PRAVDĚPODOBNOST RUINOVÁNÍ PŘI ZAJIŠTĚNÍ

RUIN PROBABILITY IN REINSURANCE

Ján Gogola

Abstract: *In actuarial science ruin theory uses mathematical models to describe an insurer's vulnerability to ruin. Theoretical foundation of ruin theory describes an insurance company who experiences two opposing cash flows: incoming cash premiums and outgoing claims. The insurer's surplus at any future time is a random variable since its value depends on premiums and claims. The insurer want to keep the probability of ruin as small as possible, or at least below a predetermined bound. Lundberg's inequality provides an upper bound for the probability of ruin in infinite time and is one of the most famous results in ruin theory. One of the options for an insurer who wishes to reduce the probability of ruin is to effect reinsurance. We shall consider two kinds of reinsurance arrangement: proportional and excess of loss reinsurance. We could consider a reinsurance arrangement (from an insurer point of view) to be optimal if it minimizes the probability of ruin. The goal of this paper is to illustrate how changes in the premium loading factor (used by insurer and reinsurer) affect the probability of ruin in both kind of reinsurance. We find also the optimal type of reinsurance under certain conditions.*

Keywords: *Reinsurance, Ruin theory, Proportional and Excess of Loss Reinsurance, Adjustment coefficient, Retention level, Compound Poisson process.*

JEL Classification*: C18, G22.*

Úvod

Teorie ruinování se zabývá modely kolektivního rizika v delším období a slouží na posouzení náhodných výkyvů hodnoty přebytku pojišťovny v časovém intervalu několik let. Ruinováním pojišťovny budeme rozumět skutečnost, že v určitém čase přebytek pojišťovny U poprvé klesne do záporných hodnot. [5]

Zajištění je opětovné pojištění části rizika. Přímý pojistitel (anebo prvopojistitel) podstupuje část svého rizika do zajišťovny. Tu část rizika, kterou si ponechává, se nazývá vlastní vrub. Pojistitel za přesun části rizika platí zajistné. Zajištěním se pojistitel zbavuje části rizika, které je vyšší než může pojistit nebo ponechat na vlastní vrub. Zajištěním pojistitel dosahuje větší homogenitu pojistného kmene.

Z hlediska způsobu dělení pojistného plnění mezi pojistitele a zajišťovnu dělíme zajištění na proporcionální a neproporcionální.

Cílem příspěvku je prozkoumat, jaký vliv mají vybrané formy zajištění a jejich rozsah na pravděpodobnost ruinování.

1 Formulace problematiky

Nechť náhodná proměnná X představuje hodnotu individuálního pojistného plnění. Předpokládejme, že existují její momenty $m_1 = E(X)$ a $m_2 = E(X^2)$, které jsou konečné.

Při proporcionálním zajištění se pojistné plnění dělí mezi pojistitele a zajišťovnu v předem sjednaném poměru α, zvaného podíl na vlastní vrub přímého pojistitele (ang. quota share). Pojistitel platí fixní podíl α z každého pojistného plnění, bez ohledu na její výšku. Pak ta část, kterou hradí pojistitel, má hodnotu

$$Y = \alpha \cdot X. \tag{1}$$

Zajišťovna hradí zbývající část 1-α z každého pojistného plnění tj. její plnění

$$Z = (1-\alpha) \cdot X. \tag{2}$$

Neproporcionální zajištění škodního nadměrku (ang. excess of loss) je založené na dohodě mezi pojistitelem a zajišťovnou, podle níž zajišťovna vyplatí pojistiteli plnění přesahující předem sjednanou sumu. Tato suma se nazývá maximální úroveň M na vlastní vrub pojistitele anebo priorita. Pravděpodobnost, že výška plnění je vyšší, než priorita je obecně malá.

Průběh některých číselných charakteristik v závislosti od priority můžeme najít v [3].

Při neproporcionálním zajištění pojistitel hradí pojistná plnění v celé výši, když hodnota plnění nepřesáhne vlastní vrub M. Při pojistném plnění větší než M, pojistitel hradí sumu M a zbytek zaplatí zajišťovna.

Potom pro plnění pojistitele platí: $Y = \min\{X;M\}$, (3)
a pro plnění zajišťovny: $Z = \max\{0; X-M\}$. (4)
Obecně platí $X = Y + Z$.

2 Metody

Přebytek (surplus) pojistitele $U(t)$ v čase t lze vyjádřit ve tvaru

$$U(t) = U_0 + c \cdot t - S(t), \tag{5}$$

kde
U_0 je počáteční hodnota rezervního fondu nebo počáteční kapitál pojistitele,
c je konstantní míra intenzity příjmu pojistného. Předpokládáme spojitý příjem pojistného v čase,
$S(t)$ je výška celkového pojistného plnění v čase t.

Přebytek pojistitele je náhodná proměnná, jejíž hodnota závisí od výšky plnění. V práci předpokládáme, že proces celkových pojistných plnění za jednotku času je složený Poissonův proces s parametrem λ.

Pravděpodobnost ruinování $\Psi(U)$ v nekonečném časovém horizontu definujeme jako $\Psi(U) = P[U(t) < 0]$ pro nějaké $0 < t < +\infty$.

Jedním z nejdůležitějších výsledků teorie ruinování je Lundbergova nerovnost [2], [5], [6], umožňující shora omezit pravděpodobnost ruinování pojišťovny v nekonečném časovém horizontu.

Podle této nerovnosti pro každou hodnotu U počátečního rezervního fondu pojišťovny platí

$$\Psi(U) \le e^{-R \cdot U}. \tag{6}$$

Přitom R je parametr, známý jako koeficient úpravy, resp. koeficient korekce (ang. adjustment coefficient [2]). Jeho hodnota závisí na rozdělení individuálních pojistných plnění a na intenzitě přijímání pojistného. R můžeme považovat za míru rizika.

V pojišťovnictví se pravá strana Lundbergovy nerovnosti používá jako aproximace při stanovení pravděpodobnosti ruinování pojišťovny, která se snižuje s rostoucí hodnotou koeficientu úpravy R.

Proto v našem příspěvku budeme maximalizovat koeficient úpravy R, protože tím minimalizujeme Lundbergovu horní mez pro pravděpodobnost ruinování.

Koeficient úpravy pro složený Poissonův proces definujeme jako jediný kladný kořen rovnice

$$\lambda + c \cdot R = \lambda \cdot M_X(R), \tag{7}$$

kde $M_X(R)$ je momentová vytvářející funkce v bodě R.

Rovnice (7) je implicitní rovnicí pro vyjádření koeficientu R. Pro některé typy rozdělení $F(x)$ individuálních pojistných plnění lze najít explicitní vyjádření, pro některé (většinu) jen numerické (přibližné) řešení.

V případě, kdy individuální pojistná plnění mají exponenciální rozdělení s parametrem δ, koeficient úpravy R má jednoduché vyjádření $R = \dfrac{\delta \cdot \theta}{1+\theta}$,

ze kterého vyplývá, že hodnota R závisí jenom na rizikové přirážce θ pojistitele a na parametru δ exponenciálního rozdělení.

Když individuální pojistné plnění má exponenciální rozdělení $Exp(\delta)$, je možné odvodit i jednoduchý a užitečný vztah pro pravděpodobnost ruinování $\Psi(U)$ ve tvaru

$$\Psi(U) = \frac{1}{1+\theta} \cdot e^{-\frac{\delta \cdot \theta}{1+\theta} \cdot U}. \tag{8}$$

Odvození tohoto vztahu je možné najít v [4].

3 Rozbor problému

Zajištění je jednou z možností, jak může pojišťovna minimalizovat pravděpodobnost ruinování maximalizací koeficientu úpravy R.

Předpokládáme, že snížení variability pojistných plnění zvýší jistotu pojistitele, a tím se sníží i pravděpodobnost ruinování. Z tohoto pohledu se bude zajišťovací smlouva, resp. rozsah zajištění považovat za optimální jestli bude vést k minimalizaci pravděpodobnosti ruinování $\Psi(U)$. Protože je obecně těžké najít její přesné řešení, pokud známe vztah mezi $\Psi(U)$ a R, budeme maximalizovat hodnotu R.

Budeme uvažovat dva druhy zajištění:

- Proporcionální zajištění (proportional reinsurance),
- zajištění škodního nadměrku (excess of loss reinsurance).

3.1 Maximalizace koeficientu úpravy *R* při proporcionálním zajištění

Předpokládejme, že pojišťovna uzavřela proporcionální zajištění pojistných plnění s podílem α na vlastní vrub.

Dále předpokládejme příjem pojistného c_p za jednotku času (např. rok) před zajištěním v tvaru

$$c_p = (1+\theta)\cdot\lambda\cdot m_1, \tag{9}$$

což představuje průměrné celkové pojistné plnění za jednotku času pro složený Poissonův proces s parametrem λ a s rizikovou přirážkou θ.

Budeme předpokládat, že zajistné se počítá podle vztahu

$$c_z = (1+\xi)\cdot(1-\alpha)\cdot\lambda\cdot m_1, \tag{10}$$

kde ξ je riziková přirážka zajišťovatele.

Protože zajišťovna platí podíl 1-α z každého pojistného plnění, výraz $E(Z) = (1-\alpha)\cdot\lambda\cdot m_1$, představuje očekávané plnění zajišťovny za jednotku času. Z toho pro čistý příjem pojistného přímého pojistitele po zajištění za jednotku času dostáváme vztah

$$c^* = \left[(1+\theta)-(1+\xi)\cdot(1-\alpha)\right]\cdot\lambda\cdot m_1. \tag{11}$$

Dále budeme předpokládat, že $\xi \geq \theta$. V opačném případě by bylo možné pro pojistitele přesunout celé riziko na zajišťovnu a vydělat jistý zisk. Například kdyby $\theta = 0{,}2$ a $\xi = 0{,}1$, tak by pojistitel přijal pojistné ve výšce $1{,}2\cdot\lambda\cdot m_1$. Pak by zajistil celé riziko za zajistné $1{,}1\cdot\lambda\cdot m_1$ a ponechal si jistý zisk $0{,}1\cdot\lambda\cdot m_1$.

Aby byl čistý příjem pojistného pro přímého pojistitele po zajištění kladný, musí platit nerovnost

$$(1+\theta) > (1+\xi)\cdot(1-\alpha) \quad \text{resp.} \quad \alpha > \frac{\xi-\theta}{1+\xi}. \tag{12}$$

Existuje však značný tlak na pojistitele, neboť jeho čistý příjem za jednotku času po zajištění $\alpha\cdot\lambda\cdot m_1$ musí být vyšší než celkové očekávané plnění za jednotku času. Proto požadujeme, aby platila nerovnost $(1+\theta)-(1+\xi)\cdot(1-\alpha) > \alpha$, aneb po úpravě

$$\alpha > 1-\frac{\theta}{\xi} \geq 0. \tag{13}$$

Poslední nerovnost stanovuje minimální hodnotu rizikové přirážky pojistitele, jelikož $1-\frac{\theta}{\xi} \geq \frac{\xi-\theta}{1+\xi}$ pro $\theta \leq \xi$. Pokud jsou rizikové přirážky stejné, pak $\alpha > 0$ a v tom případě může vlastní vrub α nabývat jakékoliv hodnotu z intervalu (0, 1⟩. Pokud je však $\theta < \xi$, pak pojistitel si musí ponechat část rizika.

Určeme koeficient úpravy R jako funkci podílu na vlastní vrub α, pokud pojistné plnění má exponenciální rozdělení s distribuční funkcí $F(x) = 1-e^{-0{,}1\cdot x}$ a pojišťovna i zajišťovna používají stejnou rizikovou přirážku tj. $\theta = \xi$.

Rozdělení individuálních plnění pojistitele po zajištění je exponenciální s parametrem $\frac{0{,}1}{\alpha}$. Vyplývá to z toho, že když pojistné plnění pojistitele je $Y = \alpha\cdot X$, pak

$$F(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \leq \frac{y}{\alpha}\right) = 1-e^{-\frac{0{,}1\cdot y}{\alpha}}.$$

Proto rovnice určující R má tvar $\lambda + c \cdot R = \lambda \cdot M_Y(R)$

$$\lambda + (1+\theta) \cdot \lambda \cdot 10 \cdot \alpha \cdot R = \lambda \cdot \int_0^\infty e^{Ry} \cdot \frac{0{,}1}{\alpha} \cdot e^{-\frac{0{,}1y}{\alpha}} \, \mathrm{d}y$$

$$1 + (1+\theta) \cdot 10 \cdot \alpha \cdot R = \frac{1}{1 - 10 \cdot \alpha \cdot R}$$

$$R = \frac{\theta}{(1+\theta) \cdot 10 \cdot \alpha}, \text{ pro } 0 < \alpha \le 1. \tag{14}$$

Vidíme, že R je klesající funkcí vlastního vrubu α. To znamená, že jestli α klesá, roste hodnota R, a tudíž klesá i pravděpodobnost ruinování pojišťovně $\Psi(U)$ v nekonečném časovém horizontu. Obráceně, když α roste, klesá hodnota R, a tudíž roste hodnota pravděpodobnosti ruinování $\Psi(U)$ v nekonečném časovém horizontu. To je přirozené, neboť čím menší vlastní rub, tím menší je riziko ruinování pro pojistitele.

Praktická ukázka 1. Uvažujme případ, kdy riziková přirážka pojistitele a zajišťovny se liší. Nechť je distribuční funkce pojistných plnění opět $F(x) = 1 - e^{-0{,}1 \cdot x}$, riziková přirážka pojistitele a zajišťovny jsou

a) $\theta = 0{,}1$ a $\xi = 0{,}15$,

b) $\theta = 0{,}1$ a $\xi = 0{,}30$.

a) Čistý příjem pojistitele po zajištění podle vztahu (11) je $c^* = (11{,}5 \cdot \alpha - 0{,}5) \cdot \lambda$.

Nerovnost (13) nám říká, že $\frac{1}{3} < \alpha \le 1$, tj. pojistitel si musí ponechat alespoň třetinu z každého plnění.

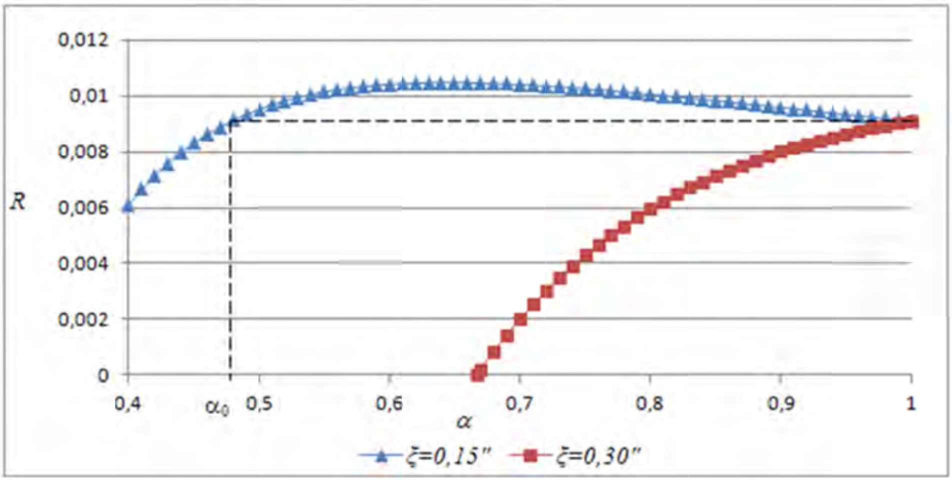
Rovnice, která definuje R, má tvar $\lambda + (11{,}5 \cdot \alpha - 0{,}5) \cdot \lambda \cdot R = \dfrac{\lambda}{1 - 10 \cdot \alpha \cdot R}$,

což vede k $R = \dfrac{1{,}5 \cdot \alpha - 0{,}5}{10 \cdot (11{,}5 \cdot \alpha^2 - 0{,}5 \cdot \alpha)}$ anebo $R = \dfrac{3 \cdot \alpha - 1}{230 \cdot \alpha^2 - 10 \cdot \alpha}$, pro $\frac{1}{3} < \alpha \le 1$.

Vidíme, že koeficient úpravy R opět závisí na hodnotě vlastního vrubu α.

Obr. 1. ukazuje koeficient úpravy R jako funkci podílu α na vlastní vrub přímého pojistitele pro hodnoty α z intervalu 0,4 až 1.

Obr. 1: Koeficient R jako funkce podílu α na vlastní vrub



Zdroj: vlastní zpracování

Z grafu vidíme, že existuje určité rozpětí hodnot α, $\alpha_0 < \alpha < 1$, takové, že pokud je podíl α na vlastní vrub z tohoto intervalu, pak koeficient R překročí hodnotu, kterou dosáhneme pro $\alpha = 1$, tedy pro případ pojištění bez zajištění.

V našem případě je $\alpha_0 = 0,4783$.

Najděme ještě takovou hodnotu α, která maximalizuje hodnotu R.

Derivací R podle α dostaneme $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{-690 \cdot \alpha^2 + 460 \cdot \alpha - 10}{(230 \cdot \alpha^2 - 10 \cdot \alpha)^2}$.

Maximální hodnotu R pak dostaneme, když $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\alpha} = 0$.

Kořeny rovnice jsou $\alpha_1 = 0,0225$ a $\alpha_2 = 0,6442$. Pak maximální úroveň má koeficient úpravy R pro hodnotu, která je z intervalu $\left(\frac{1}{3};1\right\rangle$, tj. $\alpha = 0,6442$.

Tedy pokud je naším cílem minimalizovat pravděpodobnost ruinování, pak optimální podíl na vlastní vrub pojistitele má hodnotu 0,6442.

Poznamenejme ještě, že optimální řešení v jednom smyslu nemusí být optimálním v jiném smyslu.

Například, jestli se pojistitel rozhodne nevyužít zajištění (ponechá si všechno riziko), pak jeho očekávaný zisk za jednotku času je $\theta \cdot \lambda \cdot m_1$. Konkrétně v našem příkladu $0,1 \cdot \lambda \cdot 10 = \lambda$.

Jestli se pojistitel rozhodne uskutečnit zajištění s podílem α = 0,6442 na vlastní vrub, pak jeho očekávaný zisk za jednotku času je $0,4663 \cdot \lambda$, tj. rozdíl příjmu $c^* = [(1+\theta) - (1+\xi) \cdot (1-\alpha)] \cdot \lambda \cdot m_1 = [(1+0,1) - (1+0,15) \cdot (1-0,6442)] \cdot \lambda \cdot 10 = 6,9079 \cdot \lambda$ a očekávaného plnění $\alpha \cdot \lambda \cdot m_1 = 6,442 \cdot \lambda$.

b) Čistý příjem pojistitele po zajištění podle vztahu (11) je $c^* = (13 \cdot \alpha - 2) \cdot \lambda$.

Nerovnost (13) nám říká, že $\frac{2}{3} < \alpha \le 1$, tj. pojistitel si musí ponechat alespoň dvě třetiny z každého plnění.

Rovnice, která definuje R, má tvar $\lambda + (13 \cdot \alpha - 2) \cdot \lambda \cdot R = \dfrac{\lambda}{1 - 10 \cdot \alpha \cdot R}$,

což vede k $R = \dfrac{3 \cdot \alpha - 2}{10 \cdot (13 \cdot \alpha^2 - 2 \cdot \alpha)}$, pro $\dfrac{2}{3} < \alpha \leq 1$.

Z Obr. 1. vidíme, že R je rostoucí funkcí α, pojistitel by si musel ponechat celé riziko, aby maximalizoval koeficient úpravy R. V tomto případě náklady na zajištění převážejí nad snížením ve variabilitě pojistného plnění.

3.2 Maximalizace koeficientu úpravy R při zajištění škodního nadměrku (excess of loss)

Při zajištění škodního nadměrku s maximální úrovní M na vlastní vrub pojistitele se zajistné pojišťovně za jednotku času rovná

$$c_z = (1 + \xi) \cdot \lambda \cdot E(Z), \tag{15}$$

kde ξ je riziková přirážka zajišťovatele a $Z = \max\{0, X - M\}$.

Pro pojistné plnění Y pojistitele platí $Y = \min\{X, M\}$.

Čistý příjem pojistného přímého pojistitele za jednotku času po zajištění je

$$c^* = (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot m_1 - (1 + \xi) \cdot \lambda \cdot E(Z). \tag{16}$$

Z těchto předpokladů získáme rovnici definující R ve tvaru

$$\lambda + c^* \cdot R = \lambda \cdot M_Y(R)$$

$$\lambda + c^* \cdot R = \lambda \cdot \left[\int_0^M e^{Rx} \cdot f(x)\, \mathrm{d}x + e^{R \cdot M} \cdot (1 - F(M)) \right]. \tag{17}$$

Praktická ukázka 2. Nechť individuální pojistné plnění X má rovnoměrné rozdělení na intervalu (0; 20), tedy $f(x) = 0{,}05$ pro $0 < x < 20$. Určíme koeficient úpravy R, když pojišťovna i zajišťovna používají stejnou rizikovou přirážku tj. $\theta = \xi = 0{,}1$.

Ze zadání vyplývá: $E(Z) = \int_M^\infty (x - M) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_M^{20} (x - M) \cdot 0{,}05\, \mathrm{d}x = 10 - M + 0{,}025 \cdot M^2$,

a $M_Y(R) = \int_0^M e^{R \cdot x} \cdot 0{,}05\, \mathrm{d}x + e^{R \cdot M}(1 - 0{,}05 \cdot M) = \dfrac{0{,}05}{R} \cdot \left(e^{R \cdot M} - 1\right) + e^{R \cdot M}(1 - 0{,}05 \cdot M)$.

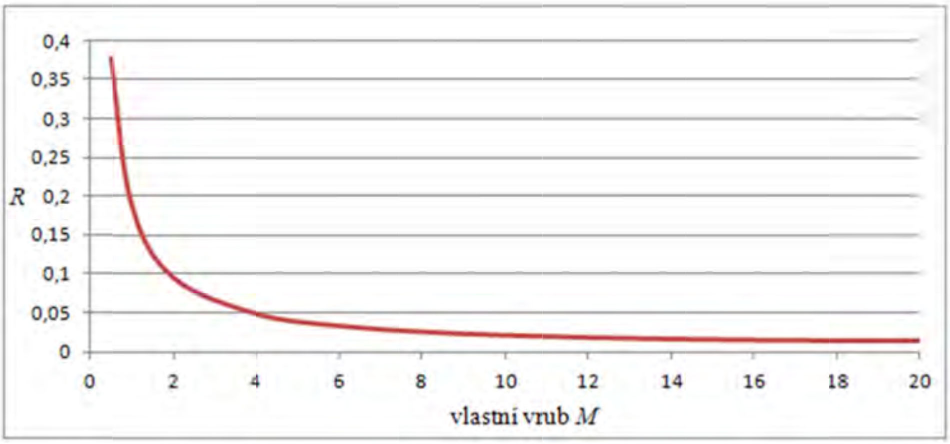
Pak dostaneme rovnici, která definuje R ve tvaru

$$\lambda + (1{,}1 \cdot \lambda \cdot M - 1{,}1 \cdot 0{,}025 \cdot \lambda \cdot M^2) \cdot R = \lambda \cdot \frac{0{,}05}{R} \cdot \left(e^{R \cdot M} - 1\right) + e^{R \cdot M}(1 - 0{,}05 \cdot M),$$

$$1 + (1{,}1 \cdot M - 1{,}1 \cdot 0{,}025 \cdot M^2) \cdot R = \frac{0{,}05}{R} \cdot \left(e^{R \cdot M} - 1\right) + e^{R \cdot M}(1 - 0{,}05 \cdot M). \tag{18}$$

Rovnici (18) můžeme spočítat numericky pomocí nástroje „Řešitel“ programu MS Excel [1]. Obr. 2. nám ukazuje koeficient úpravy R jako funkci M.

Obr. 2: R jako funkce M, pro $\theta = \xi = 0{,}1$.



Zdroj: vlastní zpracování

Vidíme, že každá úroveň M na vlastní vrub je možná, když se rizikové přirážky rovnají. R je klesající funkcí M, a $\lim_{\alpha \to 0^+} R(M) = +\infty$.

Praktická ukázka 3. Nechť platí stejné předpoklady jako v předcházejícím příkladu, jenom $\theta < \xi$. Určíme koeficient úpravy R, když

a) $\theta = 0{,}1$ a $\xi = 0{,}15$,

b) $\theta = 0{,}1$ a $\xi = 0{,}30$.

a) Pokud je $\theta = 0{,}1$ a $\xi = 0{,}15$, tak $c^* = 1{,}1 \cdot \lambda \cdot 10 - 1{,}15 \cdot \lambda \cdot (10 - M + 0{,}025 \cdot M^2)$ resp. po úpravě $c^* = -0{,}5 \cdot \lambda + 1{,}15 \cdot \lambda \cdot M - 1{,}15 \cdot 0{,}025 \cdot \lambda \cdot M^2$. Tato hodnota musí převýšit očekávané plnění pojistitele očištěné o zajištění.

Očekávané plnění pojistitele je:

$$\lambda \cdot E(X) - \lambda \cdot E(Z) = \lambda \cdot 10 - \lambda \cdot (10 - M + 0{,}025 \cdot M^2) = \lambda \cdot (M - 0{,}025 \cdot M^2).$$

Dostáváme nerovnici $-0{,}5 + 1{,}15 \cdot M - 1{,}15 \cdot 0{,}025 \cdot M^2 > M - 0.025 \cdot M^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \qquad 3 \cdot M^2 - 120 \cdot M + 400 < 0. \tag{19}$$

Řešením nerovnice (19) je interval (3,67; 36,33).

To znamená, že minimální úroveň M na vlastní vrub je 3,67.

Tedy stejně jako při proporcionálním zajištění s různými hodnotami θ a ξ, existuje jistá minimální úroveň, kterou si pojistitel musí ponechat.

b) Pokud je $\theta = 0{,}1$ a $\xi = 0{,}30$,
dostáváme nerovnici $-2 + 1{,}3 \cdot M - 1{,}3 \cdot 0{,}025 \cdot M^2 > M - 0.025 \cdot M^2 \Leftrightarrow$

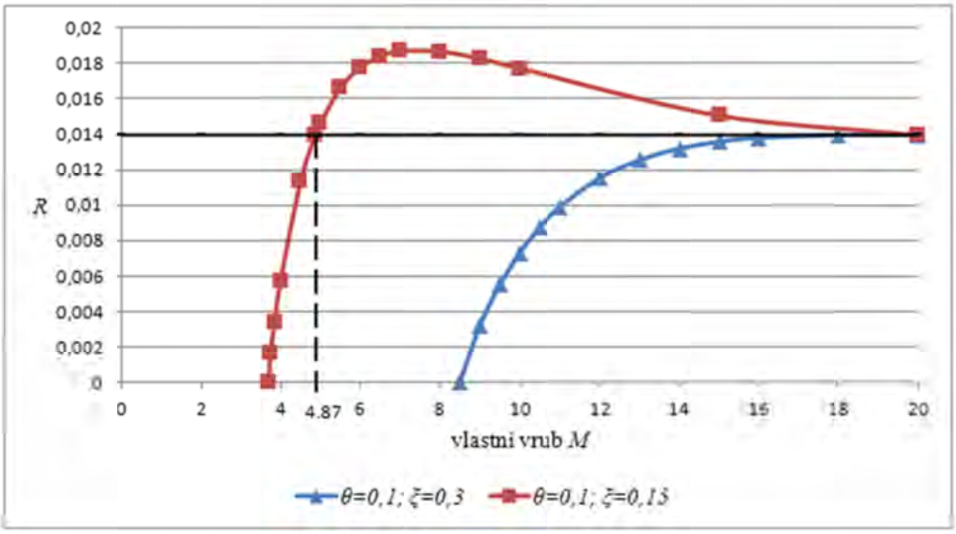
$$\Leftrightarrow \qquad 3 \cdot M^2 - 120 \cdot M + 800 < 0. \tag{20}$$

Řešením nerovnice (20) je interval (8,45; 31,55).

Tedy minimální úroveň M na vlastní vrub je 8,45.

Na Obr. 3. vidíme koeficient úpravy R jako funkci úrovně M na vlastní vrub pojistitele.

Obr. 3: Koeficient R jako funkce M.



Zdroj: vlastní zpracování

V případě bez zajištění, tedy pro M = 20, má koeficient úpravy hodnotu 0,1397 (bez ohledu na rizikovou přirážku zajišťovny).

Na Obr. 3 můžeme vidět, že pro ξ = 0,15 platí $R(M) > R(20)$, když $4{,}87 < M < 20$ a $R(M) < R(20)$, když $3{,}67 < M < 4{,}87$.

Pro ξ = 0,3 platí $R(M) < R(20)$ pro všechna přípustná M.

Proto jestliže ξ = 0,15 a θ = 0,1, přímý pojistitel může zvýšit hodnotu koeficientu úpravy R efektivním zajištěním tak, že úroveň M na vlastní vrub zvolí vyšší než 4,87.

V případě, že ξ = 0,30 a θ = 0,1, pojistitel by si musel ponechat celé riziko, aby maximalizoval koeficient úpravy R.

4 Diskuze

Zamysleme se ještě nad tím, pokud předpokládáme stejné podmínky pro oba typy zajištění, jaké jsou pravděpodobnosti ruinování pojistitele.

Aby bylo porovnání možné, předpokládejme, že očekávané pojistné plnění pojistitele při obou typech zajištění se rovnají, tj.

$$E[\min\{X;M\}] = E[\alpha \cdot X]. \qquad (21)$$

Uvažujme pojistné plnění s distribuční funkcí $F(x) = 1 - e^{-0{,}1 \cdot x}$ a rizikovou přirážku pojistitele θ = 0,1 a rizikovou přirážku zajišťovny ξ = 0,15 (stejně jako v Příkladu 1.). Dále předpokládejme, že pojistitel uzavřel proporcionální zajištění s podílem α = 0,6 na vlastní vrub.

Pak $E(Y) = E(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot E(X) = 0{,}6 \cdot 10 = 6$.

Potom $c^* = [(1+\theta) - (1+\xi)\cdot(1-\alpha)] \cdot \lambda \cdot m_1$ = $(1{,}1 - 1{,}15 \cdot 0{,}4) \cdot \lambda \cdot 10$ = $6{,}4 \cdot \lambda$.

Rovnice pro výpočet R má tvar: $\lambda + c^* \cdot R = \lambda \cdot M_Y(R)$,

$$\lambda + 6{,}4 \cdot \lambda \cdot R = \lambda \cdot \frac{1}{1 - 6 \cdot R},$$

$$R = 0{,}01042.$$

Uvažujme teď zajištění škodního nadměrku s maximální úrovní M na vlastní vrub pojistitele. Hodnota vlastního vrubu M musí být taková, aby očekávaná hodnota pojistného plnění pojistitele po zajištění byla 6 (stejná hodnota jako při proporcionálním zajištění).

Potom $$E(Y) = \int_0^M x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x + M \cdot (1 - F(M)) = 6,$$

$$10 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot M}) = 6,$$

$$e^{-0,1 \cdot M} = 0,4,$$

$$M = 9,163.$$

Když teď předpokládáme, že $\theta = 0,1$ a $\xi = 0,15$, tak pro rovnici na výpočet R dostáváme:

$$\lambda + c^* \cdot R = \lambda \cdot \left(\int_0^M e^{R \cdot x} \cdot 0,1 \cdot e^{-0,1 \cdot x}\,\mathrm{d}x + e^{R \cdot M} \cdot e^{-0,1 \cdot M} \right)$$

$$\lambda + 6,4 \cdot \lambda \cdot R = \lambda \cdot \left(0,1 \cdot \frac{1 - e^{-(0,1 - R) \cdot M}}{0,1 - R} + e^{-(0,1 - R) \cdot M} \right),$$

Za M dosadíme hodnotu 9,163 a rovnici řešíme numericky.

Výsledek je $R = 0,01635$.

Koeficient úpravy při zajištění škodního nadměrku je větší než při proporcionálním zajištění. Tudíž za jinak neměnných podmínek je zajištění škodního nadměrku výhodnější pro pojistitele, protože dává menší pravděpodobnost ruinování.

Závěr

V příspěvku se zabýváme vlivem rizikové přirážky pojistitele a zajišťovny na pravděpodobnost ruinování. Z výsledků nám vyplývá, že při určitých hodnotách rizikových přirážek dokážeme maximalizovat koeficient úpravy a tím minimalizovat pravděpodobnost ruinování, při některých, když je cena zajištění příliš vysoká, je lepší si ponechat celé riziko.

Pokud porovnáme proporcionální zajištění a zajištění škodního nadměrku z pohledu pojistitele je výhodnější zajištění škodního nadměrku. Do praxe se tento výsledek může promítnout tak, že zajišťovna stanoví vyšší rizikovou přirážku pro zajištění škodního nadměrku než proporcionálním zajištění (za jinak neměnných podmínek).

Při zajištění se pojistitel musí rozhodnout, jestli chce maximalizovat zisk, přičemž současně zvyšuje riziko ruinování, neboť minimalizovat riziko.

Pojišťovna musí najít kompromis mezi mírou zisku a pravděpodobnosti ruinování.

Poděkování

Tento článek by zpracován s podporou výzkumného projektu: EE2.3.30.0058 „Rozvoj kvalitních vědeckovýzkumných týmů na Univerzitě Pardubice/ ROUTER“

Reference

[1] BROŽ, M. Microsoft Excel – Vzorce, funkce, výpočty, Computer press Praha, 2006, ISBN 9788025110881.

[2] DICKSON, D. C. M., WATERS, H. R. Ruin theory, University of Melbourne and Heriot-Watt University, Edinburgh 1993.

[3] FECENKO, J. Neživotné poistenie, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava, 2006. ISBN 80-225-2191-4.

[4] GERBER, H. U. An Introduction to Mathematical Risk Theory, Philadelphia, PA, S. S. Huebner Foundation, 1979.

[5] HORÁKOVÁ, G., MUCHA, V. Teoŕia rizika v poistení, I. časť, Bratislava, Vydavateľstvo EKONÓM, 2006,

[6] PACÁKOVÁ, V. Aplikovaná poistná štatistika, IURA EDITION, Bratislava, 2004, ISBN 80-8078-004-8

Kontaktní adresa

RNDr. Ján Gogola, Ph.D
Univerzita Pardubice, Fakulta ekonomicko-správní
Ústav matematiky a kvantitativních metod
Studentská 84, 532 10 Pardubice
E-mail: jan.gogola@upce.cz

Received: 01. 09. 2013
Reviewed: 23. 10. 2013, 24. 01. 2014
Approved for publication: 31. 03. 2014