UNIVERZITA PARDUBICE
Fakulta elektrotechniky a informatiky

INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE V TEORII AUTOMATICKÉHO ŘÍZENÍ

Bc. Milan Jičínský

Diplomová práce
2015

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Akademický rok: **2014/2015**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Bc. Milan Jičínský**
Osobní číslo:	**I13466**
Studijní program:	**N2646 Informační technologie**
Studijní obor:	**Řízení procesů**
Název tématu:	**Integrální transformace v teorii automatického řízení**
Zadávající katedra:	**Katedra řízení procesů**

Zásady pro vypracování:

Cíl práce:
Cílem práce je rozbor integrálních transformací využívaných v základní teorii řízení dynamických systémů. Konkrétně se práce bude zabývat Laplaceovou transformací (včetně posunutí), Laplaceovou-Carsonovou transformací, Fourierovou transformací, Z-transformací a jejich vzájemnými souvislostmi. V praktické části bude vytvořena aplikace s GUI v prostředí Matlab & Simulink demonstrující nejdůležitější vlastnosti uvedených transformací, která bude využitelná jako studijní opora.
Teoretická část:
Popis jednotlivých transformací, jejich vlastností a vzájemných souvislostí. Implementační část: Příklady demonstrující jednotlivé vlastnosti transformací. Příklady aplikací funkcí pro práci s transformacemi v prostředí Matlabu a vytvoření aplikace s GUI.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

LEVINE, W. S. 2011. The Control Handbook: Control System Fundamentals. 2. vyd. Boca Raton: CRC Press. 786 s. ISBN 978-1-4200-7363-8.
LePAGE, W., L. 1980. Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers. 2. vyd. New York: Dover Publications. 275 s. ISBN 0-486-63926-6.
SNEDDON, I. N. 1995. Fourier Transforms. 2. vyd. New York: Dover Publications. 542 s. ISBN 0-486-68522-5.
PÍRKO, Z., VEIT, J. 1970. Laplaceova transformace: Základy teorie a užití v elektrotechnice. 1. vyd. Praha: SNTL. 245 s. MAŠEK, J. 1993. Sbírka úloh z matematiky: Integrální transformace. [Skriptum.] Plzeň: ZU v Plzni. 118 s.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Libor Kupka, Ph.D.**
Katedra řízení procesů

Datum zadání diplomové práce: **31. října 2014**
Termín odevzdání diplomové práce: **15. května 2015**

Univerzita Pardubice
Česká republika

L.S.

prof. Ing. Simeon Karamazov, Dr.
děkan

Ing. Daniel Honc, Ph.D.
vedoucí katedry

V Pardubicích dne 14. listopadu 2014

Prohlášení autora

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích 15. 5. 2015 Bc. Milan Jičínský

Poděkování

Úvodem bych chtěl poděkovat vedoucímu práce Ing. Liborovi Kupkovi, Ph.D., za příjemný přístup a umožnění zpracování mnou navrženého tématu. Velké díky patří samozřejmě všem členům mé rodiny. Za to že při mně stáli a podporovali mě, kdykoliv jsem to potřeboval. Bez jejich morální a finanční podpory bych se tak daleko zřejmě nikdy nedostal. Nemohu zapomenout ani na své přátele a kamarády z kolejního klubu "Tvrdá játra". Děkuji Vám všem, kteří jste mi byli nablízku během dlouhých pěti let studia. Každý společný okamžik ať už smutný či radostný, každá párty a těžká rána, vše jsme prožívali společně jako jedna kolejní rodina. Je to kus života, na který nikdy nezapomenu a za který jsem vděčný. I tohle vše rozhodlo o tom, že jsem se dostal až sem. Tato jména nebudou nikdy zapomenuta: Radim Kyrcz, Petr Černohlávek, Patrik Horký, Hanča Jičínská, Jakub Ručka, Verča Balášová, Standa & Petr Zemachovi, Jirka Rauch, Martin Susedík, Míra Duhoň, Jarda Chodil, Patrik Šponar, Jan Orálek, Jan Doležal, Patrik Mészáros, Jirka Rjabuchin a Laura Betcherová. Všem Vám přeju, abyste úspěšně dokončili školu a vedli ten nejlepší život, jaký si všichni zasloužíte. Děkuji Vám všem.

V Pardubicích 15. 5. 2015 Bc. Milan Jičínský

ANOTACE

Předmětem této práce je problematika integrálních transformací využívaných v mnoha odvětvích. Cílem je představit teoretické základy nezbytné pro pochopení problematiky a názorná ukázka některých vlastností transformací.

KLÍČOVÁ SLOVA

Integrální transformace, Laplaceova transformace, Fourierova transformace, Z transformace.

TITLE

Application of integral transforms in the automatic control theory

ANNOTATION

The subject of this thesis is the issue of integral transforms used in many fields. The main goal is to present the theoretical foundations which are necessary to understand the problematics. Explanation and demonstration of some properties of transforms is part of the thesis.

KEYWORDS

Integral transform, Laplace transform, Fourier transform, Z transform.

Obsah

Seznam zkratek

p.v.	hlavní hodnota integrálu (z anglického partial value)
LDR	lineární diferenciální rovnice
GUI	grafické rozhraní (graphical user interface)

Seznam symbolů

L	přímá Laplaceova transformace
L^{-1}	zpětná Laplaceova transformace
L*	přímá Laplaceova-Carsonova transformace
L^{*-1}	zpětná Laplaceova-Carsonova transformace
L_D	přímá dvoustranná Laplaceova transformace
M	přímá Mellinova transformace
Z	přímá Z transformace
Z^{-1}	zpětná Z transformace
Φ	přímá Fourierova transformace
Φ^{-1}	zpětná Fourierova transformace
Ω	přímá transformace
Ω^{-1}	zpětná transformace
$\eta(t)$	jednotkový skok (Heavisideova funkce)
$K(t, p)$	funkce jádra
$f(t), y(t)$	předmět
$F(p), Y(p)$	obraz v Laplaceově transformaci
$F(\mathrm{i}\omega)$	obraz ve Fourierově transformaci
$F(z)$	obraz v Z transformaci
ξ	index růstu
t	čas
k	krok
O	funkce exponenciálního řádu
p, s, z	komplexní proměnná, operátor, parametr
ϑ	velikost posunutí (translace)
T	perioda vzorkování
ω	úhlová rychlost, úhlová frekvence
Δ	dopředná diference
∇	zpětná diference
s_k	součet geometrické řady
$C_j, \overline{C_j}$	komplexní číslo a k němu komplexně sdružené číslo

Seznam obrázků

Seznam tabulek

ÚVOD

Předmětem práce je problematika integrálních transformací, které mají značné praktické využití v teorii automatického řízení. To zejména proto, že jakýkoliv reálný systém lze popsat jednou či více diferenciálními rovnicemi. Integrální transformace, představují prostředek pro řešení takových rovnic. Existují i tzv. slovníky těchto transformací, avšak cílem práce je podložit vše potřebnou teorií a vysvětlit, jak se k uvedeným slovníkovým výrazům dospělo. Hlavní náplní bude Laplaceova transformace, která je nejvyužívanější v oblasti spojitých systémů. Jako její diskrétní ekvivalent bude popsána i Z transformace. Účelem je, aby práce ucelila znalosti o užívaných transformacích a souvislostech mezi nimi. Budou zdůrazněny základní vlastnosti a předpoklady jednotlivých transformací. Některé z uvedených vlastností budou následně využity pro praktickou interpretaci (tzn. při řešení LDR s využitím definice). Předmětem práce je také aplikace s GUI, která bude umožňovat řešení LDR pomocí Laplaceovy transformace. Výsledky budou graficky interpretovány s možností jejich dalšího využití. Tento software bude následně sloužit pro výuku.

1 INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE - TEORIE

1.1 PIERRE-SIMON DE LAPLACE

Jedním ze 72 francouzských vědců, jejichž jména jsou zapsána na Eiffelově věži jako připomínka jejich celoživotního díla a přínosu pro Francii, je právě Laplace. Pierre-Simon de Laplace žil v letech 1749-1827. Byl to významný matematik, astronom, fyzik ale i politik. Již ve věku dvaceti let vytvořil práci pojednávající o infinitezimálním počtu, čímž se dostal do povědomí ostatních matematiků. Byl také první, kdo vyřešil Gaussův integrál. Definoval a podrobně studoval integrální transformací, která nyní nese jeho jméno. Dále se zabýval teorií pravděpodobnosti a teorií parciálních diferenciálních rovnic. Vymyslel postup pro vůbec první sčítání lidu v rámci Francie. Kromě statistiky se zaměřil také na ucelení a rozvíjení poznatků svých předchůdců v oblasti astronomie. Vše shrnul ve svém díle Nebeská mechanika. Vysvětlil nesrovnalosti při měření rychlosti zvuku, kvůli kterým se výsledky odchylovali od Newtonovi teorie. Během svého života se setkal s mnoha významnými osobnostmi, mezi které patří např. Antoine Lavoisier nebo Napoleon Bonaparte. Stal se členem Francouzské akademie věd a celosvětově známým a uznávaným vědcem.

Obrázek 1.1 - Pierre-Simon de Laplace [Blanco, 2012]

Obrázek 1.2 - Laplaceův podpis [Králová, 2008]

1.2 VZNIK LAPLACEOVY TRANSFORMACE

Z historického hlediska byla tato integrální transformace poprvé použita v roce 1737 Leonhardem Eulerem při řešení určitých diferenciálních rovnic. Později v roce 1812 ji kompletně odvodil právě Laplace. Uplatnění však nachází zejména v současnosti při řešení elektrických obvodů, návrhu nejrůznějších zařízení či simulacích.

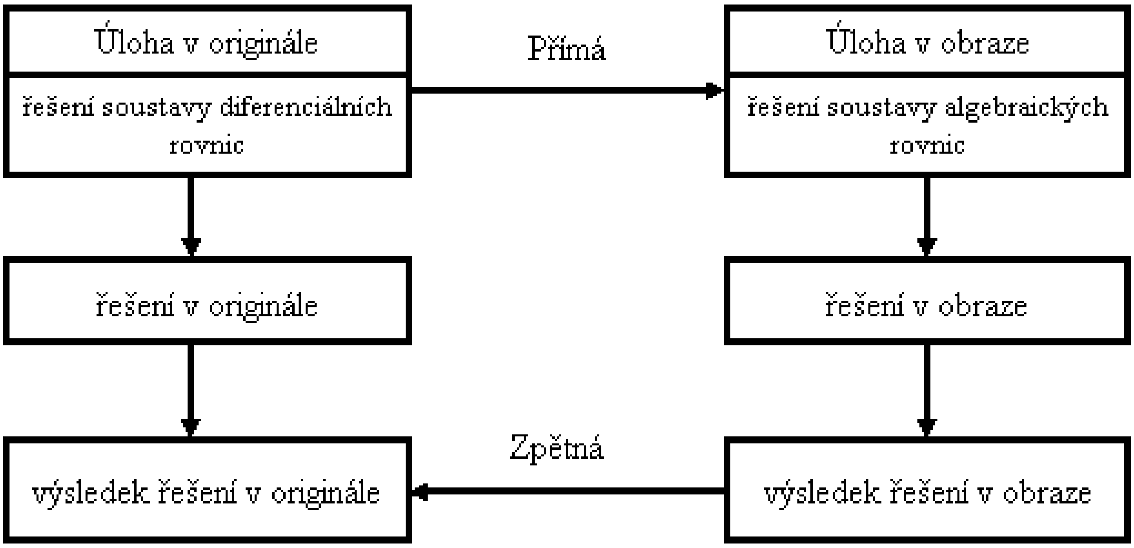
Pro popis reálných dynamických systémů se užívá diferenciálních rovnic. To však mohou být v určitých případech i nelineární parciální diferenciální rovnice s časově a prostorově proměnnými veličinami. Naprostá většina takových rovnic je neřešitelná. Proto se v praxi zavádí nejrůznější zjednodušení, která by jejich řešení usnadňovala. Příklady takových aproximací používaných např. ve fyzikálním modelování jsou vypsány v tabulce 1.1. Výsledkem jsou pak obyčejné lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Obecně se tedy předpokládá, že dynamické děje či systémy budou popsány právě tímto způsobem. Ačkoliv řešení lineárních ODE s konstantními koeficienty je již snadnější, pořád je poměrně zdlouhavé a náročné. To zřejmě také vedlo k myšlence, jak toto rutinní počítání obejít a ještě více zjednodušit.

Tabulka 1.1 - Aproximace používané ve fyzikálním modelování [Březina, 2013]

Aproximace	Matematické zjednodušení
Zanedbání malých vlivů	Snížení počtu a složitosti diferenciálních rovnic
Předpoklad okolí nezávislého na pohybech soustavy	Snížení počtu a složitosti diferenciálních rovnic
Nahrazení rozložených (distribuovaných) charakteristik odpovídajícími soustředěnými (redukovanými) charakteristikami	Vede na ODE (místo parciálních)
Předpoklad lineárních vztahů	Vede na lineární rovnice – umožňuje pro řešení použití principu superpozice
Předpoklad konstantních parametrů	Vede na konstantní koeficienty v diferenciálních rovnicích
Zanedbání neurčitosti a šumu	Vyhneme se statistickému zpracování

V diferenciálních rovnicích vystupují derivované veličiny. Právě s těmi se špatně pracuje. Naštěstí integrování funkce je opačný proces k derivování funkce. Proto je zjednodušeně řečeno vhodné používat tzv. integrální transformace. Sem se řadí i Laplaceova transformace. Je to taková skupina transformací, které jsou dány definičním integrálem. Po aplikaci transformace se již počítá s algebraickými rovnicemi, což výpočet velmi usnadňuje.

Původní výpočet se označuje jako originál, kdežto po užití transformace se již mluví o řešení v obraze. Schéma práce s Laplaceovou transformací je na obrázku.



Obrázek 1.3 - Postup řešení

1.3 PŘÍMÁ LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Obecně je integrální transformace předpis, který přiřazuje každé funkci $f(t)$ splňující určité předpoklady jednoznačně funkci

$$F(p) = \int_a^b K(t,p) \cdot f(t) \mathrm{d}t\,, \tag{1.1}$$

kde funkce dvou proměnných $K(t, p)$ se označuje jako jádro, původní zadaná funkce $f(t)$ se nazývá předmět a funkce $F(p)$ je obraz. Toto lze stručně zapsat též jako

$$F(p) = \Omega\, f(t)\,, \tag{1.2}$$

kde Ω je symbol libovolné integrální transformace. U konkrétních často užívaných transformací se používá k označení jiných písmen. Přiřazuje-li transformace Ω předmětu f jeho obraz F, pak se Ω označuje jako přímá transformace. Opačná úvaha vede k tomu, že pokud každým dvěma různým předmětům transformace přiřazuje dva různé obrazy, pak je tedy každý předmět jednoznačně určen svým obrazem. Při opačném postupu, tj. výpočtu předmětu dle daného obrazu, se pak Ω^{-1} nazývá zpětná transformace. Lze tedy zapsat

$$f(t) = \Omega^{-1} F(p). \tag{1.3}$$

Zvolením mezí a, b a funkce jádra $K(t, p)$ lze definovat nekonečně mnoho integrálních transformací. Pokud se však jedná o transformaci Laplaceovu, pak jsou meze a jádro dány následovně

$$K(t, p) = \mathrm{e}^{-pt}, \quad a = 0, \quad b = \infty. \tag{1.4}$$

1.3.1 Definice Laplaceovy transformace

Základním předpokladem je, aby předmětem $f(t)$ byla komplexní funkce reálné proměnné. Pak je nutné, aby integrál (1.6) existoval a měl konečnou hodnotu (konvergoval) pro nejméně jedno komplexní p. Předmět $f(t)$ je označován jako funkce exponenciálního řádu s indexem růstu ξ_1, pokud je bod $+\infty$ hromadným bodem jejího definičního oboru a je splněna nerovnost

$$|f(t)| \leq M \, \mathrm{e}^{\xi_1 t} \mathrm{d}t. \tag{1.5}$$

Ta je splněna v případě, že existuje takové t_0 a takové číslo M, která vyhovují nerovnici pro $t > t_0$. To se zapisuje jako $f(t) = O\left(\mathrm{e}^{\xi_1 t}\right)$, kde O symbolizuje funkci exponenciálního řádu. Má-li funkce svůj index růstu ξ_1, pak i všechny $\xi_2 > \xi_1$ jsou jejím indexem růstu. Každá funkce exponenciálního řádu jich má tedy nekonečně mnoho. Většinou se však uvádí ten nejmenší z nich (pokud existuje). Zjednodušeně řečeno, k tomu, aby měla funkce Laplaceův obraz, je třeba, aby rostla méně rychle než libovolná exponenciální křivka. Potom je definiční integrál Laplaceovy transformace ve tvaru

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t. \tag{1.6}$$

Proměnná p je komplexní, čili ji lze rozepsat na součet reálné a imaginární části. Na této proměnné je závislý Laplaceův obraz. Označení p je poněkud zastaralejší, ale stále se používá. V literatuře ale i v nejrůznějších simulačních prostředích (např. Simulink) se komplexní proměnná vyskytuje pod písmenem s. Všechna komplexní čísla, pro která má definiční integrál konečnou hodnotu, tvoří definiční obor obrazu. Častou chybou bývá zapsání rovnosti mezi předmětem a obrazem. Obě funkce jsou různé, proto není možné mezi ně psát rovnítko. Jejich vzájemný vztah se označuje jako korespondence, což se zapisuje jako

$f(t) \mathrel{\hat{=}} F(p)$. Mnohem častěji se lze setkat s použitím symbolu Laplaceovy transformace. V literatuře bývá označován velkým L, tiskacím či psacím. Rovnost je možné zapsat mezi obraz a transformaci předmětu tzn. $F(p) = \mathrm{L}\, f(t)$. V případě složitějšího předmětu se užívá pro názornost složených závorek a tedy $F(p) = \mathrm{L}\{f(t)\}$. Aby se nemusely předměty stále přepočítávat pomocí definičního integrálu, byly vytvořeny přehledy nejčastěji používaných korespondencí, které bývají přehledně zpracovány ve formě tabulek a ujalo se pro ně označení slovník Laplaceovy transformace. Je obvyklé, že v levém sloupci slovníku je zapsán předmět a v pravém sloupci jeho obraz. Vše je samozřejmě odvozeno obecně a do příslušných tvarů už jen stačí dosadit konkrétní čísla.

Definiční integrál je jednoznačný předpis, jak získat obraz ze zadané funkce. Laplaceova transformace má však i mnoho zajímavých vlastností, které nejsou na první pohled zřejmé. Uvádí se většinou jako věty o transformaci a popisují jednotlivé charakteristické rysy transformace, které by byly zřetelnější až po vyřešení definičního integrálu pro některé typové funkce.

Na předmět jsou kladeny určité požadavky, aby mohla být transformace úspěšně použit. Je nezbytné, aby předmět byl funkcí, která má funkční hodnotu rovnu nule pro $t < 0$. Dále se musí jednat o funkci, která je na intervalu $\langle 0, +\infty)$ po částech spojitá. To znamená, že funkce smí na konečném intervalu mít pouze konečné množství nespojitostí prvního druhu. Poslední vlastností je, že předmět musí být exponenciálního řádu. Splňuje-li předmět všechny tři uvedené vlastnosti, pak se označuje jako předmět standardního typu. Předpokladem pro všechny uvedené věty o Laplaceově transformaci je právě to, aby se jednalo o předmět standardního typu.

1.3.2 Věta o linearitě přímé Laplaceovy transformace

Tato věta říká, že z lineární kombinace konečného počtu funkcí (předmětů) vznikne transformací opět lineární kombinace, tentokrát však obrazů, se stejnými koeficienty a_k. Vysvětlení je jednoduché. Jestliže součet předmětů násobených konstantami dosadíme do definičního integrálu, pak je možné integrovat každý člen zvlášť a poté je sečíst. Koeficienty a_k zde však hrají roli násobících konstant, tudíž mohou být vytknuty před jednotlivé integrály. Proto se vlastně transformují pouze předměty a konstanty zůstávají nezměněny.

$$\mathrm{L}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^{n} a_k F_k(p) \tag{1.7}$$

1.3.3 Věta o obrazu řady

Tato věta je pouze zobecněným tvrzením o linearitě transformace pro nekonečnou řadu. Stejně jako v předchozím případě lze integrovat každý předmět zvlášť a až poté sečíst všechny obrazy, proto tedy platí

$$\mathrm{L}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{L}\, f_k(t). \tag{1.8}$$

1.3.4 Věta o substituci v obrazu

Jestliže je předmět vynásoben exponenciální funkcí e^{at}, kde a je komplexní konstanta, pak se v obrazu dosazuje místo p výraz $(p-a)$. Tato poučka bývá někdy také označována jako věta o násobení předmětu exponenciálou.

$$\mathrm{L}\left\{\mathrm{e}^{at} f(t)\right\} = F(p-a) \tag{1.9}$$

Toto lze snadno dokázat. Jestliže výsledkem definičního integrálu je obraz $F(p)$, pak pokud dosadíme do tohoto vztahu předmět, který je vynásobený exponenciálou, lze využít úpravy, že při násobení čísel se stejným základem se mocniny sčítají. Pak již jen pro potřeby transformace stačí vytknout $(-1)\cdot t$ a z výsledného tvaru je již patrné, že platí výše uvedený vztah.

$$\mathrm{L}\left\{\mathrm{e}^{at} f(t)\right\} = \int_0^{\infty} f(t)\cdot \mathrm{e}^{at}\cdot \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} f(t)\cdot \mathrm{e}^{at-pt}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} f(t)\cdot \mathrm{e}^{-(p-a)t}\mathrm{d}t = F(p-a) \tag{1.10}$$

1.3.5 Věta o derivaci obrazu

Tato věta říká, že násobení předmětu časem se po transformaci projeví jako derivace obrazu podle parametru p. Navíc dojde ke změně znaménka.

$$\mathrm{L}\left\{t\, f(t)\right\} = -F'(p) = -\frac{\mathrm{d}F(p)}{\mathrm{d}p} \tag{1.11}$$

Tuto větu lze aplikovat vícekrát po sobě. Při opětovném použití věty, tzn. při násobení předmětu funkcí t^2, se po transformaci dvakrát změní znaménko (nejdřív z kladného na záporné a poté zpět ze záporného na kladné) a obraz bude dvakrát derivován podle komplexní proměnné p. Střídání znamének lze snadno vyjádřit v obecném případě jako $(-1)^n$. Pokud bude tedy věta aplikována n-krát, bude vztah vypadat následovně

$$\mathrm{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F(p)}{\mathrm{d}p^n}, \quad n \in N. \tag{1.12}$$

1.3.6 Věta o integraci obrazu

Platnost této věty lze dokázat pomocí věty o derivaci obrazu. Zjednodušeně bez důkazu lze říci, že tento vztah platí, pokud má funkce $\frac{f(t)}{t}$ konečnou limitu zprava v bodě $t = 0$.

$$\mathrm{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_p^\infty F(q)\mathrm{d}q \tag{1.13}$$

1.3.7 Věta o změně měřítka

Je-li dána funkce $g(t) = f(kt)$, kde k je kladná konstanta, pak dojde ke změně měřítka. Obdobný vztah se získá tak, že místo konstanty se dosadí její převrácená hodnota, což se projeví následujícím způsobem.

$$\mathrm{L}\{g(t)\} = \mathrm{L}\{f(kt)\} = \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right) \tag{1.14}$$

$$\frac{1}{k}\mathrm{L}\left\{f\left(\frac{t}{k}\right)\right\} = F(pk) \tag{1.15}$$

Toto tvrzení je možné dokázat dosazením do definičního integrálu. Poté se použije substituce $t = \frac{\tau}{k}$ a po úpravě je získán opět definiční integrál Laplaceovy transformace, tentokrát s proměnnou τ, což na výpočtu nic nemění. Jedná se pouze o přeznačení proměnné, podle které se integruje, což u určitého integrálu nemá vliv, protože touto substitucí se nezmění integrační meze.

$$\mathrm{L}\{f(kt)\} = \int_0^\infty f(kt)\cdot e^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{f(\tau)\cdot e^{-\left(\frac{p}{k}\right)\tau}\mathrm{d}\tau}{k} = \frac{1}{k}\int_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-\left(\frac{p}{k}\right)\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right) \tag{1.16}$$

1.3.8 Věta o obrazu derivace

Význam Laplaceovy transformace a jejího praktického použití při řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a dalších úloh například v oblasti elektrotechniky tkví právě ve větách o obrazu derivace a integrálu. Jsou to ty nejzákladnější a přesto nejdůležitější vlastnosti, kvůli kterým se transformace hojně používá. Obraz derivace je dán předpisem

$$\mathrm{L}\{f'(t)\} = p \cdot F(p) - f(0+), \tag{1.17}$$

kde $f(0+) = \lim\limits_{t \to 0+} f(t)$ se nazývá počáteční hodnota funkce $f(t)$. Zjednodušeně lze tuto větu vysvětlit obecným řešením definičního integrálu při použití metody per partes, kde jsou funkce zvoleny následujícím způsobem $u(t) = f(t), v(t) = \mathrm{e}^{-pt}, u'(t) = f'(t), v'(t) = -p\mathrm{e}^{-pt}$. Potom platí

$$\begin{aligned} \mathrm{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty f'(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t = \left[f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -p\mathrm{e}^{-pt} f(t)\, \mathrm{d}t = \\ &= p\int_0^\infty f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t - f(0+). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Jelikož výraz $f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt}$ se pro hodnotu horní meze rovná nule, je výsledkem pouze výraz se záporným znaménkem po dosazení meze dolní. Exponenciální funkce má v tomto bodě hodnotu jedna, takže z první části per partes vychází po dosazení mezí pouze $f(0)$. Protože jde však o předmět standardního typu, je předpokladem, aby byla hodnota funkce nulová pro $t < 0$. Z definice o spojitosti funkce vyplývá, že je-li funkce v bodě spojitá, pak se její funkční hodnota rovná jak limitě zleva, tak limitě zprava v tomto bodě. V tomto případě však funkce nemusí být nutně spojitá, protože limita v nule zleva je vždycky nulová, kdežto z pravé strany tomu tak být nemusí. Funkční hodnota předmětu v bodě $t = 0$ je proto definována pouze jako počáteční hodnota funkce.

Zvláštním případem věty o derivaci jsou právě předměty, u nichž platí předpoklad o spojitosti v bodě $t = 0$, tzn. že $f(0) = \lim\limits_{t \to 0-} f(t) = \lim\limits_{t \to 0+} f(t) = 0$. V tomto případě se původní vztah zredukuje pouze na

$$\mathrm{L}\{f'(t)\} = p \cdot F(p). \tag{1.19}$$

1.3.9 Věta o obrazu n-té derivace

Je-li věta o obrazu derivace aplikována vícekrát, je možné odvodit, že pro *n*-tou derivaci ji lze zapsat následovně

$$\mathrm{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = p^n \cdot \mathrm{L}\{f(t)\} - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0+), \tag{1.20}$$

kde řád derivace $n \in N$. Tato věta má opět své zjednodušené znění pro předměty s nulovou hodnotou v počátku, což se projeví tak, že celá suma $\sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0+) = 0$.

1.3.10 Věta o obrazu derivace funkce po úsecích spojité

Věta o obrazu derivace je uzpůsobena pro spojité funkce. Je-li však předmět po částech spojitá funkce, ve vztahu se pak objeví další členy. Předpokladem je, že předmět i jeho derivace jsou standardního typu. Předmět $f(t)$ má dále v intervalu $(0,+\infty)$ konečný, popřípadě i nekonečný, počet bodů nespojitosti v časech označovaných jako $t_k, k \in N$. Jako skok funkce $f(t)$ v bodě t_k se označuje veličina $s_k = f(t_k +) - f(t_k -)$, což je vlastně rozdíl funkčních hodnot v bodech nespojitosti. Početně se opět řeší jako limita jdoucí zleva a zprava v bodě t_k.

$$\mathrm{L}\{f'(t)\} = p \cdot \mathrm{L}\{f(t)\} - f(0+) - \sum_{k=1}^{\infty} s_k \mathrm{e}^{-pt_k} \tag{1.21}$$

1.3.11 Věta o obrazu integrálu

Platnost věty o obrazu integrálu, lze dokázat zvolením funkce $g(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$. Pak po transformaci $\mathrm{L}\{g(t)\} = G(p)$. Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o obrazu derivace, je možné zapsat, že $\mathrm{L}\{g'(t)\} = p \cdot G(p)$. Ovšem ve všech bodech, ve kterých je $f(t)$ spojitá, platí rovnost $g'(t) = f(t)$. Pak logicky $\mathrm{L}\{g'(t)\} = \mathrm{L}\{f(t)\} = F(p)$. Jsou li oba tyto poznatky dány do rovnosti, platí vzorec

$$p \cdot G(p) = F(p) \quad \Rightarrow G(p) = \mathrm{L}\{g(t)\} = \frac{F(p)}{p}, \tag{1.22}$$

kde $G(p)$ je obrazem integrálu a je získáno pouhým podělením rovnice komplexním operátorem p. Věta o obrazu integrálu se pak nejčastěji uvádí v následujícím tvaru

$$\mathrm{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{F(p)}{p}. \tag{1.23}$$

1.3.12 Konvoluce a věta o jejím Laplaceově obrazu

Konvoluce je velmi významným pojmem, se kterým se lze setkat nejen u Laplaceovy transformace. Někdy se také v literatuře označuje pojmem kompozice. Konvoluce dvou funkcí je operace, která se označuje $f(t)*g(t)$. Nejedná se přitom o násobení. Pro tuto operaci platí komutativní, distributivní a asociativní zákon. Jsou-li funkce $f(t)$ a $g(t)$ po úsecích spojité na intervalu $\langle 0,+\infty)$, konvoluci lze vyjádřit tímto způsobem

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.24}$$

Věta o obrazu konvoluce je opět platná pouze pro předměty standardního typu. Výsledkem je pouhý součin Laplaceových obrazů jednotlivých funkcí

$$\mathrm{L}\{f(t)*g(t)\} = F(p)\cdot G(p). \tag{1.25}$$

1.3.13 Věta o limitních hodnotách předmětu

Počáteční hodnota předmětu je dána vztahem

$$\lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{p\to\infty} p\cdot F(p). \tag{1.26}$$

Aby bylo možné hovořit o konečné hodnotě předmětu, musí existovat limita $\lim_{t\to\infty} f(t)$. To nastává v případě, že funkce $p\cdot F(p)$ nemá žádné póly v polorovině $\mathrm{Re}(p)\geq 0$. Pro konečnou hodnotu předmětu platí, že

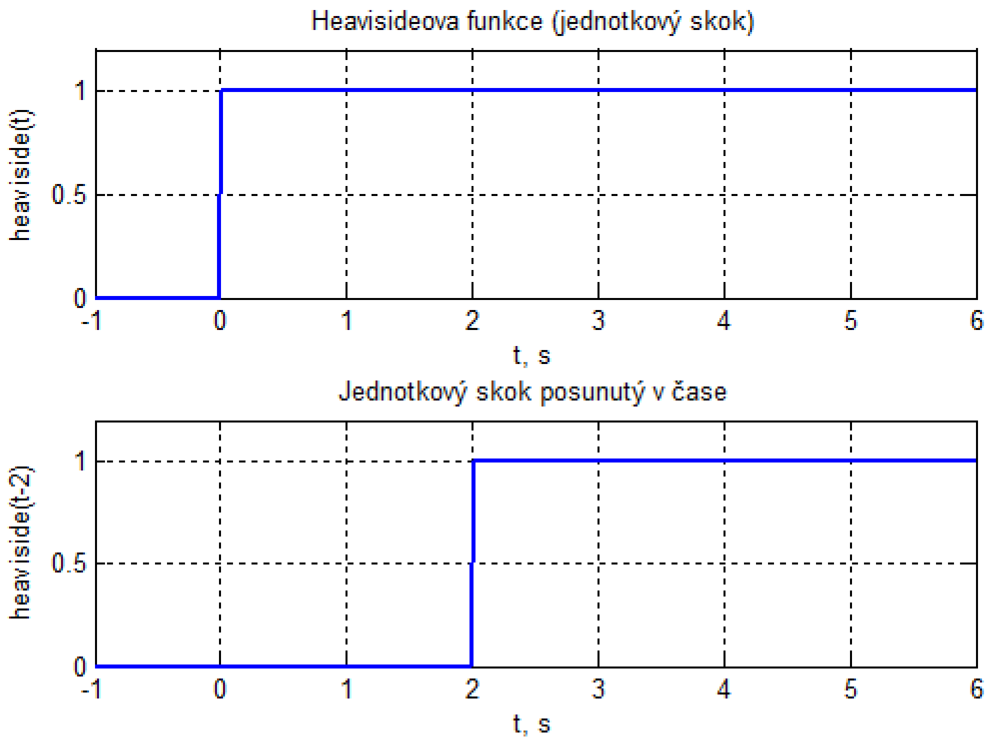
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p\cdot F(p). \tag{1.27}$$

1.4 POSUNUTÍ

Je dán předmět standardního typu $f(t)$ a nezáporné neměnné číslo (konstanta), které bude označena jako ϑ. Předmětem další zkoumání je funkce označená $g(t)$. Její vztah vzhledem k $f(t)$ je dán rovností

$$g(t) = f(t - \vartheta). \tag{1.28}$$

Z předpisu (1.28) to možná není na první pohled zřejmé, ale obě funkce nabývají stejných hodnot, pouze s určitým posunem ve směru časové osy. Například pro hodnotu $g(\vartheta)$ platí, že je rovna počáteční hodnotě funkce $f(t)$. Z toho vyplývá, že funkce $g(t)$ je posunuta vůči $f(t)$ o hodnotu ϑ směrem vpravo. Jinak řečeno $f(t) = g(t + \vartheta)$, což lze také interpretovat tak, že funkce $f(t)$ je posunuta vůči $g(t)$ o hodnotu ϑ směrem vlevo. Důsledkem toho jsou u předmětu $g(t)$ nulové všechny funkční hodnoty v intervalu $\langle 0, \vartheta)$. Předpoklad, že ϑ je nezáporná konstanta, je důležitý právě z toho důvodu, že pokud by toto splněno nebylo, předmět $g(t)$ by byl posunut doleva ve smyslu časové osy o hodnotu $|\vartheta|$, což by ale mělo za následek to, že některé funkční hodnoty pro $t < 0$ už by nebyly nulové a $g(t)$ už by tak nebyl předmětem standardního typu. Proto se v rámci translace uvažují pouze nezáporné konstanty a tudíž i posuny pouze vpravo.



Obrázek 1.4 – Vliv posunutí u jednotkového skoku

1.4.1 Věta o translaci

Jsou-li splněny výše zmíněné podmínky, pak pro posun vpravo platí vztah, ve kterém se posun projeví pouze jako vynásobení obrazu exponenciální funkcí.

$$\mathrm{L}\{f(t-\vartheta)\} = \mathrm{e}^{-p\vartheta}\mathrm{L}\{f(t)\} \tag{1.29}$$

Je třeba stále pamatovat na to, že posunem funkce vpravo se vynulují všechny funkční hodnoty pro $t < \vartheta$. Ke zdůraznění tohoto faktu lze vztah také zapisovat ve tvaru

$$\mathrm{L}\{f(t-\vartheta)\cdot\eta(t-\vartheta)\} = \mathrm{e}^{-p\vartheta}\mathrm{L}\{f(t)\cdot\eta(t)\}, \quad \vartheta \geq 0\,, \tag{1.30}$$

kde $\eta(t)$ je označení pro Heavisidovu funkci, která se v praxi častěji označuje jako jednotkový skok. Heavisidova funkce je v tomto ohledu velmi výhodná. Je-li totiž libovolná funkce vynásobena jednotkovým skokem $\eta(t)$, pak je výsledná funkce nulová pro $t < 0$ a pro všechna $t \geq 0$ nabývá stejných hodnot jako funkce původní. Proto je možné takto vynulovat požadované funkční hodnoty prostým vynásobením jednotkovým skokem posunutým o potřebnou hodnotu.

Při důkazu věty o translaci se vychází ze vztahu (1.30). Funkce $f(t-\vartheta)\cdot\eta(t-\vartheta)$ má tedy nulové funkční hodnoty pro $t < \vartheta$, proto je zbytečné ji integrovat v celých mezích definičního integrálu. Namísto toho stačí integrovat až od hodnoty ϑ. Potom je třeba zavést substituci $\tau = t - \vartheta$. To také znamená, že $t = \tau + \vartheta$. Při této substituci se přepočítají meze a integruje se opět od $\langle 0,+\infty)$. Po aplikaci substituce vzniká člen $\mathrm{e}^{-p\vartheta}$, který je při integraci podle proměnné τ považován za konstantu, a může být tedy vytknut před integrál. Zbylý integrál je definičním integrálem Laplaceovy transformace pouze s přeznačením proměnné což nemá na výsledek vliv.

$$\mathrm{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty f(t-\vartheta)\cdot\eta(t-\vartheta)\cdot\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \tag{1.31}$$

$$\mathrm{L}\{g(t)\} = \int_\vartheta^\infty f(t-\vartheta)\cdot\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(\tau)\cdot\mathrm{e}^{-p(\tau+\vartheta)}\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-p\vartheta}\int_0^\infty f(\tau)\cdot\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau \tag{1.32}$$

1.4.2 Věta o obrazu periodické funkce

Je dána periodická funkce $f(t)$ s periodou T. Předmět $f(t)$ lze také získat tak, že se vezme pouze jedna perioda a ta se periodicky opakuje. Tento impuls konečného trvání (po dobu T) se označí $f_T(t)$. Pak pro transformaci impulsu platí, že

$$\mathrm{L}\{f_T(t)\} = F_T(p) = \int_0^T f(t)\cdot \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\,. \tag{1.33}$$

Díky znalosti $F_T(p)$ lze popsat, jakým způsobem se pak bude transformovat celá periodická funkce. Integrování od nuly do nekonečna je pak možné nahradit součtem integrálů v mezích jedné periody. Nakonec se spočítá součet takto vzniklé geometrické řady a právě proto

$$\mathrm{L}\{f(t)\cdot \eta(t)\} = \frac{F_T(p)}{1-\mathrm{e}^{-pT}} = \frac{\int_0^T f(t)\cdot \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\,. \tag{1.34}$$

1.5 ZPĚTNÁ LAPLACEOVA TRANSFORMACE

V úlohách, kde se používá při řešení Laplaceova transformace, nejdřív dojde k její aplikaci. Poté se řeší algebraické rovnice, v nichž vystupují Laplaceovy obrazy. V poslední fázi je však třeba řešení v obraze převést zpátky na řešení v originále. Výsledkem tedy není obraz, ale jeho předmět. Jedná se o proces naprosto opačný, který je poněkud komplikovanější než samotná transformace. Nazývá se zpětná Laplaceova transformace. Protože jde o proces inverzní, kdy se k obrazu hledá předmět, je zpětná transformace označena symbolem L^{-1}. Otázkou zůstává, zda předmět k danému obrazu vůbec existuje a dále pokud je předmět skutečně nalezen, zda je jediným řešením nebo k jednomu obrazu existuje více předmětů.

Protože se jedná o integrální transformaci, je třeba brát v potaz, jaké situace mohou nastat při počítání integrálu z nejrůznějších funkcí. Integrály dvou různých funkcí mohou být stejné pouze v případě, že funkce jsou naprosto stejné a liší se pouze svými funkčními hodnotami v izolovaných bodech. Z toho plyne, že právě takové dvě funkce mají i stejný Laplaceův obraz. To pak ale znamená, že zpětná transformace není jednoznačná, neboť k jednomu obrazu existuje nekonečně mnoho předmětů. Naštěstí při praktickém použití nemají funkční hodnoty v izolovaných bodech funkce význam. Pokud by se však některé funkce lišili svými hodnotami i mimo izolované body a přesto by měly stejné Laplaceovy obrazy, byl by to pro praktické aplikace velký problém. Přesně touto problematikou se zabývá Lerchova věta.

1.5.1 Lerchova věta

Jsou dány funkce $f_1(t), f_2(t)$, které mají stejný Laplaceův obraz $F(p) = \mathrm{L}\{f_1(t)\} = \mathrm{L}\{f_2(t)\}$. Pak na intervalu $(0,+\infty)$ je jejich rozdíl $z(t) = f_1(t) - f_2(t)$ skoro všude nulový. To znamená, že i následující integrál bude nulový.

$$\int_0^{+\infty} |z(t)| \, \mathrm{d}t = 0 \tag{1.35}$$

Formulace této věty se dá významně zjednodušit, neboť se jedná o předměty standardního typu, které se pro $t < 0$ zcela jistě shodují. Navíc rozdíl dvou funkcí po částech spojitých bude opět funkce po částech spojitá, tentokrát však nulová až na izolované body nespojitosti. Takové body s funkční hodnotou různou od nuly se budou v rozdílu funkcí vyskytovat jen tam, kde je alespoň jedna z funkcí nespojitá. Zjednodušeně tedy věta může znít následovně. Nechť $f_1(t), f_2(t)$ jsou předměty standardního typu a mají stejný Laplaceův obraz $F(p) = \mathrm{L}\{f_1(t)\} = \mathrm{L}\{f_2(t)\}$. Pak se tyto předměty mohou lišit pouze funkčními hodnotami v izolovaných bodech, ve kterých je alespoň jeden z nich nespojitý.

Z teoretického hlediska však ani toto není úplně uspokojivé. Lze to však obejít určitou úmluvou. Například je možné se omezit pouze na takové předměty, jejichž funkční hodnoty v bodech nespojitosti se budou rovnat aritmetického průměru limity zleva a zprava. Pomocí takové nebo obdobné úmluvy je možné docílit vzájemné jednoznačnosti Laplaceovy transformace.

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{f(t+\varepsilon) + f(t-\varepsilon)}{2} \tag{1.36}$$

1.5.2 Integrální vyjádření zpětné Laplaceovy transformace

Existují metody, jak postupovat při zpětné transformaci racionálních lomených funkcí, což je nejčastěji se vyskytující případ právě při řešení diferenciálních rovnic. Nicméně toto nebude předmětem práce, jelikož se jedná pouze o konkrétní případ. Více informací uvádí např. [Pírko, 1970]. Zpětná Laplaceova transformace může být zapsána v integrálním tvaru, což je mnohem obecnější a univerzálnější pojetí. Transformace racionální lomené funkce je pak pouze zvláštním případem tohoto vzorce. Aby bylo možné hovořit o zpětné transformaci, je nutné, aby byly splněny následující tři podmínky:

- $F(p)$ je funkce komplexní proměnné a je regulární v polorovině $\operatorname{Re} p > \xi_0$,
- Dále ať existuje posloupnost kružnic se středem v bodě $p = 0$ ležících v polorovině $\operatorname{Re} p \geq a > \xi_0$. Jejich poloměr roste do nekonečna. Maximum modulu $F(p)$ na části n-té kružnice se označí M_n. Potom $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$,
- Integrál $\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} |F(p)| \mathrm{d}p = r$ má konečnou hodnotu, tzn. $r \in R, a > \xi_0$.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} F(p) \cdot \mathrm{e}^{pt} \mathrm{d}p \tag{1.37}$$

Takto získaný předmět je spojitá funkce exponenciálního řádu s indexem růstu a. Je nulová pro $t \leq 0$ a její obraz je dán vztahem $\mathrm{L}\{f(t)\} = F(p)$. Předmět je tedy získán vztahem $f(t) = \mathrm{L}^{-1}\{F(p)\}$. U zpětné transformace opět platí některé vlastnosti jako u přímé, např. linearita. Druhou podmínku, lze jednodušeji zapsat ve formě limity jako $\lim_{|p|\to\infty} F(p) = 0$ v polorovině $\operatorname{Re} p \geq a$. Existuje ještě forma zpětné transformace vyjádřené pomocí reziduí. Předmět je pak určen vzorcem (1.38), kde se sumou reziduí rozumí součet reziduí ve všech singulárních bodech funkce $F(p)$.

$$f(t) = \sum \operatorname{res}\left[F(p) \cdot \mathrm{e}^{pt}\right]. \tag{1.38}$$

1.6 LAPLACEOVA-CARSONOVA TRANSFORMACE

1.6.1 Přímá Laplaceova-Carsonova transformace

Kromě Laplaceovy transformace se též zřídka používá i tzv. Laplaceova-Carsonova transformace. Definiční integrál se v tomto případě změní pouze ve tvaru funkce $K(t, p)$. Funkce jádra je u Laplaceovy-Carsonovy transformace definována následovně

$$K(t, p) = p \cdot \mathrm{e}^{-pt}. \tag{1.39}$$

Meze definičního integrálu zůstávají nezměněny, tj. $a = 0, b = +\infty$. Aby se rozlišilo, o kterou transformaci se jedná, v literatuře se přistoupilo ke stejnému značení jako je tomu u Laplaceovy transformace, ale navíc je zde přidán symbol hvězdičky. Obraz je tedy označován jako $F*(p)$ a symbol transformace je značen $\mathrm{L}*$. Jelikož operátor p je komplexní proměnná, která je časově nezávislá, je možné jej v rámci definičního integrálu považovat za konstantu a vytknout jej před znak integrálu. Obraz v Laplaceově-Carsonově transformaci je dán vzorcem

$$F*(p) = \mathrm{L}*\{f(t)\} = \int_0^{\infty} p \cdot f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t = p\int_0^{\infty} f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t . \tag{1.40}$$

V tomto tvaru je již patrné, že mezi obrazy stejného předmětu platí vztah $F*(p) = p \cdot F(p)$, což znamená, že pokud jde o regularitu, linearitu a existenci obrazu, platí pro Laplaceovu-Carsonovu transformaci stejná věta jako pro klasickou Laplaceovu transformaci. Z výše uvedeného vztahu tedy vyplývá, že přepočet mezi obrazy je triviální. Pokud je znám obraz v Laplaceově transformaci, stačí jej pouze vynásobit operátorem p a získat tak obraz v Laplaceově-Carsonově transformaci bez nutnosti provádět celý postup transformace znovu.

1.6.2 Zpětná Laplaceova-Carsonova transformace

Stejně tak jako je možné přepočítat obraz v Laplaceově transformaci na obraz v L-C transformaci, je možné postupovat i opačně. Po vyjádření ze vztahu (1.40) je zřejmé, že pro získání Laplaceova obrazu je třeba dělit operátorem p, čili $F(p) = \frac{F*(p)}{p}$. V teorii automatického řízení se lze typicky setkat s přenosy systémů ve tvaru zlomku, kde v čitateli i jmenovateli jsou polynomy. Takový případ se označuje obecně jako racionální lomená funkce. Problém nastává, když není možné z polynomu čitatele vytknout operátor, tak aby při následném dělení došlo k jeho zkrácení. Potom se zvýší stupeň polynomu jmenovatele. Přibude tedy navíc kořen $p = 0$.

Hledání předmětu pomocí zpětné Laplaceovy transformace je pak komplikované. Pro zjednodušené případy, kdy se uvažují pouze jednoduché nulové body jmenovatele, je nutná a zároveň postačující podmínka, aby stupeň mnohočlenu jmenovatele byl větší nebo roven stupni mnohočlenu čitatele. Potom je tato racionální lomená funkce v Laplaceově-Carsonově transformaci obrazem určitého předmětu. Mějme tedy racionální lomenou funkci $F*(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$, pro kterou platí, že polynom jmenovatele $Q(p)$ je n-tého stupně a má pouze jednoduché nulové body $p_i, i = 1,2,\dots,n$. Dále se předpokládá, že $Q(0) \neq 0$, což znamená absenci kořenu $p = 0$. Pak je předmět vyjádřen následovně

$$f(t) = \mathrm{L}^{*-1}\, F^*(p) = \frac{P(0)}{Q(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{P(p_i)}{p_i Q'(p_i)} \mathrm{e}^{p_i t}\,. \tag{1.41}$$

1.7 FOURIEROVA TRANSFORMACE

1.7.1 Fourierův integrál

Jako funkce třídy se označuje taková funkce f reálné proměnné, která splňuje následující dvě vlastnosti. Funkce f je po úsecích spojitá, což musí platit i pro její derivaci. Dále pak musí konvergovat tzv. Lebesgeův integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t\,. \tag{1.42}$$

U funkce třídy potom pro všechna reálná t platí věta o Fourierově integrálu

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos\omega(t-x)\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}\omega\,, \tag{1.43}$$

kde dvojnásobný integrál vyskytující se na pravé straně rovnice se nazývá Fourierův integrál. Pokud nastane případ, že funkce f je v bodě t spojitá, pak lze levou stranu rovnice snadno upravit do tvaru

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{\lim\limits_{\varepsilon\to0+} f(t+\varepsilon) + \lim\limits_{\varepsilon\to0+} f(t-\varepsilon)}{2} = \frac{2f(t)}{2} = f(t)\,. \tag{1.44}$$

Pro funkci třídy, která je definována pro všechna reálná čísla, je možné dostat ještě jiný vztah. Sudou funkci je možné integrovat od $-\infty$ do $+\infty$ a výsledek podělit dvěma místo užití původních mezí integrálu pouze v kladné polorovině reálných čísel. Potom platí

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos\omega(t-x)dx \right] \mathrm{d}\omega\,. \tag{1.45}$$

Po dalších úpravách včetně aplikace Eulerova vzorce a zavedení pojmu hlavní hodnoty integrálu lze dospět k Fourierově integrálu v komplexním tvaru. Hlavní hodnotou se rozumí limita pro $b \to +\infty$ z integrálu v mezích od $-b$ do b. Komplexní tvar je pak následující

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-x)}\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}\omega, \tag{1.46}$$

kde i je imaginární jednotka a *p.v.* je hlavní hodnota integrálu. Tento vztah lze upravit ještě vytknutím exponenciály nezávislé na proměnné x před vnitřní integrál, neboť je považována za konstantu.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}\omega \tag{1.47}$$

1.7.2 Definice transformace

Vztah s dvojnásobným integrálem není vhodný pro potřeby transformace. Mnohem více se vyplatí použít upravený tvar, kde je výhodné vnitřní integrál označit pouze jako funkci proměnné ω.

$$\Theta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\, \mathrm{d}x \tag{1.48}$$

S využitím této substituce pak platí

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\omega) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}\omega. \tag{1.49}$$

Právě z těchto dvou vztahů se vychází při přímé a zpětné Fourierově transformaci. Ustálilo se však jiné značení. Stejně tak jako u Laplaceovy transformace se obraz označoval F, proto místo se funkce $\Theta : R \to R$, která je funkcí jedné proměnné, zavadí funkce F. Ta je definována pro ryze imaginární čísla z jako $F(z) = \Theta\left(\frac{z}{i}\right)$, tzn. $\Theta(\omega) = F(i\omega)$. Výsledkem je tedy získání vztahu pro výpočet Fourierova obrazu a tedy i definice přímé Fourierovy transformace $F = \Phi f$.

$$F(\mathrm{i}\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}t \tag{1.50}$$

V konkrétních zejména elektrotechnických aplikacích se často označuje Fourierův obraz jako spektrum signálu (předmětu). Předmět lze získat zpětnou transformací $f = \Phi^{-1}F$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathrm{i}\omega)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{1.51}$$

1.7.3 Věta o linearitě přímé Fourierovy transformace

Mnohé z vlastností přímé fourierovy transformace jsou popsány příslušnými větami. Jednou nejzákladnějších vlastností, stejně jako je tomu u Laplaceovy transformace, je linearita. Jestliže konstanty jsou označeny c_k, pak platí

$$\Phi\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(\mathrm{i}\omega). \tag{1.52}$$

1.7.4 Věta o translaci

Hlavním rozdílem oproti Laplaceově transformaci je, že věta je univerzální a lze ji použít, jak pro posuny vpravo tak i vlevo. Odpadá zde tudíž podmínka, že a musí být kladné číslo. Tato věta platí pro libovolné $a \in R$. To proto, že integrál, kterým je definován Fourierův obraz, je počítán v mezích od $-\infty$ do $+\infty$, kdežto u Laplaceova obrazu je spodní mez nulová.

$$\Phi\{f(t-a)\} = F(\mathrm{i}\omega)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega a}, \quad F(\mathrm{i}\omega) = \Phi f(t) \tag{1.53}$$

1.7.5 Věta o limitě obrazu

Jestliže F je obrazem f, pak pro $\omega \in R$ platí

$$\lim_{\omega\to+\infty} F(\mathrm{i}\omega) = \lim_{\omega\to-\infty} F(\mathrm{i}\omega) = 0 \tag{1.54}$$

1.7.6 Věta o obrazu derivace

Pokud platí věta o limitě a derivace předmětu je třídní funkce, potom platí

$$\Phi f'(t) = \mathrm{i}\omega F(\mathrm{i}\omega) \tag{1.55}$$

1.8 VZTAH MEZI LAPLACEOVOU A FOURIEROVOU TRANSFORMACÍ

Při srovnání definic Fourierovy a Laplaceovy transformace jsou prvním velmi nápadným rozdílem meze definičního integrálu. Integrační obor je u Fourierovy transformace $(-\infty,+\infty)$, kdežto u Laplaceovy transformace se integruje v intervalu $(0,+\infty)$. Dalším velkým rozdílem je, že namísto komplexního parametru p Fourierův obraz závisí na $\mathrm{i}\omega$. Pokud však platí, že funkce $f(t)$ je fourierovský předmět standardního typu a navíc splňuje podmínku, že funkční hodnoty jsou nulové pro $t<0$, je zde souvislost mezi oběma transformacemi. Je-li Laplaceův obraz tohoto předmětu $F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\cdot \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$, pak Fourierův obraz téhož předmětu se získá pouhým dosazením za p. Je-li tedy znám obraz Laplaceův, stačí pouze dosadit za operátor $p=\mathrm{i}\omega$ a není třeba počítat celou Fourierovu transformaci pro tento předmět. Vzájemný vztah lze tedy popsat následovně

$$\Phi\{f(t)\}=F(\mathrm{i}\omega)=[\mathrm{L}f(t)]_{p=\mathrm{i}\omega}=[F(p)]_{p=\mathrm{i}\omega}. \tag{1.56}$$

1.9 PŘÍKLADY DALŠÍCH INTEGRÁLNÍCH TRANSFORMACÍ

1.9.1 Dvoustranná Laplaceova transformace

Kromě klasické Laplaceovy transformace se zavádí ještě tzv. dvoustranná Laplaceova transformace. Jedná se v podstatě o spojovací článek mezi Laplaceovou a Fourierovou transformací. Funkce jádra zůstává stejná, tj. $K(t,p)=\mathrm{e}^{-pt}$. Jak již název napovídá, změní se pouze integrační meze $a=-\infty, b=+\infty$. Symbol dvourozměrné Laplaceovy transformace bude značen L_D. Obraz $F_\mathrm{D}(p)$ je tedy získán podle definičního integrálu vztahem

$$F_\mathrm{D}(p)=\mathrm{L}_\mathrm{D}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\,. \tag{1.57}$$

Zde již odpadá požadavek, aby byla funkce nulová pro $t<0$. Funkce může nabývat libovolných funkčních hodnot na množině reálných čísel. Jediné omezení je, že musí existovat dvě komplexní čísla p_1, p_2, pro která platí, že $\operatorname{Re} p_1 \leq \operatorname{Re} p_2$. To proto, aby Lebesgueův integrál konvergoval. Nicméně pokud by byly skutečně funkční hodnoty předmětu nulové pro $t<0$, pak je obraz předmětu stejný jak u klasické tak i u dvourozměrné transformace. V případě, že předmět splňuje vlastnosti funkce třídy pro Fourierovu transformaci, pak pro všechna ryze imaginární čísla $p = \mathrm{i}\omega$ platí $\Phi\{f(t)\} = \mathrm{L_D}\{f(t)\}$.

1.9.2 Mellinova transformace

Nechť $f(t)$ je funkce po částech spojitá, což platí i pro její první derivaci na intervalu $\langle 0,+\infty)$. Dále je třeba, aby konvergoval integrál $\int_0^{+\infty} |f(t)| \cdot t^{a-1} \mathrm{d}t$ pro všechna $a \in I \subset R$. Označování obrazu v Mellinově transformaci je podobné jako u ostatních transformací a to $F_{\mathrm{M}} = \mathrm{M} f$. Je definován pro všechny komplexní parametry $p = a + \mathrm{i}b$, kde $a \in I$. Obraz je určen vztahem

$$F_{\mathrm{M}}(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot t^{p-1} \mathrm{d}t\,. \tag{1.58}$$

Zpětná Mellinova transformace je definována vzorcem

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} F_{\mathrm{M}}(p) \cdot t^{-p} \mathrm{d}p\,. \tag{1.59}$$

Existuje zde i souvislost mezi Mellinovou a dvoustrannou Laplaceovou transformací. Pokud se v definičním integrálu transformace provede taková substituce, že $t = \mathrm{e}^{-x}$, pak je souvislost patrnější. Derivací substituce je obdržen vztah $dt = -\mathrm{e}^{-x} dx$. Pak při aplikaci substituce vznikne vzorec (1.60). Při přepočítání mezí je horní mez menší než spodní, a proto je třeba integrační meze zaměnit, čímž se obrátí znaménko před integrálem. Po roznásobení se výraz za integrálem výrazně zjednoduší. Pro tento případ jsou obrazy Mellinovy a dvourozměrné Laplaceovy transformace stejné. Platí pro ně tedy, že $F_{\mathrm{M}}(p) = G_{\mathrm{D}}(p)$, kde $G_{\mathrm{D}}(p) = \mathrm{L_D}\{g(x)\}$ pro $g(x) = f(\mathrm{e}^{-x})$.

$$F_{\mathrm{M}}(p) = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(\mathrm{e}^{-x}) \cdot \mathrm{e}^{-px+x} \cdot \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{e}^{-x}) \cdot \mathrm{e}^{-px} \mathrm{d}x \tag{1.60}$$

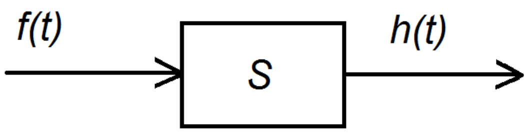
Tabulka 1.2 – Přehled vlastností transformací [Pírko, 1970]

Název transformace	Integrační obor	Funkce jádra
Laplaceova transformace	$(0,+\infty)$	$K(t,p)=\mathrm{e}^{-pt}$
dvourozměrná Laplaceova transformace	$(-\infty,+\infty)$	$K(t,p)=\mathrm{e}^{-pt}$
Laplaceova-Carsonova transformace	$(0,+\infty)$	$K(t,p)=p\cdot\mathrm{e}^{-pt}$
Fourierova transformace	$(-\infty,+\infty)$	$K(t,p)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$
kosinová Fourierova transformace	$(0,+\infty)$	$K(t,p)=\cos\omega t$
sinová Fourierova transformace	$(0,+\infty)$	$K(t,p)=\sin\omega t$

1.10 PŘÍMÁ Z TRANSFORMACE

1.10.1 Signály a jejich zpracování

Na úvod je třeba zmínit se o zpracování signálů a zdůraznit tak na základní rozdíl mezi Z transformací a dříve zmíněnými transformacemi. Signálem jako takovým se rozumí funkce závislá na čase. Může se samozřejmě jednat i o vícerozměrné signály, práce se však bude zabývat pouze časově závislými. Pokud se hovoří o zpracování signálu, obecně se tím rozumí transformace nějakého daného (výchozího) signálu na signál s požadovanými vlastnostmi. Názorné schéma je na obrázku 1.5. V tomto případě je vstupní signál označen $f(t)$. Signál prochází systémem S, který jej transformuje na požadovaný výstupní signál $h(t)$.



Obrázek 1.5 - Zpracování signálu

Rozlišují se signály spojité a diskrétní. Spojité závisí na spojité proměnné, což bývá nejčastěji např. čas. Diskrétní signály jsou zase funkcemi diskrétní proměnné, která je definovaná pouze pro celočíselné násobky dané výchozí konstantní hodnoty. Jedná se tedy vlastně o posloupnost, protože jednotlivé definované hodnoty jsou izolované body. Diskrétní signál vzniká ze spojitého tzv. diskretizací. K vysvětlení lze využít obrázku 1.5. Soustavu S si lze představit jako spínač. Ten periodickým spínáním ze vstupního spojitého signálu udělá posloupnost funkčních hodnot. Po diskretizaci tedy funkce nabývá hodnot pouze v časech $t = nT$, kde $n \in Z$ a $T > 0$. Písmeno T označuje krok diskretizace. Výstupní signál je tedy nyní funkce $f(nT)$. Takto vzniklá posloupnost se bude dále označovat jako $\{f_n\}$. V praxi se označení diskretizace příliš nepoužívá. Mnohem častěji je možné setkat se s názvem vzorkování (v angličtině sampling). Krok diskretizace T se pak nazývá vzorkovací krok, délka vzorkovacího intervalu nebo zkrátka perioda vzorkování. Vzorkovací kmitočet se získá jako převrácená hodnota délky vzorkovacího intervalu, tj. $f_v = \frac{1}{T}$. V angličtině se používá slovní spojení sampling frequency. Další pojem, který se často zavádí je kruhový vzorkovací kmitočet. Ten je daný vztahem $\omega_v = 2\pi f_v = \frac{2\pi}{T}$.

1.10.2 Funkcionální transformace posloupností

Nejen signály se dělí na spojité a diskrétní. Stejným způsobem mohou být rozděleny i soustavy. Pro popis spojitých systémů se používají diferenciální rovnice, zatímco u diskrétních systémů slouží k popisu jejich chování rovnice diferenční. Diferenční rovnice mohou být řešeny metodami diferenčního počtu. Výhodnou alternativou je však jejich řešení pomocí tzv. funkcionálních transformací posloupností (diskrétních transformací), což je analogie k integrálním transformacím používaným u spojitých systémů. Opět se přechází z řešení v originále, což je prostor předmětů, které jsou většinou funkcemi času, na řešení v obraze, kde už vystupují funkce komplexní proměnné nebo případně kmitočtu. V teorii diskrétních signálů a systémů je nejpoužívanější funkcionální transformací posloupností tzv. Z transformace. Její název je poněkud udivující protože, všechny ostatní transformace jsou pojmenovány po jejich objevitelích. Z transformace a teorie kolem ní se týká zejména tzv. Laurentových řad. Někde bývá označena i jako Laurentova transformace, ale nejčastější pojmenování, které přetrvalo do dnes je právě transformace Z. Nejedná se sice o integrální transformaci v pravém slova smyslu, přesto je však vhodné uvést její vlastnosti a souvislosti s již zmíněnými transformacemi. Existuje samozřejmě celá řada dalších transformací a to včetně diskrétní Laplaceovy transformace nebo diskrétní Fourierovy transformace.

1.10.3 Definice přímé Z transformace (teoretické značení dle matematiky)

Je dána posloupnost $\{f_n\}$. Její n-tý člen se označí f_n pro $n \in Z$. Lze ji tedy rozepsat po členech výčtem prvků

$$\{f_n\} = \{\ldots, f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots\}. \tag{1.61}$$

Členy takové posloupnosti mohou být komplexní. Podobně jako u jednostranné Laplaceovy transformace byl požadavek, aby předměty byly standardního typu, které mají nulové funkční hodnoty pro $t < 0$, tak i zde se bude předpokládat, že posloupnost $\{f_n\}$ bude jednostranná. Tím se myslí, že $f_n = 0$ pro $n < 0$. Transformace Z je pak definována vztahem

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \cdot z^{-n} \ . \tag{1.62}$$

Předpokladem definice je, že řada konverguje alespoň pro jedno komplexní $z \in C$. Pak se posloupnost $\{f_n\}$ nazývá posloupností schopnou transformace Z. Podobně jako u předešlých transformací posloupnost $\{f_n\}$ je předmětem a funkce $F(z)$ je jejím obrazem. Předmět je třeba vždy opatřit indexem n, aby bylo zdůrazněno, že se skutečně jedná o posloupnost, nikoliv pouze o funkci. Obraz je značen stejně jako u Laplaceovy transformace. Liší se pouze závislostí na komplexním parametru z. Nicméně v literatuře je možné se setkat i s označením $F^*(z)$ a to zejména kvůli tomu, aby se od sebe dostatečně odlišili Laplaceův a Z obraz. Oba obrazy totiž jistě nemohou být totožné. Značení transformace posloupnosti je následující

$$\mathrm{Z}\{f_n\} = F(z). \tag{1.63}$$

1.10.4 Alternativní (praktické) značení a definice přímé Z transformace

Je zde však více možností, jak ke značení přistupovat. Uvedená metoda je více teoretická a obtížně interpretovatelná pro základní pochopení problematiky. Toto značení odpovídá spíše matematice. Při praktickém použití se diferenční rovnice mohou značit jinak. Při prezentaci vlastností Z transformace budou použity obě metody označení, které jsou významově a logicky identické, ale pro snadnější pochopení se přikláním právě ke druhé formulaci, která je často využívána právě v oblasti teorie automatického řízení. Diferenční rovnice se obecně řeší pro výstupní signál. Ten se v automatizaci označuje písmenem y.

Je tedy dána posloupnost $\{y_k\}$, která vznikla vzorkováním spojitého signálu v čase $t = kT$. Hodnota k se označuje jako krok. Co se týče hodnot, jedná se o naprosto stejnou posloupnost jako $\{f_n\}$. Rozdíl je pouze ve značení. Zde se budou jednotlivé prvky indexovat od nuly s krokem jedna. Takže daná posloupnost může být zapsána

$$\{y_k\} = \{y_k\}_{k=0}^{\infty} = \{y_0, y_1, y_2, \ldots\}. \tag{1.64}$$

Další možností je představit si jednotlivé prvky posloupnosti, což jsou izolované body s určitou funkční hodnotou, jako Diracovy impulsy. Celý signál lze pak získat sumací všech impulsů, čili platí, že

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \cdot \delta(t - kT), \tag{1.65}$$

kde $\delta(t - kT)$ jsou časově posunuté Diracovy impulsy a T je perioda vzorkování. Laplaceův obraz takové řady je pak

$$\mathrm{L}\{y(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \cdot \mathrm{e}^{-kTp} \ . \tag{1.66}$$

Konečně zavedením nové komplexní proměnné $z = \mathrm{e}^{Tp}$, je získán definiční vztah Z transformace. Obraz funkce v Z transformaci se nazývá Z obraz. Takový obraz je dle definice funkcí komplexní proměnné z^{-1} nebo po úpravě proměnné z. Hodnoty posloupnosti $\{y_k\}$, případně diskrétní hodnoty funkce $y(kT)$, jsou předmětem. Obraz je v tomto případě značen $Y(z)$. Pro všechny dále uvedené vlastnosti bude platit, že $F(z) \equiv Y(z)$. Obě varianty jsou uvedeny pouze pro srovnání a liší se pouze ve značení. Obraz musí být vždycky stejný, ať je označen prvním či druhým způsobem. Obraz originální posloupnosti je tedy v Z transformaci určen

$$Y(z) = \mathrm{Z}\{y(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \cdot z^{-k} = \mathrm{Z}\{y_k\}. \tag{1.67}$$

Stejně jako i Laplaceova transformace měla jisté předpoklady, které museli být splněny, aby bylo možné transformaci aplikovat, tak i Z transformace má obdobné podmínky. Aby existoval Z obraz diskrétních hodnot funkce $y(kT)$ nebo posloupnosti $\{y_k\}$, musí být splněno

$$|y(kT)| \leq M\varphi^k, |y_k| \leq M\varphi^k, \tag{1.68}$$

kde M a φ jsou kladná konečná konstantní čísla a krok $k \geq 0$. Podmínkou je, že $y(kT) = 0$ pro $k < 0$. Totéž lze vyjádřit součinem $y(kT) \cdot \eta(t)$. Diskrétní jednotkový skok je definován pro hodnoty $k < 0$, kde $\eta(kT) = 0$, a pro hodnoty $k \geq 0$, kde $\eta(kT) = 1$. Předpoklad (1.68) je podmínkou nutnou i postačující pro existenci obrazu.

V definici Z transformace (1.67) vystupuje z^{-1}. Záporné exponenty mírně komplikují celou situaci, ale přesto je opodstatněné tohoto zápisu využívat. Nicméně pro zjednodušení je možné zapisovat Z obraz jako funkci nové komplexní proměnn q, pro kterou platí, že $q = z^{-1}$. Tímto nevzniká nová transformace, jedná se pouze o formální zápis s novou proměnnou.

$$Y(q) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \cdot q^k \tag{1.69}$$

1.10.5 Věta o linearitě transformace

Jsou-li dány komplexní konstanty $c_j \in C$, $j = \langle 0, \alpha \rangle$ a konečné celé číslo α a pokud existují obrazy posloupností $\mathrm{Z}\{f_{j,n}\} = F_j(z)$, jejichž poloměry konvergence $R_j > 0$, potom pro $|z| > \max\left(\frac{1}{R_j}\right)$ platí

$$\mathrm{Z}\left\{\sum_{j=0}^{\alpha} c_j f_{j,n}\right\} = \sum_{j=0}^{\alpha} c_j \cdot F_j(z). \tag{1.70}$$

Zjednodušený a zřejmě i přehlednější zápis pomocí znaku korespondence by vypadal takto

$$c_1\{f_{1,n}\} + \ldots + c_\alpha\{f_{\alpha,n}\} \mathrel{\hat{=}} c_1 \cdot F_1(z) + \ldots + c_\alpha \cdot F_\alpha(z). \tag{1.71}$$

Pro srovnání, při alternativním značení platí

$$\mathrm{Z}\{c_1 y_1(kT) + \ldots + c_\alpha y_\alpha(kT)\} = c_1 \cdot Y_1(z) + \ldots + c_\alpha \cdot Y_\alpha(z). \tag{1.72}$$

1.10.6 Věta o posunu posloupnosti

I u diskrétních signálů lze samozřejmě hovořit o translaci. Tato poučka bývá též někdy označena jako věta o posunutí v originále. Musí být dáno přirozené číslo m, které bude reprezentovat míru posunutí posloupnosti. Jedná-li se o posun hodnot směrem vpravo, bude v rovnici vystupovat znaménko mínus. Pro srovnání opět teoretičtější označení (1.73) a praktické (1.74).

$$\mathrm{Z}\{f_{n-m}\} = z^{-m} F(z) \tag{1.73}$$

$$\mathrm{Z}\{y(kT - mT)\} = \mathrm{Z}\{y(kT - mT) \cdot \eta(kT - mT)\} = z^{-m} Y(z) \tag{1.74}$$

Stejně tak lze hovořit o posunu v originále směrem vlevo. Potom budou v rovnicích znaménka kladná a obě varianty zápisu jsou následující

$$\mathrm{Z}\{f_{n+m}\} = z^m \left[F(z) - \sum_{n=0}^{m-1} f_n \cdot z^{-n} \right], \tag{1.75}$$

$$\mathrm{Z}\{y(kT + mT)\} = z^m \left[Y(z) - \sum_{v=0}^{m-1} y(vT) \cdot z^{-v} \right]. \tag{1.76}$$

1.10.7 Věta o konvoluci posloupností

Konvoluce je samozřejmě možná i v oblasti diskrétních signálu a taktéž pro ni platí komutativní, distributivní i asociativní zákon. Konvolucí posloupností se myslí posloupnost, která je definována předpisem $\sum_{j=0}^{n} f_j \cdot g_{n-j}$. Tato věta má významné praktické použití, neboť ji lze použít pro výpočet odezev diskrétních soustav. Proto je považována za jednu z nejdůležitějších vlastností Z transformace.

$$\mathrm{Z}\{f_n * g_n\} = \mathrm{Z}\{g_n * f_n\} = F(z) \cdot G(z) \tag{1.77}$$

$$Y(z) = \mathrm{Z}\left\{ \sum_{j=0}^{k} f(jT) \cdot g(kT - jT) \right\} = \mathrm{Z}\left\{ \sum_{j=0}^{k} g(jT) \cdot f(kT - jT) \right\} = F(z) \cdot G(z) \tag{1.78}$$

1.10.8 Věta o transformaci diferencí

Diference posloupnosti se transformuje podle této věty. Diference se označuje řeckým znakem Δ. Jsou-li splněny všechny požadavky Z transformace a první diferencí se myslí $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$ (někdy též nazývaná dopředná), pak pro její obraz platí

$$\mathrm{Z}\{\Delta f_n\} = (z-1) \cdot F(z) - z \cdot f_0 . \tag{1.79}$$

Podobně pro druhou diferenci vyjádřenou pomocí první, platí $\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n$. Z toho plyne, že obecně N-tou diferenci je možné získat předpisem $\Delta^N f_n = \Delta^{N-1} f_{n+1} - \Delta^{N-1} f_n$. Je-li pak tato věta aplikována na N-tou diferenci je její obraz získán následovně

$$\mathrm{Z}\{\Delta^N f_n\} = (z-1)^N \cdot F(z) - z \cdot \sum_{j=0}^{N-1} (z-1)^{N-j-1} \Delta^j f_0 , \tag{1.80}$$

kde $\Delta^j f_0$ je j-tá diference pro $n = 0$. Pro $j = 0$ pak vznikne člen $\Delta^0 f_0$. Nultá diference však neznamená nic jiného než, že se jedná o nezměněný člen f_0. Tento vzorec se využívá pro výpočet obrazu posloupnosti, u které je $\Delta^N f_n = 0$ pro některá $N \geq 1$. Vyjádřením obrazu je obdržen potřebný vztah

$$F(z)=\frac{z}{(z-1)}\cdot\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\Delta^j f_0}{(z-1)^j}+\frac{1}{(z-1)^N}\cdot \mathrm{Z}\{\Delta^N f_n\}. \tag{1.81}$$

Totéž zde bude uvedeno při alternativním značení. Zde se diference zapisuje $\Delta y(kT)$ a je definována rovnicí $\Delta y(kT)=y(kT+T)-y(kT)=y[(k+1)T]-y(kT)$. Obecný předpis je opět získán jejím N -násobným použitím

$$\Delta^N y(kT)=\Delta\left[\Delta^{N-1}y(kT)\right]=\sum_{j=0}^{N}(-1)^{N-j}\binom{N}{j}y(kT+jT). \tag{1.82}$$

Pak Z obraz obecně N -té dopředné diference je dán vztahem

$$\mathrm{Z}\{\Delta^N y(kT)\}=(z-1)^N\cdot Y(z)-z\cdot\sum_{j=0}^{N-1}(z-1)^{N-j-1}\Delta^j y(0). \tag{1.83}$$

Kromě dopředné existuje ještě tzv. diference zpětná. Zpravidla se značí ∇, aby se odlišila právě od výše zmíněné dopředné diference. Princip je stejný zde se však uvažuje rozdíl aktuální a minulé hodnoty. Kdežto u dopředné se jednalo o rozdíl následující a aktuální hodnoty. Čili zpětná diference je určena vzorcem $\nabla y(kT)=y(kT)-y[(k-1)T]$. Pro obraz N -té zpětné diference platí

$$\mathrm{Z}\{\nabla^N y(kT)\}=\left(\frac{z-1}{z}\right)^N\cdot Y(z)-\sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{z-1}{z}\right)^j\nabla^{N-1-j}y(-1). \tag{1.84}$$

1.10.9 Věta o transformaci posloupnosti částečných součtů

Existuje-li obraz dané posloupnosti, pak existuje i obraz posloupnosti částečných součtů z ní vytvořené a platí

$$\mathrm{Z}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}f_k\right\}=\frac{F(z)}{z-1}, \tag{1.85}$$

$$\mathrm{Z}\left\{\sum_{j=0}^{k-1}y(jT)\right\}=\frac{Y(z)}{z-1}. \tag{1.86}$$

Pokud je navíc zahrnuta i diskrétní hodnoty $y(kT)$, pak pro Z obraz získaného úplného součtu je získán vztah

$$\mathrm{Z}\{y_1(kT)\}=\mathrm{Z}\left\{\sum_{j=0}^{k}y(jT)\right\}=\frac{z}{z-1}\cdot Y(z). \tag{1.87}$$

1.10.10 Věta o derivaci obrazu posloupnosti

Tato poučka říká, že pokud existuje obraz posloupnosti, pak existuje i Z obraz posloupnosti $\mathrm{Z}\{n \cdot f_n\}$. Toto platí pro $|z| > \frac{1}{R}$, kde R je poloměr konvergence.

$$\mathrm{Z}\{n \cdot f_n\} = -z \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}} F(z) \tag{1.88}$$

$$\mathrm{Z}\{kT \cdot y(kT) \cdot \eta(kT)\} = -Tz \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}} F(z) \tag{1.89}$$

1.10.11 Věta o derivaci podle parametru

Věta se obvykle uvádí ve znění pro první derivaci, ale existuje i obecnější zápis. Pokud má funkce spojitou N-tou parciální derivace podle reálného parametru $x \in (a,b)$ a existuje obraz $F(z,x)$, popř. $Y(z,x)$ pro $t = kT$, potom platí

$$\frac{\partial^N F(z,x)}{\partial x^N} = \mathrm{Z}\left\{\frac{\partial^N f_n(x)}{\partial x^N}\right\}, \tag{1.90}$$

$$\frac{\partial^N Y(z,x)}{\partial x^N} = \mathrm{Z}\left\{\frac{\partial^N y(t,x)}{\partial x^N}\right\}. \tag{1.91}$$

1.10.12 Věta o limitě posloupnosti částečných součtů

Tato věta, platí za předpokladu, že řada na pravé straně rovnosti konverguje. Dalším požadavkem je, že komplexní číslo z, pro které je limita počítána, má mít nulovou imaginární část. Je-li znám obraz posloupnosti, pak je možné tuto větu využít k výpočtu součtu nekonečné řady.

$$\lim_{z \to 1+} F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \tag{1.92}$$

$$\lim_{z \to 1+} Y(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} y(kT) \tag{1.93}$$

1.10.13 Věta o limitních hodnotách předmětu

První částí tohoto tvrzení je o hodnotách počátečních. Opět zde platí, že limity jsou počítány pro $\mathrm{Re}(z)$.

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = f_0 \tag{1.94}$$

$$\lim_{z\to\infty} Y(z) = \lim_{k\to 0} y(kT) = y(0) \tag{1.95}$$

Druhá část věty pojednává o konečné hodnotě. I zde platí, že $\mathrm{Im}(z) = 0$.

$$\lim_{z\to 1+} (z-1)F(z) = \lim_{n\to\infty} f_n \tag{1.96}$$

$$\lim_{z\to 1+} (z-1)Y(z) = \lim_{k\to\infty} y(kT) \tag{1.97}$$

1.11 ZPĚTNÁ Z TRANSFORMACE

Zpětná Z transformace je úloha, v níž se hledá k danému Z obrazu $Y(z)$ originální posloupnost $y(kT)$. Pokud je funkce komplexní proměnné $Y(z)$ analytická v bodě ∞, pak je obrazem určité diskrétní funkce či posloupnosti. Předmět k tomuto obrazu je pak tvořen posloupností koeficientů Laurentova rozvoje funkce $Y(z)$ v okolí bodu ∞. K určení diskrétních hodnot předmětu s využitím reziduové věty slouží výraz

$$y(kT) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C Y(z)\cdot z^{k-1} dz = \sum_j \operatorname*{res}_{z_j} \left[Y(z)\cdot z^{k-1}\right], \tag{1.98}$$

kde křivka C je taková, že $z = \rho \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Komplexní číslo je zapsáno v exponenciálním tvaru a jeho argument $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Jeho absolutní hodnota ρ má být větší než poloměr konvergence, tedy $\rho > R$. V poslední řadě součet reziduí je myšlen jako součet reziduí ve všech singulárních bodech. Tím se myslí všechny (izolované) singulární body funkce $Y(z)\cdot z^{k-1}$. Zpětná transformace se značí, stejně jako v předchozích případech a to

$$y(kT) = \mathrm{Z}^{-1}\{Y(z)\}. \tag{1.99}$$

Pokud je obraz $Y(z)$ ve tvaru racionální lomené funkce, pak se při hledání odpovídajícího předmětu $y(kT)$ využívá jednoho z následujících postupů:

- metoda rozkladu na parciální zlomky (analyticky),
- rozvoj polynomiálního zlomku v Laurentovu řadu nekonečným dělením,
- rekurentní formule – Pierceův algoritmus.

1.11.1 Rozvoj v Laurentovu řadu nekonečným dělením

Omezení tohoto postupu spočívá v tom, že může být aplikován pouze pokud je Z obraz racionální lomená funkce. Jeho výhodou je, že nevyžaduje znalost pólů obrazu $Y(z)$. Není však možné takto získat přímo analytické vyjádření předmětu $y(kT)$. Při tomto postupu se vychází z definičního vztahu Z transformace (1.67). Je-li řada rozepsána na součet jednotlivých členů, potom platí

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \cdot z^{-k} = y(0) + y(T) \cdot z^{-1} + y(2T) \cdot z^{-2} + \ldots . \tag{1.100}$$

Nyní je třeba rozvinout obraz $Y(z)$ v Laurentovu řadu se středem v nekonečnu. Potom bude platit, že koeficienty této řady se přímo rovnají diskrétním hodnotám funkce $y(kT)$. Racionální lomená funkce bude obecně ve tvaru

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0} . \tag{1.101}$$

Může se jednat o popis diskrétního systému, který se v tomto tvaru zapisuje. Podmínkou fyzikální realizovatelnosti je, že řád jmenovatele musí být větší nebo roven řádu čitatele, čili musí platit, že $n \geq m$. Polynom čitatele je označen zkráceně $B(z)$ a mnohočlen ve jmenovateli je zapsán jako $A(z)$. Rozvoj takové funkce v Laurentovu řadu je pak dán dělením polynomů. Pokud je zlomek rozšířen převrácenou hodnotou z s nejvyšší mocninou, pak se koeficienty číselně nezmění, ale budou zapsány v jiném pořadí. Proto je třeba je odlišit. Zde jsou značeny α, β. Platí tedy, že

$$Y(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \ldots + \beta_m z^{-m}}{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \ldots + \alpha_n z^{-n}} = y_0 + y(T) \cdot z^{-1} + y(2T) \cdot z^{-2} + \ldots . \tag{1.102}$$

Následující úprava spočívá v odstranění zlomku a to tak, že je celá rovnice vynásobena jmenovatelem $\alpha(z)$. Předmět $y(kT)$, lze pak získat při porovnávání koeficientů u stejných mocnin. Tímto způsobem lze zjistit, že

$$\alpha_0 y(0) = \beta_0 \Rightarrow y(0) = \frac{\beta_0}{\alpha_0}, \tag{1.103}$$

$$\alpha_0 y(T) + \alpha_1 y(0) = \beta_1 \Rightarrow y(T) = \frac{[\beta_1 - \alpha_1 y(0)]}{\alpha_0}, \tag{1.104}$$

$$\alpha_0 y(2T)+\alpha_1 y(T)+\alpha_2 y(0)=\beta_2 \Rightarrow y(2T)=\frac{[\beta_2-\alpha_1 y(T)-\alpha_2 y(0)]}{\alpha_0}. \tag{1.105}$$

Z prvních třech kroků je již možné vypozorovat, jaké vztahy by platili dále. Takto je možné vyjádřit konečně i samotný předmět $y(kT)$. Proto je obecné vyjádření pro $k \le n$ dáno vztahem (1.106) a pro $k > n$ je určeno vzorcem (1.107).

$$y(kT)=\frac{\left[\beta_k-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y(kT-jT)\right]}{\alpha_0} \tag{1.106}$$

$$y(kT)=\frac{1}{\alpha_0}\sum_{j=0}^{n}\alpha_j y(kT-jT) \tag{1.107}$$

1.11.2 Analytické řešení – rozklad na parciální zlomky

Metoda rozkladu na parciální zlomky spočívá v nalezení tzv. pólů. Jedná se o kořeny polynomu jmenovatele obrazu. Při získání nulových bodů se pak postupuje klasicky. Původní zlomek se rozdělí na jednodušší neboli parciální zlomky prvního a druhého druhu. První možnost, která může nastat, je, že póly jsou reálná čísla. To znamená, že obraz může být rozložen na součet parciálních zlomků prvního druhu, které už lze samostatně transformovat zpět do originálu. Kořenem mnohočlenu je pouze číslo, ale obecně se budou různé reálné kořeny značit písmenem z_j. Pro póly reálné a zároveň násobné o násobnosti v_n se použije značení z_n. Pak se rozklad provede obecně do tvaru

$$Y(z)=\sum_j A_j \frac{z}{z-z_j}+\sum_n\sum_{m=1}^{v_n} B_{nm}\frac{z}{(z-z_n)^m}. \tag{1.108}$$

Je-li nyní provedena zpětná Z transformace pro $t = kT$, jednotlivé členy (obrazy) budou odpovídat svým předmětům

$$A_j \frac{z}{z-z_j} \mathrel{\hat{=}} A_j z_j^{\frac{t}{T}}\eta(k)=A_j z_j^k \eta(k), \tag{1.109}$$

$$B_{nm}\frac{z}{(z-z_n)^m} \mathrel{\hat{=}} B_{nm}\frac{z_n^{\frac{t}{T}}}{z_n^{m-1}}\binom{\frac{t}{T}}{m-1}=B_{nm}\cdot z_n^{k-m+1}\binom{k}{m-1}\cdot\eta(k-m+1), \tag{1.110}$$

kde $m \in N$ a jeho hodnoty jsou v intervalu $\langle 1, v_n \rangle$.

Další možností, která při rozkladu může nastat, je, že kořeny jmenovatele mohou být komplexní. Polynom tedy nemá řešení v množině reálných čísel. I v tomto případě však platí uvedené vztahy (1.109) a (1.110). Pro dvojici komplexně sdružených pólů $z_j = \alpha_j \pm i\beta_j = |z_j| e^{i\omega j}$ lze dospět ke korespondenci ve tvaru

$$C_j \frac{z}{z - z_j} + \overline{C}_j \frac{z}{z - \overline{z}_j} \mathrel{\hat{=}} 2|z_j|^k \left(a_j \cos\omega_j k - b_j \sin\omega_j k\right), \tag{1.111}$$

kde $C_j = a_j + ib_j$, $\overline{C}_j = a_j - ib_j$, $|z_j| = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}$, $\omega_j = arctg \frac{\beta_j}{\alpha_j}$. Druhý možný tvar je pak

$$C_j \frac{z}{z - z_j} + \overline{C}_j \frac{z}{z - \overline{z}_j} \mathrel{\hat{=}} 2|C_j| \cdot |z_j|^k \cos(\omega_j k - \varphi_j), \tag{1.112}$$

kde $|C_j| = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$, $\varphi_j = arctg \frac{b_j}{a_j}$. Pro komplexní kořeny z_n, které jsou navíc v_n-násobné platí buď korespondence

$$\begin{gathered}\sum_{m=1}^{v_n} \left[C_{nm} \frac{z}{(z - z_n)^m} + \overline{C}_{nm} \frac{z}{(z - \overline{z}_n)^m} \right] \mathrel{\hat{=}} \sum_{m=1}^{v_n} 2 \cdot \binom{k}{m-1} \cdot \\ \cdot |z_n|^{k-m+1} \left(a_{nm} \cos[\omega_n (k - m + 1)] - b_{nm} \sin[\omega_n (k - m + 1)]\right) \cdot \eta(k - m + 1)\end{gathered} \tag{1.113}$$

nebo

$$\begin{gathered}\sum_{m=1}^{v_n} \left[C_{nm} \frac{z}{(z - z_n)^m} + \overline{C}_{nm} \frac{z}{(z - \overline{z}_n)^m} \right] \mathrel{\hat{=}} \\ \mathrel{\hat{=}} \sum_{m=1}^{v_n} 2 \cdot \binom{k}{m-1} \cdot |z_n|^{k-m+1} \cos[\omega_n (k - m + 1) + \varphi_n] \cdot \eta(k - m + 1).\end{gathered} \tag{1.114}$$

1.11.3 Rekurentní formule - Pierceův algoritmus

Předpokladem použití Pierceova algoritmu je opět to, že obraz musí být racionální lomená funkce. Hlavní myšlenka je taková, že obraz $Y(z)$ lze považovat za obraz tzv. váhové funkce. O obrazu takové funkce lze říct, že je shodný s diskrétním přenosem. Za těchto předpokladů je možno položit $Y(z^{-1}) = G(z^{-1})$. Je-li diferenční rovnice po formální stránce zapsána, vede k získání rekurentní formule ve tvaru

$$y(kT) + a_1 y(kT - T) + \ldots + a_n y(kT - nT) = b_0 u(kT - vT) + \ldots + b_m u(kT - vT - mT), \tag{1.115}$$

kde $u(kT - jT) = 0$ pro $kT - jT \neq 0$ a $u(kT - jT) = 1$ pro $kT - jT = 0$. Proměnná j nabývá hodnot $j = v, \ldots, v + m$. Pro řešení je dále třeba položit rovny nule všechny diskrétní hodnoty $y(-T) = \ldots = y(-nT) = 0$. Pak lze dopočítat všechny hodnoty od $y(0)$ až po $y(kT)$ pro dané k.

1.12 VZTAH MEZI LAPLACEOVOU A Z TRANSFORMACÍ

Protože Z transformace je nejčastěji používanou funkcionální transformací při řešení diferenčních rovnic, používá se někdy její přímá souvislost s Laplaceovou transformací, která je majoritním zástupcem funkcionálních transformací používaných u systémů spojitých.

$$Y(p) = \int_0^\infty y(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}p \tag{1.116}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C Y(p) \cdot \mathrm{e}^{pt} \mathrm{d}p \tag{1.117}$$

Pro zopakování jsou uvedeny vztahy pro přímou a zpětnou Laplaceovu transformaci, tentokrát je však spojitý signál označen $y(t)$. Může se tedy jednat např. o výstupní veličinu z konkrétní spojité soustavy. Obraz této veličiny je pak $Y(p)$. Laplaceově obrazu pak odpovídá Z obraz $Y(z)$. Mezi transformacemi je velmi úzký vztah. Důležité je, uvědomit si, že vstupní signál obou transformací je totožný. Ovšem požadavkem Laplaceovy transformace je spojitost signálu, kdežto před aplikací Z transformace je signál diskretizován. Tím je nevratně ztracena informace o hodnotách v časech jiných než násobky vzorkovací periody. Čili se jedná o jistou formu zjednodušení, která se aplikuje zejména kvůli výpočetní technice. V časech $t = kT$ se ale hodnoty vzorkované a původní veličiny nijak neliší. Laplaceův obraz takového signálu by byl ve tvaru

$$y(kT) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C Y(p) \cdot \mathrm{e}^{pkT} \mathrm{d}p \,. \tag{1.118}$$

Proto pokud je znám Laplaceův obraz spojitého signálu $Y(p)$ a je dána konečná perioda vzorkování T, je možné využít souvislosti obou transformací a obraz Laplaceův přepočítat na obraz v Z transformaci.

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\cdot z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C Y(p)\cdot \mathrm{e}^{pkT}\,\mathrm{d}p\cdot z^{-k}=\int_C \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} Y(p)\cdot \mathrm{e}^{pkT}\cdot z^{-k}\mathrm{d}p=$$

$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C Y(p)\sum_{k=0}^{\infty}\cdot \mathrm{e}^{pkT}\cdot\frac{1}{z^k}\mathrm{d}p=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C Y(p)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{pT}}{z}\right)^k \mathrm{d}p=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C Y(p)\cdot\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{pT}}{z}}\mathrm{d}p= \tag{1.119}$$

$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C Y(p)\cdot\frac{z}{z-\mathrm{e}^{pT}}\mathrm{d}p=\sum_j \operatorname*{res}_{p_j}\left[Y(p)\cdot\frac{z}{z-\mathrm{e}^{pT}}\right]$$

Vychází se ze vztahu (1.67) pro přímou Z transformaci. Do tohoto předpisu je za $y(kT)$ dosazen vzorec (1.118). Nyní se provede záměna sumy a integrálu. Protože Laplaceův obraz $Y(p)$ nijak nezávisí na kroku k, podle kterého se sčítá, může být zapsán před sumou. Násobící konstantu $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}$ lze taktéž vytknout před integrál. Komplexní číslo z, které má záporný exponent, se zapíše jako převrácená hodnota. Zlomek za sumací se pak zapíše umocněný na exponent k, podle kterého se sčítá, a vzniká zde geometrická řada, jejíž součet je dán vztahem $s_k=\frac{1}{1-q}$, kde kvocient je právě již zmíněný zlomek. Posledním krokem je přepsání integrálu na součet reziduí ve všech singulárních bodech p_j, kterých musí být konečný počet. Aby však toto platilo, musí být splněna podmínka $\lim_{p\to\infty} F(p)=0$.

2 INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE – ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

2.1 ŘEŠENÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

V této části bude ukázáno, jak přistupovat z praktického hlediska k problematice integrálních transformací. Mnoho z dříve uvedených vět a vlastností Laplaceovy transformace, zde bude mít význam. Nejdříve bude vše demonstrováno na zadané diferenciální rovnici s příslušnými počátečními podmínkami.

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 2\mathrm{e}^{-5t} + \cos(2t) \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} y'(0+) &= -1 \\ y(0+) &= +2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Jak již bylo napsáno dříve, každý z členů rovnice lze transformovat samostatně a jejich obrazy se poté opět sečtou či odečtou v závislosti na zadání. Je možné začít např. od nejvyšší derivace.

$$\begin{aligned} &\mathrm{L}\{y''(t)\} = p^2 \cdot \mathrm{L}\{y(t)\} - \sum_{k=1}^{2} p^{2-k} \cdot y^{(k-1)}(0+) = p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0+) - y'(0+) = \\ &= p^2 \cdot Y(p) - 2p + 1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Obraz první derivace opatřené koeficientem je

$$L\{-2y'(t)\} = -2 \cdot L\{y'(t)\} = -2 \cdot (p \cdot Y(p) - y(0+)) = -2p \cdot Y(p) + 4. \tag{2.4}$$

A konečně obraz nederivovaného předmětu

$$\mathrm{L}\{y(t)\} = Y(p). \tag{2.5}$$

Levá strana rovnice je již transformovaná. Nyní se bude zjišťovat obraz exponenciální funkce a to s využitím definičního integrálu Laplaceovy transformace (1.6).

$$\begin{aligned} &\mathrm{L}\{2\mathrm{e}^{-5t}\} = 2 \cdot \mathrm{L}\{\mathrm{e}^{-5t}\} = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-5t} \cdot \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-5t-pt}\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(p+5)}\mathrm{d}t = 2\left[\frac{\mathrm{e}^{-t(p+5)}}{-(p+5)}\right]_0^\infty = \\ &= 2\left(0 - \frac{1}{-(p+5)}\right) = \frac{2}{p+5} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Poslední předmět, který ještě zbývá transformovat je funkce kosinus s dvojnásobným argumentem. Opět je možné ji v tomto tvaru dosadit do definičního integrálu. Místo toho bude ukázán jiný přístup, zejména pro usnadnění výpočtu. Použije se substituce

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right). \tag{2.7}$$

Výpočet po dosazení původního předmětu by byl poněkud zdlouhavý, protože by bylo třeba 2krát aplikovat metodu per partes. S využitím substituce se lépe pracuje s exponenty, neboť všude je základem Eulerovo číslo.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}\{\cos(2t)\} = \mathrm{L}\left\{\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\right)\right\} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\right)\cdot \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(p-2\mathrm{i})}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(p+2\mathrm{i})}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t(p-2\mathrm{i})}}{-(p-2\mathrm{i})}\right]_0^\infty + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t(p+2\mathrm{i})}}{-(p+2\mathrm{i})}\right]_0^\infty = \\
&= \frac{-1}{2p-4\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-t(p-2\mathrm{i})}\right]_0^\infty - \frac{1}{2p+4\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-t(p+2\mathrm{i})}\right]_0^\infty = \frac{1}{2p-4\mathrm{i}} + \frac{1}{2p+4\mathrm{i}} = \\
&= \frac{4p}{4p^2 - 16\mathrm{i}^2} = \frac{p}{p^2+4}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Nyní, když už jsou všechny členy převedeny do obrazové oblasti, lze transformovanou (původně diferenciální) rovnici zapsat následovně

$$p^2Y(p) - 2p + 1 - 2pY(p) + 4 + Y(p) = \frac{2}{p+5} + \frac{p}{p^2+4}. \tag{2.9}$$

Na levé straně se nejprve vytkne obraz $Y(p)$ a ten se následně osamostatní.

$$Y(p)\left(p^2 - 2p + 1\right) = \frac{2}{p+5} + \frac{p}{p^2+4} + 2p - 5 \tag{2.10}$$

$$Y(p) = \frac{2}{(p+5)(p-1)^2} + \frac{p}{\left(p^2+4\right)(p-1)^2} + \frac{2p-5}{(p-1)^2} \tag{2.11}$$

Dílčí zlomky se sečtou a zapíší na společný jmenovatel. K obrazu $Y(p)$ je teď třeba najít originál $y(t)$. To ale pro takto složitý zlomek není přímo možné. Je třeba jej dále rozdělit na parciální zlomky, které budou zpětně transformovatelné každý zvlášť.

$$Y(p) = \frac{2p^4 + 5p^3 - 14p^2 + 25p - 92}{(p+5)\left(p^2+4\right)(p-1)^2} = \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{(p-1)^2} + \frac{Dp+E}{p^2+4} \tag{2.12}$$

Je-li použita metoda srovnávání koeficientů, pak pro jednotlivé mocniny operátoru p je obdržena soustava pěti rovnic o pěti neznámých.

$$\begin{array}{lcll}
p^4: & A+B+D & = & 2 \\
p^3: & -2A+4B+C+3D+E & = & 5 \\
p^2: & 5A-B+5C-9D+3E & = & -14 \\
p^1: & -8A+16B+4C+5D-9E & = & 25 \\
p^0: & 4A-20B+20C+5E & = & -92
\end{array} \tag{2.13}$$

Soustavu lze snadno přepsat do matice a následně ji řešit jako klasickou maticovou rovnici. Protože matice soustavy má stejnou hodnost jako matice rozšířená, existuje právě jedno řešení. K jeho nalezení posloužil výpočetní nástroj Matlab. Zjištěné čitatele parciálních zlomků jsou

$$A = 0{,}0\overline{5}; B = 2{,}06\overline{4}; C = -2{,}4\overline{6}; D = -0{,}12; E = -0{,}32.$$

Obraz hledaného řešení lze tedy zapsat ve tvaru

$$Y(p) = \frac{0{,}0\overline{5}}{p+5} + \frac{2{,}06\overline{4}}{p-1} + \frac{-2{,}4\overline{6}}{(p-1)^2} + \frac{-0{,}12p}{p^2+4} + \frac{-0{,}32}{p^2+4}.$$

Poslední parciální zlomek druhého druhu, který nelze v rovině reálných čísel dále rozložit, se rozdělí alespoň na dva zlomky se stejným jmenovatelem. Jednotlivé zlomky jsou pro přehlednost označeny jako dílčí obrazy, jejichž součtem je získán obraz výsledný.

$$Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p) + Y_4(p) + Y_5(p) \tag{2.14}$$

Řešení zadané diferenciální rovnice bude nalezeno zpětnou transformací obrazu $Y(p)$. Takže také platí, že řešení je obdrženo i při součtu zpětných transformací dílčích zlomků.

$$y(t) = \mathrm{L}^{-1}\{Y(p)\} = \mathrm{L}^{-1}\{Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p) + Y_4(p) + Y_5(p)\} =$$

$$= \mathrm{L}^{-1}\{Y_1(p)\} + \mathrm{L}^{-1}\{Y_2(p)\} + \mathrm{L}^{-1}\{Y_3(p)\} + \mathrm{L}^{-1}\{Y_4(p)\} + \mathrm{L}^{-1}\{Y_5(p)\} \tag{2.15}$$

Opět se bude počítat postupně. Obraz $Y_1(p)$ se dosadí do vztahu pro zpětnou Laplaceovu transformaci. Použije se vzorec (1.38) pro zpětnou transformaci pomocí reziduí. Ten se však řeší pomocí obecné reziduové věty (2.16). Funkce má pouze jeden pól prvního řádu.

$$\operatorname*{res}_{z=c}(f(z)) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z\to c}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{n-1}\left[f(z)\cdot(z-c)^n\right] \tag{2.16}$$

$$y_1(t)=\mathrm{L}^{-1}\{Y_1(p)\}=\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{0{,}0\overline{5}}{p+5}\right\}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}\frac{0{,}0\overline{5}}{p+5}\cdot\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=\operatorname*{res}_{p=-5}\left(\frac{0{,}0\overline{5}}{p+5}\cdot\mathrm{e}^{pt}\right)=$$
$$=\lim_{p\to-5}(p+5)\frac{0{,}0\overline{5}}{p+5}\cdot\mathrm{e}^{pt}=0{,}0\overline{5}\mathrm{e}^{-5t}\tag{2.17}$$

Stejným způsobem se bude řešit i zpětná transformace druhého zlomku.

$$y_2(t)=\mathrm{L}^{-1}\{Y_2(p)\}=\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{2{,}06\overline{4}}{p-1}\right\}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}\frac{2{,}06\overline{4}}{p-1}\cdot\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=\operatorname*{res}_{p=1}\left(\frac{2{,}06\overline{4}}{p-1}\cdot\mathrm{e}^{pt}\right)=$$
$$=\lim_{p\to1}(p-1)\frac{2{,}06\overline{4}}{p-1}\cdot\mathrm{e}^{pt}=2{,}06\overline{4}\mathrm{e}^{t}\tag{2.18}$$

Rozdíl nastává u dalšího výpočtu. Třetí zlomek má taktéž jeden nulový bod jmenovatele, ale tentokrát se jedná o kořen dvojnásobný. Proto se i v tomto případě opět použije obecná reziduová věta (2.16). Jelikož je pól dvojnásobný, za n se všude dosadí číslo 2.

$$y_3(t)=\mathrm{L}^{-1}\{Y_3(p)\}=\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{-2{,}4\overline{6}}{(p-1)^2}\right\}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}\frac{-2{,}4\overline{6}}{(p-1)^2}\cdot\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=$$
$$\operatorname*{res}_{p_1=p_2=1}\left(\frac{-2{,}4\overline{6}}{(p-1)^2}\cdot\mathrm{e}^{pt}\right)=\frac{1}{1!}\cdot\lim_{p\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[(p-1)^2\frac{-2{,}4\overline{6}}{(p-1)^2}\cdot\mathrm{e}^{pt}\right]=$$
$$=\lim_{p\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[-2{,}4\overline{6}\cdot\mathrm{e}^{pt}\right]=\lim_{p\to1}-2{,}4\overline{6}t\cdot\mathrm{e}^{pt}=-2{,}4\overline{6}t\cdot\mathrm{e}^{t}\tag{2.19}$$

Poslední případ který zde nastane je ten, že póly jsou dva a to komplexně sdružené. Pak se provede součet reziduí v těchto singulárních bodech. Po úpravách je obdržen vztah (2.7), který byl použit na začátku pro substituci funkce kosinus.

$$y_4(t)=\mathrm{L}^{-1}\{Y_4(p)\}=\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{-0{,}12p}{p^2+4}\right\}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}\frac{-0{,}12p}{p^2+4}\cdot\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=$$
$$=\sum_{n=1}^{2}\operatorname*{res}_{p_n}\left(\frac{-0{,}12p}{p^2+4}\cdot\mathrm{e}^{pt}\right)=\lim_{p\to2\mathrm{i}}(p-2\mathrm{i})\frac{-0{,}12p}{(p+2\mathrm{i})(p-2\mathrm{i})}\cdot\mathrm{e}^{pt}+$$
$$+\lim_{p\to-2\mathrm{i}}(p+2\mathrm{i})\frac{-0{,}12p}{(p+2\mathrm{i})(p-2\mathrm{i})}\cdot\mathrm{e}^{pt}=\lim_{p\to2\mathrm{i}}\frac{-0{,}12p}{p+2\mathrm{i}}\cdot\mathrm{e}^{pt}+\lim_{p\to-2\mathrm{i}}\frac{-0{,}12p}{p-2\mathrm{i}}\cdot\mathrm{e}^{pt}=$$
$$=\frac{-0{,}12\cdot2\mathrm{i}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}}{4\mathrm{i}}+\frac{-0{,}12\cdot(-2\mathrm{i})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}{-4\mathrm{i}}=-0{,}12\cdot\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\right)=-0{,}12\cdot\cos(2t)\tag{2.20}$$

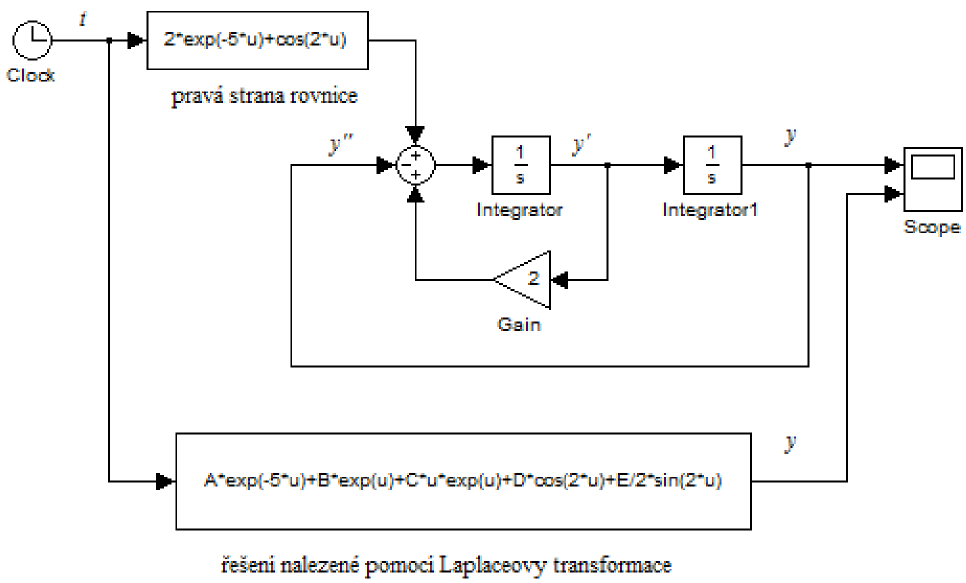
S posledním zlomkem se pracuje naprosto stejně jako tomu bylo v předchozím případě. Nicméně po zpětné transformaci je ještě vhodné použít substituci

$$\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right). \tag{2.21}$$

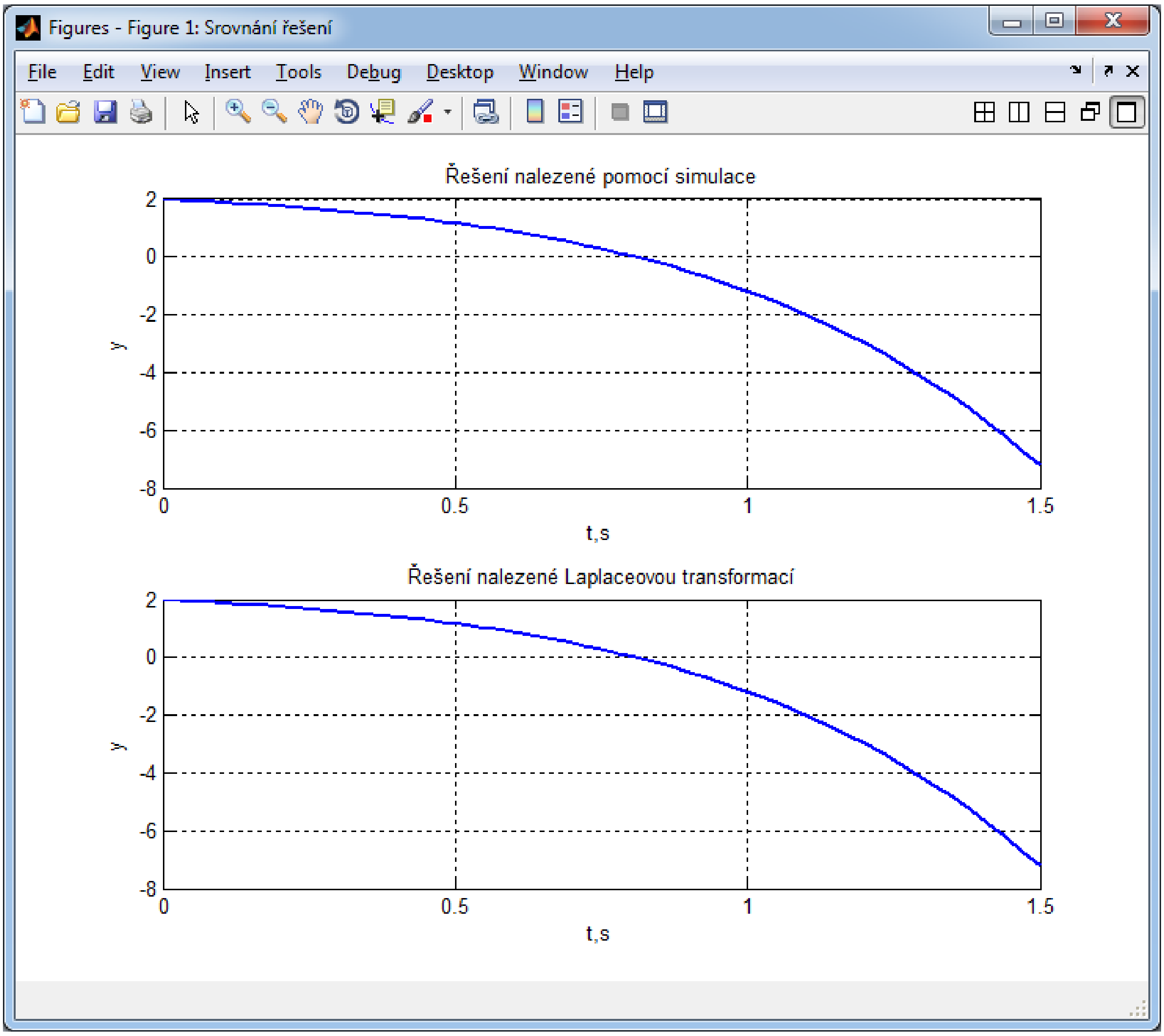
$$\begin{aligned} y_5(t) &= \mathrm{L}^{-1}\{Y_5(p)\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{-0{,}32}{p^2+4}\right\} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} \frac{-0{,}32}{p^2+4}\cdot \mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p = \\ &= \sum_{n=1}^{2} \operatorname*{res}_{p_n}\left(\frac{-0{,}32}{p^2+4}\cdot \mathrm{e}^{pt}\right) = \lim_{p\to 2\mathrm{i}}(p-2\mathrm{i})\frac{-0{,}32}{(p+2\mathrm{i})(p-2\mathrm{i})}\cdot \mathrm{e}^{pt} + \\ &+ \lim_{p\to -2\mathrm{i}}(p+2\mathrm{i})\frac{-0{,}32}{(p+2\mathrm{i})(p-2\mathrm{i})}\cdot \mathrm{e}^{pt} = \lim_{p\to 2\mathrm{i}}\frac{-0{,}32}{p+2\mathrm{i}}\cdot \mathrm{e}^{pt} + \lim_{p\to -2\mathrm{i}}\frac{-0{,}32}{p-2\mathrm{i}}\cdot \mathrm{e}^{pt} = \\ &= \frac{-0{,}32\cdot \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}}{4\mathrm{i}} + \frac{-0{,}32\cdot \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}{-4\mathrm{i}} = -0{,}32\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\right) = -0{,}16\cdot\sin(2t) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Sečtením všech vypočítaných funkcí je obdrženo partikulární řešení zadané diferenciální rovnice pro uvedené počáteční podmínky.

$$y(t) = 0{,}0\overline{5}\mathrm{e}^{-5t} + 2{,}06\overline{4}\mathrm{e}^{t} - 2{,}4\overline{6}t\cdot \mathrm{e}^{t} - 0{,}12\cdot\cos(2t) - 0{,}16\cdot\sin(2t) \tag{2.23}$$



Obrázek 2.1 – Schéma zapojení v prostředí Simulink



Obrázek 2.2 – Srovnání řešení nalezeného v Simulinku a pomocí Laplaceovy transformace

2.2 ŘEŠENÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S ČASOVÝM POSUNEM

Další příklad bude demonstrovat, jaký vliv na výpočet má translace funkce. Pro jednoduchost je zadaná stejná diferenciální rovnice jako v předchozím příkladu. Posun směrem vpravo bude o 5 sekund. Zde je velmi důležité dbát na dříve zmíněné značení. Funkce, které jsou posunuty musí mít nulové funkční hodnoty pro $t < 5$. Proto je zadání doplněno i posunutými jednotkovými skoky $\eta(t-5)$. Počáteční podmínky zůstávají stejné. Tentokrát jsou však kvůli posunu zadané v čase $t = 5$.

$$\eta(t-5)\cdot\left[y''(t-5) - 2y'(t-5) + y(t-5)\right] = \eta(t-5)\cdot\left\{2e^{-5(t-5)} + \cos\left[2(t-5)\right]\right\} \tag{2.24}$$

$$
\begin{aligned}
&y'(5+) = -1\\
&y(5+) = +2
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Při přímé transformaci se posun projeví podle věty (1.30). Dále už se pokračuje klasicky jako při neposunuté funkce. Stejným způsobem se vyjádří i první a nultá derivace.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{L}\{\eta(t-5)\cdot y''(t-5)\} = \mathrm{e}^{-5p}\mathrm{L}\{y''(t)\} = \mathrm{e}^{-5p}\left[p^2\cdot \mathrm{L}\{y(t)\} - \sum_{k=1}^{2} p^{2-k}\cdot y^{(k-1)}(5+)\right] =\\
&= \mathrm{e}^{-5p}\left[p^2\cdot Y(p) - p\cdot y(5+) - y'(5+)\right] = \mathrm{e}^{-5p}\left(p^2\cdot Y(p) - 2p + 1\right)
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{L}\{-2y'(t-5)\cdot\eta(t-5)\} = -2\cdot\mathrm{e}^{-5p}\mathrm{L}\{y'(t)\} = -2\cdot\mathrm{e}^{-5p}\left[pY(p) - y(5+)\right] =\\
&= -2\cdot\mathrm{e}^{-5p}\left(pY(p) - 2\right)
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

$$
\mathrm{L}\{\eta(t-5)\cdot y(t-5)\} = \mathrm{e}^{-5p}\mathrm{L}\{y(t)\} = \mathrm{e}^{-5p}\cdot Y(p)
\tag{2.28}
$$

Při výpočtu přímé transformace exponenciální funkce se opět může využít definičního integrálu. Násobící konstanta se vytkne před integrál. Násobení posunutým jednotkovým skokem vynuluje funkční hodnoty až do času $t = 5$. Proto je zbytečné integrovat od nuly. Posunutá Heavisideova funkce, která tuto skutečnost tedy pouze zdůrazňuje, se již dál psát nemusí a spodní integrační mez bude 5. Tento postup vede k výslednému zlomku, který je opět násobený exponenciální funkcí představující odpovídající posun.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{L}\left\{\eta(t-5)\cdot 2\mathrm{e}^{-5(t-5)}\right\} = 2\cdot\mathrm{L}\left\{\eta(t-5)\cdot\mathrm{e}^{-5(t-5)}\right\} = 2\int_0^\infty \eta(t-5)\cdot\mathrm{e}^{-5(t-5)}\cdot\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t =\\
&= 2\int_5^\infty \mathrm{e}^{-5t-pt}\mathrm{d}t = 2\int_5^\infty \mathrm{e}^{-5(t-5)}\cdot\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = 2\cdot\mathrm{e}^{25}\int_5^\infty \mathrm{e}^{-t(p+5)}\mathrm{d}t = \frac{2\cdot\mathrm{e}^{25}}{p+5}\left[-\mathrm{e}^{-t(p+5)}\right]_5^\infty =\\
&= \frac{2\cdot\mathrm{e}^{25}}{p+5}\left(0 + \mathrm{e}^{-5p-25}\right) = \frac{2}{p+5}\mathrm{e}^{-5p}
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Funkce kosinus se bude integrovat stejným způsobem jako v předchozím příkladu. Posun ale opět způsobí změnu dolní integrační meze. Využije se substituce (2.7).

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}\{\eta(t-5)\cdot\cos[2(t-5)]\}=\mathrm{L}\{\eta(t-5)\cdot\cos(2t-10)\}=\\
&=\mathrm{L}\left\{\eta(t-5)\cdot\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2t-10)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2t-10)}\right)\right\}=\frac{1}{2}\int_5^\infty\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2t-10)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2t-10)}\right)\cdot\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\\
&=\frac{1}{2}\int_5^\infty\mathrm{e}^{-t(p-2\mathrm{i})-10\mathrm{i}}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-t(p+2\mathrm{i})+10\mathrm{i}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t(p-2\mathrm{i})-10\mathrm{i}}}{-(p-2\mathrm{i})}\right]_5^\infty+\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t(p+2\mathrm{i})+10\mathrm{i}}}{-(p+2\mathrm{i})}\right]_5^\infty=\\
&=\frac{-1}{2p-4\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-t(p-2\mathrm{i})-10\mathrm{i}}\right]_5^\infty-\frac{1}{2p+4\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-t(p+2\mathrm{i})+10\mathrm{i}}\right]_5^\infty=\frac{1}{2p-4\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-5p}+\frac{1}{2p+4\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-5p}=\\
&=\frac{4p}{4p^2-16\mathrm{i}^2}\mathrm{e}^{-5p}=\frac{p}{p^2+4}\mathrm{e}^{-5p}
\end{aligned}\tag{2.30}$$

Rovnice v obrazové oblasti, která se bude dále řešit, je pak ve tvaru

$$\begin{aligned}
&\left(p^2Y(p)-2p+1\right)\cdot\mathrm{e}^{-5p}-2\mathrm{e}^{-5p}\left(pY(p)-2\right)+Y(p)\cdot\mathrm{e}^{-5p}=\\
&=\frac{2}{p+5}\mathrm{e}^{-5p}+\frac{p}{p^2+4}\mathrm{e}^{-5p}
\end{aligned}\tag{2.31}$$

Na levé straně je vytknuto $\mathrm{e}^{-5p}\cdot Y(p)$, zatímco na pravou stranu se přemístí členy dané počátečními podmínkami. Ty stejně jako v minulém příkladě tvoří poslední zlomek. Celá rovnice se podělí polynomem levé strany, taky aby se osamostatnil obraz posunuté výstupní veličiny.

$$\mathrm{e}^{-5p}\cdot Y(p)\left(p^2-2p+1\right)=\frac{2}{p+5}\mathrm{e}^{-5p}+\frac{p}{p^2+4}\mathrm{e}^{-5p}+(2p-5)\cdot\mathrm{e}^{-5p}\tag{2.32}$$

$$\mathrm{e}^{-5p}\cdot Y(p)=\frac{2}{(p+5)(p-1)^2}\mathrm{e}^{-5p}+\frac{p}{(p^2+4)(p-1)^2}\mathrm{e}^{-5p}+\frac{2p-5}{(p-1)^2}\mathrm{e}^{-5p}\tag{2.33}$$

U všech členů rovnice se sice vyskytuje násobení exponenciální funkcí e^{-5p}, nesmí se jí však rovnice podělit. Tato funkce u každého obrazu reprezentuje, jak je posunutý v čase. Pokud by se celá rovnice podělila e^{-5p}, naprosto by vymizel údaj o translaci. Exponenciální funkce může být pouze vytknuta pro zjednodušení výpočtu. Pak se zlomky sečtou a výsledný zlomek, který je stejný jako v minulém příkladu, je nyní pouze posunutý v čase. To ale nebrání tomu, aby byl rozdělen na parciální zlomky.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-5p}\cdot Y(p)=\frac{2p^4+5p^3-14p^2+25p-92}{(p+5)(p^2+4)(p-1)^2}\mathrm{e}^{-5p}=\\
&=\frac{A}{p+5}\mathrm{e}^{-5p}+\frac{B}{p-1}\mathrm{e}^{-5p}+\frac{C}{(p-1)^2}\mathrm{e}^{-5p}+\frac{Dp+E}{p^2+4}\mathrm{e}^{-5p}
\end{aligned}\tag{2.34}$$

Zcela logicky budou rovnice identické a tudíž i vypočtené koeficienty vychází naprosto stejně.

$A = 0{,}0\overline{5}; B = 2{,}06\overline{4}; C = -2{,}4\overline{6}; D = -0{,}12; E = -0{,}32$

Po rozdělení na parciální zlomky prvního a druhého druhu s příslušnými čitateli, lze tedy rovnici v obrazové oblasti zapsat

$$\mathrm{e}^{-5p}\cdot Y(p) = \frac{0{,}0\overline{5}}{p+5}\mathrm{e}^{-5p} + \frac{2{,}06\overline{4}}{p-1}\mathrm{e}^{-5p} + \frac{-2{,}4\overline{6}}{(p-1)^2}\mathrm{e}^{-5p} + \frac{-0{,}12p}{p^2+4}\mathrm{e}^{-5p} + \frac{-0{,}32}{p^2+4}\mathrm{e}^{-5p}. \quad (2.35)$$

Jednotlivé zlomky se opět kvůli přehlednosti označí jako dílčí obrazy s pořadovým číslem 5. Každý z nich je opatřený příslušným posunem ve formě exponenciální funkce. Každý zlomek může být přetransformován zpět do originálu zvlášť. Řešení se pak posune v čase tak, že namísto t bude všude dosazeno $t-5$. Pro úplnost se výsledek ještě násobí posunutou Heavisideovou funkcí $\eta(t-5)$.

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{-5p}\cdot Y(p) = \\ &= Y_1(p)\cdot \mathrm{e}^{-5p} + Y_2(p)\cdot \mathrm{e}^{-5p} + Y_3(p)\cdot \mathrm{e}^{-5p} + Y_4(p)\cdot \mathrm{e}^{-5p} + Y_5(p)\cdot \mathrm{e}^{-5p} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} &\eta(t-5)\cdot y(t-5) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\mathrm{e}^{-5p}\cdot Y(p)\right\} = \\ &= \mathrm{L}^{-1}\left\{\left[Y_1(p)+Y_2(p)+Y_3(p)+Y_4(p)+Y_5(p)\right]\cdot \mathrm{e}^{-5p}\right\} = \\ &= \left[y_1(t-5)+y_2(t-5)+y_3(t-5)+y_4(t-5)+y_5(t-5)\right]\cdot \eta(t-5) \end{aligned} \quad (2.37)$$

První dva zlomky mají po jednom pólu, který není násobný.

$$\begin{aligned} &y_1(t) = \mathrm{L}^{-1}\{Y_1(p)\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{0{,}0\overline{5}}{p+5}\right\} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}\frac{0{,}0\overline{5}}{p+5}\cdot \mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p = \operatorname*{res}_{p=-5}\left(\frac{0{,}0\overline{5}}{p+5}\cdot \mathrm{e}^{pt}\right) = \\ &= \lim_{p\to -5}(p+5)\frac{0{,}0\overline{5}}{p+5}\cdot \mathrm{e}^{pt} = 0{,}0\overline{5}\mathrm{e}^{-5t} \Rightarrow y_1(t-5) = \eta(t-5)\cdot 0{,}0\overline{5}\mathrm{e}^{-5t+25} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} &y_2(t) = \mathrm{L}^{-1}\{Y_2(p)\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{2{,}06\overline{4}}{p-1}\right\} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}\frac{2{,}06\overline{4}}{p-1}\cdot \mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p = \operatorname*{res}_{p=1}\left(\frac{2{,}06\overline{4}}{p-1}\cdot \mathrm{e}^{pt}\right) = \\ &= \lim_{p\to 1}(p-1)\frac{2{,}06\overline{4}}{p-1}\cdot \mathrm{e}^{pt} = 2{,}06\overline{4}\mathrm{e}^{t} \Rightarrow y_2(t-5) = \eta(t-5)\cdot 2{,}06\overline{4}\mathrm{e}^{t-5} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Třetí zlomek má jeden dvojnásobný kořen, proto se opět použije obecnější věta o výpočtu reziduí.

$$
\begin{aligned}
y_3(t) &= \mathrm{L}^{-1}\{Y_3(p)\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{-2{,}4\overline{6}}{(p-1)^2}\right\} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}\frac{-2{,}4\overline{6}}{(p-1)^2}\cdot \mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p = \\
&= \operatorname*{res}_{p_1=p_2=1}\left(\frac{-2{,}4\overline{6}}{(p-1)^2}\cdot \mathrm{e}^{pt}\right) == \frac{1}{1!}\cdot\lim_{p\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[(p-1)^2\frac{-2{,}4\overline{6}}{(p-1)^2}\cdot \mathrm{e}^{pt}\right] = \\
&= \lim_{p\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[-2{,}4\overline{6}\cdot \mathrm{e}^{pt}\right] = \lim_{p\to 1} -2{,}4\overline{6}t\cdot \mathrm{e}^{pt} = -2{,}4\overline{6}t\cdot \mathrm{e}^{t} \\
&\Rightarrow y_3(t-5) = \eta(t-5)\cdot\left[-2{,}4\overline{6}(t-5)\cdot \mathrm{e}^{t-5}\right]
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

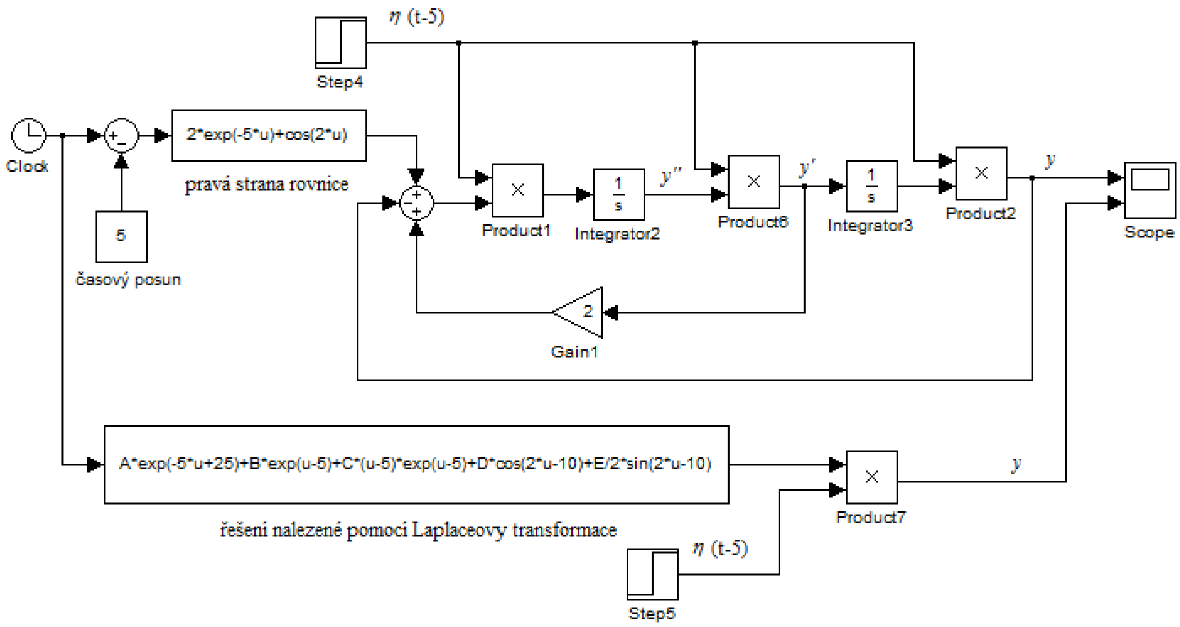
Poslední dva zlomky, opět stejné jako v minulém příkladě, mají dva komplexně sdružené kořeny. Po zpětné transformaci a dalších úpravách se opět využije substitucí pro funkce sinus a kosinus.

$$
\begin{aligned}
y_4(t) &= \mathrm{L}^{-1}\{Y_4(p)\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{-0{,}12p}{p^2+4}\right\} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}\frac{-0{,}12p}{p^2+4}\cdot \mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p = \\
&= \sum_{n=1}^{2}\operatorname*{res}_{p_n}\left(\frac{-0{,}12p}{p^2+4}\cdot \mathrm{e}^{pt}\right) = \lim_{p\to 2\mathrm{i}}(p-2\mathrm{i})\frac{-0{,}12p}{(p+2\mathrm{i})(p-2\mathrm{i})}\cdot \mathrm{e}^{pt} + \\
&+ \lim_{p\to -2\mathrm{i}}(p+2\mathrm{i})\frac{-0{,}12p}{(p+2\mathrm{i})(p-2\mathrm{i})}\cdot \mathrm{e}^{pt} = \lim_{p\to 2\mathrm{i}}\frac{-0{,}12p}{p+2\mathrm{i}}\cdot \mathrm{e}^{pt} + \lim_{p\to -2\mathrm{i}}\frac{-0{,}12p}{p-2\mathrm{i}}\cdot \mathrm{e}^{pt} = \\
&= \frac{-0{,}12\cdot 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}}{4\mathrm{i}} + \frac{-0{,}12\cdot(-2\mathrm{i})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}{-4\mathrm{i}} = -0{,}12\cdot\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\right) = -0{,}12\cos(2t) \\
&\Rightarrow y_4(t-5) = \eta(t-5)\cdot\left[-0{,}12\cos(2t-10)\right]
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

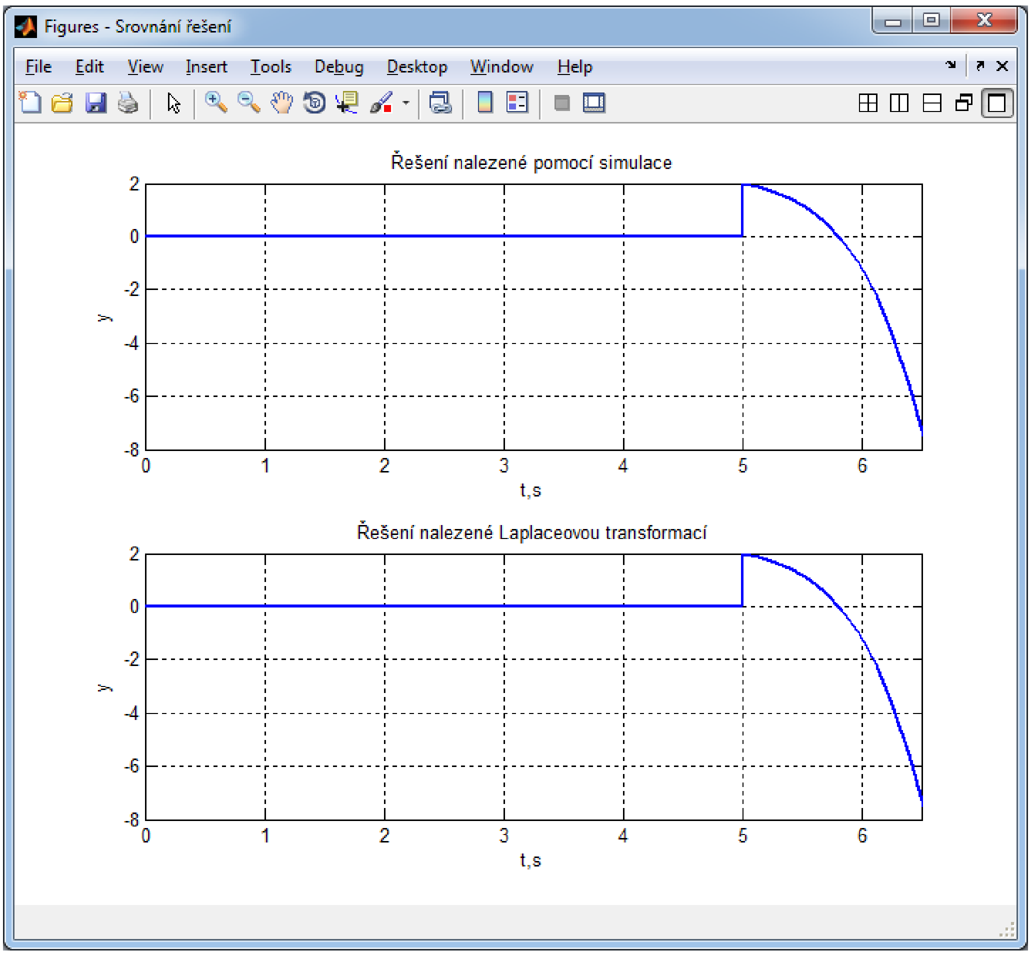
$$
\begin{aligned}
y_5(t) &= \mathrm{L}^{-1}\{Y_5(p)\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{-0{,}32}{p^2+4}\right\} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}\frac{-0{,}32}{p^2+4}\cdot \mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p = \\
&= \sum_{n=1}^{2}\operatorname*{res}_{p_n}\left(\frac{-0{,}32}{p^2+4}\cdot \mathrm{e}^{pt}\right) = \lim_{p\to 2\mathrm{i}}(p-2\mathrm{i})\frac{-0{,}32}{(p+2\mathrm{i})(p-2\mathrm{i})}\cdot \mathrm{e}^{pt} + \\
&\lim_{p\to -2\mathrm{i}}(p+2\mathrm{i})\frac{-0{,}32}{(p+2\mathrm{i})(p-2\mathrm{i})}\cdot \mathrm{e}^{pt} = \lim_{p\to 2\mathrm{i}}\frac{-0{,}32}{p+2\mathrm{i}}\cdot \mathrm{e}^{pt} + \lim_{p\to -2\mathrm{i}}\frac{-0{,}32}{p-2\mathrm{i}}\cdot \mathrm{e}^{pt} = \\
&\frac{-0{,}32\cdot \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}}{4\mathrm{i}} + \frac{-0{,}32\cdot \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}{-4\mathrm{i}} = -0{,}32\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\right) = -0{,}16\cdot\sin(2t) \\
&\Rightarrow y_5(t-5) = \eta(t-5)\cdot\left[-0{,}16\cdot\sin(2t-10)\right]
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Vzhledem k tomu, že koeficienty v čitateli parciálních zlomků vycházeli naprosto stejně a struktura obrazu byla až na posunutí také stejná, dalo se předpokládat, že i výsledné řešení diferenciální rovnice s časovým posunem bude stejné a změna se projeví výhradně jen v translaci na časové ose. Nalezené řešení je tedy v tomto tvaru

$$
\begin{aligned}
&\eta(t-5)\cdot y(t-5) = \eta(t-5)\cdot \\
&\cdot\left(0{,}0\overline{5}\mathrm{e}^{-5t+25} + 2{,}06\overline{4}\mathrm{e}^{t-5} - 2{,}4\overline{6}(t-5)\cdot \mathrm{e}^{t-5} - 0{,}12\cdot\cos(2t-10) - 0{,}16\cdot\sin(2t-10)\right).
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$



Obrázek 2.3 – Schéma zapojení s časovým posunem v prostředí Simulink



Obrázek 2.4 – Řešení s časovým posunem v Simulinku a pomocí Laplaceovy transformace

2.3 APLIKACE PRO VÝPOČET ŘEŠENÍ LDR POMOCÍ LAPLACEOVY TRANSFORMACE

2.3.1 Funkce pro práci s transformacemi v prostředí Matlab

Matlab je univerzálním softwarovým nástrojem, který nabízí celou řadu funkcí pro řešení nejrůznějších problémů. Aby mohl být využit i pro výpočet integrálních transformací, je třeba mít nainstalovaný Symbolic Math Toolbox. Potom nabízí celou řadu užitečných funkcí pro práci s jednotlivými transformacemi.

Tabulka 2.1 – Přehled funkcí pro výpočet transformací

Příkaz	Funkce
laplace	Laplaceova transformace
ilaplace	inverzní Laplaceova transformace
fourier	Fourierova transformace
ifourier	inverzní Fourierova transformace
ztrans	Z transformace
iztrans	inverzní Z transformace

Základem je uvědomit si, že funkce pro výpočet transformací nepracují s klasickými číselnými proměnnými, jak je u jiných funkcí běžné. Celočíselné proměnné či desetinná čísla typu double a další tedy nemohou být použity. Zavádí se zde tzv. symbolické proměnné. Jako symbolická proměnná se deklaruje čas t a také komplexní parametr p. V matlabu jsou tyto proměnné označeny jako syms.

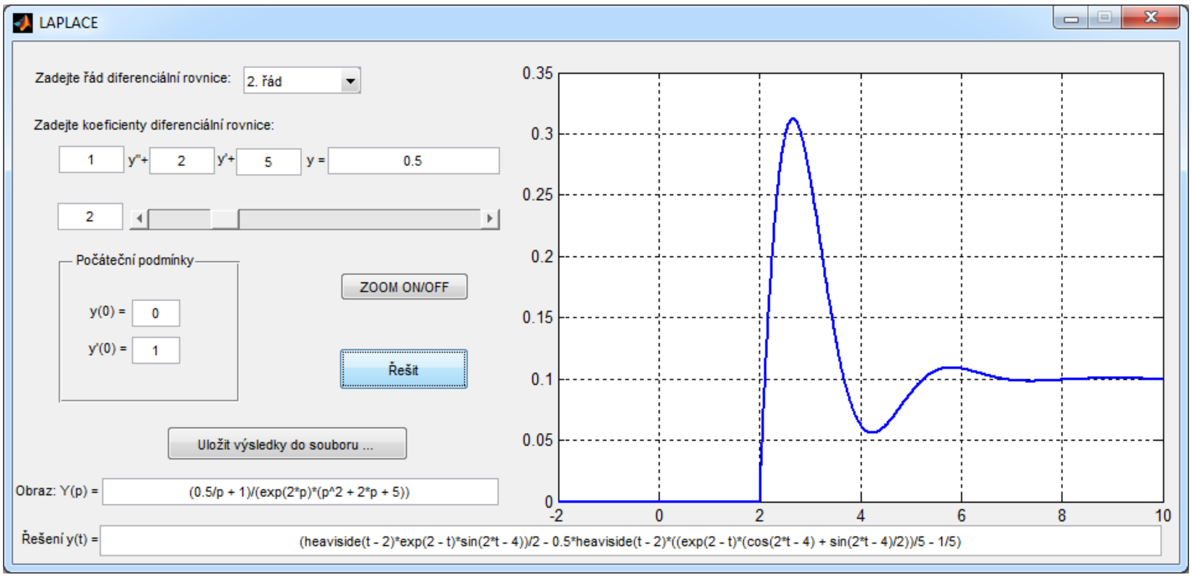
```
>> syms t p
>> f = sin(3*t);
>> laplace(f,t,p)

ans =

3/(p^2 + 9)
```

Obrázek 2.5 – Praktická ukázka výpočtu obrazu zadané funkce

Například funkce laplace má tři vstupní proměnné. První z nich je předmět, který má být transformován. Druhá je čas a třetí je označení komplexního parametru. Pokud je tedy například požadováno zjistit, jaký je obraz funkce $f(t)=\sin(3t)$, postupuje se následovně. Nejdřív se zavedou symbolické proměnné. Následně se zadá předpis funkce $f(t)$ a všechny tyto parametry se potom vyhodnotí při zadání do funkce laplace. Výsledek může být ještě vypsán jako klasický zlomek, pokud se zadá do funkce pretty. Stejným způsobem se zde pracuje i se zpětnými transformacemi. Příklad syntaxe při zápisu těchto funkcí je na obrázku 2.5.

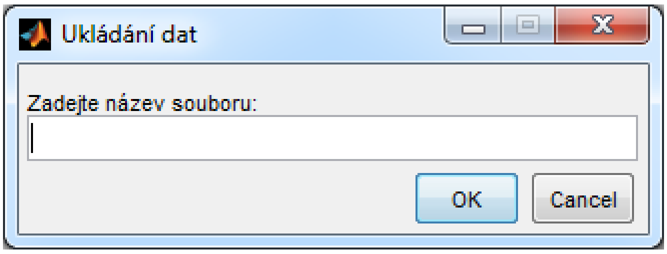
2.3.2 GUI

Doplňující částí práce je grafické rozhraní, které umožňuje hledání řešení diferenciálních rovnic do druhého řádu. Po spuštění se v nabídce vybere, zda se bude hledat řešení rovnice prvního či druhého řádu. Poté se do jednotlivých kolonek zadají koeficienty řešené rovnice. Pravá strana rovnice může být zapsána i pomocí matematických funkcí jako je sinus či kosinus a to se stejnou syntaxí jako by se zadávaly přímo v Matlabu. Tzn. že zadání nemusí být pouze ve formě čísel, ale mohou být použity funkce, které závisí na proměnné *t*. Pod zadanou rovnicí se nachází časový posuvník, vedle kterého je zobrazena aktuální hodnota posunu v čase. Rozsah posunutí je 0 – 10 s. Hodnotu je možné nastavit posuvníkem nebo přímo přepsáním aktuální hodnoty posunu. Dále se zadají počáteční podmínky.



Obrázek 2.6 – Grafické rozhraní pro řešení LDR pomocí Laplaceovy transformace

Jakmile je vše zadáno stačí stisknout tlačítko „Řešit“ a v první kolonce se objeví řešení v obraze, čili Laplaceův obraz, a ve druhé je již výsledné řešení v časové oblasti. Na pravé straně jsou výsledky interpretovány ve formě grafu. Graf je možné přibližovat a oddalovat až po stisknutí tlačítka „ZOOM ON/OFF“. Při druhém stisku se graf nastaví opět do výchozího zobrazení. Při jakékoliv změně parametrů je třeba znovu stisknout tlačítko pro řešení, aby se změna projevila. Aplikace zároveň velmi názorně ukazuje, jaký vliv má na řešení translace v čase. Poslední užitečnou vlastností, kterou toto grafické uživatelské rozhraní disponuje, je možnost uložit výsledky do souboru pro jejich další zpracování. Při stisku tlačítka pro ukládání se objeví okno, kde je uživatel vyzván k zadání názvu souboru. Soubor je uložen s příponou .mat, což je klasický datový soubor využívaný v Matlabu. Soubor se ukládá do složky s aplikací. Exportován je pouze vektor času a vektor řešení.



Obrázek 2.7 – Ukládání do souboru

ZÁVĚR

Práce uceluje poznatky z oboru teorie integrálních transformací, které jsou základním kamenem teorie automatického řízení. Byly vybrány nejvyužívanější transformace a příklady dalších existujících transformací s popisem vazem a souvislostí mezi nimi. Některé ze zmíněných vlastností transformací, jako například posunutí v čase, demonstrují vyřešené příklady. Prakticky by se přistoupilo spíše k využití slovníku Laplaceovy transformace, ale pro přiblížení všech vlastností a souvislostí se při výpočtech využívalo základních definičních vztahů. Vše je vylíčeno velmi podrobně. V praxi jsou však tyto výpočty nahrazeny výpočetní technikou. Při nutnosti nalezení řešení je pak vhodné využití software jako je Matlab. Bez nutnosti znalosti jednotlivých příkazů je možné pracovat s navrženou aplikací. Je jednoduchá, přehledná a plně dostačující pro výpočty partikulárních řešení zadaných LDR, takže může být dále využita pro studijní účely.

Literatura

BLANCO, M. 2012. Laplace: el espíritu de los infinitésimos en la administración. *Loff.it* [online]. [cit. 2015-03-20]. Dostupné z: http://loffit.abc.es/2012/08/25/laplace-el-espiritu-de-los-infinitesimos-en-la-administracion/70776

BŘEZINA, T. 2013. *Mechatronické soustavy*. Brno. Dostupné z: http://autnt.fme.vutbr.cz/brezina/Mechatronicke_soustavy.pdf

CVEJN, J. 2011. *Fourierova a Laplaceova transformace*. Pardubice.

KRÁLOVÁ, M. 2008. Edutorium. *Techmania* [online]. [cit. 2015-04-20]. Dostupné z: http://www.techmania.cz/edutorium/art_vedci.php?key=351

MODRLÁK, O. 2002. *Z-TRANSFORMACE*. Liberec. Dostupné z: http://matlab.fei.tuke.sk/raui/doc/z_transf_M_w.pdf

PÍRKO, Z. a J. VEJT 1970. *Laplaceova transformace: Základy teorie a užití v elektrotechnice*. Praha: SNTL, 245 s.

VEIT, J. 1979. *Integrální transformace*. Praha: SNTL, 118 s.

VÍCH, R. 1979. *Transformace Z a některá její použití*. 2. vyd. Praha: SNTL, 183 s. Matematický seminář SNTL.