

**Univerzita Pardubice**

**Fakulta ekonomicko-správní**

**Paretovo rozdělení v pojištění a zajištění**

**Bc. Jan Klapal**

**Diplomová práce  
2014**

Univerzita Pardubice  
Fakulta ekonomicko-správní  
Akademický rok: 2013/2014

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Jan Klapal**  
Osobní číslo: **E120080**  
Studijní program: **N6209 Systémové inženýrství a informatika**  
Studijní obor: **Pojistné inženýrství**  
Název tématu: **Paretovo rozdělení v pojištění a zajištění**  
Zadávající katedra: **Ústav matematiky a kvantitativních metod**

### Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Paretovo rozdělení má významné místo při modelování individuálních škod v neživotném pojištění, kdy jsou dost pravděpodobné aj značně vysoké škody, hlavně v heterogenních portfoliích pojištěven. Důležité je i jeho využití při výpočtu zajistného v neproporcionálním zajištění. Teoretické problémy při modelování pojistných rizik pomocí tohoto rozdělení, jejich řešení a ukázka aplikace jsou náplní diplomové práce.

#### Zásady:

- Paretovo rozdělení jako model individuálních pojistných plnění.
- Paretovo rozdělení jako model škod v heterogenních portfoliích pojištěven.
- Využití Paretova rozdělení při simulaci extrémních škod v neproporcionálním zajištění.
- Využití Paretova rozdělení při výpočtu zajistného v neproporcionálním zajištění.
- Ukázky aplikace všech teoretických modelů.

Rozsah grafických prací: –  
Rozsah pracovní zprávy: cca 50 stran  
Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická  
Seznam odborné literatury:

- BOLAND, P. J.: *Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science*. London: Chapman&Hall/CRC, 2007.  
CIPRA, T.: *Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví*. Praha: Grada Publishing, 2004.  
HOGG, R. V., KLUGMAN, S. A.: *Loss Distribution*. John Wiley & Sons, 2009.  
KAAS, R., GOOVAERTS, M., DHAENE, J., DENUIT, M.: *Modern Actuarial Risk Theory*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001.  
PACÁKOVÁ, V.: *Aplikovaná poistná statistika*, Iura Edition, Bratislava, 2004.  
PACÁKOVÁ, V. a kolektiv: *Modelování a simulace pojistných rizik*. Pardubice: Vydavatelství Univerzity Pardubice, 2012.  
TSE Y. K.: *Nonlife Actuarial Models*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

Vedoucí diplomové práce: *Pacáková*  
prof. RNDr. Viera Pacáková, CSc.  
Ústav matematiky a kvantitativních metod  
Datum zadání diplomové práce: 30. září 2013  
Termín odevzdání diplomové práce: 30. dubna 2014

*Myšková*  
doc. Ing. Renáta Myšková, Ph.D.  
děkanka

L.S.

*Čapek*  
prof. Ing. Jan Čapek, CSc.  
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 3. října 2013

## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 30. 4. 2014

Bc. Jan Klapal

## **PODĚKOVÁNÍ:**

Tímto bych rád poděkoval své vedoucí práce prof. RNDr. Vieri Pacákové, Ph.D. za její odbornou pomoc, cenné rady a poskytnuté materiály, které mi pomohly při zpracování diplomové práce. Dále bych chtěl poděkovat svým rodičům za podporu, pomoc a trpělivost, kterou mi poskytli po dobu celého studia.

## **ANOTACE**

*Předmětem diplomové práce „Paretovo rozdělení v pojištění a zajištění“ je aplikace tohoto rozdělení v modelování individuálních škod v neživotním pojištění, při výpočtu zajistného v neproporcionálním zajištění a při simulaci extrémních škod. Teoretický základ, který je nutnou součástí pro pochopení celé problematiky, je doplněn o praktické ukázky jednotlivých metod s využitím softwarových programů MS Excel a Statgraphic Centurion XV.*

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

*Paretovo rozdělení pravděpodobnosti, modelování individuálních pojistných plnění, neproporcionální zajištění, nettozajistné, simulace extrémních škod, kvantilová funkce*

## **TITLE**

Pareto Distribution in Insurance and Reinsurance

## **ANNOTATION**

*The subject of the Master Thesis „Pareto Distribution in Insurance and Reinsurance“ is the application of the distribution in modeling of individual losses in non-life insurance, in determining net premium in case of non-proportional reinsurance and in simulation of extreme losses. The theory is complemented by demonstrations of applications using MS Excel spread sheet and statistical software package Statgraphics Centurion XV.*

## **KEYWORDS**

*Pareto distribution, modeling of individual losses in non-life insurance, non-proportional reinsurance, risk premium, simulation of extreme losses, quantile function*

# OBSAH

ÚVOD .....	9
<b>1 PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MODELOVÁNÍ VÝŠE INDIVIDUÁLNÍCH ŠKOD V NEŽIVOTNÍM POJIŠTĚNÍ.....</b>	<b>11</b>
1.1 CHARAKTERISTIKA NEŽIVOTNÍHO POJIŠTĚNÍ.....	12
1.1.1 <i>Neživotní pojištění osob</i> .....	13
1.1.2 <i>Pojištění majetku</i> .....	14
1.1.3 <i>Pojištění finančních ztrát a záruk</i> .....	17
1.1.4 <i>Pojištění odpovědnosti za škody</i> .....	17
1.1.5 <i>Pojištění právní ochrany</i> .....	20
1.2 VŠEOBECNÝ POSTUP PRAVDĚPODOBNOSTNÍHO MODELOVÁNÍ INDIVIDUÁLNÍ VÝŠE ŠKOD .....	20
1.2.1 <i>Grafická analýza údajů</i> .....	21
1.2.2 <i>Odhady parametrů</i> .....	23
1.2.3 <i>Testy dobré shody</i> .....	24
<b>2 PARETOVO ROZDĚLENÍ.....</b>	<b>29</b>
2.1 AMERICKÝ TVAR PARETOVA ROZDĚLENÍ.....	29
2.2 EVROPSKÝ TVAR PARETOVA ROZDĚLENÍ .....	30
<b>3 APLIKACE PARETOVA ROZDĚLENÍ V NEŽIVOTNÍM POJIŠTĚNÍ .....</b>	<b>32</b>
3.1 CHARAKTERISTIKA DAT .....	32
3.2 ODHADY PARAMETRŮ PARETOVA ROZDĚLENÍ.....	34
3.2.1 <i>Metoda momentů</i> .....	34
3.2.2 <i>Metoda maximální věrohodnosti</i> .....	35
3.3 TESTY DOBRÉ SHODY.....	37
3.3.1 <i>Paersonův <math>\chi^2</math> test</i> .....	37
3.3.2 <i>Kolmogorovův-Smirnovův test</i> .....	39
3.4 OVĚŘENÍ ROZDĚLENÍ POMOCÍ STATGRAPHICS CENTURION XV .....	40
3.4.1 <i>Rozdělení nejvyšších škod</i> .....	42
<b>4 PARETOVO ROZDĚLENÍ V NEPROPORCIONÁLNÍM ZAJIŠTĚNÍ.....</b>	<b>44</b>
4.1 CHARAKTERISTIKA NEPROPORCIONÁLNÍHO ZAJIŠTĚNÍ.....	45
4.2 MODEL ZALOŽENÝ NA PARETOVĚ ROZDĚLNÍ PRO STANOVENÍ NETTOZAJISTNÉHO.....	50
4.3 VÝPOČET NETTOZAJISTNÉHO .....	52
<b>5 MODELOVÁNÍ EXTRÉMNÍCH ŠKOD .....</b>	<b>54</b>
5.1 KVANTILOVÝ MODEL A USPOŘÁDANÉ STATISTIKY .....	55
5.2 SIMULACE.....	58
5.3 UKÁZKA APLIKACE .....	60
<b>ZÁVĚR.....</b>	<b>63</b>
<b>POUŽITÁ LITERATURA .....</b>	<b>65</b>
<b>SEZNAM TABULEK .....</b>	<b>67</b>
<b>SEZNAM ILUSTRACÍ.....</b>	<b>68</b>

## SEZNAM ZKRATEK A ZNAČEK

CatXL	Catastrophe excess of loss
ECOMOR	Excédent du coût moyen relatif
EXL	Expected XL
Kč	Koruna česká
LCR	Largest claims reinsurance
LF	Loss frequency
OP	Observation point
Pa ( $\alpha, \lambda$ )	Paretovo rozdělení s parametry $\alpha$ a $\lambda$
RL	Relative layer
Sb.	Sbírka zákonů
SL	Stop loss reinsurance
USD	Americký dolar
WXL/E	Working excess of loss cover per event
WXL/R	Working excess of loss cover per risk
XL zajištění	Excess of loss reinsurance



# ÚVOD

Pojišťovnictví je v současné době nedílnou součástí finanční sféry národního hospodářství, vykazující velmi stabilní a prosperující prostředí. Před riziky, která v dnešní době ohrožují každou činnost člověka nebo společnosti, je možné se chránit pomocí pojištění. Pojištění ochraňuje pojištěné před ztrátami, které by nastaly v důsledku realizace těchto rizik. Pojištění je tedy přenos rizika a negativních dopadů nahodilých událostí na specializovanou instituci – pojišťovnu. Pojištění zaručuje pojištěnému, v případě řádného placení pojistného, právo na výplatu peněžních prostředků v dohodnuté výši (tzv. pojistné plnění), pokud během trvání pojištění nastane přesně vymezená pojistná událost. Každá pojistná událost má charakter náhodné události, velmi málo pravděpodobné, ale se závažnými důsledky pro pojištěného v případě jejího vzniku. Z hlediska pojistitele se rizika, převzaté od klientů, transformují na tzv. pojistně-technické riziko pojistitele, které spočívá v potenciálním nebezpečí, že ve skutečnosti nedojde k vyrovnání mezi přijatým pojistným a vyplaceným pojistným plněním.

Základem pojišťovnictví je teorie pravděpodobnosti. Pro pojišťovnu je tedy klíčové znát zákony rozdělení pravděpodobnosti počtu pojistných plnění a výšky individuálních pojistných plnění. V celé práci budou použity postupy založené na teorii rizika, která spojuje statistické a matematické metody v oblasti neživotního pojištění.

Tato práce se zabývá využitím Paretova rozdělení v pojištění a zajištění. Paretovo rozdělení má významné místo při modelování individuálních škod v neživotním pojištění, kdy jsou dost pravděpodobné i velmi vysoké škody, hlavně v heterogenních portfoliích pojišťoven. Výhodou Paretova rozdělení je, že odstraňuje nedostatky jiných rozdělení pravděpodobnosti (např. exponenciálního rozdělení). Při Paretově rozdělení totiž pravděpodobnost nejvyšších hodnot pojistných plnění konverguje k nule pomaleji, což nám umožňuje vytvoření lepšího modelu extrémních škod.

První část práce je věnována modelu individuální výše škod. Odhadem parametrů metodou momentů a metodou maximální věrohodnosti a následně testy dobré shody ( $\chi^2$  test a Kolmogorovův-Smirnovův test) ověříme hypotézu, zda reálné údaje o výši škod v pojištění odpovědnosti z provozu motorového vozidla mohou mít Paretovo rozdělení pravděpodobnosti.

Diplomová práce se také věnuje na využití Paretova rozdělení v zajištění. Jsou zde popsány základní typy a formy neproporcionálního zajištění. Hlavní důraz je kladen na

stanovení nettozajistného u neproporcionálního zajištění WXL/R pomocí modelu založeném na Paretově rozdělení škod.

Poslední část je věnována problematice modelování extrémních škod, které vzhledem ke svému rozsahu mohou mít pro pojišťovnu nebo zajišťovnu až katastrofické dopady. Vysvětlena je metoda simulace extrémních škod pomocí kvantilových funkcí. Součástí práce je praktická ukázka simulace nejvyšších škod, která využívá kvantilovou funkci Paretova rozdělení.

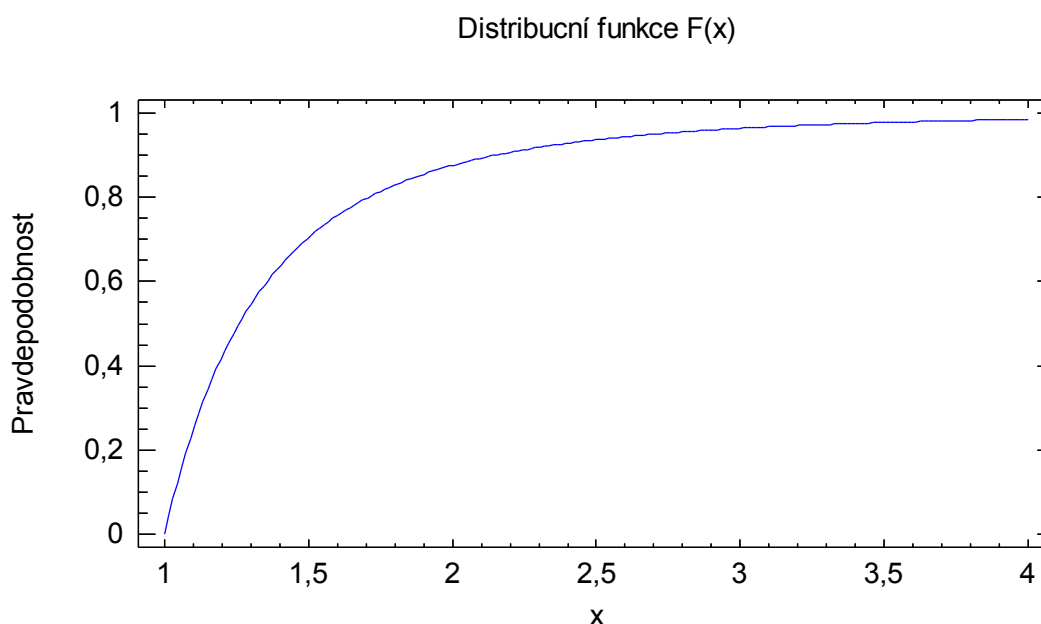
Cílem práce je aplikace Paretova rozdělení pravděpodobnosti v pojištění a zajištění. Ve výpočtech jsou využity reálné údaje individuálních výšek škod v pojištění odpovědnosti z provozu motorového vozidla získané od jedné nejmenované pojišťovny působící na českém pojistném trhu. Dílčími cíli jsou:

- Paretovo rozdělení jako model škod v heterogenních portfoliích pojišťoven
- Využití Paretova rozdělení při výpočtu nettozajistného v neproporcionálním zajištění,
- Modelování a simulace extrémních škod pomocí kvantilové funkce Paretova rozdělení.

# 1 PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MODELOVÁNÍ VÝŠE INDIVIDUÁLNÍCH ŠKOD V NEŽIVOTNÍM POJIŠTĚNÍ

Pojištění a pojišťovnictví hrají v lidské společnosti stále větší roli. Jednotlivci i různé společnosti využívají pojištění před negativními dopady nahodilých událostí. Výskyt těchto událostí je velmi málo pravděpodobný, ale následné škody mohou být katastrofické. Pojištění je tedy velmi úzce spojeno s teorií pravděpodobnosti. Cílem každé pojišťovny je určit pro každé portfolio pojistek rozdělení pravděpodobnosti počtu a výše pojistných plnění. Z těchto znalostí je potom možné nastavit optimální výši pojistného, která bude pokrývat všechny nastalé pojistné události. To znamená například, je-li pravděpodobnost výskytu pojistné události rovna 0,005, pak pojišťovna očekává 5 pojistných událostí na tisíc pojistek. Jednoduše lze říci, že musí nastavit takovou výši pojistného, aby od tisíce pojištěných vybrala takovou sumu, která minimálně pokryje všechna pojistná plnění.

Rozdělení pravděpodobnosti diskrétní i spojité náhodné proměnné je distribuční funkce  $F(x)$ , která vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodná proměnná  $X$  nabývá menších nebo stejných hodnot jako je hodnota reálného čísla  $x$  [1]. Ukázka distribuční funkce Paretova rozdělení je znázorněna na Obrázku 1.



Obrázek 1 Distribuční funkce  $F(x)$  Paretova rozdělení

*Zdroj: Statgraphic Centurion XV*

Rozdělení pravděpodobnosti je významné především v neživotním pojištění, kde výplata pojistného plnění je závislá na nastalé škodě. Neživotní pojištění je charakterizováno v následující podkapitole.

## 1.1 Charakteristika neživotního pojištění

V rámci neživotního pojištění jsou kryta rizika neživotního charakteru, zejména rizika ohrožující zdraví a životy osob (úraz, nemoc, invalidita apod.), rizika vyvolávající finanční škody (živelní rizika, odcizení, vandalství, strojní rizika apod.), rizika vyvolávající finanční ztráty (přerušování provozu, úvěrová rizika, rizika finančních ztrát, odpovědnostní rizika atd.). Produkty neživotního pojištění jsou velmi různorodé. Dají se vzájemně kombinovat s cílem zabezpečit co nejkomplexnější pojistnou ochranu klienta. Kapitola 1.1 včetně všech podkapitol zpracována podle [2] a [3].

Neživotní pojištění se vyskytuje ve dvou základních formách:

- **pojištění obnosová** – při pojistné události se vyplácí pojistné plnění ve výši pojistné částky nebo v rozsahu určitého procenta z pojistné částky. Využívá se u rizik, kdy škoda není přesně peněžně vyčíslitelná (např. trvalé následky, pracovní neschopnost, denní dávka při hospitalizaci, atd.)
- **pojištění škodová** – pojistné plnění je závislé na výši škody. Pojištěný nemůže od pojišťovny získat vyšší pojistné plnění než je škoda. Pojištění nemůže vést k obohacení, je určeno výhradně k náhradě vzniklé škody. Škodové pojištění je rozděleno do následujících forem:
  - **ryzí zájmové pojištění** – je pojištění bez pojistné částky, pojistné plnění se rovná škodě. V praxi se v této podobě vyskytuje velmi zřídka. Obvykle bývá kombinováno s některou doplňkovou formou pojištění.
  - **pojištění na první riziko** – sjednaná pojistná částka udává maximální hranici pojistného plnění. To znamená, je-li škoda nižší než pojistná částka pojistné plnění je rovno škodě, ale pokud je škoda vyšší než pojistná částka pojistné plnění je rovno pojistné částce.
  - **pojištění na plnou hodnotu** – pojistné plnění závisí na udané hodnotě pojištěného majetku, kterou je třeba při sjednání pojištění určit. V případě nižší pojistné částky může dojít k podpojištění a poté ke krácení pojistného plnění.

Velmi často se základní formy pojištění kombinují s některou z doplňkových forem pojištění, mezi které patří:

- **excedentní franšíza** – představuje částku, která se odečítá od pojistného plnění. Pojištěný se tedy podílí na úhradě škody až do výše excedentní franšizy.
- **integrální franšíza** – představuje částku, do jejíž výše pojistné plnění neposkytuje, důvodem je vyloučení drobných škod z pojistného plnění
- **procentní spoluúčast** - pojištěný se podílí určitým procentem na úhradě škody
- **časová franšíza** – určuje období, ve kterém nebude vypláceno pojistné plnění.

Všechny doplňkové formy snižují výši pojistného.

### 1.1.1 Neživotní pojištění osob

#### Úrazové pojištění

K výplatě pojistného plnění dochází v případě, že v důsledku úrazu dojde k přechodnému nebo trvalému tělesnému poškození nebo smrti pojištěného. Z úrazového pojištění nejsou většinou hrazeny úrazy pracovní nebo úrazy při dopravních nehodách, které jsou kryté z pojištění odpovědnosti z provozu vozidla. Každá pojišťovna má ve svých pojistných podmínkách podrobně specifikovány úrazy, u kterých dochází k výplatě pojistného plnění, i výluky z pojistného plnění.

Úrazové pojištění kryje:

- trvalé následky úrazu,
- smrt následkem úrazu,
- plnění za dobu nezbytného léčení,
- denní odškodné za dobu pracovní neschopnosti,
- denní odškodné při pobytu v nemocnici,
- úhrada nákladů spojených s úrazem,
- pojištění drobných úrazů.

Pojistné v úrazovém pojištění závisí na velikosti sjednaných pojistných částech a na druhích sjednaného pojistného plnění, pojistných částkách a rizikovosti pojištěného, tzn.

pravděpodobnost rizika úrazu v závislosti na výkonu činností. Na základě rizikovosti zařadí pojišťovna pojištěného do jedné z tarifních skupin.<sup>1</sup>

### **Soukromé nemocenské pojištění**

Nemocenské pojištění, které provozují komerční pojišťovny je doplněk povinného sociálního nemocenského pojištění. Produkt je určen pro osoby, které mají zájem o vyšší rozsah krytí rizik, než se uplatňuje v rámci povinného pojištění a pro osoby, které nejsou do povinného pojištění zahrnuty.

Pojištění kryje:

- pojištění léčebných výloh,
- pojištění vážných onemocnění,
- pojištění nadstandardního vybavení při pobytu v nemocnici
- pojištění zdravotnických úkonů nehrazených v rámci povinného zdravotního pojištění (např. stomatologických),
- pojištění denní dávky při pracovní neschopnosti, atd.

Pojistné se odvozuje od konkrétního druhu pojištění, vstupního věku, výši pojistných částek, rizikovosti pojištěného, ale např. i od délky karenční doby<sup>2</sup>.

### **1.1.2 Pojištění majetku**

Pojištění majetku zahrnuje krytí rizik, jejichž realizací dochází ke škodám na majetku (poškození, zničení, ztráta věcných hodnot, finanční ztráty). Pojištění majetku zahrnuje krytí celé řady rizik:

- **Živelní rizika** – riziko škod způsobených požárem, výbuchem, bleskem, vichřicí, povodní, záplavou, krupobitím, zemětřesením, pádem stromu a stožárů, sesouváním nebo zřícením lavin, tíhou sněhu a námrazy, nárazem nebo zřícením letadla, jeho částí nebo nákladu apod.
- **Vodovodní rizika** - riziko škod způsobených vodou vytékající z vodovodních zařízení, kanalizace nebo topení.

---

<sup>1</sup> Tarifní skupiny jsou homogenní skupiny pojistných smluv, u kterých je přibližně stejné riziko. V rámci každé tarifní skupiny je možné vyžadovat jednotnou pojistnou sazbu.

<sup>2</sup> Karenční doba je časová franšiza, tj. doba, za kterou pojišťovna pojistné plnění nevyplácí (může být stanoveno na 3, 7, 10, 15, 21 apod. dní). Využívá se především u pojištění denní dávky při pracovní neschopnosti.

- **Rizika havárie dopravního prostředku** – rizika vzniku majetkových škody na dopravních prostředcích a také na zboží přepravovaném dopravními prostředky v souvislosti s nárazem nebo střetem příslušného dopravního prostředku.
- **Rizika odcizení a vandalství** – rizika škod na majetku v souvislosti se zásahem třetí osoby
- **Strojní rizika** – rizika škod v souvislosti s havárií či poruchou strojního zařízení v důsledku chybné technologie, neodborného zacházení, zkratu elektrického proudu, vadného materiálu apod.

### Pojištění majetku obyvatelstva

K nejvýznamnějším produktům pojištění majetku obyvatelstva patří:

- **Pojištění domácnosti** – předmětem pojištění je soubor movitých věcí tvořících zařízení domácnosti a sloužících provozu domácnosti, pojištění se obvykle vztahuje i na movité věci, které se staly součástí souboru zařízení domácnosti. Nejčastěji základní pojištění kryje rizika živelní, vodovodní a odcizení. Doplnkově lze sjednat pojištění pro hodnotnější věci (obrazy, sbírky atd.) nebo odpovědnostní riziko. Pojistné závisí na pojistné částce, úrovni vybavení domácnosti, velikosti obytné plochy, lokalitě, spoluúčasti, zabezpečení domácnosti apod.
- **Pojištění budov** – předmětem pojištění jsou rodinné domy, byty, bytové domy, rekreační objekty, objekty ve výstavě, kůlny, garáže, ploty, atd. Obvykle jsou kryta rizika živelní, vodovodní, odcizení a vandalství. Pojistná částka a pojistné závisí na hodnotě pojištěného majetku.
- **Havarijní pojištění** – kryje škody na motorových vozidlech, ať je řidič neovlivnil nebo ovlivnil. Pojištění kryje rizika havárie, kolize, živelní rizika, odcizení, vandalství a strojní rizika. Obvykle je součástí i pojištění asistenčních služeb. Pojišťovny vyplácí pojistné plnění ve výši nákladů na opravu, nepřekročí-li cenu vozidla před pojistnou událostí. Na výše pojistného má vliv pořizovací cena vozidla, rok výroby, typ, výkon motoru, výše spoluúčasti, věk a pohlaví řidiče, bydliště atd. U havarijního pojištění je typické uplatňování bonusů či malusů, což jsou slevy resp. přírážky k pojistnému, podle počtu pojistných událostí pojištěného.

## Pojištění podnikatelských a průmyslových rizik

V této skupině pojištění majetku je zahrnuto velké množství různých typů pojištění. K nejvýznamnějším patří:

- **Živelní pojištění** – kryje škody na majetku, které byly způsobeny živelním rizikem (např. požár, výbuch, blesk, vichřice, povodeň atd.). Pojistné plnění je obvykle vypláceno ve výši potřebné opravy nebo znovuzřízení pojištěného majetku. Výše pojistného závisí na hodnotě daného majetku, na rizikové situaci podniku (např. konstrukce stavby, stavební materiály, vzdálenost jednotlivých objektů od sebe, realizace nebezpečných činností (např. chemická výroba), úroveň zabezpečení před rizikem (např. rozmístění hasičských přístrojů, instalace vodních hydrantů, instalace automatického protipožárního signalizačního zařízení apod.)), ale také na výši spoluúčasti pojištěného.
- **Pojištění technická** – do této skupiny patří několik druhů pojištění, z nichž nejvýznamnější jsou:
  - **Strojní pojištění** zahrnuje krytí škod v souvislosti s poškozením strojů a strojních zařízení způsobené jejich provozem. Kryje rizika havárie strojů nebo celých strojních souborů a zařízení.
  - **Pojištění montážních a stavebních rizik** kryje rizika spojená s montáží strojů, strojních zařízení a všechny škody způsobené na stavebních dílech a materiálech po dobu výstavby. Obvykle jsou pojištěna živelní a strojní rizika, nejčastějším doplňkem je krytí odpovědnostního rizika.
- **Pojištění proti odcizení** – je pro případ odcizení nebo poškození a zničení majetku jednáním pachatele, které směřovalo ke krádeži vloupáním nebo loupežnému přepadení. Předpokladem pro výplatu pojistného plnění je překonání překážky nebo opatření chránící pojištěný majetek. Výše pojistného souvisí s hodnotou pojištěného majetku a úrovní zabezpečení (např. bezpečnostní zámky, elektronický alarm, kamerový systém, stálá bezpečnostní služba atd.).
- **Pojištění dopravní** – je pro případy poškození, zničení nebo ztráty věcí při dopravě. Základem je vždy krytí rizik havárie, ale často zahrnuje i další rizika, především živelní a rizika odcizení. Dopravní pojištění zahrnuje pojištění kaska, tj. pojištění škod na dopravních prostředcích, a pojištění karga, tj. pojištění škod na přepravovaných předmětech. Toto pojištění má velký význam především v zahraničním obchodě.



## Pojištění zemědělských rizik

Do této specifické skupiny pojištění majetku patří:

- **Pojištění plodin** – kryje rizika majetkových škoda na rostlinné produkci. Pojištěný má na výběr z několika druhů:
  - *krupobitní pojištění*
  - *pojištění proti vybraným rizikům* (např. povodeň, vichřice, mráz atd.)
  - *pojištění úrody plodin*
- **Pojištění hospodářských zvířat** – kryje škody v souvislosti s uhynutím, utracením nebo nutnou porážkou v důsledku infekční nemoci, rizika živelného, rizika úrazu či neinfekční nemoci. Možností je i pojištění jednotlivých zvířat, které se chovají ke specifickým účelům (např. závodní koně).

### 1.1.3 Pojištění finančních ztrát a záruk

Tento druh pojištění řeší důsledky rizik přerušení provozu, rizika škod v souvislosti s nesplacením úvěru nebo rizika nesplnění závazku vůči jiné osobě. Mezi pojistné produkty v této skupině patří:

- **Pojištění pro případ přerušení provozu (šomážní pojištění)** – úzce navazuje na živelní a strojní pojištění, které kryjí přímé věcné škody, šomážní pojištění kryje, tzn. následné škody, které vznikají v důsledku přerušení provozu, ke kterému dochází v důsledku poškození pojištěného majetku. Následné škody jsou často výrazně vyšší než přímé škody.
- **Pojištění úvěru** – kryje finanční ztráty v případě nesplacení poskytnutého úvěru, v důsledku nesolventnosti dlužníka, platební nevěle, úmrtí nebo pracovní neschopnost dlužníka, kurzových rizik nebo politických rizik (např. platební potíže vyvolané politickými událostmi apod.). Mimo pojištění úvěru existuje řada dalších nástrojů pro minimalizaci úvěrových rizik např. ručení, směnečné ručení, bankovní záruky, zástava, faktoring, forfaiting apod.

### 1.1.4 Pojištění odpovědnosti za škody

Pojištění odpovědnosti za škody kryje rizika vzniku škod (na majetku, na zdraví, na životě nebo finanční škody), které pojištěný svou činností způsobí. Pojistné plnění zahrnuje:

- náhradu škody,

- náklady na obhajobu pojištěného v souvislosti se škodou, kterou má pojišťovna uhradit,
- náklady na soudní řízení o náhradě škody, pokud bylo nutné ke zjištění odpovědnosti pojištěného a výše plnění pojišťovny.

Pojišťovny vyplácí pojistné plnění nikoli pojištěnému, ale poškozenému, který má právo na náhradu škody.

### **Pojištění odpovědnosti za škodu způsobenou provozem vozidla**

Pojištěný má nárok, aby pojistitel za něho hradil škody, které vzniknou v souvislosti s provozem vozidla, a to jsou:

- škody na zdraví nebo usmrcením,
- škody vzniklé poškozením, zničením nebo ztrátou věci,
- ušlý zisk,
- účelně vynaložené náklady spojené s právním zastoupením.

Pojistitel nehradí:

- škody, které utrpěl řidič vozidla,
- majetkové škody, za které pojištěný odpovídá svým příbuzným,
- škody na vozidle, na které se vztahuje pojištění.

Zákonem<sup>3</sup> jsou stanoveny minimální pojistné limity (pro škodu na zdraví nebo usmrcením 35 mil. Kč na každého zraněného nebo usmrceného, při škodě na majetku 35 mil. Kč bez ohledu na počet poškozených).

### **Pojištění odpovědnosti za škody při pracovním úrazu nebo nemoci z povolání**

Povinnost<sup>4</sup> uzavřít tento druh pojištění má každý zaměstnavatel, který zaměstnává alespoň jednoho zaměstnance. Pojištění kryje rizika škod vzniklých v důsledku pracovních úrazů a nemocí z povolání. Pojistné se vypočítává podle odvětví činnosti zaměstnavatele.

---

<sup>3</sup> Podle zákona č. 168/1999 Sb., o pojištění odpovědnosti za škodu způsobenou provozem vozidla ve znění pozdějších předpisů

<sup>4</sup> Podle zákona č. 262/2006 Sb., zákoník práce ve znění pozdějších předpisů a vyhlášky č. 125/1993 Sb., kterou se stanoví podmínky a sazby zákonného pojištění odpovědnosti zaměstnavatele za škodu při pracovním úrazu nebo nemoci z povolání ve znění pozdějších předpisů

## **Profesní odpovědností pojištění**

Pojištění je určeno pro profese, které mají ze zákona odpovědnost za profesionální chyby a omyly. Sjednání pojištění je podmínkou pro výkon některých povolání:

- advokátů,
- stomatologů, lékařů a lékárníků,
- veterinárních lékařů,
- notářů,
- daňových poradců,
- auditorů,
- autorizovaných architektů, inženýrů a techniků,
- patentových zástupců,
- komerčních právníků,
- pojišťovacích zprostředkovatelů.

## **Obecné odpovědnostní pojištění**

Obecné odpovědnostní pojištění zahrnuje celou řadu druhů pojištění odpovědnosti za škody pro jednotlivce i podniky.

- Pojištění odpovědnosti za škody jednotlivců
  - Pojištění odpovědnosti za škody v běžném občanském životě
  - Pojištění odpovědnosti za škody vlastníka nemovitostí
  - Odpovědností pojištění držitelů zvířat
  - Odpovědnostní pojištění z výkonu povolání
- Odpovědnostní pojištění podniků
  - Obecné odpovědnostní pojištění podniků
  - Pojištění odpovědnosti za výrobek
  - Pojištění odpovědnosti za škody na životním prostředí
  - Pojištění odpovědnosti za škodu manažerů, ředitelů a členů představenstev

### 1.1.5 Pojištění právní ochrany

Pojištění právní ochrany zahrnuje krytí nákladů pojištěného v souvislosti s právními úkony, a nákladů spojených s prosazením požadavků na náhradu škod pojištěného. Pojistné plnění kryje:

- soudní výdaje a náklady,
- náklady na svědky a soudní znalce povolane soudem,
- odměny a náklad zvoleného právního zástupce,
- náklady na provedení rozhodnutí,
- výdaje pojištěného za cesty k soudnímu řízení
- služby pojišťovny spočívající v objasnění skutečnosti, ověření existence pojistné události, jmenování advokáta, dohled nad průběhem procesu.

Součástí pojištění právní ochrany je i poskytování právních rad a právní asistence. Pojištění existuje ve třech základních podobách:

- pojištění právní ochrany motorového vozidla,
- pojištění právní ochrany rodiny,
- pojištění právní ochrany podniků.

## 1.2 Všeobecný postup pravděpodobnostního modelování individuální výše škod

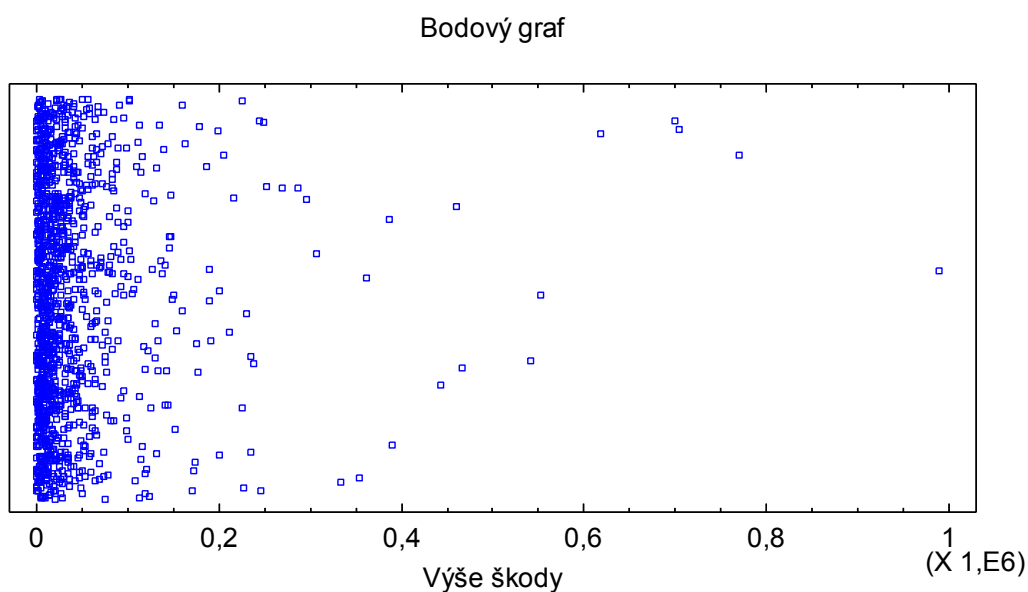
Všeobecný postup při výběru vhodného rozdělení výše škod je shrnut v následujících třech krocích, které jsou blíže popsány v jednotlivých podkapitolách:

1. **Návrh předpokládaného typu rozdělení pravděpodobnosti** na základě grafické analýzy
2. **Odhad parametrů vybraného rozdělení** (např. metodou momentů, metodou maximální věrohodnosti)
3. **Ověření vhodného výběru rozdělení pomocí testů dobré shody** (např. Kolmogorovův-Smirnovův test, Pearsonův  $\chi^2$  test).

### 1.2.1 Grafická analýza údajů

Grafické znázornění nám poskytne velmi důležité informace o datech základního souboru. Z různých grafů můžeme odhadnout např. rozdělení pravděpodobnosti dat, jejich symetrii či asymetrii, homogenitu, odlehlé hodnoty, anomálie atd. Základními metodami grafické analýzy jsou bodový graf, histogram a kvantil-kvantilový graf [4].

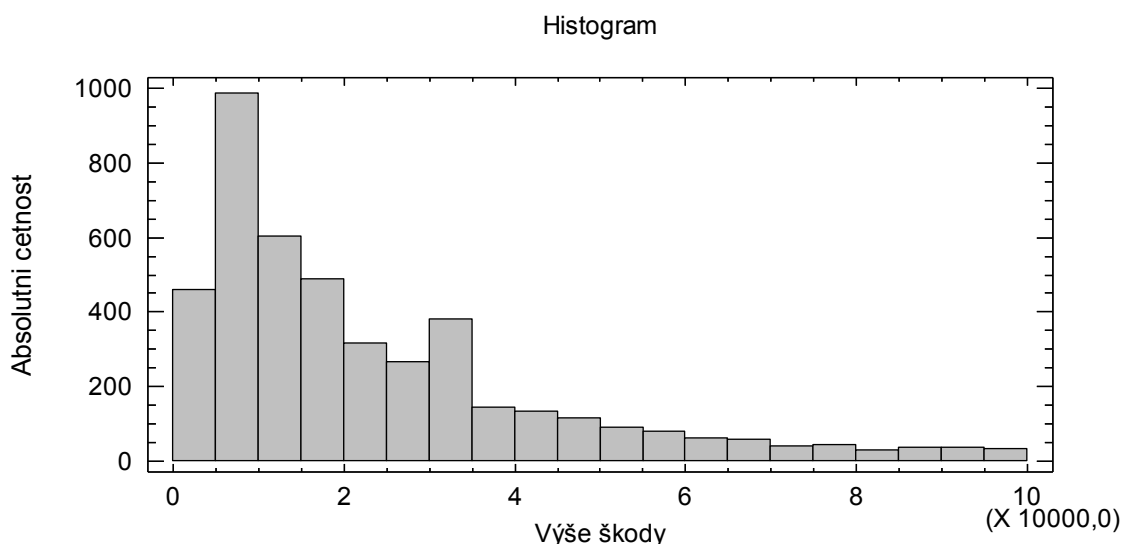
**Bodový graf** – je nejjednodušším grafem, který bychom měli při grafické analýze údajů sestavit. Graf znázorňuje jednotlivé hodnoty základního souboru jako jednotlivý bod. Z grafu je možné vyčíst interval nejčastějších hodnot, odlehlé hodnoty a první informace o rozdělení pravděpodobnosti [5]. Ukázka bodového grafu výše škod je znázorněna na Obrázku 2.



Obrázek 2 Bodový graf výšky škod

*Zdroj: vlastní zpracování ve Statgraphic Centurion XV*

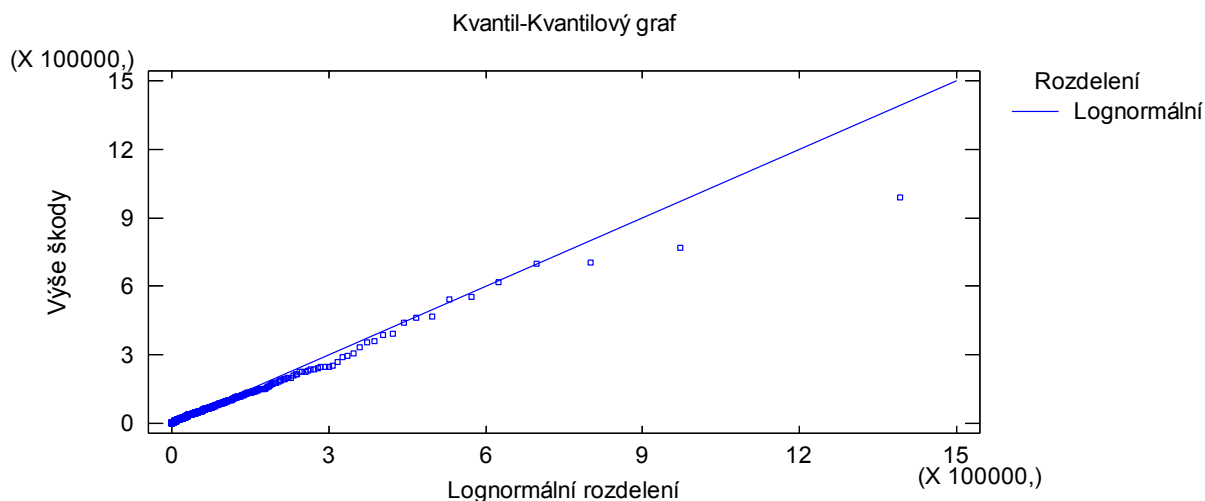
**Histogram** – je sloupcový diagram, kde na ose x jsou znázorněny intervaly představující třídy, do kterých jsme rozdělili výšky škod. Na ose y jsou absolutní nebo relativní četnosti těchto tříd [4]. Ukázka histogramu je znázorněna na Obrázku 3



Obrázek 3 Histogram výšky škod

Zdroj: vlastní zpracování ve Statgraphic Centurion XV

**Kvantil-kvantilový graf (Q-Q graf)** - tento graf vyjadřuje vztah kvantilů analyzované řady s kvantily uvažovaného pravděpodobnostního rozdělení. V Q-Q grafu je možné najednou pozorovat i více typů rozdělení a okamžitě tak porovnat, které z nich nejlépe modeluje daná data. Pokud hodnoty dobře kopírují přímkou určitého rozdělení, lze předpokládat, že data mají daný druh rozdělení [5]. Ukázka Q-Q grafu výše škod a lognormálního rozdělení je na Obrázku 4.



Obrázek 4 Kvantil-kvantilový graf Lognormálního rozdělení výše škod

Zdroj: vlastní zpracování ve Statgraphic Centurion XV

## 1.2.2 Odhady parametrů

Po grafické analýze údajů, ze které určíme vhodné pravděpodobnostní rozdělení výše škod, následuje určení parametrů předpokládaného rozdělení. Výpočtem se snažíme určit přibližnou hodnotu parametrů, tedy jejich odhad. Obecně se rozlišují odhady bodové, kdy konkrétním odhadem parametru je jedna číselná hodnota, nebo odhady intervalové, kdy odhadem je interval, tzv. interval spolehlivosti. Níže jsou detailně popsány dvě metody bodových odhadů, které budou využity v aplikační části diplomové práce, a to metoda momentů a metoda maximální věrohodnosti [6].

### Metoda momentů

Princip metody momentů spočívá v tom, že momenty základního souboru jsou odhadovány odpovídajícími výběrovými momenty. To znamená například, že střední hodnota  $EX$  náhodné veličiny  $X$  je její první počáteční moment, který budeme odhadovat prvním výběrovým počátečním momentem  $V_1$ , který je nazýván aritmetický průměr a je označován  $\bar{X}$ . Obdobně disperse  $DX$  náhodné veličiny  $X$  je druhý centrální moment, který budeme odhadovat pomocí druhého výběrového centrálního momentu  $M_2$ , který nazýváme výběrovou disperzi a označujeme jej  $S^2$ .

Metoda momentů je méně výpočetně náročná, avšak výsledky nejsou tak přesné jako např. výsledky získané pomocí metody maximální věrohodnosti, která je popsána níže [6] [7].

### Metoda maximální věrohodnosti

Metoda maximální věrohodnosti poskytuje velmi dobré odhady parametrů předpokládaného rozdělení. Principem této metody je předpoklad, že do náhodného výběru se nejčastěji dostávají hodnoty statistického znaku, které mají v základním souboru největší pravděpodobnosti, resp. hustoty pravděpodobnosti.

#### Definice:

Nechť  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  je náhodný výběr ze základního souboru  $X$  s určitým parametrem  $\bar{\theta}$  a necht'  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je jeho realizace s hustotou pravděpodobnosti  $f(x, \theta)$ , kde  $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$  je vektor  $p$  neznámých parametrů. Potom funkce věrohodnosti je definována vztahem (1.1):

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \quad (1.1)$$

a její přirozený logaritmus je definován vztahem (1.2):

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \ln[L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)] = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta), \quad (1.2)$$

potom maximálně věrohodný odhad  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x)$  je takový vektor, který maximalizuje  $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ , resp.  $l(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ . [6] [7]

### 1.2.3 Testy dobré shody

Posledním krokem k dokončení analýzy je ověření, zda základní soubor dat splňuje předpokládané rozdělení pravděpodobnosti, které předpokládáme na základně grafické analýzy či zkušeností se základním souborem dat. Testujeme tedy shodu skutečného rozdělení pravděpodobností základního souboru s námi předpokládaným (teoretickým) rozdělením. Obecně lze princip všech testů shrnout do následujícího postupu [8].

1. **Formulace hypotéz.** Jestliže jsme učinili nějaký předpoklad, vyslovili jsme tím hypotézu, tzn. nulovou hypotézu, která se značí  $H_0$ . Proti této hypotéze sestavíme jinou hypotézu, tzn. alternativní hypotézu, která nějakým způsobem popírá nulovou hypotézu. Hypotézy o shodě rozdělení můžeme zapsat takto:

$H_0$ : Základní soubor X **má** Paretovo rozdělení pravděpodobnosti

$H_1$ : Základní soubor X **nemá** Paretovo rozdělení pravděpodobnosti

2. **Volba hladiny významnosti.** U všech testů je pro testování hypotéz nutné definovat hladinu významnosti  $\alpha$ , na které hypotézy testujeme (nejčastěji  $\alpha = 0,05$  nebo  $\alpha = 0,01$ ).
3. **Volba testového kritéria.** Testové kritérium je statistika, tedy funkce výběru. Výpočet její hodnoty je cílem při testování hypotéz. Volba závisí na testovaném parametru nebo testované vlastnosti.
4. **Vymezení kritického oboru.** Obor hodnot, který svědčí ve prospěch alternativní hypotézy  $H_1$  (zamítáme  $H_0$ ). Definovat ho můžeme vztahem (1.3)

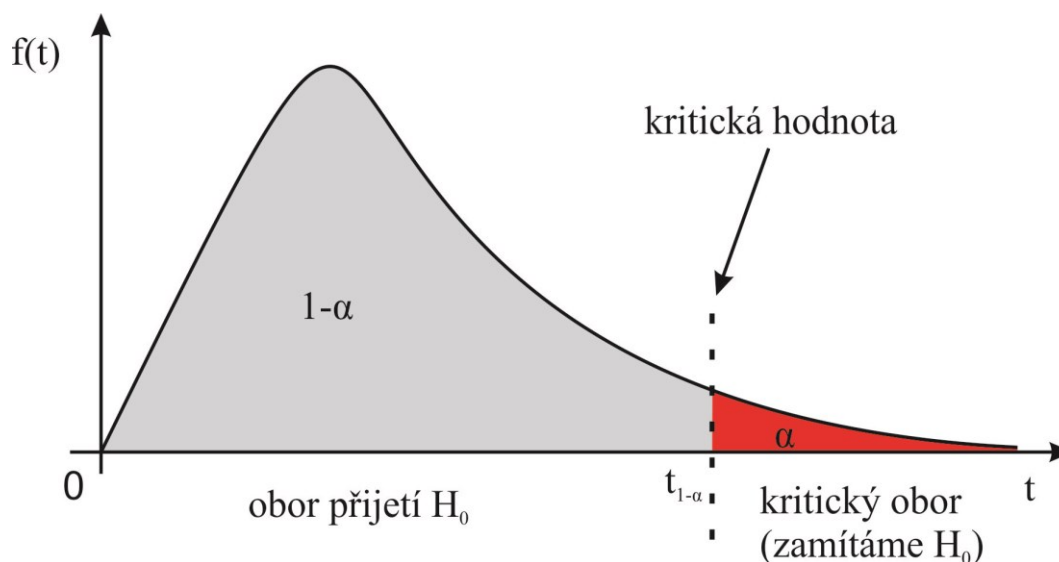
$$W_\alpha = \{t, t \geq t_{1-\alpha}\}, \quad (1.3)$$

kde:

t - testovací kritérium

$t_{1-\alpha}$  - kritická hodnota při testování





Obrázek 5 Vymezení oboru hodnot pro testovací kritérium  $t$

Zdroj: upraveno podle [9]

kde:

$t$  - testovací kritérium

$f(t)$  – hustota pravděpodobnosti testovacího kritéria

$\alpha$  - zvolená hladina významnosti

$t_{1-\alpha}$  - kritická hodnota při testování

5. **Výpočet hodnoty testovaného kritéria.** Dle vzorce, který je pro každý test známý, vypočítáme hodnotu testového kritéria.

6. **Formulace závěru.** Výsledek každého testu vede ke dvěma možným výsledkům. Buď hodnota testového kritéria je v oboru přijetí  $H_0$ , poté prohlásíme, že na zvolené hladině významnosti  $\alpha$  nulovou hypotézu nezamítáme. Nebo hodnota testového kritéria je v kritickém oboru a nulovou hypotézu zamítáme [8].

Pro ověření shody se nejčastěji využívají Pearsonův  $\chi^2$  test nebo Kolmogorův-Smirnovův test.

### Paersonův $\chi^2$ test

Paersonův  $\chi^2$  test dobré shody je jedním z nejstarších statistických testů, který ověřuje shodu empirického rozdělení tj. rozdělení počtu výběrových údajů, s předpokládaným teoretickým rozdělením s hustotou pravděpodobnosti  $f(x; \theta)$ , kde  $\theta$  je vektor parametrů odhadnutých z výběrového souboru. [9]

Hypotézy jsou ve tvaru:

$H_0$ : náhodná proměnná  $X$  **má** rozdělení s hustotou pravděpodobnosti  $f(x; \theta)$

$H_1$ : náhodná proměnná  $X$  **nemá** rozdělení s hustotou pravděpodobnosti  $f(x; \theta)$

Výpočet testovacího kritéria je definován vztahem (1.4)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}, \quad (1.4)$$

kde:

$k$  – počet tříd

$O_i$  – absolutní četnost  $i$ -té třídy

$E_i$  – teoretická četnost  $i$ -té třídy, která se vypočítá vztahem (1.5)

$$E_i = np_i, \quad (1.5)$$

kde:

$n$  – rozsah souboru

$p_i$  – je pravděpodobnost:

- hodnoty  $x_i$  diskrétní proměnné s předpokládaným rozdělením, tj.

$$p_i = P(x_i) = P(X = x_i)$$

- intervalu hodnot  $x \in (x_{i-1}, x_i)$  spojité proměnné, tj.

$$p_i = P(x_{i-1} < X < x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Vždy musí platit  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ .

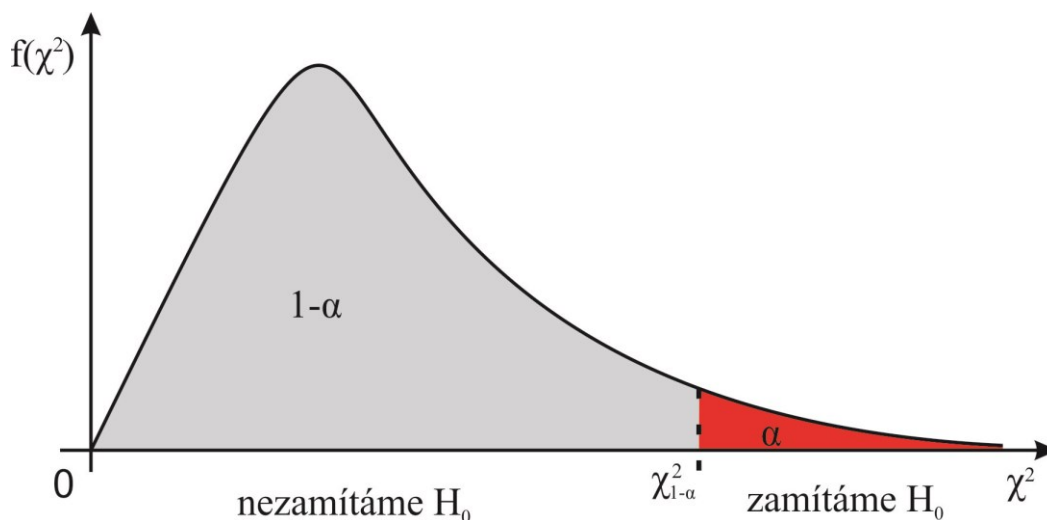
Testovací kritérium má  $\chi^2$  rozdělení s  $k-1-p$  stupni volnosti, kde  $p$  je počet odhadovaných parametrů.

Kritická oblast je definována vztahem (1.6):

$$W = \{\chi^2; \chi^2 > \chi_{1-\alpha, k-1-p}^2\}, \text{ kde } \chi_{1-\alpha, k-1-p}^2 = F_{\chi^2, k-1-p}^{-1}(1 - \alpha) \quad (1.6)$$

Kritickou hranici  $\chi_{1-\alpha, k-1-p}^2$  najdeme buď v tabulkách  $\chi^2$  rozdělení pravděpodobnosti nebo použijeme funkci „CHINIV“ tabulkového procesoru MS Excel.

Hypotézu  $H_0$  na hladině významnosti  $\alpha$  nezamítneme, pokud hodnota testovacího kritéria nepadne do kritické oblasti, v opačném případě je zamítnuta ve prospěch alternativní hypotézy  $H_1$ . Grafické vyjádření je na Obrázku 6.



Obrázek 6 Grafický návod pro  $\chi^2$  test dobré shody

*Zdroj: upraveno podle [9]*

Tento test je vhodný především pro soubory velkého rozsahu, protože teoretické četnosti  $E_i$  musí splňovat podmínku, aby byly dostatečně velké (minimálně větší než 5), v případě že tato podmínka není splněna, můžeme buď zvětšit rozsah výběru, nebo sloučit sousední třídy. [6] [9] [10]

### Kolmogorovův-Smirnovův test

Druhou možností posouzení dobré shody mezi empirickým a teoretickým rozdělení je Kolmogorovův-Smirnovův test pro jeden výběr. Test je založen na porovnávání rozdílů mezi distribuční funkcí ověřovaného a výběrového rozdělení pravděpodobností. Test je vhodný i pro výběry malých rozsahů, protože:

- test vychází z původních dat, nikoliv z údajů zařazených do tříd, proto nedochází ke ztrátě informací
- nemusí být splněna omezující podmínka  $n p_i > 5$
- má větší sílu než Paersonův  $\chi^2$  test dobré shody

Hypotézy jsou ve tvaru:

$H_0$ : náhodná proměnná  $X$  **má** rozdělení pravděpodobnosti s distribuční funkcí  $F(x)$

$H_1$ : náhodná proměnná  $X$  **nemá** rozdělení pravděpodobnosti s distribuční funkcí  $F(x)$

Distribuční funkce pro náhodný výběr uspořádaný výběr podle velikosti  $x_{(1)} < x_{(1)} < \dots < x_{(n)}$  je definována vztahem (1.7) [8]:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \leq x_{(1)} \\ \frac{i}{n}, & \text{pro } x_i \leq x \leq x_{(i+1)} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1, & \text{pro } x > x_{(n)} \end{cases} \quad (1.7)$$

Testovací kritérium

$$D_n = \max\{D_1^*, D_2^*, \dots, D_n^*\}, \quad (1.8)$$

$$\text{kde } D_i^* = \max\left\{\left|F(x_i) - \frac{i-1}{n}\right|; \left|\frac{i}{n} - F(x_i)\right|\right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Kritická oblast je definována jako množina těch hodnot testovacího kritéria, pro které je splněna nerovnost  $D_n \geq D_{1-\alpha, n}$ , kde  $D_{1-\alpha, n}$  je  $1 - \alpha$  kvantil rozdělení pravděpodobností testovacího kritéria  $D_n$  za předpokladu platnosti hypotézy  $H_0$ . Hypotézu  $H_0$  tedy nezamítáme pokud  $D_n < D_{1-\alpha, n}$  [6] [8] [9].

Kritické hodnoty pro různé hladiny významnosti a různé rozsahy výběrů ( $n \leq 40$ ) nalezneme v tabulkách. Pro výběry větších rozsahů spočítáme kritickou hodnotu dle Tabulky 1.

**Tabulka 1** Vztahy pro výpočet kritické hodnoty Kolmogorovova-Smirnovova testu

Hladina významnosti $\alpha$	Kritická hodnota
10 %	$\frac{1,224}{\sqrt{n}}$
5 %	$\frac{1,358}{\sqrt{n}}$
1 %	$\frac{1,628}{\sqrt{n}}$

Zdroj: [11]

## 2 PARETOVO ROZDĚLENÍ

Paretovo rozdělení pravděpodobnosti je pojmenované po italském inženýrovi a ekonomovi Vilfredu Paretovi. Celým jménem Vilfredo Federico Damaso Pareto byl zastáncem tzv. Lausannské školy. Zabýval se teorií blahobytu a definoval tzv. pareto-optimum. Neřešil pouze jaká ekonomie je, nýbrž jaká by měla být. Odmítal představu o tom, že by měl být užitek kardinálně měřitelný. Konstatoval, že statky nejsou na sobě navzájem nezávislé, nýbrž jsou navzájem komplementy nebo substituty. Tím není spotřebitel schopen posoudit užitečnost určitého statku jako takovou, ale pouze vždy jen v relaci s jiným statkem. Spotřebitelé pak porovnávají kombinace statků. Dále zformuloval tzv. teorii elit. Politické elity rozdělil na lvy a lišky a popsal, jak časem dochází k cirkulaci těchto elit [12].

Paretovo rozdělení má významné místo při modelování individuálních škod v neživotním pojištění, kdy jsou dost pravděpodobné i velmi vysoké škody, hlavně v heterogenních portfoliích pojišťoven. Výhodou Paretova rozdělení je, že odstraňuje nedostatky jiných rozdělení pravděpodobnosti (např. exponenciální rozdělení). Při Paretově rozdělení totiž pravděpodobnost nejvyšších hodnot pojistných plnění konverguje k nule pomaleji<sup>5</sup>, což nám umožňuje vytvoření lepšího modelu extrémních škod. Naopak nevýhodou je to, že v některých případech není možné určit střední hodnotu a rozptyl tohoto rozdělení [9], [13]

Paretovo rozdělení má dvě verze - evropskou a americkou. Odlišnosti jsou charakterizovány v další části.

### 2.1 Americký tvar Paretova rozdělení

Americký tvar Paretova rozdělení  $Pa(\alpha, \lambda)$  se využívá pro rozdělení celého intervalu výše pojistných plnění. Pravděpodobnost Paretova rozdělení v americkém tvaru je dána vztahem [9]:

$$P(X > x) = 1 - F(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\alpha \quad (2.1)$$

Distribuční funkce je vyjádřena ve tvaru:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\alpha \quad (2.2)$$

---

<sup>5</sup> V literatuře označováno jako "tzn. „heavy tail“"

Derivací distribuční funkce vzniká vztah pro hustotu pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -\alpha \left( \frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^{\alpha-1} \left( -\frac{\lambda}{(\lambda + x)^2} \right) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} \quad (2.3)$$

**Definice:** Náhodná proměnná  $X$  má americké Paretovo rozdělení  $Pa(\alpha, \lambda)$  právě tehdy, když její funkční vyjádření hustoty pravděpodobnosti má tvar:

$$f(x) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} \quad \text{pro } x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (2.4)$$

### Základní charakteristiky

Střední hodnota:

$$E(X) = \frac{\lambda}{\alpha - 1} \quad \text{pro } \alpha > 1 \quad (2.5)$$

Disperze

$$D(X) = \frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)} \quad \text{pro } \alpha > 2 \quad (2.6)$$

## 2.2 Evropský tvar Paretova rozdělení

Evropský tvar Paretova rozdělení  $Pa(a, b)$  se využívá pro rozdělení nejvyšších hodnot pojistného plnění. Její počátek tedy není v 0 jako v předchozím tvaru. Pravděpodobnost Paretova rozdělení v evropském tvaru je dána vztahem [14] a [15]:

$$P(X > x) = 1 - F(x) = \left( \frac{a}{x} \right)^b \quad (2.7)$$

Distribuční funkce je vyjádřena ve tvaru:

$$F(x) = 1 - \left( \frac{a}{x} \right)^b \quad (2.8)$$

Derivací distribuční funkce vzniká vztah pro hustotu pravděpodobnost:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{ba^b}{x^{b+1}} \quad (2.9)$$

**Definice:** Náhodná proměnná  $X$  má evropské Paretovo rozdělení  $Pa(a, b)$  právě tehdy, když její funkční vyjádření hustoty pravděpodobnosti má tvar [15]:

$$f(x) = \frac{ba^b}{x^{b+1}} \text{ pro } x > a, a > 0, b > 0. \quad (2.10)$$

### Základní charakteristiky

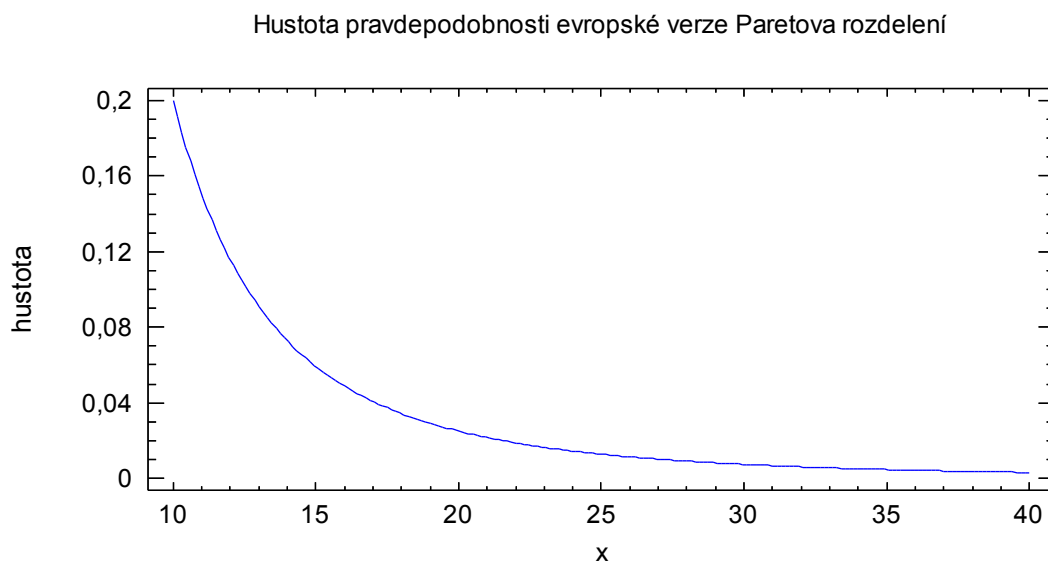
Střední hodnota:

$$E(X) = \frac{ab}{b-1} \text{ pro } b > 1 \quad (2.11)$$

Disperze

$$D(X) = \frac{ba^2}{(b-1)^2(b-2)} \text{ pro } b > 2 \quad (2.12)$$

Obrázek 7 znázorňuje hustotu pravděpodobnosti evropské verze Paretova rozdělení s parametry  $a = 10$  a  $b = 2$ , nakreslenou v programu Statgraphic Centurion XV podle vztahu (2.12).



**Obrázek 7** Hustota pravděpodobnosti evropské verze Paretova rozdělení

*Zdroj: Statgraphic Centurion XV*

### 3 APLIKACE PARETOVA ROZDĚLENÍ V NEŽIVOTNÍM POJIŠTĚNÍ

Teoretické znalosti popsané v předchozích kapitolách nyní aplikujeme na reálných datech získaných od jedné nejmenované pojišťovny působící na českém pojistném trhu.

#### 3.1 Charakteristika dat

K dispozici máme 1236 údajů o výši škody v pojištění odpovědnosti z provozu motorového vozidla. Další základní charakteristiky jsou uvedené v Tabulce 2.

**Tabulka 2** Základní charakteristiky souboru výšky škod

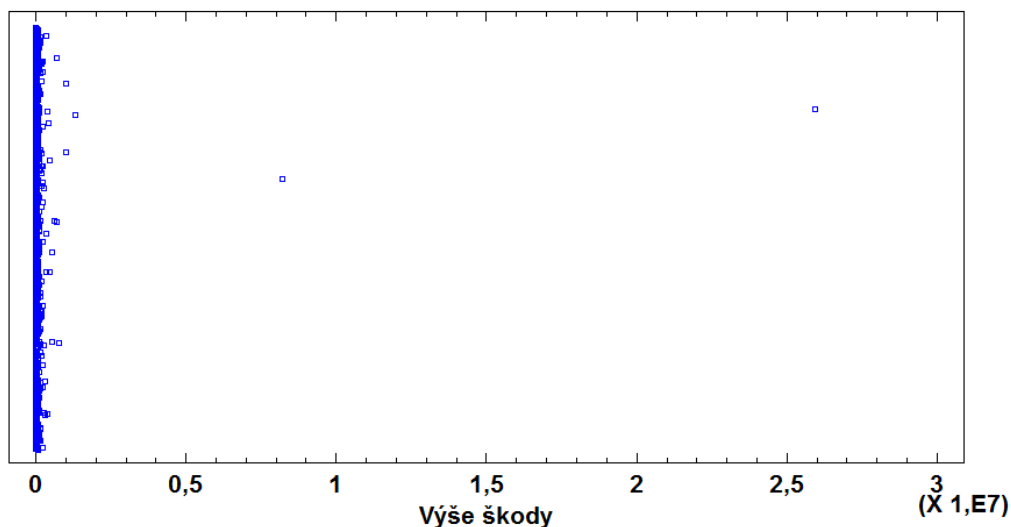
Počet individuálních škod	1236
Průměrná výše škody	68823,0
Medián	18507,0
Disperze	6,03816E11
Směrodatná odchylka	777056,
Variační koeficient	1129,07%
Minimální hodnota	149
Maximální hodnota	25940000
Koeficient šikmosti	443,143
Koeficient špičatosti	7223,76

*Zdroj: upraveno podle výstupu ze Statgraphic Centurion XV*

Bodový graf na Obrázku 8 znázorňuje výšku jednotlivých škod. Nejvíce hodnot je soustředěno kolem 0, což je způsobeno především nejvyšší škodou, která dosahovala téměř 26 mil. Kč.



**Bodový graf**

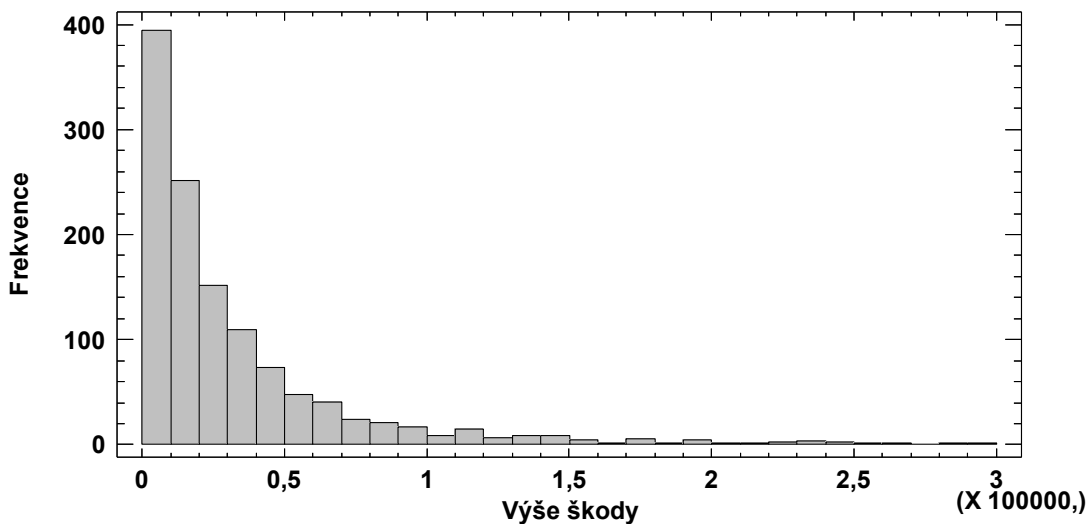


**Obrázek 8 Bodový graf výše škod**

*Zdroj: Statgraphic Centurion XV*

Po odstranění 20 nejvyšších škod byl sestaven Histogram (viz Obrázek 9), který znázorňuje rozložení dat do jednotlivých intervalů. Nejčastější škody jsou v nejnižších intervalech, což koresponduje se statistikou dopravních nehod, kde nejvíce nehod končí pouze „pomačkanými plechy“. Přes 90 % škod bylo nižších než 100 tis. Kč.

**Histogram**



**Obrázek 9 Histogram výše škod**

*Zdroj: Statgraphic Centurion XVI*

Z výše uvedených grafů můžeme předpokládat, že výše škod bude mít pravostranně zešíkmené rozdělení pravděpodobnosti a vzhledem k výskytu velmi vysokých škod můžeme předpokládat Paretovo rozdělení pravděpodobnosti v americkém tvaru. Tento předpoklad ověříme pomocí testů dobré shody.

## 3.2 Odhady parametrů Paretova rozdělení

Před samotným testováním musíme odhadnout parametry předpokládaného rozdělení. Parametry odhadneme nejprve pomocí metody momentů a poté metodou maximální věrohodnosti.

### 3.2.1 Metoda momentů

Při této metodě jednoduše nahradíme charakteristiky základního souboru odpovídajícími výběrovými charakteristikami. Při Paretovu rozdělení podle (3.1) a (3.2) dostaneme rovnice [9]:

$$\bar{x} = \frac{\lambda}{\alpha - 1} \quad (3.1)$$

$$s^2 = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} \quad (3.2)$$

Řešením soustavy rovnic (3.3) a (3.4) dostaneme vztahy pro odhad parametrů Paretova rozdělení  $Pa(\alpha, \lambda)$ :

$$\tilde{\alpha} = \frac{2s^2}{s^2 - \bar{x}^2} \quad (3.3)$$

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{\alpha} - 1)\bar{x} \quad (3.4)$$

Ze základního souboru dat vypočítáme  $\bar{x}$  (aritmetický průměr) a  $s^2$  (výběrový rozptyl).

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 68\,822,97$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 603\,816\,326\,417$$

Po dosazení  $\bar{x}$  a  $s^2$  do vztahů (3.3) a (3.4) vypočítáme odhady  $\tilde{\alpha}$  a  $\tilde{\lambda}$  parametrů  $\alpha$  a  $\lambda$  Paretova rozdělení metodou momentů:

$$\tilde{\alpha} = 2,0158$$

$$\tilde{\lambda} = 69911,26$$

### 3.2.2 Metoda maximální věrohodnosti

Z vyjádření hustoty pravděpodobnosti Paretova rozdělení  $f(x; \alpha, \lambda)$  dostaneme [9]:

$$L(\alpha, \lambda, x) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + x_i)^{\alpha+1}}$$

Zlogaritmováním:

$$\begin{aligned} l(\alpha, \lambda, x) &= \sum_{i=1}^n [\ln \alpha + \alpha \ln \lambda - (\alpha + 1) \ln(\lambda + x_i)] \\ &= n \ln \alpha + n\alpha \ln \lambda - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \ln(\lambda + x_i) \end{aligned}$$

Parciální derivace  $l(\alpha, \lambda, x)$  podle  $\alpha$ ,  $\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln(\lambda + x_i)$

Řešením rovnice  $\frac{\partial l}{\partial \alpha} = 0$  dostaneme maximálně věrohodný odhad  $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right)} = A \quad (3.5)$$

Podobně parciální derivace  $l(\alpha, \lambda, x)$  podle  $\lambda$ ,  $\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{n\alpha}{\lambda} - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda + x_i}$

Řešením rovnice  $\frac{\partial l}{\partial \lambda} = 0$  dostaneme další maximálně věrohodný odhad  $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda + x_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\lambda(\lambda + x_i)}} = B \quad (3.6)$$

Vztahy (3.5) a (3.6) vyjadřují dva různé způsoby výpočtu pro maximálně věrohodný odhad  $\hat{\alpha}$ . Z jejich rovnosti dostaneme funkci druhého parametru  $\lambda$ .

$$f(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda + x_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\lambda(\lambda + x_i)}} - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right)} = B - A \quad (3.7)$$

Řešením nelineární rovnice  $f(\lambda) = 0$  dostaneme maximálně věrohodný odhad  $\hat{\lambda}$ . Určení maximálně věrohodných odhadů parametrů  $\alpha$  a  $\lambda$ , Paretova rozdělení je numericky velmi náročné. Při hledání řešení nelineární rovnice (3.7) je výhodné využít nástroj citlivostní analýzy „Řešitel“<sup>6</sup> v tabulkovém procesoru Microsoft Excel [9].

Dosazením do vztahů (3.5) a (3.6), kdy za parametr  $\lambda$  dosadíme odhad tohoto parametru vypočítaný metodou momentů, dostaneme  $\mathbf{A} = 2,74327$  a  $\mathbf{B} = 2,84125$ . Výpočet je naznačen v Tabulce 3.

**Tabulka 3 Ukázka výpočtu parametrů Paretova rozdělení metodou maximální věrohodnosti**

<b>i</b>	<b><math>x_i</math></b>	<b><math>\ln\left(1 + \frac{x_i}{\tilde{\lambda}}\right)</math></b>	<b><math>\frac{1}{\tilde{\lambda} + x_i}</math></b>	<b><math>\frac{x_i}{\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda} + x_i)}</math></b>
1	149	0,003271906	2,19232E-05	7,18482E-08
2	150	0,003293829	2,19227E-05	7,23288E-08
3	200	0,004389366	2,18987E-05	9,63328E-08
4	258	0,005658686	2,1871E-05	1,24112E-07
5	458	0,010023338	2,17757E-05	2,19363E-07
6	521	0,011394267	2,17459E-05	2,49195E-07
7	543	0,011872562	2,17355E-05	2,59594E-07
8	561	0,012263724	2,1727E-05	2,68094E-07
...	...	...	...	...
1233	998343	3,133693419	9,58031E-07	2,1037E-05
1234	1307412	3,393051346	7,39166E-07	2,12559E-05
1235	8217110	5,20255435	1,21028E-07	2,1874E-05
1236	25940000	6,348355433	3,84831E-08	2,19566E-05
Suma		606,9977432	0,018232129	0,008953771
	<b>A=</b>	<b>2,74327</b>	<b>B=</b>	<b>2,84125</b>

*Zdroj: vlastní výpočet v MS Excel*

Nyní vyřešíme rovnici  $f(\lambda) = A - B = 0$  pomocí tabulkového procesoru MS Excel a funkce „Řešitel“. Tato funkce mění parametr  $\lambda$ , tak aby platila rovnost  $A - B = 0$ . Na souboru dat nalezl řešení  $\hat{\lambda} = 45464,74$ . Zároveň přepočítal odhady parametru  $\hat{\alpha}$  s novým parametrem  $\hat{\lambda}$ .

Výsledné parametry  $\alpha$  a  $\lambda$  Paretova rozdělení získané pomocí metody maximální věrohodnosti jsou:

$$\hat{\alpha} = A = B = 2,03625$$

$$\hat{\lambda} = 45464,74$$

<sup>6</sup> Nástroj citlivostní analýzy, který vyhledá optimální hodnotu cílové buňky změnou hodnot v buňkách, které se používají k výpočtu cílové buňky

V dalších výpočtech budeme využívat maximálně věrohodné odhady  $\hat{\alpha}$  a  $\hat{\lambda}$ , protože jsou přesnější než odhady  $\tilde{\alpha}$  a  $\tilde{\lambda}$  získané metodou momentů. A to z důvodu, že výběrová charakteristika  $s^2$ , od které závisí  $\tilde{\alpha}$  a  $\tilde{\lambda}$ , má při Paretovu rozdělení vysokou variabilitu. Ta je způsobena tím, že i vysoké hodnoty  $x$  jsou při tomto rozdělení velmi pravděpodobné.

### 3.3 Testy dobré shody

Nyní ověříme, zda data o výškách škod mohou mít Paretovo rozdělní pravděpodobnosti. Provedeme dva testy dobré shody (Paersonův  $\chi^2$  test a Kolmogorovův-Smirnovův test), které byly teoreticky popsány v první kapitole. Nejprve je nutné stanovit nulovou ( $H_0$ ) a alternativní ( $H_1$ ) hypotézu:

$H_0$ : Výše škod  $X$  **má** Paretovo rozdělení pravděpodobnosti

$H_1$ : Výše škod  $X$  **nemá** Paretovo rozdělení pravděpodobnosti

#### 3.3.1 Paersonův $\chi^2$ test

Nejprve data roztřídíme do intervalů, které nemusí být stejně dlouhé. Protože téměř většina škod je menších než 50 tis. Kč, zvolíme nejprve intervaly po 2500 Kč, následně od 50 tis. do 100 tis. Kč po 5000 Kč, poté po 20 tis. Kč do 200 tis., předposlední interval od 200 tis. do 250 tis. Kč a poslední pro škody nad 250 tis. Kč. V těchto jednotlivých intervalech zjistíme absolutní četnosti  $O_i$ . Dosazením parametrů získaných metodou maximální věrohodnosti do vztahu (2.2), vypočítáme hodnoty distribuční funkce  $F(x)$  americké verze Paretova rozdělení. Z hodnot  $F(x)$  velmi snadno vypočítáme pravděpodobnosti jednotlivých intervalů  $P(x)$ . Teoretické četnosti  $E_i$  získáme vynásobením horní hranice intervalu a jeho pravděpodobností  $P(x)$ . Ještě před dalším výpočtem musíme ověřit podmínku tohoto testu, že všechny hodnoty  $E_i > 5$ . Nakonec podle vzorce (1.4) vypočítáme testovací kritérium. Celý výpočet je uveden v Tabulce 4.

Tabulka 4 Paersonův  $\chi^2$  test dobré shody

$i$	Interval	$O_i$	$F(x)$	$P(x)$	$E_i$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
1	(0; 2500)	110	0,1033	0,1033	127,6397	2,4378
2	(2500; 5000)	104	0,1914	0,0881	108,9377	0,2238
3	(5000; 7500)	95	0,2672	0,0758	93,7102	0,0178
4	(7500; 10000)	85	0,3329	0,0657	81,1872	0,1791
5	(10000; 12500)	77	0,3902	0,0573	70,7948	0,5439
6	(12500; 15000)	63	0,4404	0,0502	62,0991	0,0131
7	(15000; 17500)	60	0,4847	0,0443	54,7678	0,4998
8	(17500; 20000)	51	0,5240	0,0393	48,5439	0,1243
9	(20000; 22500)	49	0,5590	0,0350	43,2263	0,7712
10	(22500; 25000)	34	0,5903	0,0313	38,6559	0,5608
11	(25000; 27500)	42	0,6183	0,0281	34,7063	1,5328
12	(27500; 30000)	27	0,6436	0,0253	31,2756	0,5845
13	(30000; 32500)	31	0,6665	0,0229	28,2815	0,2613
14	(32500; 35000)	22	0,6873	0,0208	25,6567	0,5212
15	(35000; 37500)	41	0,7062	0,0189	23,3461	13,3495
16	(37500; 40000)	16	0,7234	0,0172	21,3042	1,3206
17	(40000; 42500)	23	0,7392	0,0158	19,4930	0,6309
18	(42500; 45000)	17	0,7536	0,0145	17,8810	0,0434
19	(45000; 47500)	16	0,7669	0,0133	16,4414	0,0118
20	(47500; 50000)	17	0,7792	0,0123	15,1519	0,2254
21	(50000; 55000)	30	0,8010	0,0218	26,9434	0,3468
22	(55000; 60000)	18	0,8197	0,0187	23,1610	1,1500
23	(60000; 65000)	24	0,8360	0,0162	20,0532	0,7768
24	(65000; 70000)	17	0,8501	0,0141	17,4762	0,0130
25	(70000; 75000)	12	0,8625	0,0124	15,3215	0,7200
26	(75000; 80000)	12	0,8734	0,0109	13,5061	0,1679
27	(80000; 85000)	12	0,8831	0,0097	11,9659	0,0001
28	(85000; 90000)	9	0,8917	0,0086	10,6507	0,2558
29	(90000; 95000)	6	0,8994	0,0077	9,5209	1,3021
30	(95000; 100000)	11	0,9063	0,0069	8,5451	0,7053
31	(100000; 120000)	24	0,9280	0,0216	26,7088	0,2747
32	(120000; 140000)	16	0,9429	0,0149	18,4622	0,3284
33	(140000; 160000)	14	0,9536	0,0107	13,2858	0,0384
34	(160000; 180000)	7	0,9616	0,0080	9,8746	0,8368
35	(180000; 200000)	7	0,9677	0,0061	7,5363	0,0382
36	(200000; 250000)	13	0,9779	0,0101	12,5422	0,0167
37	(250000; $\infty$ )	24	1,0000	0,0221	27,3458	0,4094
					<b>Suma</b>	<b>31,2333</b>

Zdroj: vlastní výpočet v MS Excel

Hodnota testovacího kritéria je 31,2333. Testovací kritérium má podle (1.6) 34 stupňů volnosti. Pomocí tabulkového procesoru MS Excel a funkce „CHIINV“ vypočítáme na zvolené hladině významnosti  $\alpha = 0,05$  95. percentil, tedy kritickou hodnotu  $\chi_{0,95;34}^2 = 48,6024$ . Hodnota testovacího kritéria je menší než kritická hodnota tudíž nulovou hypotézu na hladině významnosti  $\alpha$  nezamítáme.

### 3.3.2 Kolmogorovův-Smirnovův test

Kolmogorovův-Smirnovův test na rozdíl od předchozího testu vychází z původních dat, nikoliv z údajů zařazených do tříd, proto nedochází ke ztrátě informací a tudíž má větší sílu než Paersonův  $\chi^2$  test dobré shody. Podle vztahů (1.7 a 1.8) vypočítám distribuční funkce pro náhodný uspořádaný výběr podle velikosti tzn.  $\frac{i-1}{n}$  a  $\frac{i}{n}$ . Poté dosazením parametrů získaných metodou maximální věrohodnosti do vztahu (2.2), vypočítáme hodnoty distribuční funkce  $F(x_i)$  americké verze Paretova rozdělení. Následně ze vztahu (1.8) určíme hodnotu testovacího kritéria. Ukázka výpočtu je znázorněna v Tabulce 5.

Tabulka 5 Kolmogorovův-Smirnovův test

i	$x_i$	$\frac{i-1}{n}$	$\frac{i}{n}$	$F(x_i)$	$\left F(x_i) - \frac{i-1}{n}\right $	$\left \frac{i}{n} - F(x_i)\right $
1	149	0	0,00081	0,00664	0,00664	0,00583
2	150	0,00081	0,00162	0,00668	0,00588	0,00507
3	200	0,00162	0,00243	0,00890	0,00728	0,00647
4	258	0,00243	0,00324	0,01146	0,00903	0,00822
5	458	0,00324	0,00405	0,02020	0,01697	0,01616
6	521	0,00405	0,00485	0,02293	0,01889	0,01808
7	543	0,00485	0,00566	0,02389	0,01903	0,01822
8	561	0,00566	0,00647	0,02466	0,01900	0,01819
...	...	...	...	...	...	...
1233	998343	0,99676	0,99757	0,99831	0,00154	0,00073
1234	1307412	0,99757	0,99838	0,99900	0,00143	0,00062
1235	8217110	0,99838	0,99919	0,99997	0,00159	0,00078
1236	25940000	0,99919	1	1	0,00081	0,00000
				<b>Max</b>	<b>0,01960</b>	<b>0,01986</b>

Zdroj: vlastní výpočet v MS Excel

Hodnota testovacího kritéria  $D_{1236} = 0,1986$ . Na zvolené hladině významnosti  $\alpha = 0,05$  vypočítáme dle vztahu uvedeného v Tabulce 1 kritickou hodnotu  $D_{0,95;1236} = \frac{1,36}{\sqrt{1236}} = 0,03868$ . Z uvedených hodnot vyplývá, že  $D_{1236} < D_{0,95;1236}$  tudíž můžeme potvrdit výsledek předchozího testu, že na zvolené hladině významnosti  $\alpha$  nulovou hypotézu nezamítáme.

Oba testy dobré shody nám potvrdily předpoklad, že výška škod může mít Paretovo rozdělení pravděpodobnosti v americkém tvaru. V následující kapitole porovnáme výpočty v MS Excel se statistickým programem Statgraphic Centurion XV.

### 3.4 Ověření rozdělení pomocí Statgraphics Centurion XV

Statistický software STATGRAPHICS Centurion XV, který je ve zkušební verzi na třicet dní volně k dispozici, nám nabízí 45 různých typů rozdělení pravděpodobnosti, které lze využít při ověřování vybraného rozdělení datového souboru. Shodu rozdělení, stejně jako v předchozí kapitole, ověřujeme pomocí testů dobré shody. Cílem je ověřit výsledky vypočítané v programu MS Excel. Pro začátek je nejprve nutné zmínit, že ve Statgraphics Centurion XV je možný pouze evropský tvar Paretovo rozdělení pravděpodobnosti, který se velmi liší od amerického, který jsme použili v předchozích výpočtech. Rozdíl mezi těmito tvary je vysvětlen ve druhé kapitole.

Ze znalosti souboru dat do úvahy přicházejí pouze pravostranně zešikmená rozdělení pravděpodobnosti. Ověříme, zda soubor dat o výšce škod může mít Gamma, Loglogistické, Lognormální nebo Paretovo rozdělení pravděpodobnosti. Výsledky testů dobré shody (viz Tabulka 6) jsou vyjádřeny P-hodnotou, která vyjadřuje mezní hladinu významnosti, při které bychom hypotézu zamítali. Pokud je P-hodnota menší než zvolená hladina významnosti  $\alpha = 0,05$  nulovou hypotézu zamítáme, naopak pokud se P-hodnota blíží k hodnotě 1, rozdělení pravděpodobnosti testovaného souboru se blíží předpokládanému rozdělení pravděpodobnosti [6].

Tabulka 6 Výsledky testů dobré shody v programu Statgraphic Centurion XV

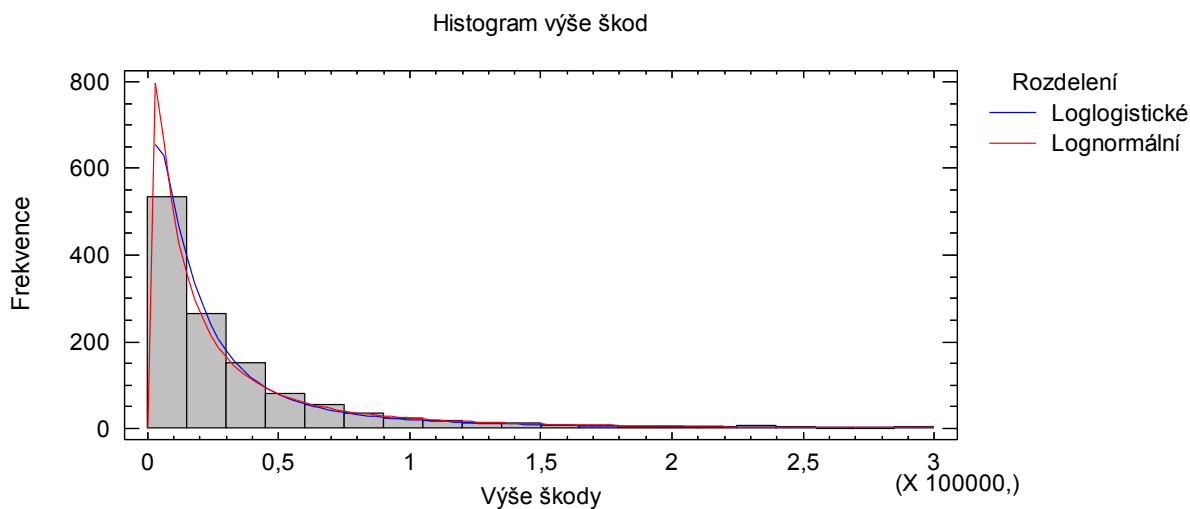
Rozdělení	P-hodnota $\chi^2$ testu	P-hodnota Kolmogorovova-Smirnovova testu
Gamma	0,0	0,0
Loglogistické	0,9643	0,7264
Lognormální	0,7866	0,3333
Paretovo (2-param.)	0,0	0,0

*Zdroj: vlastní zpracování na základě výstupu Statgraphic Centurion XV*

Z uvedené tabulky je zřejmé, že nulovou hypotézu nezamítáme pro Loglogistické a Lognormální rozdělení pravděpodobnosti. Naopak Gamma rozdělení a Paretovo rozdělení v evropském tvaru se souborem dat vůbec neshoduje.



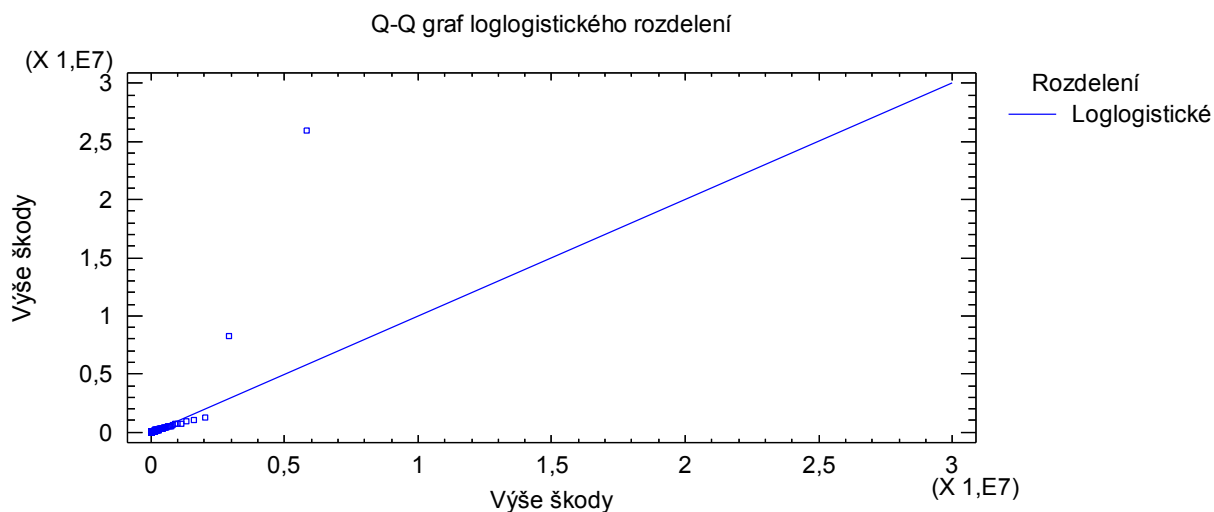
Loglogistické rozdělení má jednak vyšší P-hodnotu obou testů dobré shody, ale i grafické znázornění nám tyto výsledky potvrzuje, jak nám dokládá Obrázek 10.



**Obrázek 10** Histogram výše škody s proložením loglogistického a lognormálního rozdělení

*Zdroj: Statgraphic Centurion XV*

Při využití kvantil-kvantilového grafu s loglogistickým rozdělení (viz Obrázek 11) je vidět, že téměř všechny hodnoty leží na přímce loglogistického rozdělení. Vzdálenost dvou nejvyšších hodnot je způsobena tím, že pravý konec tohoto rozdělení velmi rychle konverguje k ose x a tudíž neočekává i velmi vysoké škody.



**Obrázek 11** Q-Q graf výše škody a loglogistického rozdělení

*Zdroj: Statgraphic Centurion XV*

### 3.4.1 Rozdělení nejvyšších škod

V kapitole 2 jsou vysvětleny rozdíly mezi evropskou a americkou verzí Paretova rozdělení, které byly v předchozích výpočtech potvrzeny. Americký tvar modeluje celý rozsah datového souboru, kdežto evropský tvar lépe modeluje nejvyšší hodnoty, protože velmi pomalu konverguje k ose x. Tyto poznatky se pokusíme ověřit pomocí softwaru Statgraphic Centurion XV.

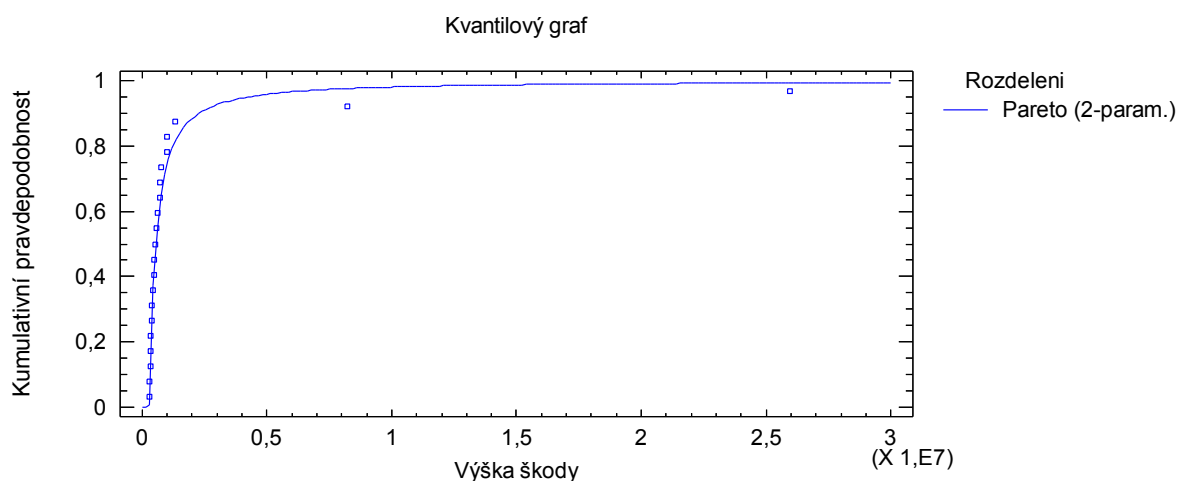
Ze souboru dat o výšce jednotlivých škod vybereme pouze vyšší škody, na kterých ověříme shodu s rozděleními, které jsme testovali v předchozí podkapitole. V Tabulce 7 jsou znázorněny výsledky testů dobré shody pro škody vyšší než 100 tis. a 300 tis. Kč.

**Tabulka 7** Výsledky testů dobré shody v programu Statgraphic Centurion XV pro škody vyšší než 100 tis. a 300 tis. Kč

Rozdělení	P-hodnota Kolmogorovova-Smirnovova testu pro $X > 100\,000$ Kč	P-hodnota Kolmogorovova-Smirnovova testu pro $X > 300\,000$ Kč
Gamma	0,0	0,005
Loglogistické	0,0044	0,4197
Lognormální	0,0007	0,1745
Paretovo (2-param.)	<b>0,8673</b>	<b>0,9555</b>

*Zdroj: vlastní zpracování na základě výstupu Statgraphic Centurion XV*

Kvantilový graf na Obrázku 12 znázorňuje kumulativní pravděpodobnost evropského tvaru Paretova rozdělení a škody přesahující 300 tis. Kč, které téměř kopírují celou křivku.



**Obrázek 12** Kvantilový graf výše škod nad 300 tis. Kč a evropské verze Paretova rozdělení

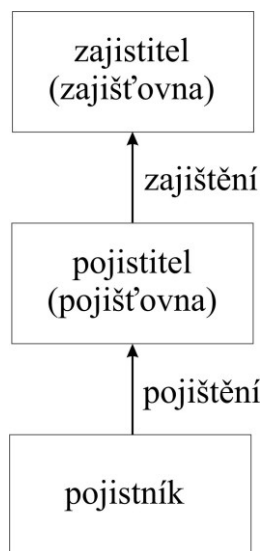
*Zdroj: Statgraphic Centurion XV*

Výsledky nám potvrzují všechny již zmíněné předpoklady, že Paretovo rozdělení v evropském tvaru nejlépe modeluje nejvyšší škody, protože jeho pravý konec velmi pomalu konverguje k ose  $x$ .

Využití znalosti rozdělení pravděpodobnosti individuální výšky škody, je důležité pro plánování technických rezerv, očekávanou výplatu celkového pojistného plnění, tvorbu rezerv atd. Rozdělení pravděpodobnosti pro nejvyšší škody je důležité především pro sjednávání neproporcionálního zajištění, které je popsáno v další kapitole.

## 4 PARETOVO ROZDĚLENÍ V NEPROPORCIONÁLNÍM ZAJIŠTĚNÍ

Zajištění je jednoduše řečeno pojištění pojišťovny. Při zajištění dochází k vertikálnímu přenosu rizika nebo jeho části, které pojistitel na základě pojistné smlouvy převzal od pojistníka na jiný pojišťovací subjekt (tzn. zajišťovnu). Pojištění není se zajistitelem v žádném smluvním vztahu. Přenos rizika je znázorněn na Obrázku 13 [3]



Obrázek 13 Princip zajištění

*Zdroj: upraveno podle [3]*

Zajištění je významné především z důvodu:

- Zvýšení kapacity pojistitele
- Homogenizace pojistného kmene
- Stabilizace výsledků pojistitele
- Rozprostření a diverzifikace pojistných rizik
- Dosažení finančních výhod
- Získání profesionálních služeb zajistitele

Zajištění má dvě základní formy [3] a [16]:

- **Fakultativní zajištění**, které je historicky starší. Sjednává se pro jednotlivé pojistné smlouvy samostatně. Prvopojistitel tedy rozhoduje, kterou pojistnou smlouvu bude chtít zajistit, na zajištěném trhu hledá zajistitele, který danou smlouvu zajistí. Může se tedy stát, že riziko, které chce prvopojistitel zajistit, nebude žádná zajišťovna chtít převzít. Riziko jde rozdělit i mezi více zajistitelů. Zajistná smlouva

se pro každý obchod uzavírá individuálně, což zvyšuje administrativní náklady. Na druhou stranu je možné na zajištěním trhu získat smlouvu s nižší výší zajištění. Prvopojistitelé při fakultativním zajištění často využívají zajišťovacích makléřů.

- **Obligatorní zajištění**, je dnes mnohem častější než fakultativní forma zajištění. Zajištění se sjednává pro celé portfolio pojistných smluv. Prvopojistitel se zajištěním sjedná tzv. rámcovou zajišťovací smlouvu, na základě které má zajišťovatel povinnost převzít příslušnou část rizika z jednotlivých pojistných smluv spadající do daného portfolia. Velmi důležitá je vzájemná důvěra prvopojistitele a zajišťovatele, jelikož zajišťovatel nemůže zasahovat do uzavírání pojistných smluv. Věří, že prvopojistitel jedná při uzavírání smluv kvalifikovaně a neuzavírá nevýhodné smlouvy, které by mohly oba subjekty poškodit. Zajišťovatel má samozřejmě právo na kontrolu, která ho chrání před případným zneužitím zajišťovací smlouvy.

Dále v rámci zajištění existují dva hlavní typy zajištění – **proporcionální zajištění a neproporcionální zajištění**. *Proporcionální zajištění* je opět historicky starší. Pojistná částka, pojistné a pojistné plnění se dělí mezi prvopojistitele a zajišťovatele v předem sjednaném poměru. Zajištění (cena zajištění obchodu) se stanovuje jednoduše poměrem ručení, tedy pojistné placené pojištěným se rozdělí mezi prvopojistitele a zajišťovatele. Velmi podstatné je, že tento poměr nezávisí na výši škody. *Neproporcionální zajištění* závisí pouze na výši skutečně vzniklých škod. Tento typ zajištění je podrobněji popsán v následující podkapitole [16].

#### 4.1 Charakteristika neproporcionálního zajištění

U neproporcionálního zajištění účast zajišťovatele začíná až od určité předem sjednané úrovně skutečně vzniklých škod. Někdy je proto také označováno jako škodové zajištění. Plnění zajišťovatele závisí na skutečné výši vzniklých škod. Zajišťovatel přebírá takové škody, které přesahují předem pevně sjednanou hodnotu, tzn. **prioritu** (*označována - a*). Zajištění je určováno nezávisle na pojistném, často na základě pravděpodobnosti nastání velkých škod.

Typy neproporcionálního zajištění, zpracovány podle [3] a [16]:

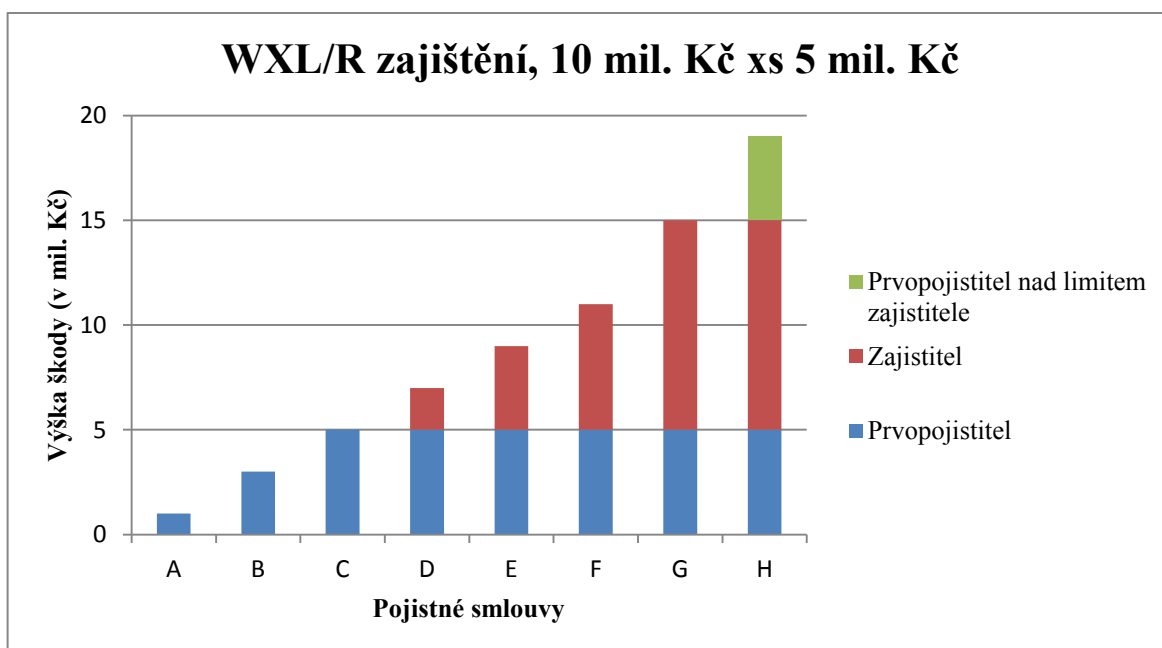
**XL zajištění** je zajištění škodního nadměrku. Zkratka pochází z anglického názvu *Excess of loss reinsurance*. XL zajištění chrání prvopojistitele před dopadem jednotlivých velkých až katastrofických škod nebo souhrnem několika náhrad z jedné pojistné události. Pojistitel si určí vlastní prioritu, do které ponese plnění sám. Zajišťovatel má obvykle v zajišťovací smlouvě sjednanou svoji maximální kapacitu, tzn. limit zajišťovatele (*l*).

XL zajištění se dále dělí na:

- **WXL/R zajištění** je zajištění škodního nadměrku jednotlivých rizik. Zkratka pochází z anglického názvu *Working excess of loss cover per risk*. Zajištění se vztahuje pojistnou smlouvu ze zajišťovaného portfolia postižena pojistnou událostí s nároky na výplatu pojistného plnění ( $X$ ) převyšující prioritu ( $a$ ) prvopojistitele, pak vzniklý nadměrek hradí zajistitel, ale jen do výše jeho vrstvy (limitu –  $l$ ). Plnění zajistitele  $X_z$  jde poté vyjádřit vztahem (4.1):

$$X_z = \begin{cases} 0, & \text{pro } X \leq a \\ X - a, & \text{pro } a < X < l \\ l, & \text{pro } X \geq (a + l) \end{cases} \quad (4.1)$$

V praxi se používá zápis 10 mil. Kč xs 5 mil. Kč, kde 10 mil. Kč je limit zajistitele a 5 mil. Kč je priorita prvopojistitele. Tento příklad WXL/R zajištění je znázorněn na Obrázku 14.



Obrázek 14 Příklad WXL/R zajištění

Zdroj: vlastní zpracování v MS Excel

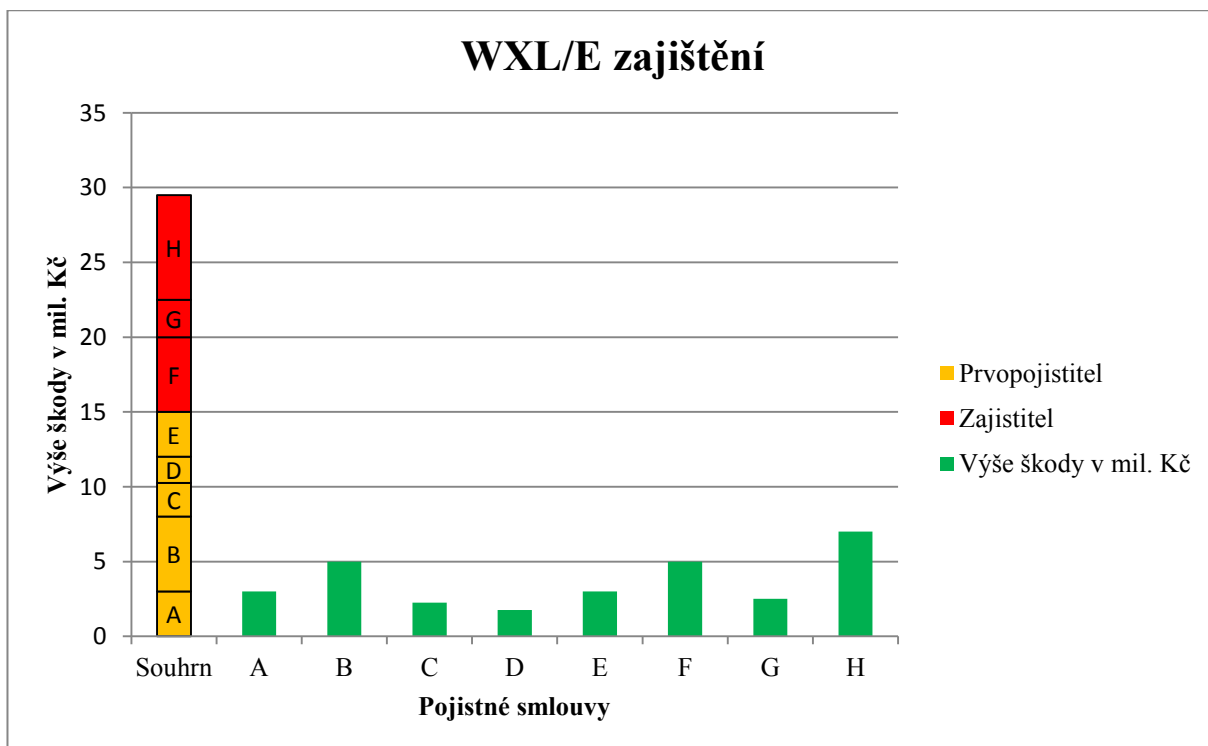
Škody vyplývající z pojistných smluv A, B, C jsou nižší nebo rovny prioritě, tudíž celou jejich výši hradí prvopojistitel. Škody D, E, F, G přesáhly prioritu prvopojistitele a zároveň jsou nižší nebo rovny kapacitě zajistné smlouvy, které je součtem priority prvopojistitele a limitu zajistitele. Z těchto pojistných smluv tedy prvopojistitel hradí pouze 5 mil. Kč a zajistitel zbývající část. Pojistné plnění

z pojistné smlouvy H přesáhlo kapacitu zajistné smlouvy tudíž tuto část hradí opět prvopojistitel, případně může uzavřít další zajistnou smlouvu s jiným zajistitelem pro škody nad kapacitu první zajistné smlouvy. WXL/R zajištění je vhodné pokud je prvopojistitel schopen hradit pojistné plnění vyplývajících z menších a středních pojistných událostí. Nevýhodou může být nedostatečná ochrana při jedné pojistné události, kde je obrovský počet malých škod, které nepřesahují prioritu prvopojistitele.

- **WXL/E zajištění** je zajištění škodního nadměrku jednotlivých událostí. Zkratka pochází z anglického názvu *Working excess of loss cover per event*. Zajišťuje prvopojistitele proti kumulaci škody vzniklých v důsledku jedné škodní události, která ale nemá charakter přírodní katastrofy (např. pojištění účastníků autobusového zájezdu, požární pojištění bytového družstva apod.). Jestliže soubor pojistných plnění v jedné škodní události v  $n$  postižených pojistných smlouvám označíme jako  $X_1, X_2, \dots, X_n$  pak plnění zajišťovny  $X_z$  lze vyjádřit vztahem (4.2):

$$X_z = \begin{cases} 0, & \text{pro } \sum_{i=1}^n X_i \leq a \\ \sum_{i=1}^n X_i - a, & \text{pro } \sum_{i=1}^n X_i > a \end{cases} \quad (4.2)$$

kde  $a$  je priorita prvopojistitele. Graficky je předchozí vztah znázorněn na Obrázku 15.



Obrázek 15 Příklad WXL/E zajištění

Zdroj: vlastní zpracování v MS Excel

Priorita prvopojistitele je ve výši 15 mil. Kč, tzn. prvopojistitel bude hradit pouze škody vyplývající z pojistných smluv A-E, další škody z ostatních pojistných smluv bude hradit zajistitel až do vyčerpání jeho limitu. V zajištěných smlouvách WXL/E zajištění je často definována podmínka minimálního počtu pojistných smluv, které musejí být jednou událostí zasaženy, tak aby bylo zajištění aktivováno.

- **CatXL zajištění** je zajištění škodního nadměru katastrofické události. Zkratka pochází z anglického názvu *Catastrophe excess of loss*. Je shodné s WXL/E zajištěním, avšak škody které vzniknou v důsledku jedné události, pochází z katastrofické události. Katastrofická událost je vždy jasně definována v zajištěné smlouvě např. peněžní hodnotou, počtem usmrcených osob, počtem zničených nemovitostí atd.

**SL zajištění** je zajištění ročního nadměru. Zkratka pochází z anglického názvu *Stop loss reinsurance*. SL zajištění chrání prvopojistitele před důsledky nahromadění velkého počtu škod během jednoho roku. Zajistitel se v zajištěné smlouvě zavazuje nést určitý podíl na ztrátách, které pojistiteli vzniknou při nepříznivém škodním průběhu.

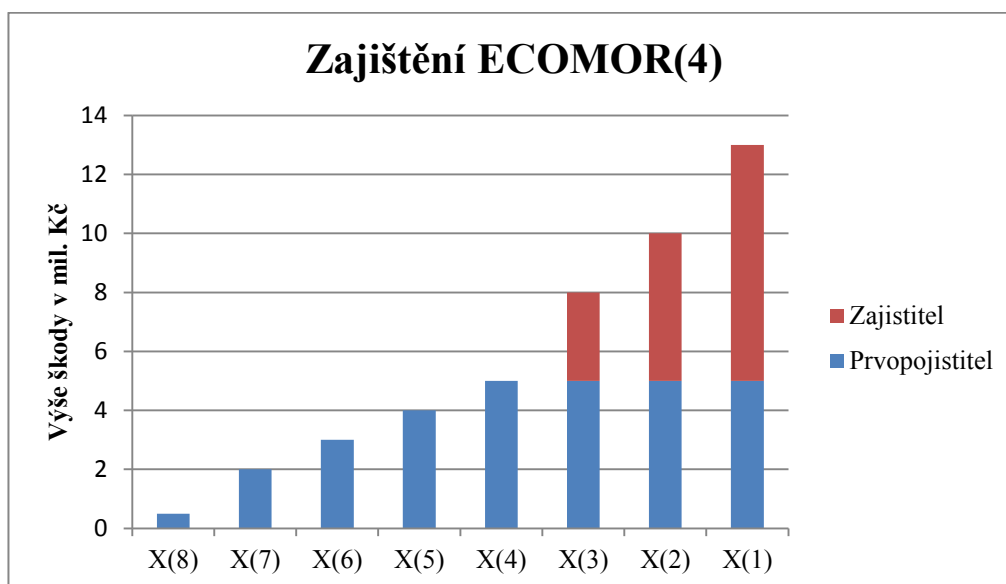


**Zajištění Umbrella Cover** je založeno na principu zajišťování kumulovaných škod, kde je zohledněna kumulace škod z jedné škodní události přes různá pojistná odvětví. Při velké škodní události velmi často dochází ke kumulaci škod v rámci požárního, živelního, havarijního, úrazového a životního pojištění. V praxi je velmi často požadováno, aby tyto jednotlivé druhy pojištění byly také prvotně zajištěny samostatně některým z druhů XL zajištění.

**Zajištění ECOMOR** (zkratka pochází z francouzského názvu *Excédent du coût moyen relatif*) se vztahuje na části škod, které přesáhly  $p$ -tou nejvyšší škodu. Zajištění označováno ECOMOR( $p$ ), kde  $p$  je přirozené číslo  $p < n$  ( $n$  – počet škod po dobu trvání zajistné smlouvy). Jestliže  $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \dots \geq X_{(p)} \geq \dots \geq X_{(n)}$  jsou škody, které se staly po dobu trvání zajistné smlouvy pak plnění zajistitele  $X_z$  lze vyjádřit vztahem (4.3):

$$X_z = (X_{(1)} - X_{(p)}) + (X_{(2)} - X_{(p)}) + \dots + (X_{(p-1)} - X_{(p)}) \quad (4.3)$$

Graficky je zajištění ECOMOR(4) znázorněno na Obrázku 16.



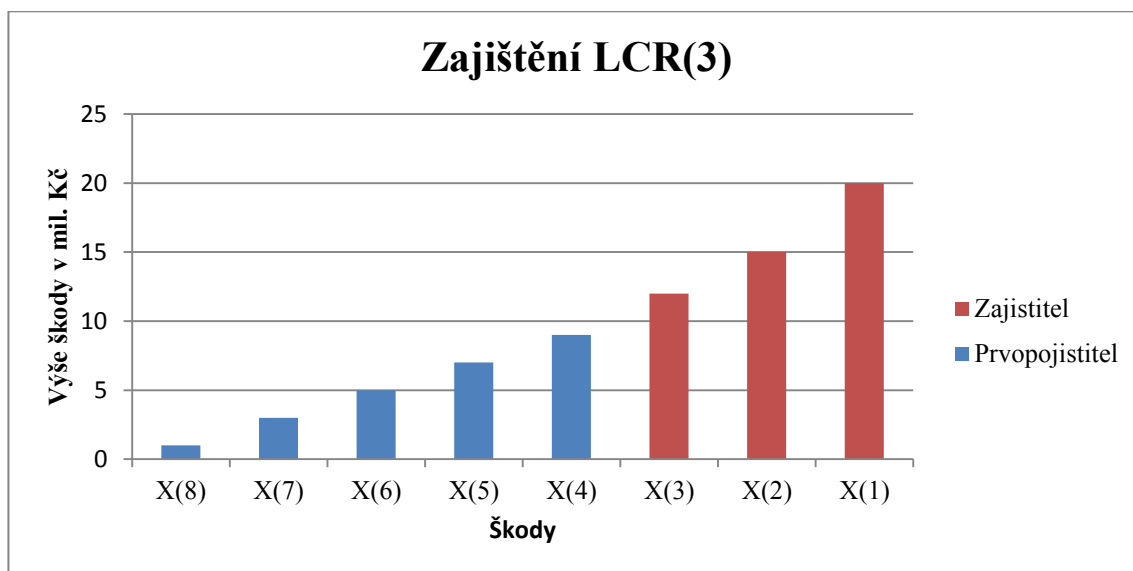
Obrázek 16 Zajištění ECOMOR(4)

Zdroj: vlastní zpracování v MS Excel

**Zajištění LCR** je zajištění nejvyšších škod. Zkratka pochází z anglického názvu *Largest claims reinsurance*. Zajištění LCR kryje prvopojistiteli několik nejvyšších škod, které nastaly po dobu trvání zajistné smlouvy (obvykle jeden rok). V praxi je toto zajištění označováno zkratkou LCR( $p$ ), kde  $p$  je přirozené číslo  $p < n$  ( $n$  – počet škod po dobu trvání zajistné smlouvy). Jestliže  $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \dots \geq X_{(p)} \geq \dots \geq X_{(n)}$  jsou škody, které se staly po dobu trvání zajistné smlouvy, pak plnění zajistitele  $X_z$  lze vyjádřit vztahem (4.4):

$$X_z = X_{(1)} + X_{(2)} + \dots + X_{(p)} \quad (4.4)$$

Nevýhodou LCR zajištění je, že zajistné plnění je známo až po uplynutí zajistné smlouvy, výhodou naopak je, že zajistné plnění proběhne vždy. V praxi je toto zajištění využíváno výhradně v kombinaci s jiným typem zajištění. Graficky je zajištění LCR(3) znázorněno na Obrázku 17.



Obrázek 17 Zajištění LCR(3)

Zdroj: vlastní zpracování v MS Excel

## 4.2 Model založený na Paretově rozdělní pro stanovení nettozajistného

Model založený na Paretově rozdělní pro stanovení nettozajistné sazby v neproporcionálním zajištění vychází z minulého škodního průběhu. Pro vlastní výpočet tedy použijeme data o výši škod z minulých let, které překračující vhodně nastavenou hodnotu *OP* (*observation point*), která je mnohem menší než budoucí priorita prvopojistitele *a*. Vzhledem k nižší hodnotě *OP* je počet takových škod vyšší než počet škod, které překračují budoucí prioritu *a*. Výše škod nad prioritou prvopojistitele *a* modeluje Paretovo rozdělení s distribuční funkcí [16] [17]:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^b, \quad \text{pro } x \geq a \quad (4.5)$$

hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{ba^b}{x^{b+1}}, \quad \text{pro } x \geq a \quad (4.6)$$

střední hodnotou

$$E(X) = \frac{ab}{b-1}, \quad \text{pro } b > 1 \quad (4.7)$$

a rozptylem

$$\text{var}(X) = \frac{a^2 b}{(b-1)^2(b-2)}, \quad \text{pro } b > 2 \quad (4.8)$$

Zajistitel bude po dobu trvání zajištění smlouvy hradit škody nad prioritou prvopojistitele  $a$ , ale maximálně do výše svého limitu  $L$ , takže střední výše zajištění plnění EXL (*expected XL*) se dá vyjádřit vztahem:

$$\begin{aligned} EXL &= \int_a^{a+L} (x-a) \cdot f_a(x) dx + \int_{a+L}^{\infty} L \cdot f_a(x) dx = \\ &= \begin{cases} \frac{a}{1-b} \cdot (RL^{1-b} - 1) & \text{pro } b \neq 1 \\ a \cdot \ln RL & \text{pro } b = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.9)$$

kde RL (*relative layer*) je relativní délka vrstvy

$$RL = \frac{a+L}{a} \quad (4.10)$$

Pro výpočet celkové výše plnění zajištění je nutné ještě znát průměrný počet škod  $LF(a)$ , který v zajišťovaném portfoliu překročí během trvání zajištění smlouvy prioritu prvopojistitele  $a$ . Jak již bylo zmíněno z minulých dat lze spolehlivě odhadnout pouze  $LF(OP)$ , protože počet škod přesahující prioritu prvopojistitele  $a$  je velmi malý a výpočet by byl tedy dosti nespolehlivý musíme použít odhad [16]:

$$\begin{aligned} LF(a) &= LF(OP) \cdot P(X_{OP} > a) = LF(OP) \cdot (1 - F_{op}(a)) = \\ &= LF(OP) \cdot \left(\frac{OP}{a}\right)^b \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nettozajištění  $NP_z$  se tedy vypočítá podle:

$$\begin{aligned} NP_z &= LF(a) \cdot EXL = \\ &= \begin{cases} LF(OP) \cdot OP^b \cdot \frac{a^{1-b}}{1-b} \cdot (RL^{1-b} - 1) & \text{pro } b \neq 1 \\ LF(OP) \cdot OP \cdot \ln RL & \text{pro } b = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Parametr  $b$  je možné stanovit dvěma metodami [16]:

1. Stanoví se ad hoc hodnota ověřená praktickými zkušenostmi s podobnými zajišťovacími portfolii. Např.:
  - WXL/R zajištění požárních nebo živelných rizik mívá parametr  $b$  v rozmezí od 1,0 do 2,5 (speciálně pro pojištění průmyslových rizik kolem 1,2 a pro pojištění majetku obyvatelstva od 1,8 do 2,5)
  - CatXL zajištění mívá  $b$  kolem 1,0 (speciálně pro riziko zemětřesení kolem 0,8 a pro riziko vichřic v Evropě 1,3),
2. Odhad hodnoty parametru  $b$  z minulých dat. Jestliže  $X_{OP,1}, X_{OP,1}, \dots, X_{OP,n}$  jsou všechny škody, které v daném období překročily hodnotu  $OP$ , pak maximálně věrohodný odhad parametru  $b$  můžeme vypočítat podle vztahu:

$$\hat{b} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{X_{OP,i}}{OP}} \quad (4.13)$$

### 4.3 Výpočet nettozajistného

Na základě reálných údajů, které byly po stanovíme nettozajistné pro WXL/R zajištění, podle postupů, které byly popsány v předchozí kapitole. Parametry pro daný typ portfolia pojistek byly zvoleny následovně:

$OP$  („*observation point*“) = 100 000 Kč

$a$  (*priorita prvopojistitele*) = 300 000 Kč

$L$  (*limit zajistitele*) = 700 000 Kč

$LF(OP)$  (*počet škod vyšších než OP*) = 105

Parametr  $b$  odhadneme podle vztahu (4.13), v Tabulce 8 je znázorněn pomocný výpočet pro vlastní odhad.

**Tabulka 8 Pomocný výpočet pro odhad parametru  $b$**

$i$	$x_i$	$\ln\left(\frac{x_i}{OP}\right)$
1	100241	0,002407101
2	100716	0,007134489
3	101847	0,018301501
4	102125	0,021027367
5	102507	0,024760903
6	104233	0,041458592
⋮	⋮	⋮
101	987962	2,290474049
102	998343	2,300926719
103	1307412	2,570634704
104	8217110	4,408803659
105	25940000	5,558371272
	$\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{OP}\right)$	<b>75,9107113</b>

*Zdroj: vlastní výpočet v MS Excel*

$$\text{Odhad parametru } \hat{b} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_{OP,i}}{OP}} = \frac{105}{75,9107} = \mathbf{1,3832}.$$

Poslední hodnotu, kterou potřebujeme určit je relativní délka vrstvy („ $RL$ “). Tu vypočítáme podle vztahu (4.10), tedy  $RL = \frac{a+L}{a} = \frac{300000+700000}{300000} = \mathbf{3,33}$ .

Jelikož známe všechny potřebné hodnoty, stačí nám pro výpočet nettozajistného dosadit do vztahu (4.12), tj:

$$\begin{aligned} NP_z &= LF(OP) \cdot OP^b \cdot \frac{a^{1-b}}{1-b} \cdot (RL^{1-b} - 1) = \\ &= 105 \cdot 100000^{1,3832} \cdot \frac{300000^{1-1,3832}}{1-1,3832} \cdot (3,33^{1-1,3832} - 1) = \\ &= \mathbf{6\,647\,090,62\,Kč} \end{aligned}$$

Nettozajistné pro dané portfolio pojistek činí 6 647 090,62 Kč.

## 5 MODELOVÁNÍ EXTRÉMNÍCH ŠKOD

Modelování extrémních škod patří mezi důležitou činnost pojišťoven a zajišťoven. Správné určení výšky pojistného, vlastního vrubu pojišťovny či hraničních bodů pojistné vrstvy ovlivňuje, v případě vzniku extrémních škod, postavení pojišťoven, příp. zajišťoven na trhu. Špatný model může pojišťovně nebo zajišťovně způsobit při výplatě pojistného (popř. zajistného) plnění způsobit velké problémy.

Extrémní škody velmi často pocházejí z katastrofických událostí, ty mohou být způsobeny v důsledku přírodních katastrof (např. zemětřesení, tsunami, povodně, vichřice, sucho, požáry, atd.) nebo katastrofy způsobné činností člověka (např. průmyslové havárie, terorismus, letecké nehody, apod.) .

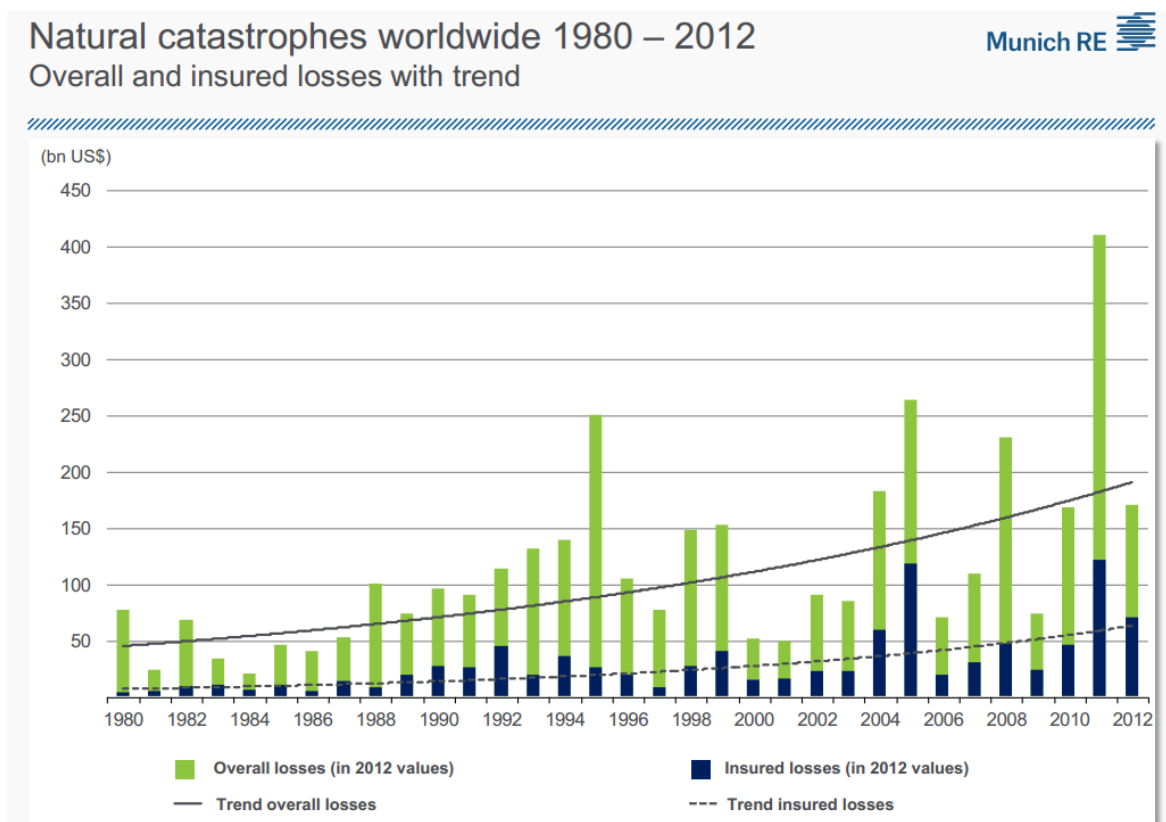
V Tabulce 9 je uvedeno deset nejvyšších škod v letech 1980-2012, které nastaly v důsledku přírodní katastrofy. Z tabulky může i vyčíst výši škody, které byly pojištěny. Zde je vidět obrovský rozdíl mezi jednotlivými státy. Například hurikány, které zasáhly území Spojených států amerických v roce 2005 a 2012, způsobily škody, které byly téměř z 50 % pojištěny. Naopak zemětřesení, které postihlo území Číny v roce 2008, způsobilo škody ve výši 85 mld. USD, ale pojištěno bylo jen 0,3 mld. USD.

**Tabulka 9 Deset nejvyšších škod v letech 1980-2012 v důsledku přírodní katastrofy**

Rok	Událost	Zasažené území	Celková škoda (mld. USD)	Pojištěno (mld. USD)	Počet obětí
2011	Zemětřesení, tsunami	Japonsko	210	40	15840
2005	Hurikán Katrina	USA	125	62,2	1322
1995	Zemětřesení	Japonsko	100	3	6430
2008	Zemětřesení	Čína	85	0,3	84000
2012	Hurikán Sandy	Střední a severní amerika	65	30	210
1994	Zemětřesení	USA	44	15,3	61
2011	Povodně	Thajsko	43	16	813
2008	Hurikán Ike	Kuba, Haiti, USA,...	38	18,5	170
1998	Povodně	Čína	30,7	1	4159
2010	Zemětřesení, tsunami	Chile	30	8	520

*Zdroj: Munich RE, přeloženo z [18]*

Obrázek 18 znázorňuje vývoj přírodních katastrof do roku 1980 do roku 2012. Hodnoty v mld. USD jsou v jednotných cenách roku 2012. Nejde přehlédnout, že trend v objemu škod se neustále zvyšuje. Zelené sloupce znázorňují celkové škody („Overall losses“), modré sloupce vyjadřují hodnotu pojištěných škod („Insured losses“). Trend celkové výše je znázorněn černou plnou křivkou („Trend overall losses“) a trend pojištěných škod vyjadřuje čárkovaná křivka („Trend insured losses“).



Obrázek 18 Vývoj přírodních katastrof od roku 1980 do 2012 (v mld. USD)

Zdroj: Munich RE [19]

Z předchozí tabulky a grafu je patrné, že výše škod v důsledku přírodních katastrof v posledních letech stále stoupá, což zvyšuje požadavky na správnou a přesnější modelaci těchto extrémních škod, které mohou nastat. V pojišťovnách i zajišťovnách jsou speciální oddělení, které se touto problematikou zabývají.

## 5.1 Kvantilový model a uspořádané statistiky

Jedním ze způsobů modelování rozdělení pravděpodobnosti výšky škody a simulace jejich extrémních hodnot je aplikace kvantilové funkce. Kvantilové rozdělení je často jediným východiskem v případě, pokud se nám klasickými metodami (např. testy dobré shody) nepodaří najít vhodný tvar distribuční funkce nebo funkci hustoty. Vlastnosti kvantilových

funkcí umožňují při dodržení určitých základních pravidel tyto funkce upravovat a kombinovat tak, aby výsledný tvar byl znovu kvantilovou, tedy neklesající funkcí, se statisticky interpretovatelnými parametry.

Kvantilová funkce je definována pro každé reálné  $p$  (hodnota pravděpodobnosti) z intervalu  $\langle 0,1 \rangle$  vztahem:

$$Q(p) = x, \quad \text{přičemž } F(x) = p \quad (5.1)$$

Pro hodnotu  $X$  používáme také označení  $x_p$  a nazýváme ji  $p$ -kvantilem. Neklesající kvantilová funkce  $Q(p) = x_p$  je definována jako inverzní funkce k distribuční funkci  $F(x)$ , Derivováním  $Q(p)$  podle  $p$  dostaneme kvantilovou funkci hustoty:

$$q(p) = \frac{dQ(p)}{dp}, \quad \text{pro } 0 \leq p \leq 1 \quad (5.2)$$

Kvantilový model rozdělení pravděpodobnosti je založený na teorii pořadových statistik. Pro uspořádaný náhodný výběr používáme označení

$$x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, \dots, x_{(r)}, \dots, x_{(n-1)}, x_{(n)} \quad (5.3)$$

Příslušné náhodné proměnné poté označujeme jako

$$X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}, \dots, X_{(r)}, \dots, X_{(n-1)}, X_{(n)} \quad (5.4)$$

a nazýváme je *uspořádané (pořadové) statistiky*. Tyto statistiky mají rozhodující úlohu při modelování pomocí kvantilových funkcí.

Náhodná proměnná  $X_{(n)}$  představuje nejvyšší zjištěnou hodnotu v náhodném výběru o rozsahu  $n$ . Cílem je nalézt její kvantilové rozdělení a vyjádřit ho pomocí kvantilové funkce  $Q(p)$ .

Definujeme-li distribuční funkci proměnné  $X_{(n)}$  vztahem  $F_{(n)}(x) = p_{(n)}$ . Potom

$$F_{(n)}(x) = p_{(n)} = P(X_{(n)} \leq x) \quad (5.5)$$

je také pravděpodobnost, že všechna  $n$  pozorování náhodné proměnné  $X$  jsou menší anebo rovné hodnotě  $x$ . Protože tato pravděpodobnost je pro každou proměnnou rovná právě  $p$ , podle pravidla o násobení pravděpodobnosti platí:



$$p_{(n)} = p^n, \text{ tedy } p = p_{(n)}^{1/n} \text{ a } F(x) = p = p_{(n)}^{1/n} \quad (5.6)$$

Vyjádřením  $x$  jako inverzní funkce k  $F(x)$  i k  $F_{(n)}(x)$  dostáváme důležitý vztah:

$$Q_{(n)}(p_{(n)}) = Q(p_{(n)}^{1/n}) \quad (5.7)$$

Náročnější je výpočet kvantilové funkce pro libovolnou  $r$ -tou uspořádanou statistiku  $X_{(r)}$ . Pravděpodobnost, že v pořadí  $r$ -té pozorování je menší nebo rovné jako reálná hodnota  $z$ , tedy  $P(X_{(r)} \leq z)$ , je distribuční funkce proměnné  $X_{(r)}$ , tedy platí vztah:

$$p_{(r)} = F_{(r)}(z), \quad (5.8)$$

který je také pravděpodobností toho, že nejméně  $r$  nezávislých pozorování je menších, nejvýše rovných hodnotě  $z$ . Pravděpodobnost toho, že právě  $s$  pozorování je menších nebo rovných  $z$ , vyjadřuje binomická formule, kde  $p = F(z)$ :

$$p = F(z) = P(s \leq z) = \sum_{s=r}^n \binom{n}{s} p^s (1-p)^{(n-s)} \quad (5.9)$$

Potom platí

$$p_{(r)} = \sum_{s=r}^n \binom{n}{s} p^s (1-p)^{(n-s)} \quad (5.10)$$

Tato funkce je neúplná beta funkce a označuje se jako:

$$p_{(r)} = I(p, r, n - r + 1) \quad (5.11)$$

Jestliže k ní existuje inverzní funkce, potom můžeme napsat

$$p = BETAINV(p_{(r)}, r, n - r + 1) \quad (5.12)$$

Z posledních dvou vztahů dostáváme

$$Q_{(r)}(p_{(r)}) = Q(BETAINV(p_{(r)}, r, n - r + 1)) \quad (5.13)$$

což bývá také označováno jako pravidlo rozdělení uspořádaných statistik.

Protože funkce  $BETAINV()$  je standardní součástí tabulkového procesoru MS Excel, můžeme kvantily pořadových statistik vyjádřit přímo ze známé kvantilové funkce  $Q(p)$ . Například pro  $p_{(r)} = 0,5$  bude  $Q(BETAINV(0,5,r,n-r+1))$  medián  $r$ -té pořadové statistiky  $X_{(r)}$ , 99. percentil vypočítáme jako  $Q(BETAINV(0,99,r,n-r+1))$  apod. [20] [21]

## 5.2 Simulace

Při simulaci extrémních škod  $X$  budeme předpokládat, že kvantilový model  $Q(p)$  rozdělení spojitě proměnné  $X$  poznáme.

Základem simulace je generování náhodných čísel, které nám umožňují všechny statistické programy a tabulkové procesory. Základní náhodná čísla jsou z intervalu  $\langle 0,1 \rangle$  a reprezentují náhodné pozorování ze spojitěho rovnoměrného rozdělení na tomto intervalu.

Kvantilová funkce rovnoměrného rozdělení na intervalu hodnot  $\langle 0,1 \rangle$  má vyjádření:

$$S(p) = p, \quad \text{pro } 0 \leq p \leq 1 \quad (5.14)$$

Pomocí generátoru náhodných čísel můžeme vygenerovat nezávislé hodnoty  $u_1, u_2, \dots, u_n$  z rovnoměrného rozdělení na intervalu  $\langle 0,1 \rangle$ . Takto generovaná náhodná čísla a jejich použití v pravděpodobnostním modelu libovolného typu nazýváme *simulace*. Základem této simulace je *pravidlo Q-transformace*:

Je-li  $z = T(x)$  neklesající funkce  $x$  a  $Q(p)$  je kvantilová funkce, poté i  $T(Q(p))$  je kvantilová funkce.

Je-li neklesající funkcí  $T(x)$  kvantilová funkce  $Q(p)$  libovolného rozdělení, aplikací pravidla Q-transformace pro případ kvantilové funkce rovnoměrného rozdělení  $S(p) = p$  můžeme simulovat hodnoty  $x$  z rozdělení s kvantilovou funkcí  $Q(p)$  jako

$$x_i = Q(u_i), \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.15)$$

kde  $u_1, u_2, \dots, u_n$  jsou simulované hodnoty z rovnoměrného rozdělení na intervalu  $\langle 0,1 \rangle$ . Dosazením  $u_i$  do kvantilové funkce  $x = Q(u)$  získáme uspořádané hodnoty  $x_{(i)}$ , které zaručují neklesající tvar funkce  $Q(u)$ . Kvantilová funkce tedy poskytuje jednoduchý způsob simulace hodnot toho rozdělení, pro které je explicitní funkcí  $p$ .

V mnohých aplikacích metody simulace pomocí kvantilových funkcí se pozornost soustřeďuje hlavně na extrémní pozorování z konce rozdělení. Kvantilová funkce má kromě

jiných také výhodnou vlastnost, že umožňuje simulovat jen nejvyšší hodnoty, bez toho abychom museli simulovat střední hodnoty náhodné proměnné.

Předpokládáme pravý konec rozdělení pravděpodobnosti. V předchozím textu již bylo ukázáno, že rozdělení pravděpodobnosti nejvyšších pozorovaných hodnot můžeme vyjádřit ve tvaru  $Q(p^{1/n})$ . Tedy nejvyšší pozorovanou hodnotu můžeme simulovat jako  $x_{(n)} = Q(u_{(n)})$ , kde  $u_{(n)} = v_n^{1/n}$ , přičemž  $v_n$  je náhodné číslo z intervalu  $\langle 0,1 \rangle$ . Nyní tedy definujeme posloupnost transformovaných proměnných ve tvaru:

$$\begin{aligned} u_{(n)} &= v_n^{1/n} \\ u_{(n-1)} &= (v_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \cdot u_{(n)} \\ u_{(n-2)} &= (v_{n-2})^{\frac{1}{n-2}} \cdot u_{(n-1)} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.16}$$

přičemž  $v_i$ , pro  $i = n, n-1, n-2, \dots$ , je množina jednoduše vygenerovaných hodnot jako náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení, potom podle její definice tvoří hodnoty  $u_{(i)}$ , pro  $i = n, n-1, n-2, \dots$ , rostoucí posloupnost  $u_{(i-1)} < u_{(i)}$ .

Hodnoty  $u_{(i)}$  tvoří uspořádanou posloupnost hodnot z rovnoměrného rozdělení. Pokud získáme jednu hodnotu  $u_{(n)}$ , vztah pro simulaci má jednotnou formu:

$$u_{(m)} = (v_m)^{\frac{1}{m}} \cdot u_{(m+1)}, \quad \text{pro } m = n-1, n-2, \dots \tag{5.17}$$

Pořadové statistiky pro nejvyšší pozorování proměnné  $X$  jsou potom simulované jako

$$\begin{aligned} x_{(n)} &= Q(u_{(n)}) \\ x_{(n-1)} &= Q(u_{(n-1)}) \\ x_{(n-2)} &= Q(u_{(n-2)}) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.18}$$

Ve většině případů simulací se generuje  $m$  vzorků s  $n$  pozorováními a induktivní analýza,  $m$ -krát opakovaná, poskytuje obraz jejich chování. Někdy se využívá alternativní technika, pomocí které generujeme jen jeden výběr ideálních pozorování, který nazýváme *profil*. Takové ideální pozorování můžeme získat například použitím mediánových hodnot, pro  $M_r$ , pro  $r = 1, 2, \dots, n$ . [20] [21]

### 5.3 Ukázka aplikace

Cílem praktické ukázky je nasimulovat 10 nejvyšších škod z údajů o výšce škody v pojištění odpovědnosti z provozu motorového vozidla. Ve třetí kapitole jsme ověřili, že tyto data mohou mít Paretovo rozdělení pravděpodobnosti v americkém tvaru s distribuční funkcí  $F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha$ . Parametry odhadnuté pomocí metody maximální věrohodnosti mají hodnoty  $\hat{\alpha} = 2,03625$  a  $\hat{\lambda} = 45464,74$ .

Kvantilová funkce Paretova rozdělení je vyjádřena jako inverzní funkce k distribuční funkci vztahem [17]

$$x_u = Q(u) = \lambda(1 - u)^{-\frac{1}{\alpha}} - \lambda \quad (5.19)$$

Nejprve pomocí tabulkového procesoru MS Excel bylo vygenerováno 10 náhodných čísel  $v$  z intervalu  $\langle 0,1 \rangle$ . Následně dosazením do vztahu (5.16) jsme získaly hodnoty  $u$ . Posledním krokem výpočtu bylo vypočítat hodnoty  $Q(u)$ , vyjádřené vztahem (5.19). Postup výpočtu je znázorněn v Tabulce 10.

**Tabulka 10 Simulace deseti nejvyšších škod pomocí kvantilové funkce**

$v$	$n$	$1/n$	$v^{1/n}$	$u$	$Q(u)=\lambda*(1-u)^{-1/\alpha}-\lambda$
0,66101908	1236	0,00080906	0,99966513	0,99966513	2 268 202 Kč
0,25243700	1235	0,00080972	0,99888597	0,99855147	1 081 574 Kč
0,85395779	1234	0,00081037	0,99987207	0,99842373	1 035 755 Kč
0,41804030	1233	0,00081103	0,99929289	0,99771773	856 058 Kč
0,87703940	1232	0,00081169	0,99989351	0,99761148	836 136 Kč
0,09837203	1231	0,00081235	0,99811794	0,99573392	617 612 Kč
0,60882104	1230	0,00081301	0,99959664	0,99533228	588 951 Kč
0,42361985	1229	0,00081367	0,99930137	0,99463691	547 127 Kč
0,40769938	1228	0,00081433	0,99926963	0,99391045	511 287 Kč
0,52947797	1227	0,00081500	0,99948191	0,99339552	489 529 Kč

*Zdroj: vlastní výpočet v MS Excel*

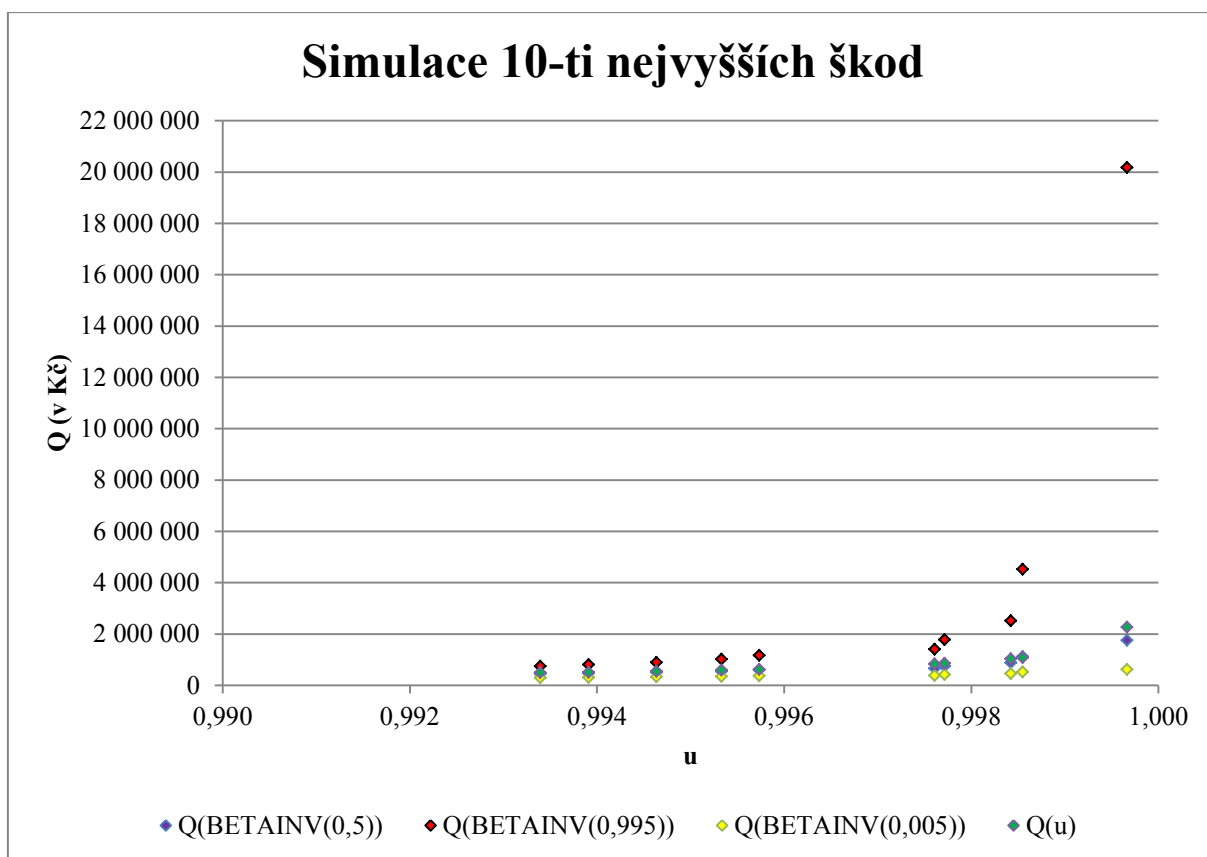
Následně jsou pomocí vztahu (5.12) a využití funkce „BETAINV“, která je součástí tabulkového procesoru MS Excel, vypočítány medián  $x_{0,5}$  a kvantily  $x_{0,005}$  a  $x_{0,995}$ , které ohraničují interval, z kterého jsou hodnoty příslušné pořádkové statistiky. Hodnoty jsou zobrazeny v Tabulce 11.

Tabulka 11 Medián  $x_{0,5}$  a kvantily  $x_{0,005}$  a  $x_{0,995}$  pořádkových statistik

$Q(\text{BETAINV}(0,5;r;n-r+1))$	$Q(\text{BETAINV}(0,995;r;n-r+1))$	$Q(\text{BETAINV}(0,005;r;n-r+1))$
1 750 884 Kč	20 168 843 Kč	616 743 Kč
1 118 071 Kč	4 523 897 Kč	515 544 Kč
880 161 Kč	2 509 891 Kč	457 768 Kč
746 657 Kč	1 777 056 Kč	417 832 Kč
658 379 Kč	1 399 653 Kč	387 659 Kč
594 460 Kč	1 168 478 Kč	363 625 Kč
545 420 Kč	1 011 444 Kč	343 794 Kč
506 253 Kč	897 224 Kč	327 008 Kč
474 034 Kč	810 025 Kč	312 523 Kč
446 920 Kč	741 014 Kč	299 833 Kč

Zdroj: vlastní výpočet v MS Excel

Předchozí hodnoty jsou znázorněny na Obrázku 19.



Obrázek 19 Grafické znázornění výsledků simulace extrémních škod

Zdroj: vlastní zpracování v MS Excel

Z předchozích tabulek a grafu je možné například vyčíst, že nejvyšší škoda s pravděpodobností 0,99 bude v intervalu od 616 743 Kč do 20 168 843 Kč a medián nejvyšší škody bude 1 750 884 Kč.

Simulace extrémních hodnot je každé portfolio pojistných smluv velmi důležité, výše extrémních škod velmi ovlivňuje ekonomiku pojišťovny např. správné nastavení výše pojistného a rezerv, které musí mít každá pojišťovna v takové výši, aby pokryla i tyto extrémní škody. Simulace má také obrovský význam z hlediska zajištění. Nejjednodušším způsobem je například zajištění nejvyšších škod LCR, při kterém se zajišťuje p nejvyšších škod, nebo v zajištění ECOMOR, při kterém zajistitel hradí škody, které přesáhly p-tou nejvyšší škodu.

## ZÁVĚR

V diplomové práci jsou uvedena základní teoretická a aplikační východiska pravděpodobnostního modelování výše individuálních škod.

V souladu s cíli definovanými v úvodu je práce zaměřena, kromě teoretického vysvětlení jednotlivých kroků modelování, na praktické ukázky využití Paretova rozdělení v pojištění a zajištění s využitím softwarových programů MS Excel a Statgraphic Centurion XV. Pro aplikace a výpočty byly použity data získané od jedné nejmenované pojišťovny, týkající se 1236 škod v rámci pojištění odpovědnosti z provozu motorového vozidla.

Paretovo rozdělení pravděpodobnosti je v modelování výše individuálních škod v pojišťovnách velmi často využíváno, protože pravděpodobnost pravého konce rozdělení konverguje k nule pomaleji, než ostatní typy rozdělení pravděpodobnosti. Z tohoto důvodu je možné pomocí Paretova rozdělení pravděpodobnosti odhadnout pravděpodobnost velmi vysokých škod. Znalost pravděpodobnosti těchto vysokých škod je pro pojišťovny velice důležitá, protože se od nich odvíjí výše pojistného.

Pro modelování výše individuálních škod pomocí Paretova rozdělení byly nejprve odhadnuty parametry tohoto rozdělení pomocí metody momentů a metody maximální věrohodnosti. Ze znalosti teorie obou metod odhadů parametrů zjistíme, že odhady získané metodou maximální věrohodnosti jsou přesnější a spolehlivější, proto jsou tyto odhady využity ve všech dalších výpočtech. Pomocí testů dobré shody (Pearsonův  $\chi^2$  test a Kolmogorovův-Smirnovův test) byla ověřena shoda teoretického a empirického rozdělení pravděpodobnosti. Jelikož Paretovo rozdělení má dva různé tvary vyjádření – evropský a americký tvar, dostali jsme rozdílné výsledky testů dobré shody. Při použití amerického tvaru Paretova rozdělení, které je vhodné na modelaci celého intervalu škod, nedošlo v obou testech k zamítnutí hypotézy, že škody mají Paretovo rozdělení v americkém tvaru. Opačný výsledek byl zjištěn při použití evropského tvaru Paretova rozdělení, který je naopak vhodný pro modelaci nejvyšších hodnot, kde oba testy zamítly danou hypotézu. S využitím statistického programu Statgraphic Centurion XV, který obsahuje 45 různých typů rozdělení, bylo zjištěno, že nejlepší výsledky rozdělení pravděpodobnosti nám dává loglogistické rozdělení pravděpodobnosti. Pokud však vezmeme pouze škody nad 300 tis. Kč, hypotéza, že škody mají evropský tvar Paretova rozdělení, byla přijata s P-hodnotou přes 95%. Tento výsledek potvrdil předpoklad, že Paretovo rozdělení v evropském tvaru je skutečně nejvhodnější na modelování vysokých škod.

Paretovo rozdělení má využití i v zajištění, kde se používá jako metoda pro stanovení nettozajistného v neproporcionálním zajištění. Po teoretickém výkladu, který je nutný pro pochopení celé problematiky, bylo vypočítáno nettozajistné WXL/R zajištění pomocí modelu založeném na Paretově rozdělení pravděpodobnosti.

Závěrečná část je věnována modelování a simulaci extrémních škod. Jak již bylo řečeno, Paretovo rozdělení je nejvhodnější pro modelování nejvyšších škod. Po podrobném výkladu simulace pomocí kvantilových funkcí byly odhadnuty nejvyšší škody, které mohou s velmi vysokou pravděpodobností nastat. Znalost těchto nejvyšších škod je významná v zajištění ECOMOR nebo LCR.

Hledání nejvhodnějšího modelu rozdělení pravděpodobnosti počtu a výšky individuálních škod je nekonečným procesem v každé pojišťovně. V praxi se často využívají různé kombinace rozdělení, protože žádné rozdělení přesně nekopíruje skutečná data. V praxi dochází k různým výkyvům (např. spoluúčast pojištěného), které mají právě za následek odchýlení od teoretického rozdělení pravděpodobnosti. Výstupy ze všech modelů jsou důležité pro stanovení pojistného, pro výběr typu zajištění, pro stanovení pojistně-technických rezerv, řízení likvidity, apod.



## POUŽITÁ LITERATURA

- [1] TSE, Yiu Kuen. *Nonlife actuarial models: theory, methods and evaluation*. New York: Cambridge University Press, 2009, xv, 524 p. ISBN 05-217-6465-3.
- [2] DUCHÁČKOVÁ, Eva. *Principy pojištění a pojišťovnictví*. 3. vyd. - přeprac. Praha: Ekopress, c2009, 224 s. ISBN 978-80-86929-51-4.
- [3] MAJTÁNOVÁ, Anna. *Poist'ovnictvo: teória a prax = Pojišť'ovnictví : teorie a praxe*. 1. vyd. Praha: Ekopress, 2006, 288 s. ISBN 80-869-2919-1.
- [4] ARLTOVÁ, Markéta a Josef ARLT. Grafické metody analýzy ekonomických časových řad. In: *Statistika*. Praha: Český statistický úřad, 1995, str. 483 - 493. ISSN 0322-788x.
- [5] OTYEPKA, Michal, Pavel BANÁŠ a Eva OTYEPKOVÁ. *Základy zpracování dat*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013, v, 90 s. ISBN 978-80-244-3636-4. Dostupné z: <http://fch.upol.cz/skripta/zzd/chemo/main.pdf>
- [6] KUBANOVÁ, Jana. *Statistické metody pro ekonomickou a technickou praxi*. 3. doplněné vydání. Bratislava: Stasis, 2008. ISBN 978-80-85659-47-4.
- [7] HEBÁK, Petr. *Vícerozměrné statistické metody (1)*. 1. vyd. Informatorium, 2004, 239 s. ISBN 80-733-3025-3.
- [8] HINDLS, Richard, Stanislava HRONOVÁ, Jan SEGER a Jakub FISCHER. *Statistika pro ekonomy*. 8. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007, 415 s. ISBN 978-80-86946-43-6.
- [9] PACÁKOVÁ, Viera. *Aplikovaná poistná štatistika*. 3., preprac. a dopl. vyd. Bratislava: Iura Edition, 2004, 261 s. ISBN 80-807-8004-8.
- [10] BOLAND, Philip J. *Statistical and probabilistic methods in actuarial science*. Boca Raton, FL: Chapman, c2007, xvi, 351 p. Interdisciplinary statistics. ISBN 15-848-8695-1.
- [11] Critical values for the Kolmogorov-Smirnov Test for goodness of fit. *Technische Universität Kaiserslautern* [online]. [cit. 2014-04-17]. Dostupné z: [http://www.mathematik.uni-kl.de/~schwaar/Exercises/Tabellen/table\\_kolmogorov.pdf](http://www.mathematik.uni-kl.de/~schwaar/Exercises/Tabellen/table_kolmogorov.pdf)
- [12] KARLOVSKÝ, Lukáš. *Pareto Vilfredo* [online]. 2007 [cit. 2014-04-15]. Dostupné z: [http://fek.zcu.cz/kalendarium/EKONOM/Pareto\\_v.pdf](http://fek.zcu.cz/kalendarium/EKONOM/Pareto_v.pdf). Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta ekonomická.

- [13] LINDA, Bohdan. *Pravděpodobnost*. Pardubice: Univerzita Pardubice, Fakulta ekonomicko-správní, 2011, 167 s. ISBN 978-80-7395-430-7.
- [14] HOGG, Robert V a Stuart A KLUGMAN. *Loss distributions*. New York: Wiley, c1984, x, 235 p. ISBN 04-718-7929-0.
- [15] CIPRA, Tomáš. *Finanční a pojistné vzorce*. Praha: Grada, 2006, 374 s. ISBN 80-247-1633-X.
- [16] CIPRA, Tomáš. *Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví*. 1. vyd. Praha: Grada, 2004. ISBN 80-247-0838-8.
- [17] PACÁKOVÁ, Viera a Ján GOGOLA. Paretovo rozdelenie v poistení a zaistení. In *Finanční řízení podniku a finančních institucí*. Ostrava: Vysoká škola báňská-Technická univerzita Ostrava, 2013. s. 648-657. ISBN 978-80-248-3172-5.
- [18] Significant natural catastrophes 1980 - 2012: 10 costliest events worldwide ordered by overall losses. MÜNCHENER RÜCKVERSICHERUNGS-GESELLSCHAFT, Geo Risks Research, NatCatSERVICE. *Munich RE* [online]. © 2013 [cit. 2014-04-08]. Dostupné z: [http://www.munichre.com/site/corporate/get/documents\\_E486825419/mr/assetpool.shared/Documents/0\\_Corporate%20Website/2\\_Reinsurance/Business/Non-Life/Georisks/NatCatService/\\_Significant%20Natural%20Catastrophes/2012/natcatservice\\_significant\\_eco\\_en.pdf](http://www.munichre.com/site/corporate/get/documents_E486825419/mr/assetpool.shared/Documents/0_Corporate%20Website/2_Reinsurance/Business/Non-Life/Georisks/NatCatService/_Significant%20Natural%20Catastrophes/2012/natcatservice_significant_eco_en.pdf)
- [19] Natural catastrophes worldwide 1980 – 2012. MÜNCHENER RÜCKVERSICHERUNGS-GESELLSCHAFT, Geo Risks Research, NatCatSERVICE. *Munich RE* [online]. © 2013 [cit. 2014-04-08]. Dostupné z: [https://www.munichre.com/touch/site/touchnaturalhazards/get/documents\\_E-2127666060/mr/assetpool.shared/Documents/0\\_Corporate%20Website/\\_NatCatService/Focus\\_Analyses/1980\\_2012\\_paket\\_welt\\_fokus\\_analysen\\_touch\\_en.pdf](https://www.munichre.com/touch/site/touchnaturalhazards/get/documents_E-2127666060/mr/assetpool.shared/Documents/0_Corporate%20Website/_NatCatService/Focus_Analyses/1980_2012_paket_welt_fokus_analysen_touch_en.pdf)
- [20] SIPKOVÁ, Ľubica a Eva SODOMOVÁ. *Modelovanie kvantilovými funkciami*. Bratislava: EKONÓM, 2007. ISBN 978-80-225-2346-2.
- [21] PACÁKOVÁ, Viera a Bohdan LINDA. E M. *Ekonomie a Management: Economics and Management. Simulations of Extreme Losses in Non-Life Insurance*. 2009, č. 4. DOI: 1212-3609. Dostupné z: [http://www.ekonomie-management.cz/download/1331826735\\_d523/10\\_pacakova\\_linda.pdf](http://www.ekonomie-management.cz/download/1331826735_d523/10_pacakova_linda.pdf)

## SEZNAM TABULEK

Tabulka 1 Vztahy pro výpočet kritické hodnoty Kolmogorovova-Smirnovova testu.....	28
Tabulka 2 Základní charakteristiky souboru výšky škod .....	32
Tabulka 3 Ukázka výpočtu parametrů Paretova rozdělení metodou maximální věrohodnosti	36
Tabulka 4 Paersonův $\chi^2$ test dobré shody .....	38
Tabulka 5 Kolmogorův-Smirnovův test.....	39
Tabulka 6 Výsledky testů dobré shody v programu Statgraphic Centurion XV .....	40
Tabulka 7 Výsledky testů dobré shody v programu Statgraphic Centurion XV pro škody vyšší než 100 tis. a 300 tis. Kč.....	42
Tabulka 8 Pomocný výpočet pro odhad parametru $b$ .....	53
Tabulka 9 Deset nejvyšších škod v letech 1980-2012 v důsledku přírodní katastrofy .....	54
Tabulka 10 Simulace deseti nejvyšších škod pomocí kvantilové funkce.....	60
Tabulka 11 Medián $x_{0,5}$ a kvantily $x_{0,005}$ a $x_{0,995}$ pořádkových statistik.....	61

## SEZNAM ILUSTRACÍ

Obrázek 1 Distribuční funkce $F(x)$ Paretova rozdělení .....	11
Obrázek 2 Bodový graf výšky škod .....	21
Obrázek 3 Histogram výšky škod.....	22
Obrázek 4 Kvantil-kvantilový graf Lognormálního rozdělení výše škod .....	22
Obrázek 5 Vymezení oboru hodnot pro testovací kritérium $t$ .....	25
Obrázek 6 Grafický návod pro $\chi^2$ test dobré shody .....	27
Obrázek 7 Hustota pravděpodobnosti evropské verze Paretova rozdělení.....	31
Obrázek 8 Bodový graf výše škod.....	33
Obrázek 9 Histogram výše škod.....	33
Obrázek 10 Histogram výše škody s proložením loglogistického a lognormálního rozdělení	41
Obrázek 11 Q-Q graf výše škody a loglogistického rozdělení.....	41
Obrázek 12 Kvantilový graf výše škod nad 300 tis. Kč a evropské verze Paretova rozdělení	42
Obrázek 13 Princip zajištění.....	44
Obrázek 14 Příklad WXL/R zajištění.....	46
Obrázek 15 Příklad WXL/E zajištění .....	48
Obrázek 16 Zajištění ECOMOR(4).....	49
Obrázek 17 Zajištění LCR(3) .....	50
Obrázek 18 Vývoj přírodních katastrof od roku 1980 do 2012 (v mld. USD).....	55
Obrázek 19 Grafické znázornění výsledků simulace extrémních škod.....	61