Media4u Magazine
www.media4u.cz
S odbornou podporou mezinárodního kolegia vysokoškolských pedagogů vydává Ing. Jan Chromý, Ph.D., Praha.

Šablona příspěvků
Media4u Magazine
ISSN 1214-9187 Čtvrtletní časopis pro podporu vzdělávání
The Quarterly Journal for Education * Квартальный журнал для образования
Časopis je archivován Národní knihovnou České republiky
V letech 2008-2013 byl časopis na seznamu recenzovaných neimpaktovaných periodik ČR.

Hlavní nadpis článku

Úloha obchodního cestujícího

Upřesňující nadpis

Zatraktivnění výuky prostřednictvím historických souvislostí

Hlavní nadpis článku anglicky

Traveling Salesman Problem

Upřesňující nadpis anglicky

Teaching attractiveness enhancement by means of historical context

Autor

Markéta Brázdová

Pracoviště autora česky

Katedra informatiky v dopravě, Dopravní fakulta Jana Pernera, Univerzita Pardubice

Pracoviště autora anglicky

Department of Informatics in Transport, Jan Perner Transport Faculty, University of Pardubice

Abstrakt:

Článek se zabývá historií úlohy obchodního cestujícího. Shrnuje historická fakta o původu úlohy, jejích řešitelích a metodách řešení. Popisuje i moderní využití úlohy obchodního cestujícího. Tyto informace mohou být přínosem pro zvýšení všeobecného přehledu v technických oborech studia. Zvyšují také atraktivitu probíraných témat.

Abstract:

The paper deals with the history of the traveling salesman problem. It summarizes historical facts about the origin of the problem, its solvers and methods of solution. It describes modern applications of the traveling salesman problem as well. This information can be beneficial for general knowledge enhancement in technical fields of study. It also increases attractiveness of explained topics.

Klíčová slova: úloha obchodního cestujícího, hamiltonovská kružnice, historie TSP

Key words: traveling salesman problem, hamiltonian circle, history of TSP

1 ÚVOD

Moderní trendy vyžadují zapojení netradičních přístupů a zavádění nových metod nejen do výuky na základních a středních školách, ale objevují se také ve vzdělávání vysokoškoláků. Při výuce předmětu Teorie grafů na Dopravní fakultě Univerzity Pardubice je zohledňován i faktor zatraktivnění výukových témat pro studenty. Proto jsou studenti v průběhu semestru seznamováni také s některými informacemi historického rázu, případně jsou jim předkládány k zamyšlení a řešení některé netypické úlohy vztahující se k dané problematice. Takovéto aktivity vedou ke zvýšení pozornosti studentů při výuce a dokáží navodit zájem o probíraná témata. Sami studenti se pak mohou zamýšlet i nad různými nestandardními možnostmi použití probíraných algoritmů. Tato činnost zvyšuje jejich kreativitu a tvořivé myšlení. V neposlední řadě jde i o přínos (zejména u historických souvislostí), který mají informace tohoto rázu pro zvýšení všeobecného přehledu studentů, jehož pokles je bohužel v posledních letech u studentů technického zaměření patrný.

Cílem příspěvku je upozornit na některé známější i méně známé souvislosti vzniku tzv. problému obchodního cestujícího a na některé jeho neobvyklé aplikace. Jejich zařazení do výuky může být zpestřením a zatraktivněním přednášek i seminářů a může napomoci k udržení pozornosti a zájmu studentů o danou problematiku.

2 CHARAKTERISTIKA ÚLOHY

Problém obchodního cestujícího, nebo také úloha hledání minimální hamiltonovské kružnice, je jednou z klasických úloh teorie grafů. Teorii grafů jako disciplínu lze zařadit do širší skupiny předmětů operačního výzkumu, který svým zaměřením spadá pod oblast aplikované matematiky, speciálně diskrétní matematiky.

Matematicky je úloha popsána následovně (Volek – Linda, 2012). Je dán seznam míst, která mají být navštívena, a odpovídající distanční matice. Distanční maticí rozumíme matici, ve které jsou uvedeny délky nejkratších cest (vzdálenosti) mezi jednotlivými místy. Cílem úlohy je nalézt takovou trasu mezi danými místy, která zahrnuje všechna místa, přičemž každé z nich lze navštívit pouze jednou. Dále je požadováno, aby trasa začínala a končila ve stejném místě a celková délka trasy aby byla co nejmenší.

Z hlediska teorie grafů jsou místa interpretována jako vrcholy (uzly) grafu. Vzdálenosti mezi jednotlivými místy představují ohodnocení hran grafu. Cílem je tedy vytvořit takovou trasu na grafu, která bude zahrnovat všechny vrcholy grafu, každý vrchol bude navštíven pouze jedenkrát. Trasa bude začínat a končit ve stejném vrcholu a celková délka trasy bude minimální. Výsledkem musí být graf zvaný kružnice, tj. souvislý pravidelný graf druhého stupně – všechny jeho vrcholy jsou stupně dva (Pastor – Tuzar, 2007). Zároveň musí jít o kružnici minimální délky.

3 HISTORIE PROBLÉMU

Problém stanovení optimální trasy, při které je třeba navštívit různá místa, města, body, každé z míst pouze jednou, a vrátit se zpět do výchozího místa, se prolíná dějinami už několik století. Úlohou se zabývali mnozí matematici, dopravní odborníci, ale nejen oni. Pomineme-li matematické základy disciplíny, které položili už starověcí matematici, lze najít kořeny úlohy obchodního cestujícího pravděpodobně už ve středověku.

3.1 Jezdcova procházka

Prvopočátkem je úloha o tzv. jezdcově procházce. Jde o matematicko-šachový problém, popsaný již v 9. století arabskými a indickými učenci (Jeliss, 2000-2015). Úkolem je provést šachovou figuru jezdce po všech polích na prázdné šachovnici tak, aby jezdec při dodržení šachových pravidel svého pohybu (dvě pole vpřed, jedno stranou) prošel každým polem právě jedenkrát a vrátil se zpět na výchozí pole šachovnice. Z historie jsou známa řešení této úlohy, jejichž autory jsou zejména arabští středověcí učenci, ale např. také soudobý kašmírský básník Rudrata. Do Evropy se problém dostal pravděpodobně až v 18. století. Nejznámější a nejpropracovanější řešení nalezl a v roce 1759 představil Leonard Euler (1707-1783). Euler také problém zobecnil pro šachovnici rozměru n x n polí (Šišma, 1998).

Euler, který byl žákem J. I. Bernoulliho, pracoval na problémech z mnoha vědních oborů. V roce 1736 vydal knihu o mechanice, v níž spojuje Newtonovu mechaniku s metodami diferenciálního a integrálního počtu (Šubert, 2012). Kromě dalších fyzikálních problémů souvisejících se soustavou hmotných bodů, tuhými tělesy a hydromechanikou (Laue, 1963) se věnoval i matematickým úlohám. Už několik let před vyřešením jezdcovy procházky položil základy teorie grafů jako matematické disciplíny svým řešením známého problému sedmi mostů ve městě Královci (Pastor – Tuzar, 2007).

Úloha o sedmi mostech města Královce je jednou z nejznámějších historických úloh z oblasti teorie grafů. Tematicky se ale k problému obchodního cestujícího neváže, jde o úlohu, kdy je třeba projít všemi hranami grafu právě jedenkrát a vrátit se zpět do výchozího místa. Zmínka o této úloze však vždy vzbuzuje pozornost studentů, zejména jsou-li seznámeni se zadáním úlohy a poté ponecháni, aby se sami pokusili nalézt řešení. Přínosem pro studenty bývá také alespoň stručná zmínka o životě Leonarda Eulera. Přes 70 % studentů navštěvujících předmět zpravidla není schopno správně časově tohoto matematika zařadit, a to ani přibližně. Studenti se často mylně domnívají, že patří mezi učence starověku.

U úlohy o jezdcově procházce je pak předpokladem pro správné pochopení alespoň základní znalost pravidel šachu a pohybu figury jezdce po šachovnici. Ukazuje se, že s těmito pravidly je obeznámena přibližně polovina studentů navštěvujících předmět, což je u studentů technického zaměření dosti alarmující zjištění. Pro šachové nadšence, kteří se sporadicky mezi studenty objeví, pak jistě stojí za zmínku skutečnost, že úlohou hledání jezdcovy procházky po šachovnici se kromě matematiků zabývali i mnozí šachisté. Mezi nejzajímavější patří zřejmě řešení nalezené roku 1862 šachovým teoretikem Jaenischem (Sedláček, 1977).

3.2 Kirkman a Hamilton

Jak uvádí Šišma (1998), problematikou nalezení kružnice na grafu se zabýval roku 1855 také Angličan Thomas Penyngton Kirkman (1806-1895). Přestože byl povoláním duchovní, věnoval se i matematice a vydal mnoho článků s matematickým zaměřením. Mimo jiné se zaměřil na otázku existence kružnice na různých typech grafů. Určil kategorii grafů, které kružnici procházející všemi vrcholy grafu nemohou obsahovat.

Významnou osobností spojenou s problémem obchodního cestujícího je dále irský matematik, fyzik a astronom sir William Rowan Hamilton (1805-1865). Hamiltonův odkaz nelze při výuce úlohy obchodního cestujícího opominout, zejména v souvislosti s pojmenování této úlohy. Úloha je známa také pod názvem hledání hamiltonovské kružnice na grafu. Zajímavé bývá uvádět i některá historická fakta o důvodu tohoto pojmenování. Podle Cooka (2012) v dopise z roku 1856 adresovaném příteli Gravesovi popisuje Hamilton postup nalezení cesty, která prochází všemi dvaceti vrcholy pravidelného dvanáctistěnu. Na základě této Hamiltonovy myšlenky pak bylo vytvořeno několik variant zábavné hry, původně pod názvem The Icosian Game. Prodávala se od roku 1859 (Šišma, 1998). Postupně vznikaly i další variace této hry. Zmínka o hrách dokáže studenty zaujmout, zejména je-li podpořena obrazovou dokumentací vzniklých her nebo praktickou ukázkou úlohy na modelu.

3.3 Obchodní cestující

Pojmenování úlohy po siru Hamiltonovi není jediné užívané označení pro úlohu nalezení kružnice procházející všemi vrcholy grafu. Častěji je používán termín úloha obchodního cestujícího (úloha je také známa pod zkratkou TSP – z anglického traveling salesman problem). Studenty zpravidla zaujme i samotný název úlohy a lze se tedy pozastavit nad tím, proč právě obchodní cestující.

Souvislost okružní cesty po všech vrcholech grafu s obchodním cestujícím je evidentní. Už koncem 19. a počátkem 20. století je patrná snaha amerických obchodníků o nalezení co nejkratší trasy pro obchodní cestu. Jsou známy a doloženy pokusy a náznaky optimalizací obchodních tras založené však převážně na intuici a šikovném odhadu samotných obchodních cestujících. Podobně jako obchodní cestující měli ve zvyku, zejména po americkém kontinentě, putovat i kazatelé všemožných církví a dokonce také soudci a právníci (mezi nimi i mladý Abraham Lincoln). I z jejich dochovaných cestovních plánů lze usuzovat na snahu o nalezení trasy s co nejmenším počtem ujetých kilometrů (Cook, 2012).

4 EXISTENCE KRUŽNICE

Po Kirkmanovi a Hamiltonovi se problematikou nalezení kružnice procházející všemi vrcholy grafu zabývali i mnozí další. Otázkou bylo především, jak formulovat problém v obecné rovině a také jak stanovit podmínky, za kterých je možné kružnici na grafu nalézt. Z 80. let 19. století pochází práce skotského matematika a fyzika Petera Guthrie Taita (1831-1901).

Taitova myšlenka je založena na prokládání rovinného grafu představujícího mapu území hamiltonovskou kružnicí a úzce souvisí s tzv. problémem čtyř barev. K problému čtyř barev, který spočívá v otázce, jakým nejmenším počtem různých barev lze obarvit mapu území tak, aby žádné dva sousedící státy nebyly obarveny stejnou barvou, totiž právě v roce 1879 publikoval svůj důkaz o čtyřech barvách Alfred Kempe (1849-1922). Jeho důkaz se však roku 1890 ukázal mylným. Také Taitova hypotéza o existenci hamiltonovské kružnice však byla chybná, jak dokázal (až roku 1946) kanadský matematik William Tutte (Cook, 2012).

Problému čtyř barev je při výuce předmětu věnována zvláštní přednáška o rovinných grafech. Při výuce úlohy obchodního cestujícího je ale dobré zmínit i úlohu čtyř barev právě proto, aby si studenti lépe daná témata propojili a nevnímali je pouze jako oddělené problémy. Provázanost různých typů úloh si studenti sami často neuvědomí a je dobré je na ni upozornit.

Problémem stanovení podmínek existence hamiltonovské kružnice se dále zabývali i významní matematici 20. století. Nutnou a postačující podmínku se dosud nalézt nepodařilo, je však známo několik postačujících podmínek, jejichž autory jsou např. Gabriel Andrew Dirac (1952), Øystein Ore (1960) nebo Lajos Posa (1962) (Šišma, 1998).

5 NOVODOBÉ METODY ŘEŠENÍ

Ve 20. století se úlohou určení minimální hamiltonovské kružnice zabývali renomovaní matematici v mnoha prestižních světových výzkumných centrech. Byla vyvinuta řada matematických metod, které vedou k řešení problému. Matematici ale řešili úlohy s omezeným počtem vrcholů, evidentní je snaha o navyšování tohoto počtu. Problém studoval už v roce 1930 Australan Karl Menger. V roce 1954 hledali cestu mezi 48 americkými městy George Dantzig, Ray Fulkerson a Selmer Johnson. Jejich řešení bez využití jakékoliv výpočetní techniky bylo překonáno až roku 1971 (Cook, 2012).

Otázkou řešitelnosti, případně neřešitelnosti, obecného problému se zabývali ve 40. letech Merrill Flood, v 50. letech Jack Edmonds a jiní. Z dalších novodobých matematiků, kteří mají na řešení úlohy obchodního cestujícího svůj podíl, lze jmenovat např. Nicose Christofidese, Shen Lina, Briana Kernighana, Kelda Helsgauna nebo Williama J. Cooka. S Williamem Cookem spolupracoval na výzkumech v oblasti TSP také matematik českého původu působící v Kanadě Václav Chvátal.

Významným posunem v řešení úlohy obchodního cestujícího bylo zveřejnění Dantzigovy simplexové metody pro řešení úloh lineárního programování (Dantzig, 1966). Dantzig tuto svou metodu poprvé představil už v roce 1948. S rozvojem výpočetní techniky se možnosti řešení problému značně rozšířily. V 70. letech už bylo možné najít cestu mezi více než 300 vrcholy grafu a počet propojovaných vrcholů v dalších letech rapidně narůstal. Koncem 20. století dosáhl hranice 13 509 vrcholů, v roce 2006 dokonce už 85 900 (Cook, 2012). Cílem dnešních vědců je nalezení optimální cesty celým světem. Pro řešení takto komplikované úlohy však dosud neexistuje dostatečně výkonná výpočetní technika.

Také zde se ukazuje, že představy studentů o moderní technice bývají zkreslené. Mnozí se domnívají, že s využitím nejmodernější výpočetní techniky jsou možnosti řešitelnosti úloh takřka neomezené, a bývají překvapeni faktem, že ani soudobá technika složitější typy úloh optimálně vyřešit nedokáže.

6 PRAKTICKÉ APLIKACE ÚLOHY

Praktické využití úlohy obchodního cestujícího je velmi široké. Kromě dopravních aplikací, distribučních úloh a podobných problémů, které jsou v souvislosti s názvem úloha obchodního cestujícího patrné na první pohled, existuje i rozsáhlá třída úloh, kde bychom na první pohled spojitost možná nehledali. Jedná se např. o seřizování strojů provádějících opakované úkony tak, aby intervaly na změnu nastavení stroje od jedné operace k další byly co nejkratší. Tato aplikace je častá při výrobě plošných spojů a integrovaných obvodů nebo při postupném měření jednotlivých částí většího celku.

Překvapivé aplikace se objevují i v hudbě. V Japonsku byl např. vyvinut systém, který umožňuje přehrávání hudebních souborů s využitím metody hledání minimální hamiltonovské kružnice. Aplikace metody lze nalézt také v biologii, geofyzice a mnoha dalších oborech.

Při diskusi o aplikacích úlohy je dobré studenty navést několika příklady a nechat na jejich kreativitě, aby se sami pokusili vymyslet nějaká další využití úlohy. Pro studenty bývá obvykle zábavné pokusit se najít některé neobvyklé aplikace. Velmi pozitivní reakce studentů pak bývají na použití problému obchodního cestujícího ve výtvarném umění.

6.1 Matematicky diskrétní úsměv Mony Lisy

Poněkud kuriózní využití úlohy obchodního cestujícího přináší problém definovaný v roce 2009 Robert Boschem. Úloha spočívá v nakreslení co nejvěrnější kopie slavného obrazu Leonarda da Vinciho Mona Lisa. Obraz musí být vytvořen jako spojnice mezi 100 000 body. Jde tedy o nalezení co nejlepší hamiltonovské kružnice spojující tyto body tak, aby výsledné dílo věrně napodobilo Monu Lisu. Jak uvádí Cook ve své knize z roku 2012, zatím nejlepší řešení úlohy nalezl Japonec Yuichi Nagata. Otázka Mony Lisy zůstává ale stále otevřená, na překonání Nagatova rekordu je dokonce vypsaná odměna (Cook, 2012).

Mona Lisa bývá velmi vděčným tématem diskuse se studenty. Notoricky známý obraz a jeho kresba jako TSP zaujme a nastoluje také otázku, jak se na tento matematický problém dívají historici umění. Jde o vědu nebo umění? Pravá Mona Lisa je přece jenom jedna.

Podobnou myšlenku jako Robert Bosch zpracovává i další skupina vědců. V rámci projektu Umění TSP pracují na vytvoření co nejvěrnějších kopií i jiných maleb starých mistrů. Kopie jsou vytvářeny metodou jedné souvislé čáry propojující skupinu bodů. Kromě podobných aktivit čerpají inspiraci z TSP i mnozí další umělci. Do oblasti matematicko-umělecké tvorby zasáhl také český matematik profesor Jaroslav Nešetřil (Cook, 2012).

7 ZÁVĚR

Pro studenty vysokých škol je důležité nejen vzdělání v jejich odbornosti, ale také všeobecný přehled a informovanost. Absolvent vysoké školy i technického zaměření by měl být nejen odborníkem v technické oblasti, ale je žádoucí, aby jeho znalosti měly přesah také do jiných oborů.

K všeobecnému přehledu pak patří i základní historické informace o matematicích a vědcích, kteří se různými problémy po staletí zabývali. Proto je důležité i při výuce předmětů matematicko-technického charakteru zmínit alespoň některá základní data o autorech algoritmů, vzniku problému a složitostech cesty k řešení. Zajímavá je také česká stopa, kterou lze nalézt u spousty úloh. Zmínka o českých vědcích, kteří se problémem zabývali a svou měrou přispěli k jeho řešení, je vždy inspirací a přínosem.

V neposlední řadě se ukazuje, že informace tohoto druhu přispívají nejen ke zvýšení všeobecného přehledu studentů, ale také ke zvýšení zájmu studentů o předmět a k zatraktivnění probíraného tématu.

Použité zdroje

COOK, W. J. (2012) Po stopách obchodního cestujícího: matematika na hranicích možností. Praha. Argo/Dokořán. 2012. ISBN 978-80-7363-412-4 (Dokořán). ISBN 978-80-257-0706-7 (Argo).

DANTZIG, G. B. (1966) Lineárne programovanie a jeho rozvoj. Bratislava. Slovenské vydavateľstvo technickej literatury. 1966. ISBN 63-111-66.

JELISS, G. (© 2000-2015). Mayhematics.com [online] (© 2000-2015). Early History of Knight's Tour. Knight's Tour Notes. [cit. 2015-07-29] Dostupné z: http://www.mayhematics.com/t/1a.htm.

LAUE, M. von. (1963). Dějiny fyziky. Praha. Orbis. 1963. Malá moderní encyklopedie, sv. 11.

PASTOR, O. - TUZAR, A. (2007) Teorie dopravních systémů. Praha. ASPI. 2007. ISBN 978-80-7357-285-3.

SEDLÁČEK, J. (1977) Úvod do teorie grafů. Praha. Academia. 1977.

ŠIŠMA, P. (1998). Vznik a vývoj teorie grafů. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. 1998. Roč. 43, č. 2, s. 89-99. ISSN 0032-2423.

ŠUBERT, L. (2012). Od Maxwella k Shannonovi. Praha. Daniela Sázavská. 2012. ISBN 978-80-260-3143-7.

VOLEK, J. - LINDA, B. (2012) Teorie grafů – aplikace v dopravě a veřejné správě. Pardubice. Univerzita Pardubice. 2012. ISBN 978-80-7395-225-9.