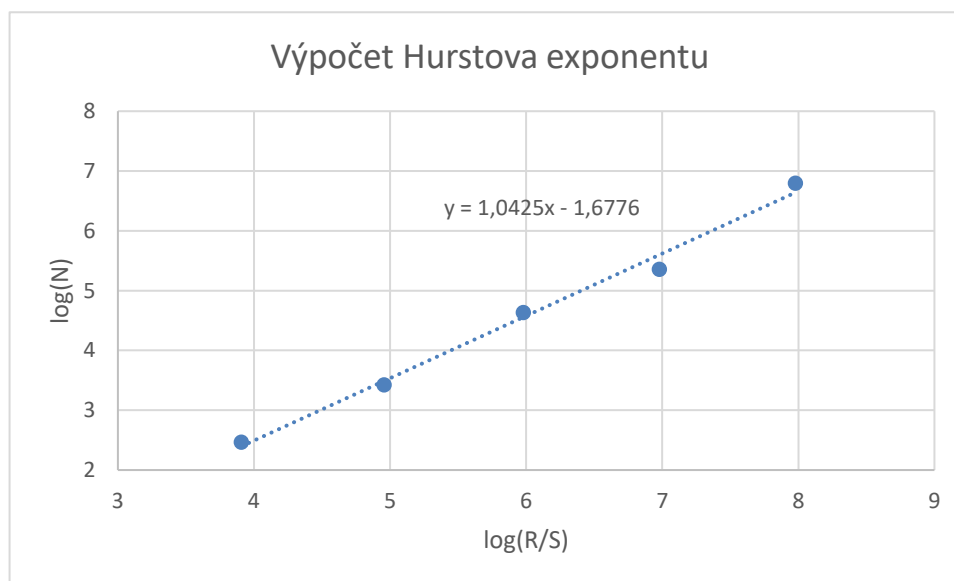
Nyní můžeme odvodit fraktální dimenzi časových řad. Podle vztahu  $D = 2,0 - H$ . Tedy pro rok 2015  $D = 0,97718$  a pro rok 2016  $D = 1,011838$ . Čím nižší je hodnota Hurstova exponentu, tím více se převádí řada do druhé dimenze. Čím vyšší je tedy hodnota  $D$ , resp. větší dimenze, tím členitější průběh časová řada má. Nicméně pokud by hodnota  $D$  byla celočíselná, nebyla by časová řada fraktální. Obě časové řady mají Hurstův exponent větší než 0,5. To znamená že obě jsou fraktální a použití stacionárních modelů je diskutabilní.

Nyní bychom měli vypočítat Ljapunovův exponent. To je ovšem velmi náročné, a proto se zde používá Wolfův algoritmus. Pomocí Wolfova algoritmu lze zjednodušeně odhadnout právě Ljapunovův exponent. Existují komerční programy, které dokáží získat z časové řady jak Hurstův, tak právě i Ljapunovův exponent, nicméně výstupy těchto programů zde nebudou diskutovány.



Obecně platí, že čím je menší Ljapunovův exponent, tím se zvyšuje prediktabilita časové řady. Vysoká prediktabilita tedy značí, že můžeme předpovědět stavy systému na více kroků dopředu. To je zřejmé ze vztahu  $P=1/L$ , kde P je prediktabilita a L je Ljapunovův exponent. Příkladem Ljapunovova exponentu pro podobné finanční časové řady s podobným průběhem mohou být hodnoty, které se pohybují kolem  $L = 0,82$ . Pokud by i v našem případě vyšla hodnota Ljapunovova exponentu 0,82 jeho prediktabilita by byla rovna 1,2. Vzhledem k tomu, že zvolená časová řada má denní vzorkování, znamenalo by to, že jsme spolehlivě schopni odhadnout cenu akcie Apple na 1,2 dny dopředu. Čím nižší hodnota Ljapunovova exponentu by byla, tím bychom dosáhli delší prediktability a mohli bychom spolehlivě odhadnout hodnotu akcie na více kroků dopředu.

Vzhledem k tomu, že jsem prozatím neexistuje vysvětlení pro hodnotu Hurstova exponentu přesahující 1, vypočítáme vlastní R/S analýzu pomocí MS Office Excel. Pokud by výsledky byly různé znamenalo by to, že je chyba v používaném algoritmu. Výsledky byly velmi podobné. Malé odchylky mohly nastat z důvodu zaokrouhlování v sw Gretl nebo malých chyb. Nicméně hodnota Hurstova exponentu byla stále větší než 1.



**Obrázek 31: Výpočet Hurstova exponentu v Excelu**

*Zdroj: vlastní zpracování*

Na obrázku 31 je vidět, že sklon přímky, resp. Hurstův exponent je 1,0425. Opět se tedy dostáváme za hranici intervalu 0–1. To znamená, že software Gretl používá stejný algoritmus.

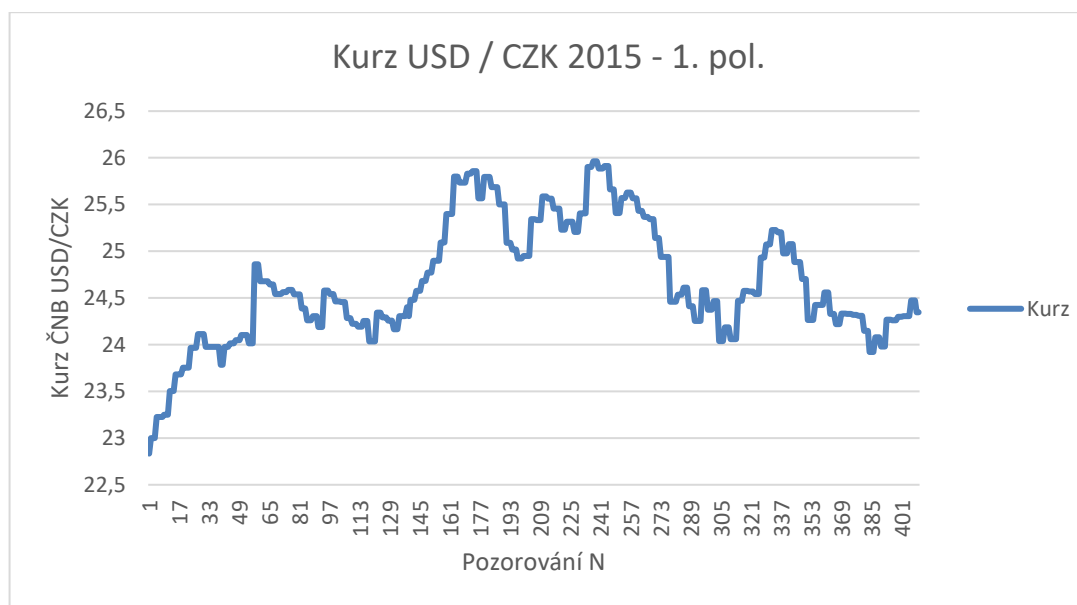
Na třetí pokus vyčíslení Hurstova exponentu je použit zjednodušený postup uvedený v podkapitole 2.3. Tímto způsobem jsme získali  $H = 0,8171$  pro rok 2015 a  $H = 0,7995$  pro rok 2016. Toto jsou naprosto jiné výsledky, ale jsou z intervalu 0–1. Výsledek opět naznačuje stejný závěr, že trend časové řady bude posílen.

Vzhledem k absenci podrobnějších rozborů nemá momentálně hodnota Hurstova exponentu významnou vypovídací schopnost. Při hledání vhodných modelů by bylo rozumné se přiklonit k modelům typu Arch nebo Garch. Pravděpodobně bychom získali více informací právě z těchto modelů. Neznamena to tedy, že teorie chaosu je momentálně nepoužitelná, ale že bude potřeba podrobnější rozbor a kvalitnější softwarové vybavení.

## 4.2. Kurz

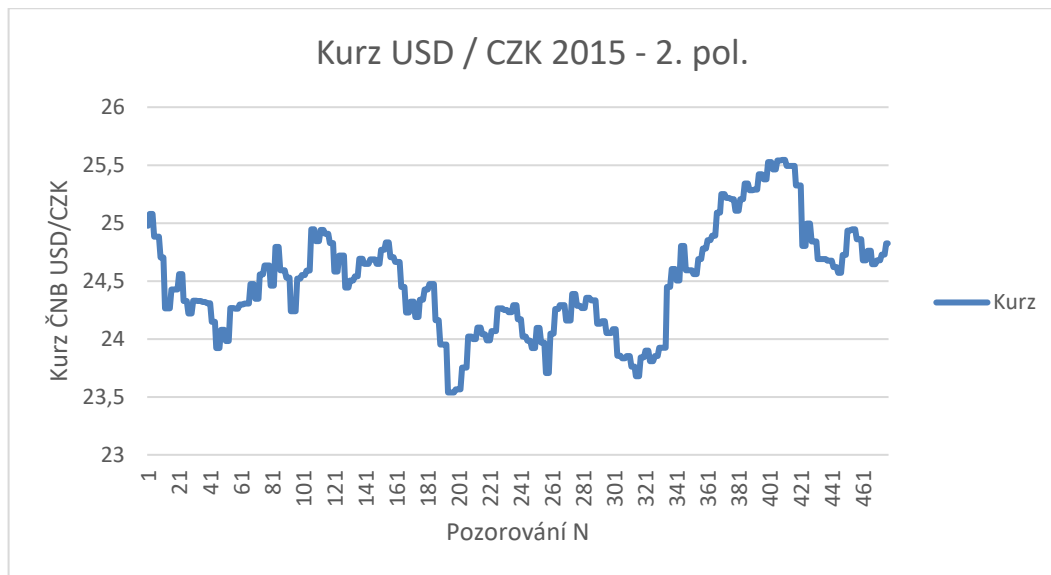
Nyní si ukážeme výpočet Hurstova exponentu na vývoji kurzu měn. Konkrétně se jedná o kurz USD/CZK. Data pochází z webu Komerční banky. Je to kurz vyhlášený ČNB s tím, že každý den byl zaznamenán kurz v 7:00, 15:00 a 18:30. V analýze budeme porovnávat vývoj kurzu v prvním pololetí roku 2015 a vývoj kurzu v druhém pololetí pro rok 2015. Mohli bychom tím získat možnost předurčit průběh kurzu v prvním pololetí roku 2016.

Nejprve si zobrazíme kurz v grafu. Na obrázku 32 můžeme vidět vývoj kurzu v prvním pololetí roku 2015 a na obrázku 33 vývoj kurzu v druhém pololetí 2015.



Obrázek 32: Vývoj kurzu USD/CZK 2015 – 1. pol.

*Zdroj: vlastní zpracování*

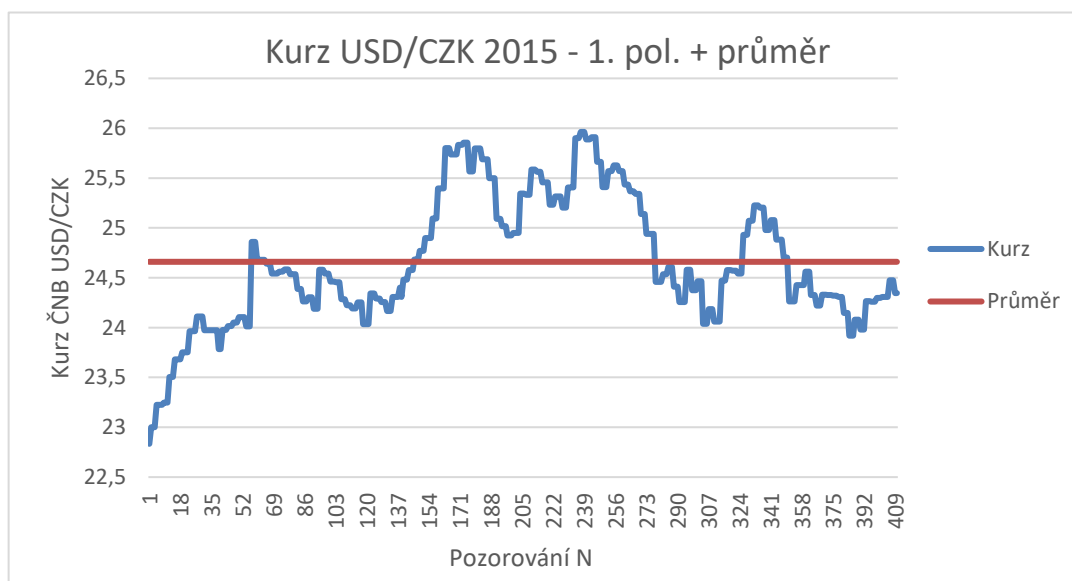


**Obrázek 33: Vývoj kurzu USD/CZK 2015 – 2. pol.**

*Zdroj: vlastní zpracování*

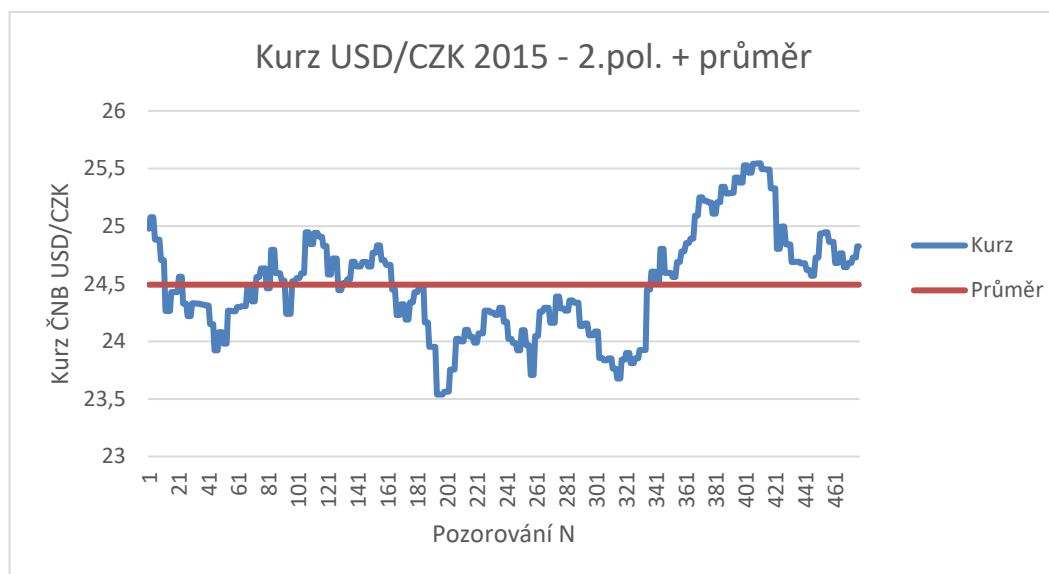
Z grafů nelze vypočítat určitý trend nebo nějaké sezónní výkyvy. Pokud bychom chtěli vymodelovat takovou volatilitu, nejspíš bychom opět použili modely typu Arch a Garch.

Opět použijeme zjednodušený model výpočtu Hurstova exponentu. V prvním pololetí roku 2015 vyšel Hurstův exponent 0,264. V druhé polovině podobně 0,240. Obě časové řady mají tedy dlouhodobý paměťový cyklus dle kritéria zmíněného v podkapitole 2.3. Také je již z grafů jasné, že kurz se vrací k průměrné hodnotě. Na obrázcích 34 a 35 je zobrazen průměr oranžovou čarou.



**Obrázek 34: Zobrazení průměrného kurzu 2015 – 1. pol.**

*Zdroj: vlastní zpracování*



**Obrázek 35: Zobrazení průměrného kurzu 2015 – 2. pol.**

*Zdroj: vlastní zpracování*

Nejprve si musíme uvědomit, že v grafu jsou zobrazena půlroční data, měřená každý den třikrát. Vidíme, že během takového období se kurz vrací k průměrné hodnotě několikrát, a to v obou obdobích. Znamená to tedy že hypotéza je správná a můžeme potvrdit, že pokud hodnota Hurstova exponentu je menší než 0,5, má tendenci vracet se k průměrné hodnotě.

Dále jsme zjistili, že hodnota Hurstova exponentu byla v první polovině roku 2015 větší, resp.  $H_i > H_{i+1}$ . Opět jsme tedy získali výsledek s posílením trendu časové řady. Nyní musíme určit, zda časová řada v druhém pololetí roku 2015 častěji stoupala nebo klesala. Dle jednoduchého pravidla je zřejmé, že kurz byl nejčastěji na stejné hodnotě, ale vícekrát klesal, než stoupal. To by znamenalo, že v první polovině roku 2016 by kurz měl opět častěji klesat.

Opět vyčíslíme fraktální dimenzi, tedy pro první polovinu roku 2015  $D=2-0,264 = 1,736$ , a pro druhou  $D=2-0,24=1,76$ . Vzhledem k tomu, že dimenze je vysoká, je vidět, že časové řady jsou velmi členité.

## ZÁVĚR

Vzhledem k tomu, že teorie chaosu je nová věda, resp. věda 21. století, je třeba být méně striktní při hodnocení jejího použití v reálném světě. V ekonomickém prostředí je třeba ještě více času na prozkoumání oné nové teorie. Myslím si, že teorie chaosu bude za několik let velmi používaným prostředkem pro predikci a popis časových řad. Nyní máme vhodnou techniku a prostředky k tomu, abychom dokázali rozvinout tuto teorii k dokonalosti.

Nesmíme opomenout, že teorie chaosu již byla využita v jiných vědních odvětvích, jako je například medicína. Díky fraktální geometrii jsme dokázali popsat objem plic. Plíce jsou jedním z nejdůležitějších orgánů člověka a pro pokrok v medicíně bylo vždy nutné znát nejprve stavbu těla, resp. orgánů. Pokud teorie chaosu, a hlavně fraktální geometrie, dokáže pomoci lidem v tak důležitém odvětví jako je právě medicína, je zřejmé, že bude více využívána.

V matematickém světě jsou i odpůrci teorie chaosu a ti říkají, že každou časovou řadu lze lépe vyjádřit statistickými modely. Nicméně dodávají, že je potřeba více času k prostudování teorie chaosu. A to je i můj názor. Nyní existuje několik výkonných softwarů, které dokáží vytěžit z teorie maximum, nicméně jsou široké veřejnosti málo dostupné. Za několik let se můžeme těšit i nekomerčním softwarům, které budeme moci použít.

Neměli bychom opomenout ani výsledky ze čtvrté kapitoly. Zjistili jsme rozdílné výsledky Hurstova exponentu za použití R/S analýzy a za použití zkráceného výpočtu. Mohli bychom obhajovat rozdílnost například tím, že jsme se dopustili nepřesností v podobě zaokrouhlování nebo také tím, že máme krátkou časovou řadu a pro vyčíslení je třeba zvýšit počet pozorování. Bude potřeba důkladnějších analýz, které budou poskytovat přesnější výsledky. Výsledky analýz by měly být zkoumány z různých hledisek a ověřovány různými metodami. Otázka, jak interpretovat tyto výsledky, zůstává otevřená. V kapitole 4 je naznačena pravděpodobně nedefinovatelná hodnota Hurstova exponentu větší než 1.

Nyní přejdeme k výsledkům Hurstova exponentu u vývoje kurzu. Dle mého názoru dobře vystihuje vývoj a pokud bychom sledovali, jak se kurz opravdu vyvíjel, zjistili bychom stejné výsledky. Kurz se neustále pohyboval kolem průměrné hodnoty. Rád bych prozkoumal časové řady různé délky a zjistil, jak se Hurstův exponent mění. Vzhledem k rozsahu bakalářské práce není možné interpretovat všechny výsledky.

Teorie chaosu je krásná a zajímavá věda a já věřím, že bude v budoucnosti věrným pomocníkem ekonomů a nabyde vysoké popularity. Pokud by čtenáře zajímal podrobnější

vývoj teorie chaosu, doporučuji knihu od Jamese Glicka [2]. V případě zájmu o matematickou stránku chaosu doporučuji spíše literaturu od Media A. [1]. Dokonalým popisem fraktálů a vůbec fraktální geometrie je pak publikace od Falconera [24].

## POUŽITÁ LITERATURA

- [1] MEDIO, A., GALLO, G., *Chaotic Dynamics Theory and Applications to Economics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993, 364 s. ISBN 0-521-48461-8.
- [2] GLEICK, James. *Chaos: vznik nové vědy*. Přeložila Renata KAMENICKÁ, přeložil Jaroslav SEDLÁŘ. Brno: Ando, 1996. Nová věda. ISBN 80-86047-04-0.
- [3] Martin Hinner's homepage, Lorenzovo počasí [online]. Praha, 1999-06-23, 2007 [cit. 2017-04-02]. Dostupné z: <http://martin.hinner.info/math/Fraktaly/weather.png>
- [4] PROKŠOVÁ J., DUŠPEK J., Lorenzovo kolo [online]. Plzeň, 2007 [cit. 2017-04-02]. Dostupné z: <https://www.nelterm.kof.zcu.cz/hydrodynamika/tepelnakonvekce/lorenzovokolo.jpg>
- [5] STEWART, Ian. *Hraje Bůh kostky?: nová matematika chaosu*. Praha: Argo, 2009. Zip (Argo: Dokořán). ISBN 978-80-257-0024-2.
- [6] Goro net: Fraktály a jejich popis v Matlabu. [online]. 2007 [cit. 2017-04-02]. Dostupné z: [http://goro.czweb.org/fractal\\_types.php](http://goro.czweb.org/fractal_types.php)
- [7] Teorie chaosu - super dokument. In: Youtube [online]. 3. 2. 2017 [cit. 2017-04-02]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=jZoYJSpjhco>
- [8] MANDELROT, Benoît B. *Fraktalista: rebel ve vědě*. Praha: Argo, 2014. Zip (Argo: Dokořán). ISBN 978-80-7363-608-1.
- [9] Benoit Mandelbrot: Fraktály a umění hrubosti. TED [online]. 2010 [cit. 2017-04-03]. Dostupné z: [https://www.ted.com/talks/benoit\\_mandelbrot\\_fractals\\_the\\_art\\_of\\_roughness?language=cs#t-87087](https://www.ted.com/talks/benoit_mandelbrot_fractals_the_art_of_roughness?language=cs#t-87087)
- [10] Koch curve. Mathworks [online]. 2016 [cit. 2017-04-03]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/55796-koch-curve>
- [11] KOUDELA, Libor. *O pojetí křivky*. Kanina: OPS, 2013. ISBN 9788087269312.
- [12] Fraktální geometrie a využití v predikci [online]. [cit. 2017-04-22]. Dostupné z: <http://homel.vsb.cz/~nav79/fraktgeo/>
- [13] Kiwiki. Rösslerův atraktor. [online]. 2010 [cit. 2017-04-03]. Dostupné z: [http://www.kiwiki.info/index.php/S%C3%BAbor:0304\\_rossler\\_3.png](http://www.kiwiki.info/index.php/S%C3%BAbor:0304_rossler_3.png)

- [14] DOSTÁL, Petr, Karel RAIS a Zdeněk SOJKA. *Pokročilé metody manažerského rozhodování: konkrétní příklady využití metod v praxi*. Praha: Grada, 2005. Expert (Grada). ISBN 80-247-1338-1.
- [15] KSR. Definice fraktálů. [online]. 2011 [cit. 2017-02-08]. Dostupné z: <http://www.ksr.tul.cz/fraktaly/obsah.html>
- [16] KSR. Soběpodobnost euklidovských objektů. [online]. 2011 [cit. 2017-04-16]. Dostupné z: <http://www.ksr.tul.cz/fraktaly/printsrc/obr10.jpg>
- [17] KSR. Soběpodobnost fraktálních objektů. [online]. 2011 [cit. 2017-04-16]. Dostupné z: <http://www.ksr.tul.cz/fraktaly/printsrc/obr11.jpg>
- [18] Stack Exchange. Quantitative Finance [online]. [cit. 2017-04-22]. Dostupné z: <https://quant.stackexchange.com/questions/4374/can-the-hurst-exponent-be-greater-than-one>
- [19] Stochastic Fractals. R/S Analysis to estimate the Hurst exponent. [online]. 2009 [cit. 2017-02-08]. Dostupné z: <https://stochasticfractals.wordpress.com/2009/10/14/rs-analysis-to-estimate-the-hurst-exponent/>
- [20] Fractals, Technical analysis and other things. Rescaled range analysis [online]. 2009 [cit. 2017-02-08]. Dostupné z: <http://fractalfinance.blogspot.cz/2009/10/rescaled-range-analysis.html>
- [21] KAŠPAROVÁ, M. - KŘUPKA, J. *Multimediální pomůcka k předmětu Teorie systémů I*. In *Informatika XX/2007*. Brno: Konvoj, spol. s r.o., 2007. s. 1-2. ISBN 978-80-7302-134-4.
- [22] Fraktály. Nelineární dynamické systémy. [online]. 1999 [cit. 2017-02-08]. Dostupné z: <http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/fract/clanky/2.htm>
- [23] Lineární systém. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2017-04-22]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Line%C3%A1rn%C3%AD\\_syst%C3%A9m](https://cs.wikipedia.org/wiki/Line%C3%A1rn%C3%AD_syst%C3%A9m)
- [24] FALCONER, K. J. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. New York: Wiley, c1990. ISBN 0471922870.