SCIENTIFIC PAPERS
OF THE UNIVERSITY OF PARDUBICE
Series B
The Jan Perner Transport Faculty
3 (1997)

MATEMATICKÝ MODEL ÚLOHY STANOVENÍ TRASY VOZIDEL PRO VÍCE DEP, VÍCE VOZIDEL A VÍCE TYPŮ POŽADAVKŮ

Markéta BRÁZDOVÁ

Katedra technologie a řízení dopravy

1. Charakteristika svozných a rozvozných úloh

1.1 Úlohy o stanovení optimálních tras

Problematika svozných a rozvozných úloh úzce souvisí s pojmem *logistika*. Logistika je věda, která se zabývá pohybem materiálu, zboží, služeb, osob apod. Kompletní logistika zahrnuje přesuny materiálu od získání surovin přes různé typy skladování, distribuci výrobku ke spotřebiteli až po konečnou likvidaci výrobku na konci jeho doby životnosti. Ve všech fázích tohoto procesu je třeba navrhnout trasy převozu zboží, výrobků nebo osob co nejefektivněji. K těmto tzv. úlohám stanovení optimálních tras patří i svozné a rozvozné úlohy. Problémy stanovení optimálních tras mají tři základní úrovně: strategickou, taktickou a operativní. Strategická úroveň se zabývá rozmísťováním obsluhovaných objektů, taktická určováním potřebného počtu vozidel, pracovníků, strojů atd. Operativní úroveň hledá konkrétní možnosti rozvrhování tras, stanovuje jízdní řády pro jednotlivé posádky apod.

Úlohy, kde se ze zadaných parametrů (rozmístění jednotlivých objektů, které je třeba obsloužit, vzdálenosti, popř. náklady na přemístění mezi jednotl. místy, počet a umístění dep, počet vozidel k dispozici, kapacity jednotlivých vozidel, časy, kdy musí být jednotlivá místa obsloužena apod.) má určit optimální trasa každého vozidla tak, aby byly dodrženy stanovené podmínky (mezi tyto podmínky patří i návrat zpět do výchozího bodu), se nazývají *okružní dopravní úlohy*. Mezi ně lze zařadit i úlohy svozného a rozvozného charakteru.

Požadovaným výstupem těchto úloh je tedy stanovení trasy pro každé z vozidel, jeho jízdní řád apod. Pro každou trasu musíme přesně stanovit sekvenci míst, která mají být navštívena, časový harmonogram pak udává konkrétní časové okamžiky, kdy má být uspokojen požadavek jednotlivých míst.

Okružní dopravní problémy lze zařadit do kategorie optimalizačních úloh na grafech. Grafy jako matematickými útvary se zabývá matematická disciplína nazvaná teorie grafů. Tato teorie slouží jako jeden z velmi důležitých prostředků při řešení rozsáhlé třídy matematických modelů operačního výzkumu (např. hledání nejlevnějších cest, toků na sítích, nejlevnějších vzájemných propojení míst apod.).

Hledání optimálních cest patří mezi nejčastější úlohy optimalizace na grafech. Rozeznáváme několik typů úloh o optimálních cestách :

- hledání libovolné cesty mezi dvěma vrcholy,
- hledání nejkratší cesty mezi dvěma vrcholy (cesty s nejmenším počtem hran),
- hledání nejlevnější cesty mezi dvěma uzly (cesty s nejmenším součtem ohodnocení hran).

Okružní dopravní problémy patří mezi úlohy o hledání nejlevnější cesty. Lze je řešit pomocí exaktních nebo heuristických metod. Protože náročnost výpočtu se vzrůstající dimenzí úlohy (počet vrcholů, vozidel, dep) značně roste, ustupuje se zejména pro tyto rozsáhlé úlohy od výpočtu pomocí exaktních metod (často by ani nebyl realizovatelný) a dává se přednost metodám heuristickým.

1.2 Klasifikace okružních dopravních úloh

Z hlediska sledovaného cíle lze problémy rozdělit na tři základní skupiny:

- problémy stanovení tras,
- problémy časových rozvrh,
- kombinované problémy.

1.2.1 Problémy stanovení tras

Obecně lze problém popsat následujícím způsobem. Jsou zadány požadavky určitého typu (např. navštívit všechny uzly, pouze nakládka), počet uzlů, počet dep, počet vozidel v každém z nich, parametry vozidel, matice vzdáleností mezi jednotlivými uzly a depy, časová omezení apod. Cílem je určit pro každé vozidlo trasu tak, aby byla minimalizována nákladová funkce (např. počet ujetých kilometrů, celkový čas trasy apod.) a aby byly zároveň dodrženy všechny omezující podmínky.

1.2.2 Problémy časového rozvrhování

Problémy časového rozvrhování lze dále rozdělit na tři základní skupiny:

1.2.2.1 Časové rozvrhování vozidel :

Vstupní informací je seznam obsluhovaných míst s uvedením času začátku a konce plnění požadavku. Úkolem je sestavení sítě, tedy vytvoření přípustných spojení, hran.

Účelovou funkcí obvykle v tomto případě bývá minimalizace celkového času, který vozidlo (popř. více vozidel) na trase stráví.

1.2.2.2 Časové rozvrhování posádek :

Klasickou úlohou tohoto typu je časový rozpis pracovníků na jedno pracoviště. Požadavky mohou být zadány např. ve formě histogramu (pro jednotlivé časové úseky je uveden požadovaný počet pracovníků). Omezujícími podmínkami se zde rozumí smluvní podmínky pracovníků o uspořádání pracovní doby (např. délka pracovní směny, přestávky apod.). Cílem úlohy je stanovit takový rozpis služeb pro jednotlivé pracovníky, aby byly splněny všechny omezující podmínky a náklady na odměny pracovníků byly minimální.

1.2.2.3 Časové rozvrhování vozidel a posádek :

Tato úloha shrnuje oba předchozí problémy. Typickým příkladem je problém městské hromadné dopravy, kdy jsou zadány přesné časové údaje pro začátek a konec každého výjezdu (výjezdem rozumíme trasu vozidla mezi dvěma konečnými stanicemi, popř. mezi depem a konečnou stanicí) a zároveň i požadavky na počet pracovníků. Trasa, kterou vykoná jedna posádka, ale nemusí být totožná s výjezdem vozidla (směny lze vystřídat i v průběhu jednoho výjezdu vozidla). Cílem je najít takovou kombinaci směn, aby byly splněny všechny požadavky, nebyly porušeny předpisy o délce trvání směn, délce přestávek apod. a celkové vynaložené náklady byly minimální.

1.2.3 Kombinované problémy

Při řešení těchto problémů je nutné uvažovat požadavky časové i prostorové současně. Jde např. o časové a prostorové rozvrhování tras školních autobusů, městských čistících vozů apod.

1.3 Parametry dopravních úloh

V následujícím přehledu jsou uvedeny charakteristiky, podle kterých se provádí klasifikace úloh.

Tabulka č. 1

1.	*Rozsah vozového parku*	jediné vozidlo více vozidel
2.	*Typy vozidel vozového parku*	homogenní (jediný typ vozidla) heterogenní (více typů vozidel) speciální typy vozidel
3.	*Garážování vozidel*	jediné depo více dep volné garážování
4.	*Povaha poptávky*	deterministická stochastická povolení částečného uspokojení požadavků
5.	*Umístění poptávky*	v uzlech na hranách kombinovaně
6.	*Typ sítě*	orientovaná neorientovaná smíšená euklidovská
7.	*Omezení kapacity vozidel*	zahrnuto - pro všechna vozidla stejné - pro různé typy vozidel různé nezahrnuto

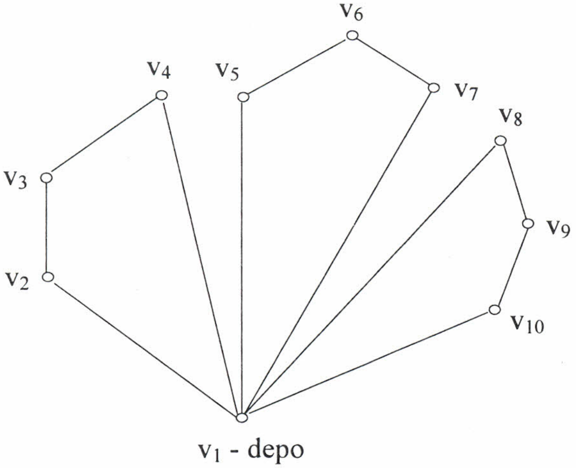
8.	*Maximální čas trasy*	zahrnut - pro všechny trasy stejný - pro různé trasy různý nezahrnut
9.	*Operace*	pouze nakládání pouze vykládání kombinace dělené dodávky (povoleny nebo nepovoleny)
10.	*Náklady*	variabilní náklady (podle délky trasy a vytížení vozidla) fixní náklady (náklady na pořízení vozidla apod.)
11.	*Účelová funkce*	minimalizace nákladů tras minimalizace počtu požadovaných vozidel maximalizace funkce užitku

2. Problém stanovení trasy vozidel

Jde vlastně o tzv. vícenásobný problém obchodního cestujícího. Při řešení této úlohy se předpokládá více „obchodních cestujících" (vozidel). Obchodní cestující mají za úkol navštívit každé z obsluhovaných míst právě jednou, předpokládáme, že každé z těchto míst má také určitý požadavek (kolik jednotek zboží místo potřebuje). K dispozici je *A* „obchodních cestujících" - tedy vozidel vozového parku, která vyjíždějí a vracejí se do stejného depa, počet dep může být vyšší než jedno. Každé z vozidel musí na trase navštívit alespoň jeden vrchol, omezení úlohy vyplývají z omezené kapacity vozidel, popř. může být omezujícím faktorem čas.

2.1 Stanovení trasy vozidel - jediné depo, více vozidel

V této úloze minimalizujeme celkovou ujetou vzdálenost, vzniklé náklady, popř. čas nejdelší trasy. Mimo jiné je dána deterministická poptávka v každém vrcholu a kapacita každého vozidla. Cílem je určit takovou trasu pro každé z vozidel, aby se minimalizovalo kritérium, byla uspokojena poptávka v každém vrcholu a nebyla překročena povolená kapacita vozidel.

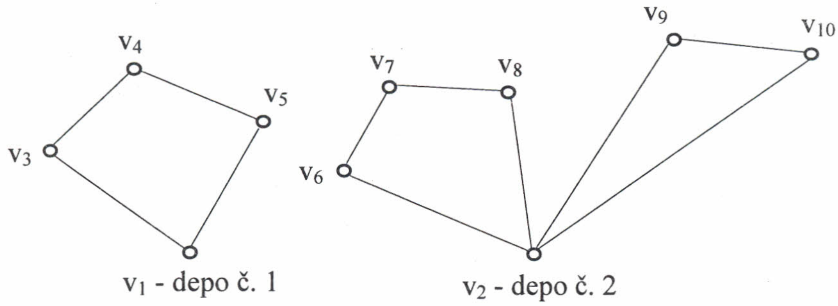


poptávka v každém vrcholu = 1 jednotka
kapacita každého vozidla = 3 jednotky

Obr. 1

2.2 Stanovení trasy vozidel - více dep, více vozidel

Jde o téměř stejnou úlohu jako je předešlá, rozdíl je pouze v počtu dep. Máme k dispozici více dep s různým počtem vozidel. Každé vozidlo se musí vrátit do stejného depa, ze kterého bylo vypraveno.



Obr. 2

2.3 Stanovení trasy vozidel - jediné depo, více vozidel, stochastická poptávka

Úloha je obdobná, pouze poptávka v jednotlivých uzlech není přesně známa, ale vychází z pravděpodobnostního rozdělení.

3. Matematický model stanovení trasy vozidel - více dep, více vozidel, více typů požadavků

Daný počet vozidel (obchodních cestujících) má navštívit n vrcholů sítě tak, aby celková ujetá vzdálenost (popř. náklady, celkový čas jízdy) všech vozidel (obch. cestujících) byla minimální. Vozidla mohou být garážována v několika různých depech, každé vozidlo se vždy musí vrátit do stejného depa, ze kterého vyjelo. Pro přepravu požadavku typu k je třeba použít také vozidlo typu k. Kapacita vozidel pro přepravu stejného typu požadavku je stejná. Požadavky v jednotlivých vrcholech jsou uspokojeny pouze jedním vozidlem a každý vrchol s požadavkem k je vozidlem typu k navštíven právě jednou.

Použité označení :

n	počet obsluhovaných vrcholů
p	počet různých typů požadavků
M	počet dep různých typů
M^k	počet dep typu k
A	celkový počet vozidel
a^k	počet vozidel typu k
K_v^k	kapacita vozidla v pro přepravu požadavku k
T_v^k	maximální čas povolený pro trasu vozidla v typu k
d_i^k	velikost požadavku typu k ve vrcholu i
t_i^{vk}	čas potřebný pro vozidlo v typu k na naložení nebo vyložení ve vrcholu i

t_{ij}^{vk} čas jízdy vozidla v typu k z vrcholu i do vrcholu j ($t_{ii}^{vk} = \infty$)

c_{ij} náklady na cestu z vrcholu i do vrcholu j

Položíme $x_{ij}^{vk} = 1$ je-li na trase z vrcholu i do vrcholu j při obsluze požadavku k vozidlo v

$x_{ij}^{vk} = 0$ jinak.

Depa označíme jako vrcholy s indexy $1,\dots, M$. Obsluhované vrcholy tedy budou mít indexy $M+1,\dots, n+M$.

Minimalizujeme funkce: $\sum_{i=1}^{n+M}\sum_{j=1}^{n+M}\sum_{v=1}^{a^k} c_{ij}x_{ij}^{vk} \to \min$ pro $k = 1, \dots, p$

$a^k \to \min$ pro $k = 1, \dots, p$.

Omezující podmínky:

$$\sum_{i=M+1}^{n+M}\sum_{v=1}^{a^k} x_{ij}^{vk} = 1$$ pro $j = M+1,\dots, n+M$

pro $k = 1, \dots, p$

do každého obsluhovaného vrcholu vjede právě jedno vozidlo

$$\sum_{j=M+1}^{n+M}\sum_{v=1}^{a^k} x_{ij}^{vk} = 1$$ pro $i = M+1,\dots, n+M$

pro $k = 1, \dots, p$

z každého obsluhovaného vrcholu vyjede právě jedno vozidlo

$$\sum_{i=1+M}^{n+M} x_{il}^{vk} - \sum_{j=1+M}^{n+M} x_{lj}^{vk} = 0$$ pro $v = 1,\dots, a^k$

pro $l = 1+M, \dots, n+M$

pro $k = 1, \dots, p$

vozidlo musí vyjet z vrcholu, do kterého vjelo

$$\sum_{i=1+M}^{n+M} d_i^k \left(\sum_{j=1+M}^{n+M} x_{ij}^{vk}\right) \le K_v^k$$ pro $v = 1,\dots, a^k$

pro $k = 1, \dots, p$

podmínka pro kapacity vozidel

$$\sum_{i=1}^{n+M} t_i^{vk} \sum_{j=1}^{n+M} x_{ij}^{vk} + \sum_{i=1}^{n+M}\sum_{j=1}^{n+M} t_{ij}^{vk} x_{ij}^{vk} \le T_v^k$$ pro $v = 1,\dots, a^k$

pro $k = 1, \dots, p$

podmínka pro celkový čas

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=M+1}^{n+M} x_{ij}^{vk} \le 1$$

pro $v = 1,\dots, a^k$

pro $k = 1, \dots, p$

z depa i do vrcholu j jede vozidlo v typu k max. jednou

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=M+1}^{n+M} x_{ji}^{vk} \le 1$$

pro $v = 1,\dots, a^k$

pro $k = 1, \dots, p$

z vrcholu j do depa i jede vozidlo v typu k max. jednou

$$\sum_{i\in Q}\sum_{j\notin Q} x_{ij}^{vk} \ge 1$$

pro $v = 1,\dots, a^k$

pro $k = 1, \dots, p$

Q je libovolná podmnožina množiny vrcholů grafu, která obsahuje všechna depa

z množiny Q musí existovat cesta do množiny $\bar{Q}$.

4. Závěr

Uvedený matematický model je zaměřen na úlohu, kdy budou do dep sváženy (popř. z dep rozváženy) požadavky různých druhů. Jednou z možných praktických aplikací tohoto modelu je optimalizace svozu komunálního odpadu. Podobným problémem, na který je možné model aplikovat, je např. rozvoz výrobků od výrobců do skladů, ze skladů do prodejen apod. Popsaný model lze využít i v jiných částech logistických řetězců, kde rozvážíme (svážíme) různé typy výrobků z jednoho nebo několika různých dep.

Lektoroval: Doc. RNDr. Bohdan Linda, CSc.

Předloženo v lednu 1998.

Literatura

[1] Aquilera L. M. : Ordonnancement de production avec couts de changement dependant de la sequence. PhD Thesis, INPG/ENSIEG/LAG, Grenoble, 1993.

[2] Bodin L., Golden B., Assad A., Ballm M. : Routhing and Scheduling of Vehicles and Crews. The State of the art. Computers Opns Res. 10, 1983, č. 2.

[3] Bohatá M.: Praktická řešení okružní dopravní úlohy: metoda kombinovaných frekvencí. Ekonomicko-matematický obzor, 1974, č. 2.

[4] Bouchalová D., Výborná O.: Problémy stanovení tras a časových rozvrhů vozidel a posádek. Ekonomicko-matematický obzor, 1991, č. 1.

[5] Nešetřil, J.: Teorie grafů. SNTL, Praha 1979.

[6] Svami, M., Tchulasiraman, K.: Grafy, sjeti i algoritmy. Mir, Moskva 1984.

[7] Walter, J. a kol.: Operační výzkum. SNTL, Praha 1973.

Resumé

MATEMATICKÝ MODEL ÚLOHY STANOVENÍ TRASY VOZIDEL PRO VÍCE DEP, VÍCE VOZIDEL A VÍCE TYPŮ POŽADAVKŮ

Markéta BRÁZDOVÁ

Článek se zabývá problematikou řešení svozných a rozvozných úloh, určováním tras vozidel tak, aby byly dodrženy stanovené podmínky a aby se minimalizovala nákladová funkce. Okružní dopravní problémy patří mezi úlohy o hledání nejlevnější cesty.

Uvedený matematický model vychází z předpokladu, že požadavky ve vrcholech jsou různých druhů a depa nejsou rovnocenná. Jednou z konkrétních aplikací úloh tohoto typu je např. problém svozu komunálního odpadu na skládky.

Summary

MATHEMATIC MODEL OF CARTAGE AND DISTRIBUTION TASK FOR VARIOUS KINDS OF REQUIREMENTS IN NODES

Markéta BRÁZDOVÁ

This article deals with problems of cartage and distribution. This is the task, where we have to determine the optimum route for every vehicle so that the fixed conditions may be kept and the cost function may be minimized. Travelling salesman problems belong to the tasks about the searching of the cheapest route.

Mathematic model will start from the qualification that requirements in nodes are of various kinds and servicing centres are also not equivalent. One of the concrete applications of this type is for instance the problem of municipal waste and its cartage to tips.

Resume

LE MODEL MATHÉMATIQUE DE PROBLEME DE RAMASSAGE ET DE LIVRASION AVEC LES DIFFERENTS DEMANDS DANS LES POINTS DU RÉSEAU

Markéta BRÁZDOVÁ

L´article s´ocoupe de la problématique de solution des problemes de ramassage et de livraison. C´est un probleme qui appartient dans a domaine de la théorie des graphes et il est possible l´incorporer parmi les problemes concernant le choix des itinéraires.

Le model mathématique est orienté dans la domaine de solution de quelque types de problemes plus général; les demands dans les points du réseau sont differents et les centres de service ne sont pas equivalents. Une des applications appartenant dans ce type de problemes est par exemple le probleme de ramassage de déchets communal.