Univerzita Pardubice
Fakulta chemicko-technologická

# Sbírka řešených příkladů z mechaniky

Petr Janíček
Jana Kašparová

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Pardubice
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pardubice 2014

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

UNIVERZITA PARDUBICE

FAKULTA CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ

Ústav aplikované fyziky a matematiky

# Sbírka řešených příkladů z mechaniky

**RNDr. Petr Janíček, Ph.D.**

**Mgr. Jana Kašparová, Ph.D.**

Pardubice 2014

Tento materiál je spolufinancovaný z Evropského sociálního fondu
a státního rozpočtu České republiky.
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/2.2.00/28.0272.

Rukopis lektorovali: Prof. RNDr. Zdeněk Cimpl, CSc.
RNDr. Jan Zajíc, CSc.

ISBN 978-80-7395-721-6

© RNDr. Petr Janíček, Ph.D., Mgr. Jana Kašparová, Ph.D., 2014

# Obsah

## I. Kinematika hmotného bodu

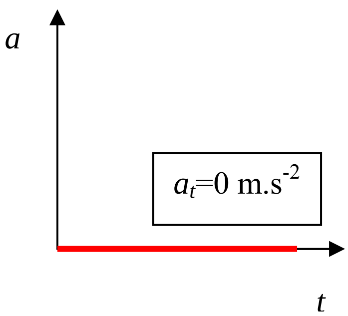
| **Pohyb přímočarý** $a_n = 0 m.s^{-2}$ | **rovnoměrný** | **rovnoměrně zrychlený** | **nerovnoměrně zrychlený** |
|---|---|---|---|
| **zrychlení** | $a_t = 0$ | $a_t = konst.$ | $a_t \neq konst.$ |
| **rychlost** | $v = konst.$ | $v = a.t + v_0$ | $v = \int adt$ |
| **dráha** | $s = v.t + s_0$ | $s = v_0.t + \frac{1}{2}a.t^2 + s_0$ | $s = \int vdt$ |

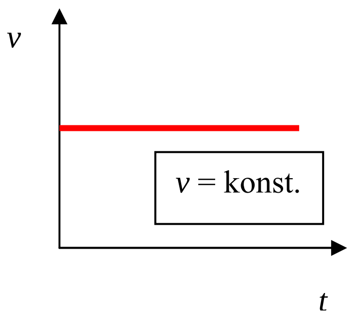
$s_0$ je počáteční dráha v čase $t = 0$ s
$v_0$ je počáteční rychlost v čase $t = 0$ s

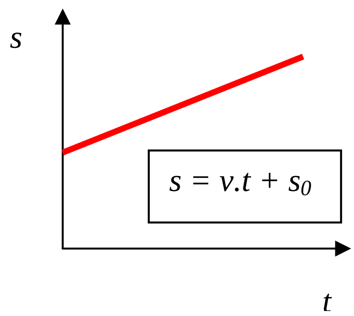
| **Pohyb křivočarý** $a_n \neq 0 m.s^{-2}$ | **rovnoměrný** | **rovnoměrně zrychlený** | **nerovnoměrně zrychlený** |
|---|---|---|---|
| **úhlové zrychlení** | $\alpha = 0$ | $\alpha = konst.$ | $\alpha \neq konst.$ |
| **úhlová rychlost** | $\omega = konst.$ | $\omega = \alpha.t + \omega_0$ | $\omega = \int \alpha\, dt$ |
| **úhlová dráha** | $\varphi = \omega.t + \varphi_0$ | $\varphi = \omega_0.t + \frac{1}{2}\alpha.t^2 + \varphi_0$ | $\varphi = \int \omega dt$ |

$\varphi_0$ je počáteční dráha v čase $t = 0$ s
$\omega_0$ je počáteční rychlost v čase $t = 0$ s
pozn.: pro $a_n = konst$ jde o pohyb po kružnici

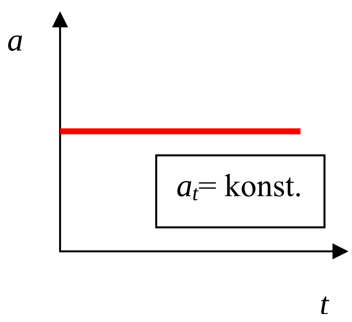
**Pohyb rovnoměrný přímočarý**

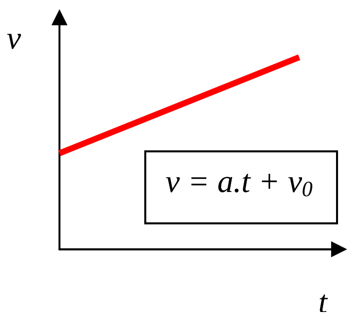


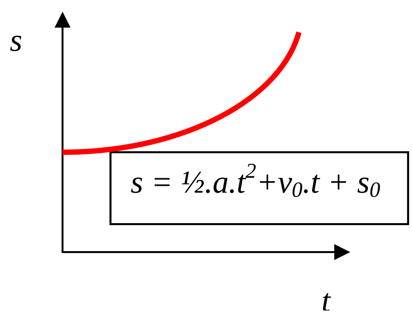




**Pohyb rovnoměrně zrychlený přímočarý**



- pro pohyb rovnoměrný po kružnici a rovnoměrně zrychlený po kružnici platí grafy analogické výše uvedeným

- konstanty: normální atmosférický tlak $p_a$= 101 325 Pa

  normální tíhové zrychlení $g$ = 9,80665 m.s$^{-2}$ …. zrychlení na 45° zeměpisné šířky u hladiny moře

  pro zjednodušení výpočtů : $g$ = 10 m.s$^{-2}$

---

**Příklady:**

1. Usain Bolt uběhne 100 metrů za 9,58 sekund. Za jak dlouho by uběhl maratón, pokud by udržel stejnou rychlost?

---

$s$ = 100 m
$t$ = 9,58 s
$t_1$ = ?

---

Jedná se o pohyb rovnoměrný přímočarý (není žádná zmínka o zrychlení, i když ve skutečnosti se na začátku pohybu jedná o pohyb zrychlený).

Ze vztahu $s = v.t + s_0$ , kde podle zadání je $s_0$ = 0 m, určíme rychlost pohybu závodníka:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{100}{9{,}58} = 10{,}44 m.s^{-1}.$$

Touto rychlostí pak poběží maratón ($s_1$ = 42,195 km). Dobu pohybu $t_1$ určíme opět ze vztahu $s = v.t + s_0$ , kde opět $s_0$ = 0 m , odkud vyjádříme čas $t$:

$$s_1 = v.t_1$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{s}{v} = \frac{s_1}{v} = \frac{42195}{10{,}44} = 4041{,}67 s = 1{,}12 h.$$

Odpověď: Usain Bolt uběhne maratón za 1,12 h.

- *poznámka:* Běžet 42 km rychlostí 10,44 ms$^{-1}$ = 38 km.h$^{-1}$ je značně nereálné. Nejlepšího výsledku bylo zatím dosaženo v roce 2008, kdy Haile Gebrselassie z Etiopie zaběhl maratón za 2:03:59 hod. Letos v září byl tento rekord překonán Keňanem Wilsonem Kipsangem na maratónu v Berlíně (čas 2:03:23 hod).

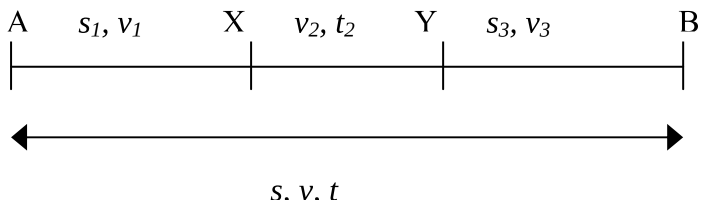
2. Cyklista jede z Pardubic do Hradce Králové. Prvních 10 kilometrů jede rychlostí 15 km/h, pak jede půl hodiny rychlostí 24 km/h a posledních 8 kilometrů jede rychlostí 20 km/h. Určete vzdálenost z Pardubic do Hradce Králové a průměrnou rychlost cyklisty.

---

$s_1 = 10$ km
$v_1 = 15$ km.h$^{-1}$
$t_2 = 0{,}5$ hod
$v_2 = 24$ km.h$^{-1}$
$s_3 = 8$ km
$v_3 = 20$ km.h$^{-1}$
$s = ?$
$v_p = ?$

---

náčrtek situace :




Úkol: 1. určit vzdálenost AB
2. určit průměrnou rychlost

Jedná se o pohyb rovnoměrný.

ad 1.:
Vzdálenost bodů AB je dána součtem vzdáleností AX, XY a YB : AB = AX +XY + YB,
resp. $s = s_1 + s_2 + s_3$

Dráhu druhého úseku $s_2$ vyjádříme ze zadaných hodnot pomocí vztahu: $s = v.t + s_0$ , kde je opět $s_0 = 0$ m

$$s_2 = v_2.t_2 = 24.0{,}5 = 12\,km$$

Pak celková vzdálenost : $s = s_1 + s_2 = 10 + 12 + 8 = 30\ km$

ad 2. : Průměrnou rychlost pohybu určíme podle vztahu $v_p = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

v němž celková dráha (tj. dráha všech tří úseků) $\Delta s = s_1 + s_2 + s_3$

a celkový čas $\Delta t = t_1 + t_2 + t_3$.

Ze zadaných hodnot je nutno dopočítat čas $t_1$ a $t_3$ pomocí vztahu: $t = \dfrac{s}{v}$

čas $t_1$: $t_1 = \dfrac{s_1}{v_1} = \dfrac{10}{15} = 0{,}67\,hod$

čas $t_3$: $t_3 = \dfrac{s_3}{v_3} = \dfrac{8}{20} = 0{,}4\,hod$

Dosadíme: $v_p = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \dfrac{10 + 12 + 8}{0{,}67 + 0{,}5 + 0{,}4} = 19{,}1\,km.h^{-1}$

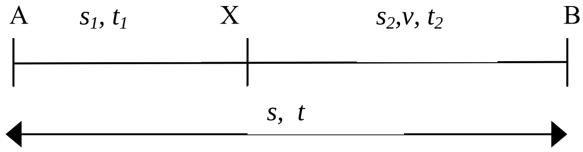
Odpověď: Vzdálenost z Pardubic do Hradce Králové je 30 km, cyklista se pohyboval průměrnou rychlostí 19 $km.h^{-1.}$

*poznámka:*

* Lze dosazovat i v jiných než základních jednotkách. Výsledek pak bude v námi zvolených jednotkách, např. $km.h^{-1}$.
* Stejný postup by platil i při rovnoměrném pohybu po kružnici. Podstatná není trajektorie, ale to, že jde o pohyb rovnoměrný - nemění se velikost rychlosti.

3. Motocyklista se rozjíždí z klidu tak, že za 18 sekund od začátku pohybu urazí dráhu 100 metrů. Jak dlouho mu bude trvat ujetí pěti kilometrů, jede-li prvních pětiset metrů rovnoměrně zrychleným pohybem a zbytek cesty stálou rychlostí.

---




$t = 18$ s
$s = 100$ m
$t_C = ?$
$s_C = 5$ km ( $s_1 = 500$ m …..pohyb zrychlený, $s_2 = 4{,}5$ km…..pohyb rovnoměrný)

---

Jedná se o kombinaci pohybu přímočarého rovnoměrně zrychleného (dráha $s_1$) a pohybu rovnoměrného přímočarého (dráha $s_2$).

Abychom zjistili celkovou dobu pohybu, musíme určit, s jakým zrychlením se motocyklista pohybuje a jakou má rychlost po ujetí prvního kilometru.

**Zrychlení** vypočteme z podmínky, že za čas $t = 18$ s od začátku pohybu urazí dráhu $s = 100$ metrů:

jedná se o rovnoměrně zrychlený pohyb z klidu ($v_0 = 0$ m.s$^{-1}$) $\Rightarrow s = \frac{1}{2}a.t^2$

$$\Rightarrow a = \frac{2s}{t^2}$$

po dosazení: $a = \frac{2.100}{18^2} = 0{,}62\ m.s^{-2}$

první kilometr ujede za dobu $t_1$, kterou opět určíme ze vztahu pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu:

$$s_1 = \frac{1}{2}a.t_1^{\ 2} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a}}$$

po dosazení: $t_1 = \sqrt{\frac{2.500}{0{,}62}} = 40{,}25\ s$

rychlost na konci prvního kilometru: $v = a.t_1 = 0{,}62.40{,}25 = 24{,}95 m.s^{-1} = 90\, km.h^{-1}$

Po uražení prvního kilometru se pohybuje rovnoměrně rychlostí 90 km.h$^{-1}$ a touto rychlostí urazí dráhu $s_2 = 4{,}5$ km. Čas pohybu $t_2$ určíme ze vztahu: $s_2 = v.t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{s_2}{v}$

po dosazení: $t_2 = \frac{4500}{24{,}95} = 180{,}3\ s$

Celkový čas potřebný na ujetí pěti kilometrů je:
$t = t_1 + t_2 = 40{,}25 + 180{,}3 = 220{,}55\ s = 3{,}7$ min

Odpověď: Motocyklista ujede pět kilometrů za 3,7 minut.

4. Automobilista jedoucí po přímé silnici rychlostí 90 km/h zpozoruje ve vzdálenosti 500 metrů před sebou na silnici několik divokých prasat. S jakým zrychlením musí začít brzdit, aby nedošlo ke srážce?

---

$v_0 = 90\ \text{km.h}^{-1} = 25\ \text{m.s}^{-1}$
$s = 500$ m
$a = ?$

---

Jedná se o pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený (resp. v tomto případě zpomalený) s počáteční rychlostí $v_0 = 90\ \text{km.h}^{-1}$ a koncovou rychlostí $v = 0\ \text{m.s}^{-1}$ ( jde o pohyb do zastavení) na dráze dlouhé maximálně 500 metrů (v případě delší dráhy by došlo ke srážce, a to nechceme).

Čas určíme ze vztahů popisujících rovnoměrně zrychlený pohyb:

$$s = v_0.t + \frac{1}{2}a.t^2 + s_0$$

$$v = a.t + v_0$$

kde $s_0 = 0$ m. Z druhé rovnice vyloučíme čas $t$, dosadíme do první rovnice a upravíme:

$$t = \frac{v - v_0}{a} \Rightarrow s = v_0.\frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}.a.(\frac{v - v_0}{a})^2 = \frac{v.v_0 - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2.v.v_0 + v_0^2}{2.a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2.a}$$

$$\Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2.s}$$

po dosazení: $a = \dfrac{0^2 - 25^2}{2.500} = -0{,}625\ m.s^{-2}$

Odpověď: Bude-li řidič brzdit se zpomalením o velikosti 0,625 $\text{m.s}^{-2}$, ke srážce nedojde.

*poznámka:* Pokud pro zrychlení *a* platí: $a < 0\ \text{m.s}^{-2}$, pak jde o pohyb zpomalený.

5. Těleso se pohybuje po přímé silnici nerovnoměrně zrychleným pohybem tak, že závislost dráhy na čase je popsána následující rovnicí: $s = 0{,}3.t^4 + 0{,}2.t^2 - 7$ (m). Určete rychlost a zrychlení v čase $t$ = 2 s.

$s = 0{,}3.t^4 + 0{,}2.t^2 - 7$
$v(t = 2\text{s}) = ?$
$a(t = 2\text{s}) = ?$

Jedná se o pohyb nerovnoměrně zrychlený přímočarý.

Na výpočet rychlosti a zrychlení použijeme definiční vztahy : $v = \frac{ds}{dt}$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

**Výpočet rychlosti:**

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}3.t^4 + 0{,}2.t^2 - 7) = \frac{d}{dt}(0{,}3.t^4) + \frac{d}{dt}(0{,}2.t^2) - \frac{d}{dt}7$$

$$v = 0{,}3.4.t^3 + 0{,}2.2.t - 0$$

$$v = 1{,}2.t^3 + 0{,}4.t$$

Dosadíme za čas $t$ = 2 s: $v(t = 2\,s) = 1{,}2.2^3 + 0{,}4.2 = 10{,}4\ m.s^{-1}$

**Výpočet zrychlení:**

vyjdeme z definičního vztahu $a = \frac{dv}{dt}$ a za rychlost dosadíme výše odvozený vztah $v = 1{,}2.t^3 + 0{,}4.t$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(1{,}2.t^3 + 0{,}4.t\ ) = \frac{d}{dt}(1{,}2.t^3) + \frac{d}{dt}(0{,}4.t\ )$$

$$a = 1{,}2.3.t^2 + 0{,}4.1.t^0$$

$$a = 3{,}6.t^2 + 0{,}4$$

Dosadíme za čas $t$ = 2 s: $a(t = 2\,s) = 3{,}6.2^2 + 0{,}4 = 14{,}8\ m.s^{-2}$

Odpověď: V čase $t$ = 2s se těleso pohybuje rychlostí 10,4 $\text{m.s}^{-1}$, zrychlení má hodnotu 14,8 $\text{m.s}^{-2}$.

6. Těleso se pohybuje po přímé silnici nerovnoměrně zrychleným pohybem tak, že zrychlení pohybu lze popsat následující rovnicí: $a = 0{,}2.t + 1$. Určete rychlost tělesa v čase $t$ = 2 s a dráhu, kterou za tu dobu těleso urazilo, bylo–li v čase $t$ = 0 s v klidu ($s_0$ = 0 m, $v_0$ = 0 m.s$^{-1}$).

---

$a = 0{,}2.t + 1$

$v(t = 2\text{s}) = ?$

$s(t = 2\text{s}) = ?$

---

Jedná se o pohyb nerovnoměrně zrychlený přímočarý, u něhož známe závislost zrychlení na čase.

Na výpočet rychlosti a dráhy použijeme definiční vztahy : $v = \dfrac{ds}{dt}$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

**Výpočet rychlosti:**

ze vztahu $a = \dfrac{dv}{dt}$ vyjádříme rychlost $dv$ a závislost velikosti rychlosti nerovnoměrného pohybu na čase dostaneme součtem, resp. integrací daných rychlostí $dv$:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a.dt$$

$$v = \int dv = \int adt$$

$$v = \int (0{,}2.t + 1)dt = \int 0{,}2.t.dt + \int 1dt = 0{,}2.\frac{t^2}{2} + 1.t + C$$

kde C je integrační konstanta, kterou určíme z počátečních podmínek:

v čase $t$ = 0 s bylo těleso v klidu $\Leftrightarrow$ $t$ = 0 s $\Rightarrow$ $v_0$ = 0 m.s$^{-1}$

$$0 = 0{,}2.\frac{0^2}{2} + 1.0 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\boxed{v = 0{,}1.t^2 + t}$$

Rychlost tělesa v čase $t$ = 2 s : $v(t = 2\ s) = 0{,}1.2^2 + 2 = 2{,}4\ m.s^{-1}$

**Výpočet dráhy:**

ze vztahu $v = \dfrac{ds}{dt}$ vyjádříme elementární dráhu $ds$ a celkovou dráhu nerovnoměrného pohybu dostaneme součtem, resp. integrací daných úseků $ds$:

$v = \dfrac{ds}{dt} \Rightarrow ds = vdt$ , kde za rychlost $v$ dosadíme výše odvozený vztah: $v = 0{,}1.t^2 + t$

$$s = \int ds = \int v dt$$

$$s = \int ds = \int v dt = \int (0{,}1.t^2 + t)dt = \int 0{,}1.t^2\, dt + \int t\, dt = 0{,}1.\frac{t^3}{3} + 1.\frac{t^2}{2} + C$$

kde C je integrační konstanta, kterou určíme z počátečních podmínek: v čase $t$ = 0 s bylo těleso v klidu na počátku měřeného úseku ⇔ $t$ = 0 s ⇒ $s$ = 0 m

$$0 = 0{,}1.\frac{0^3}{3} + 1.\frac{0^2}{2} + C \Rightarrow C = 0$$

$$\boxed{s = 0{,}1.\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}}$$

Dráha, kterou těleso urazilo za čas $t$ = 2 s : $s(t = 2\,s) = 0{,}1.\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} = 2{,}27\ m.$

Odpověď: Za čas $t$ = 2 s urazilo těleso dráhu 2,27 m, jeho okamžitá rychlost je 2,4 $m.s^{-1}$.

7. Sedačka kolotoče o hmotnosti 5 kg se pohybuje ve vodorovné rovině po kružnici o poloměru 4 m s dobou oběhu 25 s. Určete její úhlovou rychlost a dostředivé zrychlení.

---

$m = 5$ kg
$r = 4$ m
$T = 25$ s
$\omega = ?$
$a_d = ?$

---

Jedná se o rovnoměrný pohyb po kružnici s periodou pohybu $T = 25$ s

Úhlová rychlost rovnoměrného pohybu se určí ze vztahu: $\varphi = \omega.t + \varphi_0 \Rightarrow \omega = \dfrac{\varphi}{t}$, kde $\varphi_0 = 0$.

Při oběhu po kružnici známe velikost jedné otočky: $\varphi = 2\pi$

Po dosazení: $\omega = \dfrac{\varphi}{t} = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{25} = \dfrac{2.3{,}14}{25} = 0{,}25\,s^{-1}$

Pro dostředivé zrychlení platí vztah: $a_d = \dfrac{v^2}{r}$, kde pro obvodovou rychlost $v$ lze použít vztah: $v = \omega.r$

Po dosazení: $a_d = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{(\omega.r)^2}{r} = \omega^2.r = 0{,}25^2.4 = 0{,}25\ m.s^{-2}$

Odpověď: Sedačka se otáčí s úhlovou rychlostí 0,25 $s^{-1}$, působí na ni dostředivé zrychlení o velikosti 0,25 $m.s^{-2}$.

8. Určete úhlovou rychlost otáčení Země kolem vlastní osy, odstředivé zrychlení, které působí na těleso o hmotnosti 50kg umístěné na rovníku, a rychlost oběhu Země kolem Slunce.

$\omega = ?$
$v = ?$
$a_o = ?$
$r$ (vzdálenost Země-Slunce) = 150. $10^6$ km = 1AU(astronomická jednotka)
$T$ (doba oběhu Země kolem Slunce) = 1 rok = 365 dní = 31 536 000 s
$T^*$(doba otočení Země kolem osy) = 1 den = 86 400 s

**Úhlová rychlost otáčení** Země kolem vlastní osy:

Úhlová rychlost rovnoměrného pohybu se určí ze vztahu: $\varphi = \omega.t + \varphi_0 \Rightarrow \omega = \dfrac{\varphi}{t}$, kde $\varphi_0 = 0$.

Po dosazení: $\omega = \dfrac{\varphi}{t} = \dfrac{2\pi}{T^*} = \dfrac{2\pi}{1den} = \dfrac{2\pi}{86400} = 7{,}27.10^{-5}\,s^{-1}$

**Rychlost oběhu** Země kolem Slunce určíme ze vztahu: $v = \omega.r$

Předpokládáme, že Země obíhá kolem Slunce rovnoměrně po kružnici o poloměru $r$ = 1AU (pozn.: ve skutečnosti jde o pohyb po elipse, rychlost pohybu se mění co do velikosti i směru).

Úhlová rychlost rovnoměrného pohybu se určí opět ze vztahu: $\varphi = \omega.t + \varphi_0 \Rightarrow \omega = \dfrac{\varphi}{t}$

kde $\varphi_0 = 0$.

Po dosazení: $\omega = \dfrac{\varphi}{t} = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{1rok} = \dfrac{2\pi}{31536000} = 1{,}99.10^{-7}\,s^{-1}$

Rychlost $v$ po dosazení: $v = \omega.r = 1{,}99.10^{-7}.150.10^{9} = 29850\,m.s^{-1} = 29{,}9\,km.s^{-1}$

Lze řešit i následujícím způsobem: jde o oběh po kružnici, kde obvod dané kružnice je roven dráze, kterou Země urazí za dobu jednoho roku: uvažujeme stále, že se jedná o rovnoměrný pohyb

$$s = v.t \Rightarrow v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi.r}{T} = \frac{2.\pi.150.10^{9}}{31536000} = 29850\,m.s^{-1} = 29{,}9\,km.s^{-1}$$

Pro velikost **odstředivého zrychlení** platí stejný vztah jako pro zrychlení dostředivé: $a_o = \dfrac{v^2}{r}$

Po dosazení: $a_o = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{29850^2}{150.10^9} = 5{,}94.10^{-3}\,m.s^{-2}$

Odpověď: Úhlová rychlost otáčení Země kolem vlastní osy je $7{,}27.10^{-5}$ $s^{-1}$, rychlost oběhu Země kolem Slunce je 29,9 $km.s^{-1}$ a odstředivé zrychlení na rovníku má hodnotu $5{,}94.10^{-3}$ $m.s^{-2}$.

9. Setrvačník se roztáčí z klidu tak, že za 5 sekund vykoná 20 otáček. Za jak dlouho vykoná 50 otáček?

$t = 5$ s
$N = 20$
$t_1 = ?$
$N_1 = 50$

Každý bod setrvačníku koná rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici z klidu, tzn., že počáteční rychlost je nulová, úhlové zrychlení je po celou dobu pohybu konstantní.
Abychom určili dobu, za kterou setrvačník vykoná 50 otáček, musíme znát úhlové zrychlení, se kterým se pohybuje.

Víme, že za 5 sekund vykoná 20 otáček $\Rightarrow$ určíme úhlové zrychlení, se kterým se setrvačník otáčí:

pro počet otáček platí: $N = \dfrac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow \varphi = 2\pi.N$

kde $\varphi$ je celková úhlová dráha, 2π velikost jedné otočky (v radiánech).

pro úhlovou dráhu současně platí: $\varphi = \omega_0.t + \dfrac{1}{2}\alpha.t^2 + \varphi_0$, kde $\varphi_0$, $\omega_0$ jsou rovny nule.

po sloučení obou rovnic: $2\pi N = \dfrac{1}{2}\alpha.t^2 \Rightarrow \alpha = \dfrac{4\pi.N}{t^2}$

po dosazení získáme hodnotu úhlového zrychlení: $\alpha = \dfrac{4\pi.20}{5^2} = 10\,s^{-2}$

Dobu $t_1$, za kterou těleso vykoná 50 otáček získáme opět použitím rovnice:

$$2\pi.N_1 = \frac{1}{2}\alpha.t_1^{\,2} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{4\pi.N_1}{\alpha}}$$

Po dosazení: $t_1 = \sqrt{\dfrac{4\pi.N_1}{\alpha}} = \sqrt{\dfrac{4\pi.50}{10}} = 7{,}9\,s.$

Odpověď: Setrvačník vykoná 50 otáček za 7,9 s .

10. Sušička na prádlo vykonává maximálně 1400 ot/min. Za jak dlouho klesne frekvence otáčení na polovinu, pohybuje-li se sušička s konstantním úhlovým zpomalením $1{,}5\,s^{-2}$. Kolik otáček při tom vykoná.

---

$f_0 = 1400$ ot/min $= 1400/60$ $ot.s^{-1}$
$f = f_0/2 = 700$ ot/min $= 700/60$ $ot.s^{-1}$
$\alpha = -1{,}5\ s^{-2}$
$t = ?$
$N = ?$

---

Jde o pohyb rovnoměrně zrychlený (v tomto případě zpomalený) s počáteční úhlovou rychlostí danou frekvencí $f_0$ =1400 ot/min a koncovou úhlovou rychlostí danou frekvencí $f$ = 700 ot/min.

Dobu, za kterou dojde k poklesu frekvence otáčení, určíme ze vztahu: $\omega = \alpha.t + \omega_0$ , odkud vyjádříme čas: $t = \dfrac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \dfrac{2\pi.f - 2\pi.f_0}{\alpha}$, kde jsme současně použili vztah : $\omega = 2\pi.f$

po dosazení: $t = \dfrac{2\pi.\frac{700}{60} - 2\pi.\frac{1400}{60}}{-1{,}5} = 48{,}8\,s$

Pro výpočet počtu otáček použijeme stejný vztah jako v předchozím příkladu: $N = \dfrac{\varphi}{2\pi}$ , kde $\varphi$ je celková úhlová dráha, 2π velikost jedné otočky.

celková úhlová dráha v případě rovnoměrně zrychleného pohybu je dána vztahem: $\varphi = \omega_0.t + \frac{1}{2}\alpha.t^2 + \varphi_0$, kde $\varphi_0$ pokládáme rovno nule.

pak pro $N$ platí: $N = \dfrac{\omega_0.t + \frac{1}{2}\alpha.t^2}{2\pi} = \dfrac{2\pi.f_0.t + \frac{1}{2}\alpha.t^2}{2\pi}$

po dosazení: $N = \dfrac{2\pi.f_0.t + \frac{1}{2}\alpha.t^2}{2\pi} = \dfrac{2\pi.\frac{1400}{60}.48{,}8 + \frac{1}{2}.(-1{,}5).48{,}8^2}{2\pi} = 854$

Odpověď: Frekvence otáčení sušičky klesne na polovinu za 48,8 s a vykoná při tom 854 otáček.

*poznámka:* Počet otáček lze počítat i pomocí vztahu: $N = \bar{f}.t = \dfrac{f_0 + f}{2}.t$. Tento vztah lze použít jen pro případ rovnoměrně zrychleného pohybu (frekvence otáčení lineárně roste), což je náš příklad.

11. Z jaké výšky padalo těleso, má-li ve výšce 10 metrů nad zemí rychlost 15 $ms^{-1}$ a jakou rychlostí dopadlo na zem?

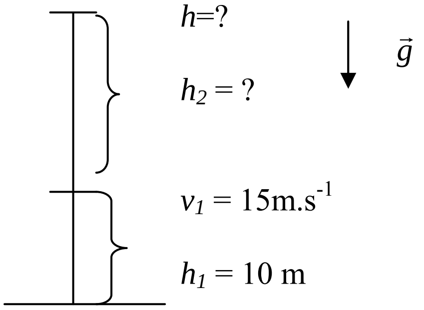
---

$h = ?$
$h_1 = 10$ m
$v_1 = 15$ $m.s^{-1}$
$v_d = ?$

---

* jedná se o volný pád tělesa v homogenním poli Země ≈ rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb s nulovou počáteční rychlostí a konstantním zrychlením $g = 10 m.s^{-2}$

* k výpočtu použijeme rovnice: $h = \frac{1}{2} g.t^2$
$v = g.t$




**výšku *h*** spočítáme – viz obrázek – jako součet dráhy $h_1$ a $h_2$: $h = h_1 + h_2$

dráhu $h_2$ určíme pomocí vztahu pro dráhu volného pádu: $h_2 = \frac{1}{2} g.t_2^{\,2}$ , kde dobu pádu $t_2$ získáme ze vztahu pro rychlost: $v_1 = g.t_2$, protože známe rychlost „dopadu“ $v_1$ ve výšce 10 m nad zemí:

$v_1 = g.t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v_1}{g} = \frac{15}{10} = 1{,}5\, s$ …….doba, za kterou těles urazilo dráhu $h_2$

pak výška $h_2$: $h_2 = \frac{1}{2}.10.1{,}5^2 = 11{,}25\, m$

celková výška $h$: $h = h_1 + h_2 = 11{,}25 + 10 = 21{,}25\, m$

k určení **rychlosti dopadu** $v_d = g.t_c$ musíme znát celkový čas pohybu tělesa $t_c$:

známe celkovou výšku $h$ a ze vztahu $h = \frac{1}{2} g.t^2$ určíme celkovou dobu pádu $t_c$:

$h = \frac{1}{2} g.t_c^{\,2} \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2.21{,}25}{10}} = 2{,}06\, s$

rychlost dopadu $v_d$: $v_d = g.t_c = 10.2{,}06 = 20{,}6\, m.s^{-1}$

Odpověď: Těleso padalo z výšky 21,25 metrů, na zem dopadlo rychlostí 20,6$m.s^{-1}$.
*poznámka:* lze řešit pomocí zákona zachování energie – viz kapitola II., příklad č.9.

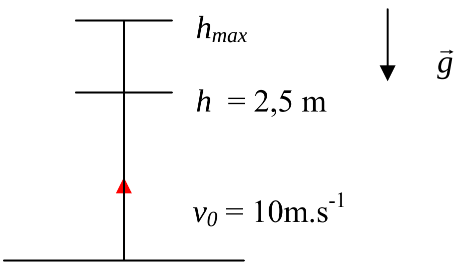
12. Vyhodí-li lupič stojící na zemi lup o hmotnosti 5 kg svisle vzhůru rychlostí 10 m.s$^{-1}$, chytne jej komplic stojící v prvním patře ve výšce 2,5 m nad zemí? Pokud ano, za jak dlouho po odhodu se mu to podaří?

---

$m$ = 5kg
$v_0$ = 10 m.s$^{-1}$
$h$ = 2,5 m
$t$ = ?

---

jedná se o pohyb v homogenním poli Země - vrh svislý vzhůru ≈ rovnoměrně zpomalený přímočarý pohyb s počáteční rychlostí $v_0$ = 10 m.s$^{-1}$ a konstantním zrychlením $g = 10\,m.s^{-2}$




Komplic může chytit lup za podmínky, že počáteční rychlost je dostatečná k tomu, aby se lup dostal alespoň do výšky $h$ = 2,5 m.

**Maximální výšku** $h_{max}$, do které se lup může dostat, určíme ze vztahu:
$$s = h_{\max} = v_0.t^* - \frac{1}{2}.g.(t^*)^2$$
kde čas $t^*$ je celková doba pohybu směrem vzhůru.

Čas $t^*$ určíme ze vztahu pro rychlost $v = v_0 - g.t$ a z podmínky, že v nejvyšším bodě se těleso zastaví, tzn. rychlost je v tomto okamžiku nulová (zpět padá volným pádem).
$$v = v_0 - g.t^* \Rightarrow t^* = \frac{v_0 - v}{g} = \frac{10-0}{10} = 1\,s$$
pak maximální výška: $h_{\max} = v_0.t^* - \frac{1}{2}.g.(t^*)^2 = 10.1 - \frac{1}{2}.10.1^2 = 5\,m$

⇒ komplic může lup chytit - a to hned dvakrát: poprvé, když lup letí směrem vzhůru, podruhé, když projde maximální výškou a padá dolů volným pádem

čas $t$, za který lup urazí dráhu 2,5 metrů směrem vzhůru určíme opět ze vztahu pro dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu: $s = h = v_0.t - \frac{1}{2}.g.t^2$
dosadíme a upravíme na kvadratickou rovnici pro čas $t$:

$$2{,}5 = 10.t - \frac{1}{2}.10.t^2 \Rightarrow 5.t^2 - 10.t + 2{,}5 = 0 \Rightarrow t^2 - 2.t + 0{,}5 = 0$$

Jde o kvadratickou rovnici - řešíme pomocí diskriminantu:

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.0,5}}{2.1} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow t_1 = 0,29\,s$$

$$t_2 = 1,71\,s$$

Odpověď: Komplic chytí lup za dobu

$t_1$ = 0,29 s….doba, kdy se lup pohybuje směrem vzhůru a výškou 2,5 m nad zemí projde jednou

$t_2$ = 1,71 s …doba, kdy komplic napoprvé lup nechytí; lup vystoupá do maximální výšky, kde se zastaví, a zpět padá volným pádem ⇒ výškou 2,5 m nad zemí projde dvakrát

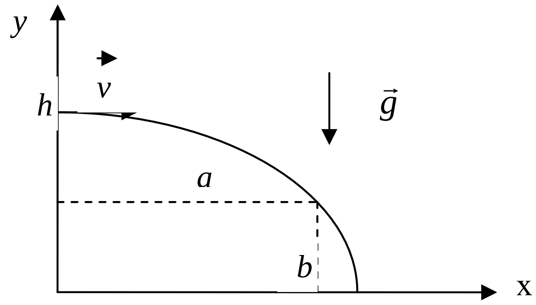
Pokud by komplic lup nechytil ani tentokrát, lup spadne zpátky na zem za 2 s ( za 1 s dosáhne maximální výšky, viz počítáno výše, na zem spadne za stejný čas – lze odvodit pomocí zákona zachování energie ).

*poznámka:* Povšimněte si, že při uvažování ideálních podmínek (neuvažujeme odpor vzduchu, tření,..) výsledek nezávisí na hmotnosti tělesa – lupu.

13. Malý Péťa vystřelí z praku z balkonu ve výšce tří metrů nad zemí ve vodorovném směru kamínek o hmotnosti 50 gramů rychlostí 40 m.s$^{-1}$. Podaří se mu zasáhnout plechovku postavenou na stolku (postaveném na zemi)vysokém jeden metr a vzdáleném od něj 39 metrů?

---

$m$ = 50 g
$h$ = 3 m
$v_0$ =40 m.s$^{-1}$
$b$ = 1 m
$a$ = 39 m
zasáhne cíl...$x$ = ?




- jedná se o pohyb v homogenním poli Země - vrh vodorovný ≈ nerovnoměrne zrychlený křivočarý pohyb s počáteční rychlostí $v_0$ = 40 m.s$^{-1}$ a konstantním zrychlením $g = 10\,m.s^{-2}$
- vodorovný vrh ≈ pohyb složený:

**svislý směr –** volný pád - pohyb rovnoměrně zrychlený*:* $v_y(t) = -g\,t$
$y(t) = h - gt^2/2$
**vodorovná osa *x*** - pohyb rovnoměrný přímočarý : $v_x(t) = v_0$
$x(t) = x_0 + v_0 t$
Péťa zasáhne cíl v případě, že kamínek dopadne do bodu o souřadnici [a,b].

Pak platí: $a = v_0.t$

$b = h - \frac{1}{2}g.t^2$ , kde $x_0$ = 0 m (volíme počátek souřadné soustavy v bodě odhodu kamínku).

Soustava je zde přeurčena (jedná se o dvě rovnice ale jen s jednou neznámou *t*).
Soustavu vyřešíme tak, že vodorovnou vzdálenost budeme považovat za neznámou (*x*), tím dostaneme dvě rovnice o dvou neznámých (*x,t*) s jednoznačným řešením. Pak porovnáme vypočítanou vzdálenost *x* se zadanou vzdáleností *a* = 39 m:

$x = v_0.t$

$b = h - \frac{1}{2}g.t^2$

vyloučíme čas *t* z první rovnice a dosadíme do druhé: $x = v_0.t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0}$

pak : $b = h - \frac{1}{2}.g.(\frac{x}{v_0})^2 \Rightarrow (\frac{x}{v_0})^2 = \frac{2.(h-b)}{g} \Rightarrow x = v_0.\sqrt{\frac{2.(h-b)}{g}}$

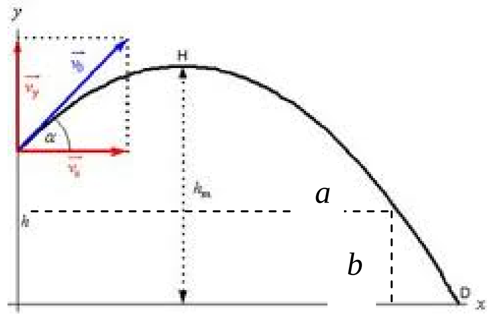
dosadíme: $x = v_0.\sqrt{\frac{2.(h-b)}{g}} = 40.\sqrt{\frac{2.(3-1)}{10}} = 25\,m$

$x = 25\,m \neq a = 39\,m \Rightarrow$ Péťa cíl nezasáhne

Odpověď: Při daných podmínkách Péťa cíl nezasáhne.

14. Jak to dopadne, pokud Péťa trochu zvedne ruku a vystřelí kámen stejnou rychlostí pod úhlem 4°?

$m = 50$ g
$h = 3$ m
$v_0 = 40$ m.s$^{-1}$
$b = 1$ m
$a = 39$ m
$\alpha = 4°$
zasáhne cíl...$x$ = ?




jedná se o pohyb v homogenním poli Země - vrh šikmý ≈ nerovnoměrně zrychlený křivočarý pohyb s počáteční rychlostí $v_0$ = 40 m.s$^{-1}$ a konstantním zrychlením $g = 10 m.s^{-2}$

šikmý vrh = pohyb složený:

**svislý směr –** vrh svislý vzhůru - pohyb rovnoměrně zpomalený**:** $v_y(t) = v_0.\sin\alpha - g\,t$

$y(t) = h + v_0.t.\sin\alpha - gt^2/2$

**vodorovná osa *x*** - pohyb rovnoměrný přímočarý *:* $v_x(t) = v_0.\cos\alpha$

$x(t) = x_0 + v_0 t.\cos\alpha$

Péťa zasáhne cíl v případě, že kamínek dopadne do bodu o souřadnici [a,b].

Pak platí: $a = v_0.t.\cos\alpha$

$$b = h + v_0.t.\sin\alpha - \frac{1}{2}g.t^2,$$

kde $x_0$ = 0 m (volíme počátek souřadné soustavy v bodě odhodu kamínku).

Soustava je opět přeurčena (jedná se o dvě rovnice ale jen s jednou neznámou $t$).
Soustavu vyřešíme tak, že vodorovnou vzdálenost budeme považovat za neznámou ($x$), tím dostaneme dvě rovnice o dvou neznámých ($x$,$t$) s jednoznačným řešením. Pak porovnáme vypočítanou vzdálenost $x$ se zadanou vzdáleností $a$ = 39 m:

$$x = v_0.t.\cos\alpha$$

$$b = h + v_0.t.\sin\alpha - \frac{1}{2}.g.t^2$$

z druhé rovnice vypočítáme čas pohybu - dosadíme a získáme kvadratickou rovnici pro čas $t$:

$$1 = 3 + 40.t.\sin 4 - \frac{1}{2}.10.t^2 \Rightarrow 5.t^2 - 40.t.\sin 4 - 2 = 0$$

$$5.t^2 - 2{,}79.t - 2 = 0$$

řešíme pomocí diskriminantu: $t_{1,2} = \dfrac{2{,}79 \pm \sqrt{(-2{,}79)^2 - 4.(-2).5}}{2.5} = \dfrac{2{,}79 \pm \sqrt{47{,}78}}{10}$

vypočítáme čas: $t_1 = -0,41\,s$
$t_2 = 0,97\,s$

záporný čas nemá z fyzikálního hlediska význam, řešením je pouze čas $t_1$

dosadíme čas $t_1$ do první rovnice:

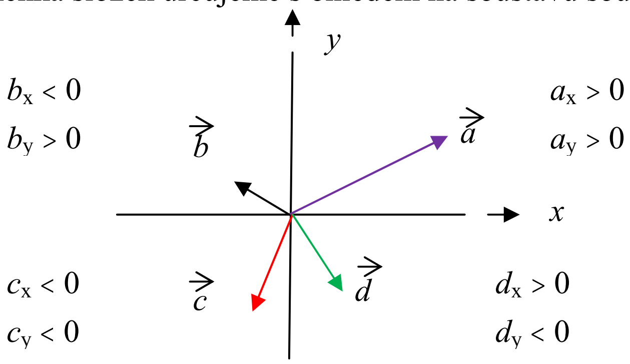
$$x = v_0 . t . \cos\alpha = 40 . 0,97 . \cos 4 = 38,7m \approx 39m$$

z výsledku je zřejmé, že $x \approx a \Rightarrow$ Péťa cíl zasáhne

# II. Dynamika hmotného bodu

Teorie:

Hybnost: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
Druhý Newtonův pohybový zákon: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$, kde na levé straně je výsledná síla působící na hmotný bod a na pravé straně hmotnost $m$ a celkové zrychlení $a$.
Tuto rovnici (nazývanou také pohybová) často rozepisujeme do směrů os souřadného systému:
Např. pro osu x: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = m \cdot \vec{a}_x$
V textu rozlišujeme složky (označené šipkou), za které dosazujeme kladná nebo záporná čísla (bez šipky). Znaménka složek určujeme s ohledem na soustavu souřadnic (viz. obr.)




Síla tíhová: $F_G = m \cdot g$
Síla třecí: $F_t = m \cdot N$, kde $N$ je normálová síla kolmá na podložku
Odporová síla vzduchu: $F_{odp} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot S \cdot \rho \cdot v^2$, kde $C$ je součinitel odporu prostředí, $S$ je průřez kolmý na směr pohybu, $\rho$ je hustota vzduchu a $v$ je rychlost vzduchu.
Odstředivá (dostředivá) síla: $F_{od} = F_d = m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot R \cdot \omega^2$
Pružná síla: $F = -k \cdot \Delta l$, kde $k$ je tuhost pružiny a $\Delta l$ její prodloužení (zkrácení)

Energie kinetická: $E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$
Energie potenciální v homogenním tíhovém poli Země: $E_p = m \cdot g \cdot h$
Potenciální energie pružiny: $E_{pruzina} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta l)^2$

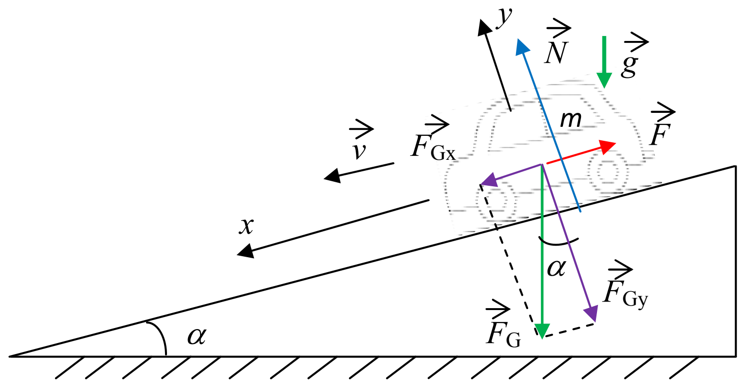
Práce konstantní síly: $W = F \cdot s$, kde $s$ je dráha ve směru síly $F$
Výkon (průměrný): $P = \frac{W}{t}$
Účinnost: $\eta = \frac{P}{P_P}$, kde $P_P$ je příkon.

konstanty: tíhové zrychlení $g = 10\ m \cdot s^{-2}$

1. Automobil jede konstantní rychlostí 50 km/h směrem z/do kopce. Hmotnost auta je 1500 kg. Předpokládejte, že brzdná síla/tažná síla motoru auta je konstantní a je rovna 3900 N. Určete sklon kopce.

a) Jízda z kopce:

$m = 1500$ kg
$F = 3900$ N
$v = 50$ km/h
$\alpha = ?$




Obrázek 2.1

Řešení:
Na automobil působí tíhová síla $\vec{F}_G$, brzdná síla $\vec{F}$ a normálová síla $\vec{N}$ (ta je kolmá na podložku).

Úlohu budeme řešit v soustavě souřadnic dle obr.: Osa $x$ je rovnoběžná se směrem pohybu, osa $y$ je kolmá na směr pohybu (tj. na nakloněnou rovinu).
Rozložíme tíhovou sílu $F_G$ do směrů osy $x$ a $y$ (pravoúhlý trojúhelník – definice funkcí sin a cos):
$F_{Gx} = F_G \cdot sin\alpha = m \cdot g \cdot sin\alpha$
$F_{Gy} = F_G \cdot cos\alpha = m \cdot g \cdot cos\alpha$

Nejprve popíšeme pohyb v ose $y$: Protože se automobil v ose y (tj. nahoru ani dolů) nepohybuje, je zrychlení v ose y: $a_y = 0$. Druhý Newtonův pohybový zákon rozepsaný v ose $y$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = m \cdot \vec{a}_y$$

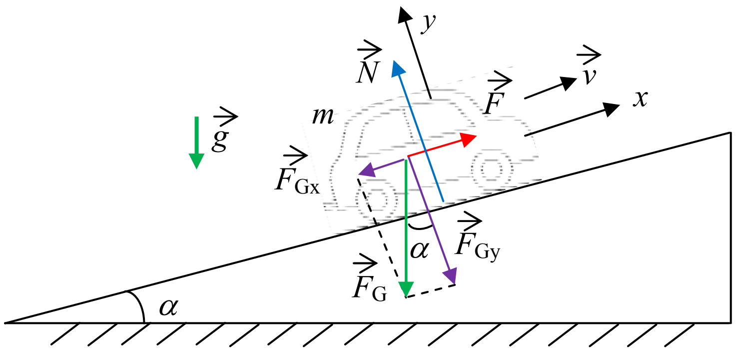
Na levé straně rovnice jsou všechny síly působící v ose $y$ (kladný směr je nahoru – viz. obr), na pravé straně rovnice zrychlení v ose $y$:
$N - F_{Gy} = m \cdot a_y \rightarrow N - F_{Gy} = 0 \rightarrow N = F_{Gy} = m \cdot g \cdot cos\alpha$
Z této rovnice obvykle vyjadřujeme kolmou normálovou sílu $N$.

Nyní rozepíšeme pohyb v ose x. Druhý Newtonův zákon rozepsaný v ose $x$
$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = m \cdot \vec{a}_x$,
na levé straně rovnice jsou všechny síly působící v ose $x$ (kladný směr je po nakloněné rovině směrem dolů – viz. obr), na pravé straně rovnice zrychlení v ose $x$. Ze zadání víme, že se automobil pohybuje konstantní rychlostí, tj. zrychlení v ose $x$: $a_x = 0$.
$F_{Gx} - F = m \cdot a_x \rightarrow F_{Gx} - F = 0 \rightarrow F_{Gx} = F$

Dosazením za $F_{Gx}$:
$F_{Gx} = F_G \cdot sin\alpha = m \cdot g \cdot sin\alpha = F$

Neznámou v této rovnici je úhel $\alpha$:
$sin\alpha = \frac{F}{m \cdot g}$, dosadíme $sin\alpha = \frac{3900}{1500 \cdot 10} = 0{,}26 \rightarrow \alpha = 15°$

b) Jízda do kopce:
$m = 1500$ kg
$F = 3900$ N
$v = 50$ km/h
$\alpha = ?$




Obrázek 2.2

Řešení:
Na automobil působí tíhová síla $\vec{F}_G$, tažná síla motoru $\vec{F}$ a normálová síla $\vec{N}$ (ta je kolmá na podložku)
Úlohu budeme řešit v soustavě souřadnic, kterou zavedeme dle obr.: Osa $x$ je rovnoběžná se směrem pohybu, osa $y$ je kolmá na směr pohybu (tj. na nakloněnou rovinu).

Rozložíme tíhovou sílu $F_G$ do směrů osy $x$ a $y$:
$$F_{Gx} = F_G \cdot sin\alpha = m \cdot g \cdot sin\alpha$$
$$F_{Gy} = F_G \cdot cos\alpha = m \cdot g \cdot cos\alpha$$

Stačí řešit rozepsaný pohyb (Druhý Newtonův pohybový zákon) v ose $x$:
$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = m \cdot \vec{a}_x$,
na levé straně rovnice jsou všechny síly působící v ose $x$ (kladný směr je po nakloněné rovině směrem nahoru – viz. obr), na pravé straně rovnice zrychlení v ose $x$. Ze zadání víme, že se automobil pohybuje konstantní rychlostí, tj. zrychlení v ose $x$: $a_x = 0$.
$$F - F_{Gx} = m \cdot a_x \rightarrow F - F_{Gx} = 0 \rightarrow F = F_{Gx}$$
Dosazením za $F_{Gx}$:
$$F_{Gx} = F_G \cdot sin\alpha = m \cdot g \cdot sin\alpha = F$$

Neznámou v této rovnici je úhel $\alpha$:
$sin\alpha = \frac{F}{m \cdot g}$, dosadíme $sin\alpha = \frac{3900}{1500 \cdot 10} = 0{,}26 \rightarrow \alpha = 15°$

Odpověď: Aby se automobil pohyboval konstantní rychlostí a to směrem z kopce nebo do kopce, musí být sklon kopce 15°.

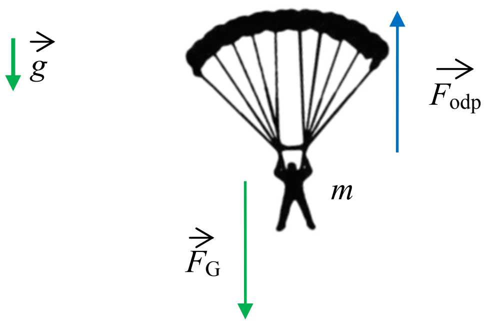
Poznámka: Výsledek je stejný pro pohyb z kopce i do kopce, protože jde v obou případech o rovnoměrný pohyb. Na velikosti rychlosti automobilu nezáleží, pokud je konstantní.

2. Parašutista o hmotnosti 100 kg skočil z letadla z výšky 2000 m nad zemí. Chvíli po výskoku rozevřel padák s průřezem o ploše 30 m$^2$. Určete rychlost, na které se ustálí jeho pád (tj. se kterou dopadne na zem), je-li hustota vzduchu 1,1 kg.m$^{-3}$ a uvažujeme – li součinitel odporu prostředí 1,33.

---

$m$ = 100 kg
$h$ = 2000 m
$S$ = 30 m$^2$
$\rho$ = 1,1 kg.m$^{-3}$
$C$ = 1,33
$v$ = ?

---




Obrázek 2.3

Pro řešení je potřeba nejprve krátká úvaha.

Na padajícího parašutistu působí dvě síly: Tíhová síla $\vec{F}_{\mathrm{G}}$ a odporová síla $\vec{F}_{\mathrm{odp}}$. Tíhová síla, která je dána hmotností parašutisty, je konstantní. Odporová síla $F_{odp} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot S \cdot \rho \cdot v^2$ je závislá na rychlosti parašutisty. Parašutista padá (nerovnoměrně) zrychleným pohybem, jeho rychlost se postupně zvyšuje (tím se zvětšuje i odporová síla). V určitém okamžiku se vyrovnají tíhová síla a odporová síla a od tohoto okamžiku padá parašutista konstantní rychlostí, kterou hledáme.

Podmínka rovnoměrného pádu je tedy: $a$ = 0 m.s$^{-2}$ (zrychlení pohybu je rovno nule)

Druhý Newtonův pohybový zákon: (rozepsaný ve směru pohybu) $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$
$F_G - F_{odp} = 0$, tj. $F_G = F_{odp}$
Dosadíme: $m \cdot g = \frac{1}{2} \cdot C \cdot S \cdot \rho \cdot v^2$

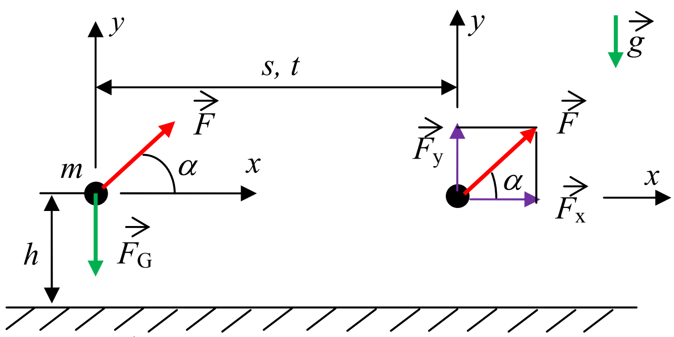
V této rovnici je neznámou rychlost pádu, tj. i dopadu, kterou vyjádříme $v = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{C \cdot S \cdot \rho}}$

Dosadíme: $v = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 10}{1{,}33 \cdot 30 \cdot 1{,}1}} = 6{,}75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 24{,}3\ \mathrm{km/h}$

Odpověď: Parašutista dopadne na zem rychlostí 24 km/h.

3. Na kámen o hmotnosti 2 kg umístěný 3 m nad zemí, který byl původně v klidu, začne působit v jeho těžišti konstantní síla $\vec{F}$. Jak velká musí být tato síla a jaký úhel musí svírat s vodorovnou rovinou, aby kámen urazil 100 m ve vodorovné rovině za 3,6 s. ($g$ = 10 m/s$^2$, odpor vzduchu zanedbejte).

$m$ = 2 kg
$h$ = 3 m
$s$ = 100 m
$t$ = 3,6 s
$F$ = ?
$\alpha$ = ?




Obrázek 2.4

Na kámen působí tíhová síla $\vec{F}_G$ a neznámá síla $\vec{F}$.

Úlohu budeme řešit v soustavě souřadnic, kterou zavedeme dle obr. Osa $x$ je rovnoběžná s povrchem Země, osa $y$ je kolmá na povrch Země.

Rozložíme neznámou sílu $F$ do směrů osy $x$ a $y$:

$F_x = F \cdot cos\alpha$

$F_y = F \cdot sin\alpha$

Nejprve popíšeme pohyb v ose $y$: Ze zadání chceme, aby se kámen v ose y nepohyboval, tj. zrychlení v ose $y$ je $a_y = 0$. Druhý Newtonův pohybový zákon rozepsaný v ose $y$:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = m \cdot \vec{a}_y$$

Na levé straně rovnice jsou všechny síly působící v ose $y$ (kladný směr je nahoru – viz. obr), na pravé straně rovnice zrychlení v ose $y$:

$F_y - F_G = m \cdot a_y \rightarrow F_y - F_G = 0 \rightarrow F_y = F_G$

Dosazením za $F_y$ a $F_G$:

$F \cdot sin\alpha = m \cdot g$

Tato rovnice obsahuje neznámé $F$ a $\alpha$. Potřebujeme ještě jednu rovnici pro stejné neznámé.

Nyní rozepíšeme pohyb v ose $x$, kde působí jediná síla $F_x$, tj. kámen se pohybuje se zrychlením $a_x$, které lze vyjádřit z druhého Newtonova pohybového zákona rozepsaného pro osu $x$:

$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = m \cdot \vec{a}_x \rightarrow F_x = m \cdot a_x$, tj. $a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{F \cdot cos\alpha}{m}$

Protože síla $F$ i úhel $\alpha$ je konstantní, pohybuje se kámen v ose x rovnoměrně zrychleně, tj. pro dráhu, kterou urazí v ose $x$ za čas $t$ platí:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot t^2 \rightarrow a_x = \frac{2 \cdot s}{t^2}$$

Porovnáním obou vztahů pro zrychlení v ose x ($a_x$): $\frac{2 \cdot s}{t^2} = \frac{F \cdot cos\alpha}{m}$,

tj. $F \cdot cos\alpha = m \cdot \frac{2 \cdot s}{t^2}$ je druhá rovnice pro neznámé $F$ a $\alpha$.

Řešíme soustavu rovnic vzhledem k neznámým $F$ a $\alpha$ :
$F \cdot sin\alpha = m \cdot g$ a
$F \cdot cos\alpha = m \cdot \frac{2 \cdot s}{t^2}$

Z první rovnice vyjádříme $F = \frac{m \cdot g}{sin\alpha}$ a dosadíme do druhé rovnice
$\frac{m \cdot g}{sin\alpha} \cdot cos\alpha = m \cdot \frac{2 \cdot s}{t^2}$

Po úpravě

$$tg\alpha = \frac{g \cdot t^2}{2 \cdot s}$$

Dosadíme

$$tg\alpha = \frac{10 \cdot 3{,}6^2}{2 \cdot 100} = 0{,}648 \rightarrow \alpha = 32{,}9°$$

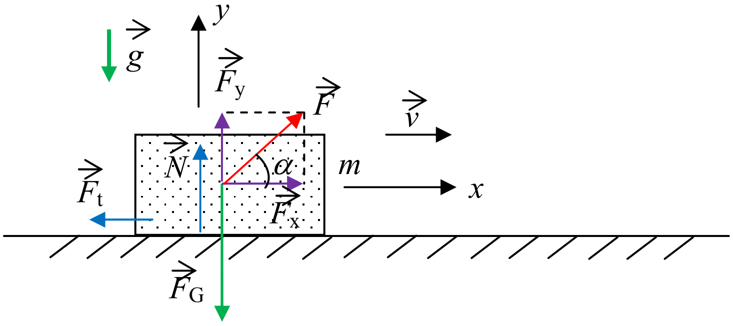
Velikost síly

$$F = \frac{m \cdot g}{sin\alpha} = \frac{2 \cdot 10}{sin33°} = 36{,}7 \text{ N}$$

Odpověď: Na kámen musí působit síla velikosti 36,7 N pod úhlem 33° od vodorovného směru (tj. směru pohybu).

4. Jana táhne naložené sáňky o celkové hmotnosti 30 kg po vodorovné silnici pokryté sněhem konstantní rychlostí. Koeficient dynamického tření mezi sáňkami a silnicí je 0,1 a úhel, který svírá provaz na sáňkách se silnicí je 30°. Určete velikost síly, kterou Jana táhne sáňky.

$m = 30$ kg
$f = 0{,}1$
$\alpha = 30°$
$F = ?$




Obrázek 2.5

Řešení:
Na kámen působí tíhová síla $\vec{F}_G$, normálová síla $\vec{N}$, třecí síla $\vec{F}_t$ a neznámá síla $\vec{F}$.

Úlohu budeme řešit v soustavě souřadnic dle obr.: Osa $x$ je rovnoběžná s povrchem Země, osa $y$ je kolmá na povrch Země.
Rozložíme neznámou sílu $F$ do směrů osy $x$ a $y$:
$F_x = F \cdot cos\alpha$
$F_y = F \cdot sin\alpha$

Nejprve popíšeme pohyb v ose $y$: Ze zadání víme, že se sáňky pohybují v ose $x$ (po zemi), tj. sáňky se v ose y nepohybují ⇔ zrychlení v ose $y$: $a_y = 0$. Druhý Newtonův pohybový zákon rozepsaný v ose $y$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = m \cdot \vec{a}_y$$

Na levé straně rovnice jsou všechny síly působící v ose $y$ (kladný směr je nahoru – viz. obr), na pravé straně rovnice zrychlení v ose $y$:

$$F_y + N - F_G = m \cdot a_y$$
$$F_y + N - F_G = 0 \rightarrow N = F_G - F_y$$

Dosazením za $F_y$ a $F_G$:

$$N = m \cdot g - F \cdot sin\alpha$$

Tato rovnice obsahuje neznámé $F$ a $N$. Potřebujeme ještě jednu rovnici pro stejné neznámé.

Nyní rozepíšeme pohyb v ose $x$. Druhý Newtonův pohybový zákon rozepsaný pro osu $x$ (v ose $x$ se sáňky pohybují konstantní rychlostí), tj. $a_x = 0$.

$$F_x - F_t = m \cdot a_x$$
$$F_x - F_t = 0 \rightarrow F_x = F_t$$

Dosadíme za $F_x$ a za $F_t = f \cdot N$,

$$F \cdot cos\alpha = f \cdot N$$

Dosadíme za normálovou sílu

$$F \cdot cos\alpha = f \cdot (m \cdot g - F \cdot sin\alpha)$$

Vyjádříme neznámou sílu $F$:

$F \cdot cos\alpha + f \cdot F \cdot sin\alpha = f \cdot m \cdot g$

$F \cdot (cos\alpha + f \cdot sin\alpha) = f \cdot m \cdot g$

$$F = \frac{f \cdot m \cdot g}{cos\alpha + f \cdot sin\alpha}$$

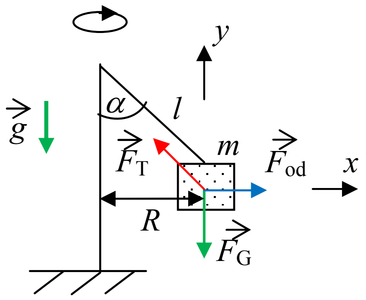
Dosadíme:

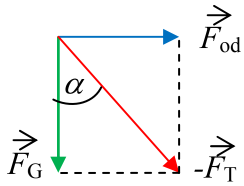
$$F = \frac{0{,}1 \cdot 30 \cdot 10}{cos30° + 0{,}1 \cdot sin30°} = 32{,}7 \text{ N}$$

Odpověď: Síla, kterou musí působit Jana na sáňky, aby se pohybovaly konstantní rychlostí, je 32,7 N.

5. Sedačka řetízkového kolotoče o hmotnosti 20 kg visí na závěsu délky 10 m, kolotoč se otočí jednou dokola za 5 s. Určete sílu, kterou je napínán řetěz, na kterém visí sedačka.

$m = 20$ kg
$l = 10$ m
$T = 5$ s => $f = 0{,}2$ Hz
$F_T = ?$




Obrázek 2.6

Řešení:
Na sedačku působí tíhová síla $\vec{F}_G$, síla odstředivá $\vec{F}_{od}$ (daná rotací kolotoče) a tažná síla $\vec{F}_T$ (v napjatém laně)
Protože se sedačka pohybuje konstantní rychlostí, musí být všechny síly působící na sedačku v rovnováze, tj. musí platit: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$

$$\vec{F}_G + \vec{F}_{od} + \vec{F}_T = \vec{0}$$

Místo síly $\vec{F}_T$ vyjádříme sílu opačnou, tedy $-\vec{F}_T$

$$-\vec{F}_T = \vec{F}_G + \vec{F}_{od}$$

Tažná síla lana je daná vektorovým součtem síly tíhové a síly odstředivé, ten je zobrazen na obrázku vpravo.
Z definice goniometrických funkcí a z obrázku kolotoče:
$sin\alpha = \frac{R}{l}$, kde $R$ je poloměr kružnice, po kterém se sedačka pohybuje. V této rovnici jsou dvě neznámé $R$ a $\alpha$.

Vyjádříme z této rovnice neznámou $R$: $R = l \cdot sin\alpha$.

Z nákresu sil, které na sedačku působí, při použití úhlu $\alpha$:
$\mathrm{tg}\alpha = \frac{F_{od}}{F_G} = \frac{m \cdot R \cdot \omega^2}{m \cdot g} = \frac{R}{g} \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2$

Dosadíme za $R$:
$\mathrm{tg}\alpha = \frac{R}{g} \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2 = \frac{l \cdot sin\alpha}{g} \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2$
Celou rovnici vydělíme sin$\alpha$

$$\frac{tg\alpha}{sin\alpha} = \frac{l}{g} \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2$$

Protože $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, můžeme výraz na levé straně zjednodušit

$$\frac{1}{cos\alpha} = \frac{l}{g} \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2 \rightarrow cos\alpha = \frac{g}{l \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2}$$

Úhel $\alpha$ můžeme vypočítat číselně: $cos\alpha = \frac{g}{l \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2} = \frac{10}{10 \cdot (2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2)^2} = 0{,}63 \rightarrow \alpha = 50{,}7°$

Sílu, kterou je napínáno lano ($F_T$) určíme opět ze silového obrazce (obdélníka). Využijeme-li goniometrickou funkci cos je:

$$cos\alpha = \frac{F_G}{F_T} \rightarrow F_T = \frac{F_G}{cos\alpha} = \frac{m \cdot g}{cos\alpha}$$

Dosadíme-li za cos$\alpha$, resp. za $\frac{1}{cos\alpha} = \frac{l}{g} \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2$

je

$$F_T = m \cdot g \cdot \frac{1}{cos\alpha} = m \cdot g \cdot \frac{l}{g} \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2 = m \cdot l \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2$$

Tedy

$$F_T = 20 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2)^2 = 316 \text{ N}$$

Odpověď: Síla, kterou je napínán řetěz, na kterém visí sedačka kolotoče, je 316 N.

Poznámka: Úlohu lze řešit také následující úvahou:
Tíhová síla: $F_G = m \cdot g = 20 \cdot 10 = 200$ N

Odstředivá síla: $F_{od} = m \cdot R \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2 = m \cdot l \cdot sin\alpha \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2 =$
$= 20 \cdot 10 \cdot sin51° \cdot (2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2)^2 = 245$ N

Tažná síla lana (Pythagorova věta): $F_T = \sqrt{F_G^2 + F_{od}^2} = \sqrt{200^2 + 245^2} = 316$ N

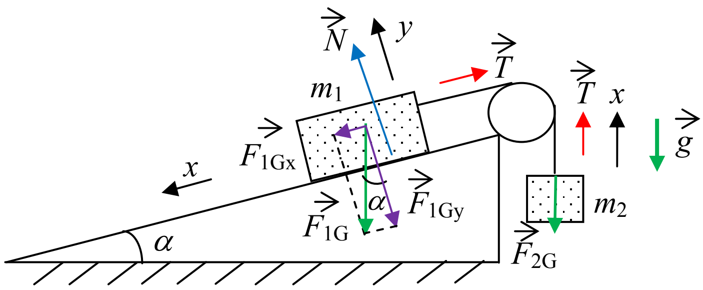
Poznámka: Kolotoč se pohybuje stálou úhlovou rychlostí.

6. Na nakloněné rovině s úhlem sklonu 15° je položeno těleso o hmotnosti $m_1$ = 1 kg spojené pevným lanem přes kladku umístěnou na horním konci nakloněné roviny s tělesem o hmotnosti $m_2$. Koeficient tření mezi tělesy a nakloněnou rovinou je 0,1. Určete hmotnost tělesa $m_2$ tak, aby se soustava
   a) nepohybovala, tj. aby byla v rovnováze;
   b) pohybovala se zrychlením 1 m/s$^2$ směrem po nakloněné rovině dolů;
   c) pohybovala se zrychlením 1 m/s$^2$ směrem po nakloněné rovině nahoru.

---

a) Soustava v rovnováze, tj. ani jedno z těles se nepohybuje

$m_1 = 1$ kg
$\alpha = 15°$
$f = 0{,}2$
$a = 0$ m/s$^2$
$m_2 = ?$




Obrázek 2.7

Řešení:
Nejprve se zaměříme na popis situace (viz. obr.). V případě dvou těles popíšeme každé těleso zvlášť.
Na těleso č. 1 o hmotnosti $m_1$ = 1 kg působí síla tíhová $F_{1G}$, kterou rozložíme do směrů osy $x$ a $y$:

$F_{1Gx} = F_{1G} \cdot sin\alpha = m_1 \cdot g \cdot sin\alpha$
$F_{1Gy} = F_{1G} \cdot cos\alpha = m_1 \cdot g \cdot cos\alpha$

Dále na těleso o hmotnosti $m_1$ působí síla normálová $N$ a tažná $T$ (síla působící v napjatém laně)
Pro popis situace je důležitý pouze směr pohybu (osa $x$):
Druhý Newtonův pohybový zákon rozepsaný v ose $x$ (pro těleso č. 1)

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{1ix} = m \cdot \vec{a}_{1x}$$

Na levé straně rovnice jsou všechny síly působící na těleso č. 1 v ose $x$ (kladný směr je po nakloněné rovině směrem dolů – viz. obr), na pravé straně rovnice zrychlení v ose $x$: (těleso č. 1 se v ose $x$ nepohybuje, tj. zrychlení v ose $x$: $a_{1x} = 0$).

$F_{1Gx} - T = m \cdot a_{1x}$
$F_{1Gx} - T = 0 \rightarrow T = F_{1Gx} = m_1 \cdot g \cdot sin\alpha$

V tomto případě můžeme tedy tažnou sílu lana přímo vypočítat:

$$T = F_{1Gx} = m_1 \cdot g \cdot sin\alpha = 1 \cdot 10 \cdot sin15° = 2{,}59 \text{ N}$$

Na těleso č. 2 o neznámé hmotnosti $m_2$ působí síla tíhová $F_{2G}$ a síla tahová $T$, kterou pro jednoduchost považujeme za konstantní.

Druhý Newtonův pohybový zákon rozepsaný v ose $x$ (pro těleso č. 2): Na levé straně rovnice jsou všechny síly působící na těleso č. 2 v ose $x$ (kladný směr je nahoru), na pravé straně rovnice zrychlení v ose $x$: (těleso č. 2 se v ose $x$ nepohybuje, tj. zrychlení v ose $x$: $a_{2x} = 0$).

$$T - F_{2G} = m_2 \cdot a_{2x} \rightarrow T - F_{2G} = 0 \rightarrow T = F_{2G} = m_2 \cdot g$$

Tažná síla v laně je konstantní, tj.

$$T = F_{2G} = m_2 \cdot g = m_1 \cdot g \cdot sin\alpha = 2{,}59 \text{ N}$$

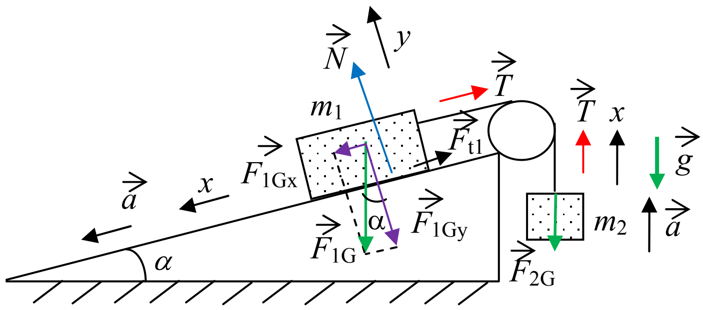
Hmotnost tělesa $m_2$ je

$$m_2 = m_1 \cdot sin\alpha = 1 \cdot sin15° = 0{,}26 \text{ kg}$$

Odpověď: Je – li soustava v rovnováze, je hmotnost tělesa $m_2$ rovna 0,26 kg.

b) Soustava se pohybuje se zrychlením 1 m/s$^2$ směrem po nakloněné rovině dolů

$m_1 = 1$ kg
$\alpha = 15°$
$f = 0{,}1$
$a = 1$ m/s$^2$
$m_2 = ?$




Obrázek 2.8

Řešení:
Na těleso č. 1 působí kromě tíhové síly $F_{1G}$, kterou opět rozložíme do směrů osy $x$ a $y$ ($F_{1Gx} = F_{1G} \cdot sin\alpha = m_1 \cdot g \cdot sin\alpha$ a $F_{1Gy} = F_{1G} \cdot cos\alpha = m_1 \cdot g \cdot cos\alpha$), také síla normálová ($N$), tažná síla lana ($T$) a třecí síla $F_{t1}$ (proti pohybu – tj. **po nakloněné rovině směrem nahoru**).

Druhý Newtonův pohybový zákon rozepsaný pro osu $y$:
$N - F_{1Gy} = m \cdot a_{1y} \rightarrow N - F_{1Gy} = 0 \rightarrow N = F_{1Gy} = m_1 \cdot g \cdot cos\alpha$
Druhý Newtonův zákon rozepsaný pro osu $x$: (těleso se pohybuje dolů po nakloněné rovině se zrychlením $a$)
$F_{1Gx} - T - F_{t1} = m_1 \cdot a_{1x} \rightarrow F_{1Gx} - T - F_{t1} = m_1 \cdot a$

Dosadíme za $F_{1Gx}$ a $F_{t1}$ :
$$m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - T - f \cdot N = m_1 \cdot a$$
Dosadíme za $N$:
$$m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - T - f \cdot m_1 \cdot g \cdot cos\alpha = m_1 \cdot a$$

Druhý Newtonův pohybový zákon rozepsaný v ose $x$ (pro těleso č. 2, které se pohybuje nahoru se zrychlením $a$):
$$T - F_{2G} = m_2 \cdot a_{2x} \rightarrow T - F_{2G} = m_2 \cdot a \rightarrow T - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$$

Pohybové rovnice pro obě tělesa jsou:
$m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - T - f \cdot m_1 \cdot g \cdot cos\alpha = m_1 \cdot a$ a $T - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$

Sečteme obě rovnice:
$$(m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - T - f \cdot m_1 \cdot g \cdot cos\alpha) + (T - m_2 \cdot g) = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a$$

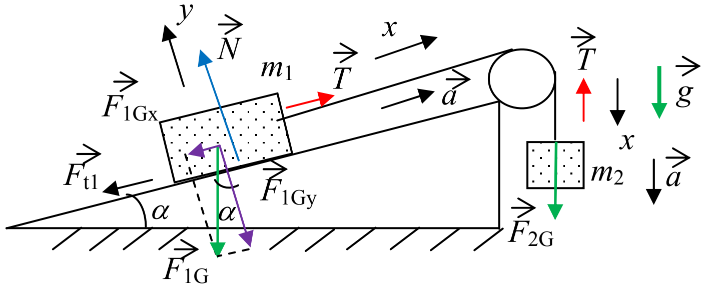
Na pravou stranu rovnice převedeme neznámou $m_2$ a vyjádříme ji:
$$m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - f \cdot m_1 \cdot g \cdot cos\alpha - m_1 \cdot a = m_2 \cdot g + m_2 \cdot a$$
$$m_2 = \frac{m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - f \cdot m_1 \cdot g \cdot cos\alpha - m_1 \cdot a}{g + a}$$

Dosadíme
$$m_2 = \frac{1 \cdot 10 \cdot sin15° - 0{,}1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot cos15° - 1 \cdot 1}{10 + 1} = 0{,}056 \text{ kg}$$

Odpověď: Aby se soustava pohybovala po nakloněné rovině směrem dolů se zrychlením 1 m/s$^2$, musí být hmotnost tělesa $m_2$ rovna 0,056 kg.

c) Soustava se pohybuje se zrychlením 1 m/s$^2$ směrem po nakloněné rovině nahoru

$m_1 = 1$ kg
$\alpha = 15°$
$f = 0{,}1$
$a = 1$ m/s$^2$
$m_2 = ?$




Obrázek 2.9

Řešení:

Na těleso č. 1 působí kromě tíhové síly $F_{1G}$, kterou opět rozložíme do směrů osy $x$ a $y$ ($F_{1Gx} = F_{1G} \cdot sin\alpha = m_1 \cdot g \cdot sin\alpha$ a $F_{1Gy} = F_{1G} \cdot cos\alpha = m_1 \cdot g \cdot cos\alpha$) síla normálová ($N$), tažná síla lana ($T$) a třecí síla $F_{t1}$ (proti pohybu – tj. **po nakloněné rovině směrem dolů**)

Druhý Newtonův zákon rozepsaný pro osu $y$:

$N - F_{1Gy} = m \cdot a_{1y} \rightarrow N - F_{1Gy} = 0 \rightarrow N = F_{1Gy} = m_1 \cdot g \cdot cos\alpha$

Druhý Newtonův zákon rozepsaný pro osu $x$: (těleso se pohybuje nahoru po nakloněné rovině se zrychlením $a$)

$T - F_{1Gx} - F_{t1} = m_1 \cdot a_{1x} \rightarrow T - F_{1Gx} - F_{t1} = m_1 \cdot a$

Dosadíme za $F_{1Gx}$ a $F_{t1}$ :

$$T - m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - f \cdot N = m_1 \cdot a$$

Dosadíme za $N$:

$$T - m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - f \cdot m_1 \cdot g \cdot cos\alpha = m_1 \cdot a$$

Druhý Newtonův zákon pro těleso č. 2 rozepsaný v ose $x$ (kladný směr dolů):

$$F_{2G} - T = m_2 \cdot a_{2x} \rightarrow F_{2G} - T = m_2 \cdot a \rightarrow m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a$$

Pohybové rovnice pro obě tělesa jsou:

$T - m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - f \cdot m_1 \cdot g \cdot cos\alpha = m_1 \cdot a$ a $m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a$

Sečteme obě rovnice:

$$(T - m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - f \cdot m_1 \cdot g \cdot cos\alpha) + (m_2 \cdot g - T) = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a$$

Na pravou stranu rovnice převedeme neznámou $m_2$ a vyjádříme ji:

$$-m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - f \cdot m_1 \cdot g \cdot cos\alpha - m_1 \cdot a = m_2 \cdot a - m_2 \cdot g$$

$$m_2 = \frac{m_1 \cdot g \cdot sin\alpha + f \cdot m_1 \cdot g \cdot cos\alpha + m_1 \cdot a}{g - a}$$

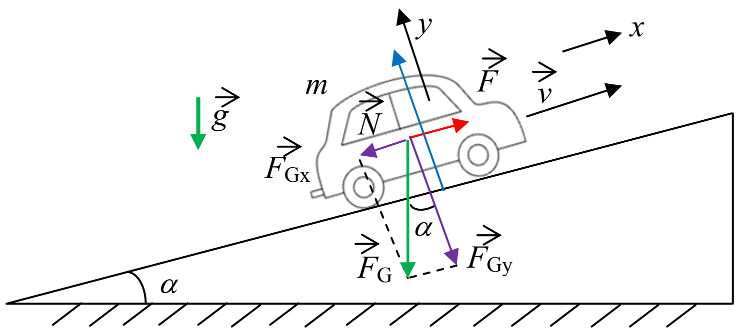
Dosadíme

$$m_2 = \frac{1 \cdot 10 \cdot sin15° + 0{,}1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot cos15° + 1 \cdot 1}{10 - 1} = 0{,}5 \text{ kg}$$

Odpověď: Aby se soustava pohybovala po nakloněné rovině směrem nahoru se zrychlením 1 m/s$^2$, musí být hmotnost tělesa $m_2$ rovna 0,5 kg.

7. Auto o hmotnosti 1500 kg má motor o výkonu 1,3 kW. Jaký může být největší možný úhel sklonu kopce, aby se udržela konstantní rychlost vozidla 20 m/s, pokud
   a) Neuvažujeme odporovou sílu
   b) Uvažujeme odporovou sílu 10 krát menší než je hnací síla motoru

a) Bez vlivu odporové síly
$m = 1500$ kg
$P = 50$ kW
$v = 20$ m/s
$\alpha = ?$




Obrázek 2.10

Řešení:
Pro pohyb do kopce jsou důležité pouze síly ve směru osy $x$: $x$-ovou složku tíhové síly lze vyjádřit jako:
$F_{Gx} = m \cdot g \cdot sin\alpha$

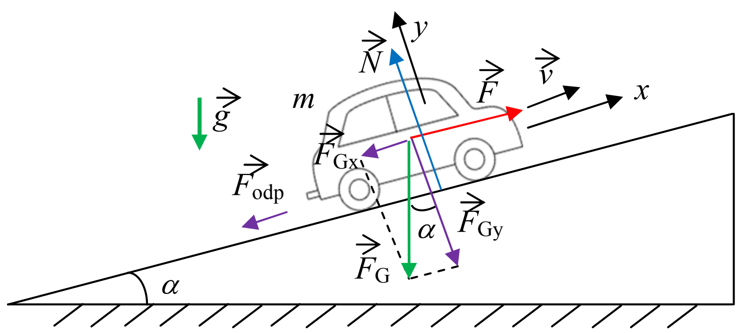
Pro pohyb konstantní rychlostí je výsledná síla v ose $x$ rovna nule (zrychlení je rovno nule), tedy
$F = F_{Gx} = m \cdot g \cdot sin\alpha$

Neznámou sílu $F$ vypočteme pomocí výkonu automobilu.
Výkon automobilu vypočteme jako: $P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v = m \cdot g \cdot v \cdot sin\alpha$

$$sin\alpha = \frac{P}{m \cdot g \cdot v}$$

$$sin\alpha = \frac{50000}{1500 \cdot 10 \cdot 20} = 0,166 \rightarrow \alpha = 9,6°$$

b) S vlivem odporové síly
$m = 1500$ kg
$P = 50$ kW
$v = 20$ m/s
$F_{odp} = F / 10$
$\alpha = ?$




Obrázek 2.11

Řešení:
Pro pohyb do kopce jsou důležité pouze síly ve směru osy $x$: $x$-ovou složku tíhové síly lze vyjádřit jako:
$F_{Gx} = m \cdot g \cdot sin\alpha$

Druhý Newtonův pohybový zákon, rozepsaný v ose *x*:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = m \cdot \vec{a}_x$$

Pravá strana rovnice je rovna nule (automobil se pohybuje konstantní rychlostí), na levé straně rovnice jsou všechny síly působící v ose *x*:

$$F - F_{Gx} - F_{odp} = 0$$

Dosadíme za jednotlivé síly:

$$F - m \cdot g \cdot sin\alpha - \frac{F}{10} = 0 \rightarrow \frac{9 \cdot F}{10} = m \cdot g \cdot sin\alpha$$

Z této rovnice vyjádříme neznámou hnací sílu *F:*

$$F = \frac{10}{9} \cdot m \cdot g \cdot sin\alpha$$

Neznámou sílu *F* vypočteme pomocí výkonu auta.

Výkon automobilu vypočteme jako: $P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v$

Dosadíme za sílu *F*:

$$P = F \cdot v = \frac{10}{9} \cdot v \cdot m \cdot g \cdot sin\alpha$$

$$sin\alpha = \frac{9 \cdot P}{10 \cdot m \cdot g \cdot v}$$

$$sin\alpha = \frac{9 \cdot 50000}{10 \cdot 1500 \cdot 10 \cdot 20} = 0{,}15 \rightarrow \alpha = 8{,}6°$$

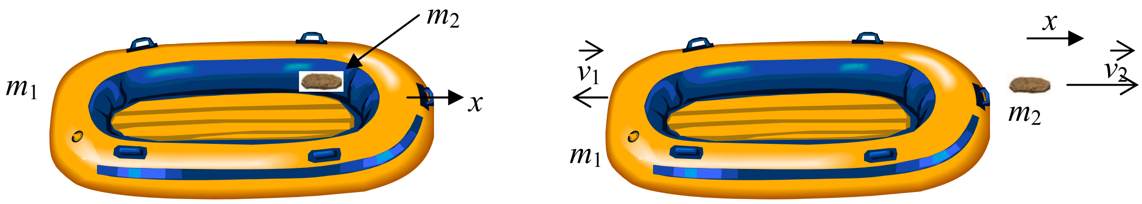
Odpověď: Největší možný sklon kopce, při kterém automobil udrží konstantní rychlost je

a) 9,6° bez vlivu odporových sil;
b) 8,6° uvažujeme-li odporovou sílu.

8. Jakou rychlostí se bude pohybovat loďka o hmotnosti 25 kg, pokud z ní vyhodíme kámen o hmotnosti 0,5 kg rychlostí 1 m/s a byla-li loďka původně v klidu?

$m_1 = 25$ kg
$m_2 = 0{,}5$ kg
$v_2 = 1$ m/s
$v_1 = ?$

Obrázek 2.11




Pro řešení příkladu uvažujeme situaci před odhozením a po odhození kamene.

Pro odhození kamene použijeme zákon zachování hybnosti:

$$\vec{p}_{soustavy}^{\,před\ srážkou} = \vec{p}_{soustavy}^{\,po\ srážce}$$

Soustava se v našem případě skládá ze dvou těles (loďka = 1 a kámen = 2), proto

$$\vec{p}_1^{\,před\ srážkou} + \vec{p}_2^{\,před\ srážkou} = \vec{p}_1^{\,po\ srážce} + \vec{p}_2^{\,po\ srážce}$$

Protože hybnost je vektorová fyzikální veličina, rozepíšeme zákon zachování hybnosti do směru osy $x$:

$$\vec{p}_{1x}^{\,před\ srážkou} + \vec{p}_{2x}^{\,před\ srážkou} = \vec{p}_{1x}^{\,po\ srážce} + \vec{p}_{2x}^{\,po\ srážce}$$

Hybnost = hmotnost · rychlost a kladný směr osy $x$ je doprava

$$0 + 0 = -m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2$$

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \;\rightarrow\; v_1 = \frac{m_2}{m_1} \cdot v_2$$

Dosadíme: $v_1 = \frac{0{,}5}{25} \cdot 1 = 0{,}02\ \mathrm{m/s}$

Odpověď: Rychlost loďky po odhození kamene je 0,02 m/s směrem doleva.

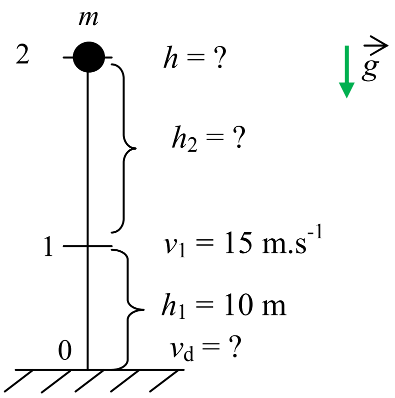
9. Z jaké výšky padalo těleso, má-li ve výšce 10 metrů nad zemí rychlost 15 m·s$^{-1}$ a jakou rychlostí dopadlo na zem?

---

$h$ = ? , $h_0$ = 0 m
$h_1$ = 10 m , $m$ = ?
$v_1$ = 15 m.s$^{-1}$ , $v_2$ = 0 m.s$^{-1}$
$v_d = v_0$ = ?

---

Úlohu budeme řešit pomocí zákona zachování energie. Hmotnost padajícího tělesa označíme jako $m$.
Označíme těleso ve výšce $h = h_1 + h_2$ jako stav 2, těleso ve výšce $h = h_1$ jako stav 1 a těleso při dopadu na zem jako stav 0.



Obrázek 2.12

Pro každý stav můžeme napsat kinetickou energii a potenciální energii tělesa.
Ve stavu 0 je výška $h_0$ = 0 m a rychlost $v_d$ = ?:
$E_{k0} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_d^2$ a $E_{p0} = m \cdot g \cdot h_0 = 0\,J$

Ve stavu 1 je výška $h_1$ = 10 m a rychlost $v_1$ = 15 m/s:
$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 15^2 = 112{,}5 \cdot m$ a $E_{p1} = m \cdot g \cdot h_1 = 10 \cdot 10 \cdot m$

Ve stavu 2 je výška $h = h_1 + h_2$ a rychlost $v_2$ = 0 m/s:
$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = 0\,J$ a $E_{p2} = m \cdot g \cdot h = (h_1 + h_2) \cdot m \cdot g = (10 + h_2) \cdot m \cdot g$

Pro pohyb tělesa platí zákon zachování energie, který můžeme napsat jako:
$$E_{k0} + E_{p0} = E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

Použijeme nejprve zákon zachování energie mezi stavem nula a jedna:
$$E_{k0} + E_{p0} = E_{k1} + E_{p1}$$
Dosadíme za energie:
$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_d^2 + m \cdot g \cdot h_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h_1$$

Celou rovnici vydělíme neznámou hmotností $m$ a vynásobíme dvěma, abychom vyjádřili dopadovou rychlost $v_d$:
$$v_d^2 + 2 \cdot g \cdot h_0 = v_1^2 + 2 \cdot g \cdot h_1$$

$$v_d = \sqrt{v_1^2 + 2 \cdot g \cdot (h_1 - h_0)}$$

Dosadíme:
$v_d = \sqrt{15^2 + 2 \cdot 10 \cdot (10 - 0)} = 20{,}6$ m/s

Nyní použijeme zákon zachování energie mezi stavem jedna a dva:

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

Dosadíme za energie:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 + m \cdot g \cdot h$$

Celou rovnici vydělíme neznámou hmotností *m* a vyjádříme celkovou výšku *h*:

$$\frac{1}{2} \cdot v_1^2 + g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot v_2^2 + g \cdot h$$

$$h = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot (v_1^2 - v_2^2) + h_1$$

Dosadíme:

$$h = \frac{1}{2 \cdot 10} \cdot (15^2 - 0) + 10 = 21{,}25 \text{ m}$$

Odpověď: Těleso padalo z výšky 21,25 metrů, na zem dopadlo rychlostí 20,6 $m \cdot s^{-1}$.

Pozn.: lze řešit pomocí volného pádu – viz. kapitola I, př. č. 11.

10. Vagón o hmotnosti 18 tun narazí do stojící vlakové soupravy o hmotnosti 180 tun rychlostí 2 m/s. Jakou rychlostí se souprava bude pohybovat po srážce za předpokladu, že se vagón spojí se soupravou? Jak daleko soustava po srážce dojede, je-li brzděna pouze silou tření s koeficientem tření 0,002?

---

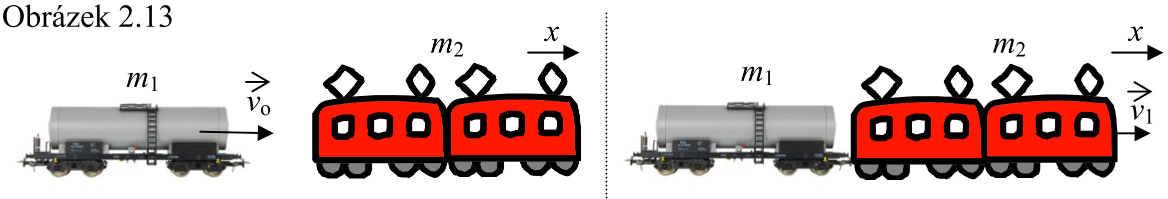
$m_1 = 18$ tun
$m_2 = 180$ tun
$v_0 = 2$ m/s
$f = 0{,}002$
$v_1 = ?$
$s = ?$

---

Řešení: Úlohu můžeme rozdělit na dvě části:

1) Srážka
   Pro srážku můžeme použít zákon zachování hybnosti.

Obrázek 2.13




Před srážkou    Po srážce

$$\vec{p}_{soustavy}^{\,před\ srážkou} = \vec{p}_{soustavy}^{\,po\ srážce}$$

Protože se soustava před srážkou v našem případě skládá ze dvou těles (vagón = 1 a souprava = 2) a po srážce můžeme obě tělesa považovat za jediné těleso o hmotnosti ($m_1 + m_2$) je:

$$\vec{p}_1^{\,před\ srážkou} + \vec{p}_2^{\,před\ srážkou} = \vec{p}_{soustavy}^{\,po\ srážce}$$

Protože hybnost je vektorová fyzikální veličina, rozepíšeme zákon zachování hybnosti do směru osy $x$:

$$\vec{p}_{1x}^{\,před\ srážkou} + \vec{p}_{2x}^{\,před\ srážkou} = \vec{p}_{soustavyx}^{\,po\ srážce}$$

Hybnost = hmotnost · rychlost

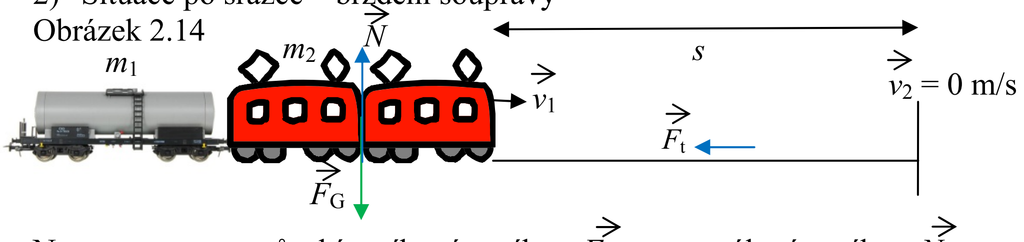
$$m_1 \cdot v_0 + 0 = (m_1 + m_2) \cdot v_1 \rightarrow v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_0$$

Po srážce se obě tělesa (vagón i souprava) pohybují stejnou rychlostí $v_1$

Číselně: $v_1 = \frac{18 \cdot 10^3}{(18+180) \cdot 10^3} \cdot 2 = 0{,}18\ \mathrm{m/s}$

2) Situace po srážce – brzdění soupravy

Obrázek 2.14




Na soustavu působí tíhová síla $\vec{F}_G$, normálová síla $\vec{N}$ a třecí síla $\vec{F}_t$. Soustava se nepohybuje ani ve směru normálové (vznášela by se) ani tíhové (propadala by se do země) síly, tj. druhý Newtonův pohybový zákon:

$$N - F_G = 0$$

Normálová síla musí být při vodorovném pohybu stejně velká jako síla tíhová

$$N = F_G = (m_1 + m_2) \cdot g$$

Třecí sílu vypočteme jako $F_t = f \cdot N$

Situaci po srážce lze popsat pomocí energií: kinetická energie soustavy po srážce se změní na práci třecí síly.

Práci třecí síly (resp. její absolutní hodnotu) vypočteme jako $W = F_t \cdot s$, neboť třecí síla je konstantní:

$$W = f \cdot (m_1 + m_2) \cdot g \cdot s$$

Kinetická energie soupravy po srážce se změní na práci třecí síly, tj.: $E_k = W$ (důležité je uvědomit si, že rychlost soupravy po srážce je $v_1$)

$$\frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v_1^2 = f \cdot (m_1 + m_2) \cdot g \cdot s$$

Celou rovnici můžeme vydělit $(m_1 + m_2)$ a dosadíme za $v_1$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_0\right)^2 = f \cdot g \cdot s$$

Neznámou je $s$:

$$s = \frac{1}{2 \cdot f \cdot g} \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_0\right)^2$$

Dosadíme:

$$s = \frac{1}{2 \cdot 0{,}002 \cdot 10} \cdot \left(\frac{18 \cdot 10^3}{(18 + 180) \cdot 10^3} \cdot 2\right)^2 = 0{,}83 \text{ m}$$

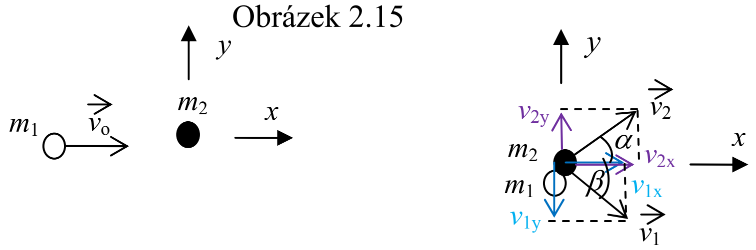
Odpověď: Rychlost vlakové soupravy po srážce je 0,18 m/s, vlaková souprava vlivem tření zastaví na vzdálenosti 0,83 m.

Poznámka: Situaci po srážce, tj. vzdálenost, kterou vlaková souprava ujede, než vlivem tření zastaví, lze najít také pomocí pohybových rovnic. Protože třecí síla je konstantní, zastavuje souprava rovnoměrně zpomaleně.

11. Bílou kulečníkovou koulí s rychlostí 1 m/s trefíme černou kulečníkovou kouli, která byla původně v klidu. Po srážce se obě koule pohybují stejně velkými rychlostmi. Určete úhel mezi původním směrem bílé koule a směrem černé koule po srážce za předpokladu, že obě koule mají stejné hmotnosti, nejde o středový ráz a srážka byla dokonale pružná. Případnou rotaci koulí zanedbejte.

Obrázek 2.15

$m_1 = m_2$
$v_1 = v_2$
$v_0 = 1$ m/s
$\alpha = ?$




Před srážkou Po srážce

Řešení
Pro řešení je důležitá situace před srážkou a po srážce.

Úlohu budeme řešit v soustavě souřadnic zobrazené na obrázku.
Složky rychlostí $v_1$ a $v_2$ v ose $x$ a $y$ můžeme vypočítat jako:
$v_{2x} = v_2 \cdot cos\alpha$ a $v_{2y} = v_2 \cdot sin\alpha$;
$v_{1x} = v_1 \cdot cos\beta$ a $v_{1y} = v_1 \cdot sin\beta$.

Pro srážku použijeme zákon zachování hybnosti:

$$\vec{p}_{soustavy}^{\,před\ srážkou} = \vec{p}_{soustavy}^{\,po\ srážce}$$

Protože se soustava v našem případě skládá ze dvou koulí (bílé = 1 a černé = 2) je zákon zachování hybnosti:

$$\vec{p}_1^{\,před\ srážkou} + \vec{p}_2^{\,před\ srážkou} = \vec{p}_1^{\,po\ srážce} + \vec{p}_2^{\,po\ srážce}$$

Protože hybnost je vektorová fyzikální veličina, rozepíšeme zákon zachování hybnosti do směrů os $x$ a $y$:

$$\vec{p}_{1x}^{\,před\ srážkou} + \vec{p}_{2x}^{\,před\ srážkou} = \vec{p}_{1x}^{\,po\ srážce} + \vec{p}_{2x}^{\,po\ srážce}$$
$$\vec{p}_{1y}^{\,před\ srážkou} + \vec{p}_{2y}^{\,před\ srážkou} = \vec{p}_{1y}^{\,po\ srážce} + \vec{p}_{2y}^{\,po\ srážce}$$

Hybnost vypočteme jako $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Zákon zachování hybnosti v ose $x$:

$$m_1 \cdot v_0 + 0 = m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x}$$
$$m_1 \cdot v_0 + 0 = m_1 \cdot v_1 \cdot cos\beta + m_2 \cdot v_2 \cdot cos\alpha$$

Protože hmotnosti koulí jsou stejné, můžeme celou rovnici vydělit $m_1 = m_2$ a dostaneme rovnici:

$$v_0 = v_1 \cdot cos\beta + v_2 \cdot cos\alpha$$

Rychlosti obou koulí po srážce jsou také stejné ($v_1 = v_2$), tj.:

$$v_0 = v_1 \cdot (cos\beta + cos\alpha)$$

Tato rovnice má neznámé $v_1$, $\alpha$ a $\beta$.
Obdobně rozepíšeme zákon zachování hybnosti pro osu $y$:

$$0 + 0 = -m_1 \cdot v_{1y} + m_2 \cdot v_{2y}$$
$$0 = -m_1 \cdot v_1 \cdot sin\beta + m_2 \cdot v_2 \cdot sin\alpha$$

Celou rovnici můžeme vydělit $m_1 = m_2$ a dostaneme rovnici:

$$0 = -v_1 \cdot sin\beta + v_2 \cdot sin\alpha$$

Protože rychlosti koulí po srážce jsou stejné ($v_1 = v_2$), můžeme rovnici rychlostmi vydělit a dostaneme:

$$0 = -sin\beta + sin\alpha$$

Tedy

$$sin\beta = sin\alpha \rightarrow \alpha = \beta$$

Ze zadání předpokládáme, že srážka je dokonale pružná, tj. platí zákon zachování energie:

$$E_{k1}^{před\ srážkou} + E_{k2}^{před\ srážkou} = E_{k1}^{po\ srážce} + E_{k2}^{po\ srážce}$$

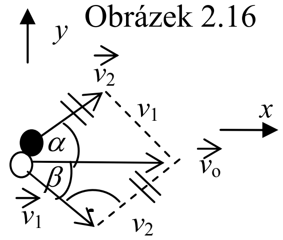
$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2$$

Celou rovnici můžeme vydělit $m_1 = m_2$ a vynásobit dvěma a dostaneme rovnici:

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2$$

Výpočet neznámého úhlu $\alpha$ si značně zjednodušíme, pokud si uvědomíme geometrický význam této rovnice, tj. Pythagorovu větu.

Obrázek 2.16




Vektory $v_1$, $v_2$ a $v_0$ tvoří pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $v_1$ a $v_2$ a přeponou $v_0$ (viz. obr. vpravo)
Pro úhly $\alpha$ a $\beta$ tedy musí platit $\alpha + \beta = \pi/2$

Neboť z předchozího vyplývá, že $\alpha = \beta$, musí být $\alpha = \beta = \pi/4$

Odpověď: Proti původnímu směru bílé koule bude černá koule po srážce odchýlena o 45°.

Poznámka: Pro číselné řešení spojíme všechny rovnice dohromady:

$$\alpha = \beta$$

$$v_0 = v_1 \cdot (cos\beta + cos\alpha) \rightarrow v_0 = 2 \cdot v_1 \cdot cos\alpha$$

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \rightarrow v_0^2 = 2 \cdot v_1^2$$

Z poslední rovnice $v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$
Číselně $v_1 = v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$ m/s
Dosadíme do prostřední rovnice:

$$v_0 = 2 \cdot v_1 \cdot cos\alpha = 2 \cdot \frac{v_0}{\sqrt{2}} \cdot cos\alpha$$

Tedy:

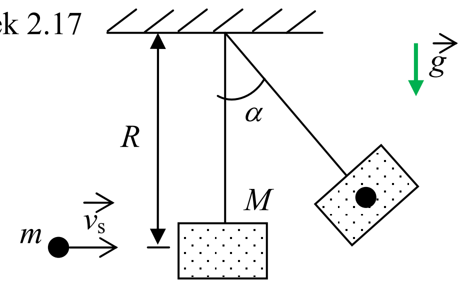
$$cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

12. Střela o hmotnosti 45 g zasáhne kyvadlo o hmotnosti 247 g, které bylo původně v klidu umístěné na závěsu délky 28 cm a úhel vychýlení po nárazu je 18°. Určete rychlost střely před nárazem.

---

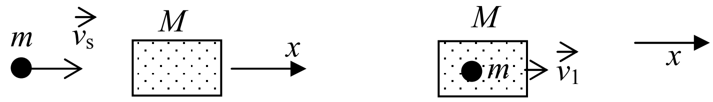
$M = 247$ g
$R = 28$ cm
$m = 45$ g
$\alpha = 18°$
$v_s = ?$

Obrázek 2.17




Řešení:
Úlohu můžeme rozdělit na dvě části:

1) Srážka
Nejprve budeme řešit srážku střely o hmotnosti $m = 45$ g a kyvadla o hmotnosti $M = 247$ g. Pro tuto srážku platí zákon zachování hybnosti.



Obrázek 2.18

Před srážkou Po srážce

$$\vec{p}_{soustavy}^{\,před\ srážkou} = \vec{p}_{soustavy}^{\,po\ srážce}$$

Protože se soustava v našem případě skládá ze dvou těles (střela = 1 a kyvadlo = 2), je:

$$\vec{p}_1^{\,před\ srážkou} + \vec{p}_2^{\,před\ srážkou} = \vec{p}_1^{\,po\ srážce} + \vec{p}_2^{\,po\ srážce}$$

Protože hybnost je vektorová fyzikální veličina, rozepíšeme zákon zachování hybnosti do směru os $x$:

$$\vec{p}_{1x}^{\,před\ srážkou} + \vec{p}_{2x}^{\,před\ srážkou} = \vec{p}_{1x}^{\,po\ srážce} + \vec{p}_{2x}^{\,po\ srážce}$$

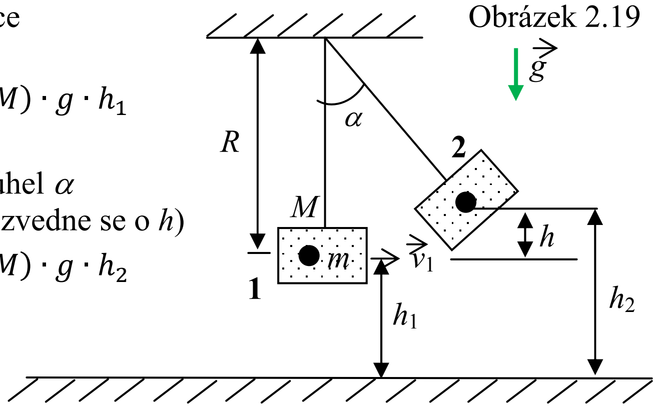
Hybnost = hmotnost · rychlost

$$m \cdot v_s + 0 = m \cdot v_1 + M \cdot v_1 \rightarrow v_1 = \frac{m}{m + M} \cdot v_s$$

Po srážce se obě tělesa (střela i kyvadlo) pohybují stejnou rychlostí $v_1$

2) Situace po srážce – kyvadlo se střelou uvnitř se vychýlí o úhel $\alpha = 18°$

Obrázek 2.19




Stav 1: Kyvadlo se střelou těsně po srážce
(rychlost $v_1$, výška nad zemí $h_1$)
$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot (m + M) \cdot v_1^2$ a $E_{p1} = (m + M) \cdot g \cdot h_1$

Stav 2: Kyvadlo se střelou se vychýlí o úhel $\alpha$
(rychlost $v_2 = 0$ m/s, výška nad zemí $h_2$, zvedne se o $h$)
$E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot (m + M) \cdot v_2^2$ a $E_{p2} = (m + M) \cdot g \cdot h_2$

Pro pohyb kyvadla se střelou platí zákon zachování energie, který můžeme napsat jako:

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

Dosadíme do zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2} \cdot (m + M) \cdot v_1^2 + (m + M) \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot (m + M) \cdot v_2^2 + (m + M) \cdot g \cdot h_2$$

Celou rovnici můžeme vydělit ($m + M$), dostaneme:

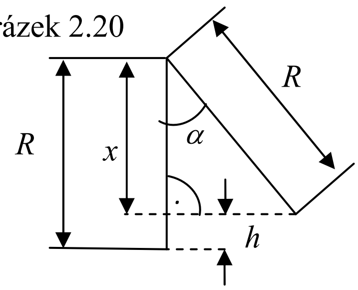
$$\frac{1}{2} \cdot v_1^2 + g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot v_2^2 + g \cdot h_2$$

Ve stavu 2 je $v_2 = 0$ m/s (kyvadlo je v nejvyšší poloze v klidu), tj. $E_{k2} = 0$ J.

$$\frac{1}{2} \cdot v_1^2 + g \cdot h_1 = g \cdot h_2 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot v_1^2 = g \cdot (h_2 - h_1)$$

Podle obrázku je $h_2 - h_1 = h$

Obrázek 2.20




Za $v_1$ můžeme dosadit ze zákona zachování hybnosti:

$$\frac{1}{2} \cdot v_1^2 = g \cdot h$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m}{m + M} \cdot v_s\right)^2 = g \cdot h$$

Výšku, o kterou se kyvadlo zvedne ($h$) lze vypočítat, použijeme-li zadaný úhel $\alpha$: Z definice goniometrických funkcí a z obrázku vpravo:

$$cos\alpha = \frac{x}{R} \rightarrow x = R \cdot cos\alpha$$

Výška:

$$h = R - x = R - R \cdot cos\alpha = R \cdot (1 - cos\alpha)$$

Vyjádříme neznámou rychlost střely $v_s$:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m}{m + M} \cdot v_s\right)^2 = g \cdot R \cdot (1 - cos\alpha)$$

$$\frac{m}{m + M} \cdot v_s = \sqrt{2 \cdot g \cdot R \cdot (1 - cos\alpha)}$$

$$v_s = \frac{m + M}{m} \sqrt{2 \cdot g \cdot R \cdot (1 - cos\alpha)}$$

Dosadíme

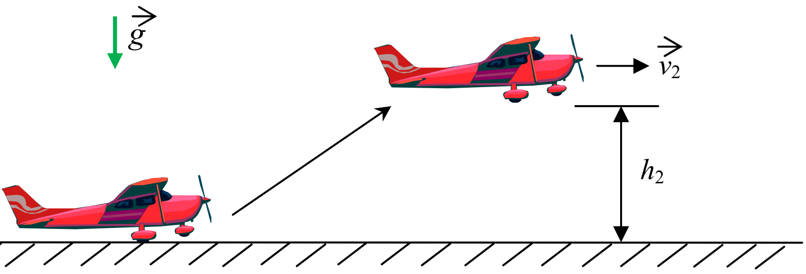
$$v_s = \frac{0{,}045 + 0{,}247}{0{,}045} \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}28 \cdot (1 - cos18°)} = 3{,}4 \text{ m/s}$$

Odpověď: Rychlost střely před nárazem byla 3,4 m/s.

13. Letadlo hmotnosti 3 t vystoupá za 1 minutu po startu do výšky 1 km a dosáhne rychlosti 280 km/h. Určete průměrný výkon jeho motorů za tuto dobu.

Obrázek 2.21

$m = 3$ t $= 3000$ kg
$t = 1$ min $= 60$ s
$h_2 = 1$ km $= 1000$ m
$v_2 = 280$ km/h $= 77{,}8$ m/s
$P = ?$




Řešení:

Průměrný výkon motorů vypočteme jako: $P = \frac{W}{t}$

Práce, kterou motory vykonají, se spotřebuje na přírůstek kinetické a potenciální energie letadla: $W = \Delta E$.

Stav 1 je letadlo na zemi (letadlo je v klidu $v_1 = 0$ m/s , v nulové výšce $h_1 = 0$ m):
$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = 0\,J$ a $E_{p1} = m \cdot g \cdot h_1 = 0\,J$

Stav 2 je letadlo ve vzduchu (letadlo má rychlost $v_2 = 77{,}8$ m/s , je ve výšce $h_2 = 1000$ m):
$E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2$ a $E_{p2} = m \cdot g \cdot h_2$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\Delta E}{t} = \frac{E_2 - E_1}{t} = \frac{(E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1})}{t}$$

$$P = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 + m \cdot g \cdot h_2\right) - (0 + 0)}{t}$$

Dosadíme:

$$P = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot 3000 \cdot 77{,}8^2 + 3000 \cdot 10 \cdot 1000\right)}{60} = 651\ \mathrm{kW}$$

Odpověď: Průměrný výkon motorů letadla je 651 kW.

Pozn.: Řešení pomocí energií má výhodu, že nemusíme znát přesnou trajektorii letadla. Pokud bychom chtěli úlohu řešit pomocí pohybových rovnic, museli bychom znát trajektorii a typ pohybu letadla (např. přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb).

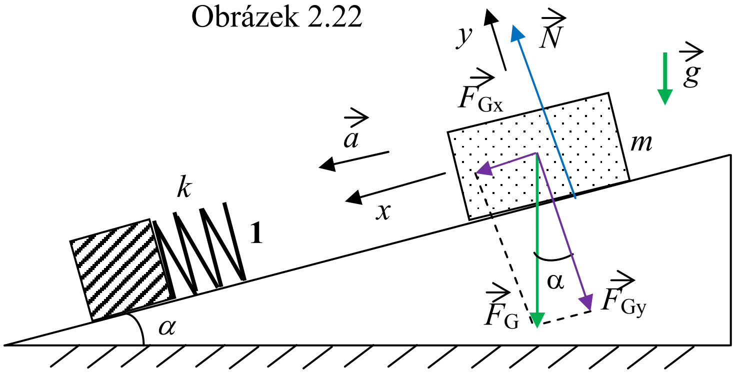
14. Kostku o hmotnosti 12 kg položíme na nakloněnou rovinu o úhlu sklonu 30°. Na nakloněné rovině je položena pružina, jejíž tuhost je taková, že ji silou 270 N dokážeme stlačit o 2 cm. Kostka narazí na pružinu a stlačuje ji. V okamžiku, kdy je rychlost kostky nulová, je pružina stlačena o 5,5 cm.
   a) S jakou rychlostí narazila kostka do pružiny?
   b) Jakou dráhu urazila kostka po nakloněné rovině od okamžiku, kdy byla vypuštěna do okamžiku, kdy narazila do pružiny?

   Pozn.: Tření mezi kostkou a nakloněnou rovinou zanedbejte.

---

$m = 12$ kg
$\alpha = 30°$
$F = 270$ N
$\Delta l = 2$ cm
$\Delta x = 5{,}5$ cm $= 0{,}055$ m
$v = ?$
$s = ?$

Obrázek 2.22




Řešení:
Ze zadání můžeme vypočítat tuhost pružiny:
Pružná síla $|F| = k \cdot \Delta l \ \rightarrow k = \frac{|F|}{\Delta l} = \frac{270}{0{,}02} = 13500 \ \mathrm{N/m}$

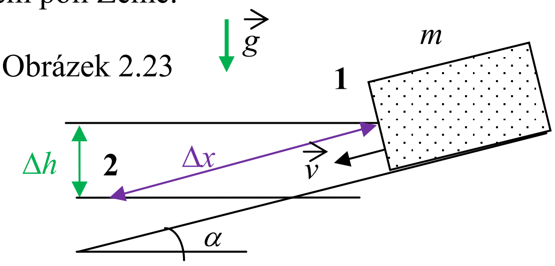
Příklad budeme řešit pomocí zákona zachování energie. Kostka v průběhu nárazu předá pružině svoji kinetickou energii, kterou měla těsně před nárazem a také potenciální energii, kterou získá v průběhu nárazu poklesem v tíhovém poli Země.

Popíšeme nejprve energie kostky.
Stav 1: kostka těsně před nárazem do pružiny (má kinetickou i potenciální energii):

$E_{k1}^{kostka} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2,$

$E_{p1}^{kostka} = m \cdot g \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot \Delta x \cdot sin\alpha$

Obrázek 2.23




Stav 2: kostka se po nárazu do pružiny zastaví, potenciální energii volíme rovnu nule:

$$E_{k2}^{kostka} = 0 \, J, E_{p2}^{kostka} = \ 0 \, J$$

Nyní popíšeme energie pružiny.
Stav 1: kostka těsně před nárazem do pružiny, pružina není stlačena

$$E_{p1}^{pružina} = 0 \, J$$

Stav 2: po nárazu se pružina stlačí o $\Delta x = 5{,}5$ cm a získá potenciální energii:

$$E_{p2}^{pružina} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta x)^2$$

Zákon zachování energie pro tuto situaci lze formulovat tak, že celková energie soustavy ve stavu 1 je stejná jako celková energie soustavy ve stavu 2, tj.

$$E_{k1}^{kostka} + E_{p1}^{kostka} + E_{p1}^{pružina} = E_{k2}^{kostka} + E_{p2}^{kostka} + E_{p2}^{pružina}$$

Dosadíme-li za energie, dostáváme:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot \Delta x \cdot sin\alpha + 0 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta x)^2$$

Celou rovnici vynásobíme dvěma, vydělíme hmotností kostky a vyjádříme neznámou rychlost:

$$v^2 = \frac{k \cdot (\Delta x)^2}{m} - 2 \cdot g \cdot \Delta x \cdot sin\alpha$$

$$v = \sqrt{\frac{k \cdot (\Delta x)^2}{m} - 2 \cdot g \cdot \Delta x \cdot sin\alpha}$$

$$v = \sqrt{\frac{13500 \cdot (0{,}055)^2}{12} - 2 \cdot 10 \cdot 0{,}055 \cdot sin30°} = 1{,}69 \text{ m/s}$$

Na kostku působí síla tíhová síla $\vec{F}_G$ a normálová síla $\vec{N}$ (ta je kolmá na podložku). Pohyb kostky po nakloněné rovině (v ose $x$) způsobuje složka $\vec{F}_{Gx}$.

Složky tíhové síly $F_G$ do směrů osy $x$ a $y$:
$F_{Gx} = F_G \cdot sin\alpha = m \cdot g \cdot sin\alpha$
$F_{Gy} = F_G \cdot cos\alpha = m \cdot g \cdot cos\alpha$

Do srážky s pružinou se kostka pohybuje rovnoměrně zrychleně a to vlivem síly $F_{Gx} = m \cdot g \cdot sin\alpha$

Práce, kterou vykoná tato síla, se změní v kinetickou energii $E_{k1}$: $W = \Delta E_k$

Protože síla $F_{Gx}$ je konstantní, vypočte se práce jako:

$$W = F_{Gx} \cdot s = m \cdot g \cdot s \cdot sin\alpha$$

Dosadíme-li za práci a kinetickou energii, dostáváme rovnici:

$$m \cdot g \cdot s \cdot sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Z této rovnice vyjádříme neznámou dráhu $s$:

$$s = \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot sin\alpha}$$

Dosadíme:

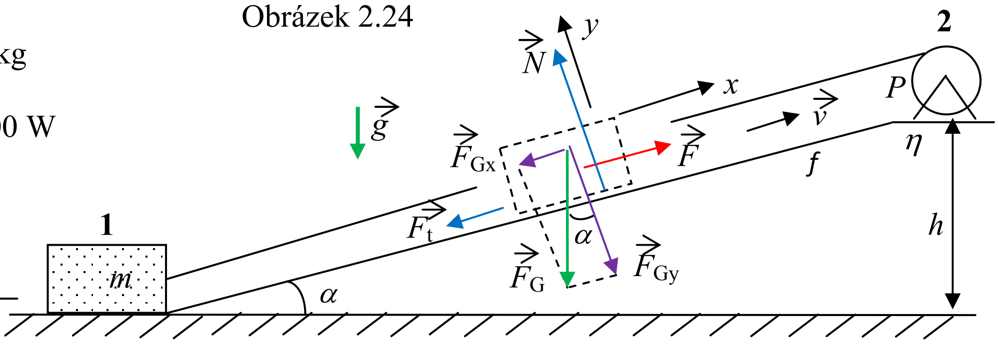
$$s = \frac{(1{,}69)^2}{2 \cdot 10 \cdot sin30°} = 0{,}28 \text{ m}$$

Odpověď: Rychlost, kterou kostka narazí do pružiny je 1,69 m/s a dráha, kterou kostka urazí do nárazu s pružinou je 0,28 m.

15. Za jak dlouho zdvihne motor rovnoměrným pohybem kabinovou lanovku hmotnosti 1,2 t po nakloněné rovině do výšky 200 m, má-li motor příkon 10 kW a účinnost 65 %? Koeficient tření je 0,1, úhel nakloněné roviny α = 30°.

Obrázek 2.24

$m = 1200$ kg
$h = 200$ m
$P_p = 10\,000$ W
$\eta = 0{,}65$
$f = 0{,}1$
$\alpha = 30°$
$t = ?$




Řešení:

Známe-li příkon motoru a jeho účinnost, můžeme vypočítat výkon motoru:

$$\eta = \frac{P}{P_p} \rightarrow P = \eta \cdot P_p$$

Výkon motoru číselně: $P = \eta \cdot P_p = 0{,}65 \cdot 10000 = 6500$ W

Výkon motoru se spotřebuje na zvýšení energie kabiny ($\Delta E$) a na práci třecí síly ($W_{Ft}$). Předpokládáme, že se kabina pohybuje stálou rychlostí $v$.

Označíme-li kabinu dole na nakloněné rovině jako stav 1, pak je:

$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ a $E_{p1} = m \cdot g \cdot h_1 = 0\,J$

Kabinu nahoře na nakloněné rovině označíme jako stav 2:

$E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ a $E_{p2} = m \cdot g \cdot h$

Na kabinu lanovky o hmotnosti $m$ působí kromě tíhové síly $F_G$, kterou opět rozložíme do směrů osy $x$ a $y$ ($F_{Gx} = F_G \cdot sin\alpha = m \cdot g \cdot sin\alpha$ a $F_{Gy} = F_G \cdot cos\alpha = m \cdot g \cdot cos\alpha$), také síla normálová ($N$), tažná síla lanovky ($F$) a třecí síla $F_t$ (proti pohybu).

Druhý Newtonův zákon rozepsaný pro osu $y$:

$$N - F_{Gy} = m \cdot a_y$$
$$N - F_{Gy} = 0$$
$$N = F_{Gy} = m \cdot g \cdot cos\alpha$$

Třecí sílu na nakloněné rovině vyjádříme jako:

$$F_t = f \cdot N = f \cdot m \cdot g \cdot cos\alpha$$

Práci třecí síly (resp. její absolutní hodnotu) lze vyjádřit jako: $W_{Ft} = F_t \cdot s$, protože třecí síla je konstantní, kde $s$ je délka nakloněné roviny.

Délku nakloněné roviny vyjádříme pomocí její výšky $h$ využitím goniometrické funkce jako:

$$sin\alpha = \frac{h}{s} \rightarrow s = \frac{h}{sin\alpha}$$

Výkon motoru lze napsat jako:

$$P = \eta \cdot P_p = \frac{W}{t} = \frac{\Delta E + W_{Ft}}{t} = \frac{\left[\left(E_{k2} + E_{p2}\right) - \left(E_{k1} + E_{p1}\right)\right] + W_{Ft}}{t}$$

$$\eta \cdot P_p = \frac{\left[\left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + 0\right)\right] + W_{Ft}}{t}$$

Kinetická energie kabiny dole je stejná jako kinetická energie kabiny nahoře (a to ať se kabina pohybuje jakoukoli rychlostí), a proto k práci motoru nepřispívá. Je možné si představit, že kabina dole i nahoře je v klidu.

Z rovnice vyjádříme neznámý čas a dosadíme za práci třecí síly:

$$t = \frac{m \cdot g \cdot h + F_t \cdot s}{\eta \cdot P_p} = \frac{m \cdot g \cdot h + f \cdot m \cdot g \cdot cos\alpha \cdot \frac{h}{sin\alpha}}{\eta \cdot P_p}$$

$$t = \frac{m \cdot g \cdot h \cdot \left(1 + \frac{f}{tg\alpha}\right)}{\eta \cdot P_p}$$

Dosadíme:

$$t = \frac{1200 \cdot 10 \cdot 200 \cdot \left(1 + \frac{0{,}1}{tg30°}\right)}{0{,}65 \cdot 10000} = 433 \text{ s} = 7 \text{ min } 13 \text{ s}$$

Odpověď: Motor lanovky zdvihne kabinu nahoru za 7 minut a 13 sekund.

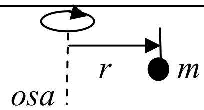
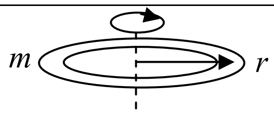
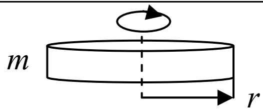
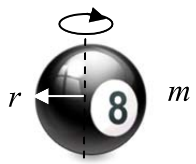
Poznámka: Budeme-li uvažovat, že kabina byla na začátku v klidu, pak je třeba uvažovat i práci sil potřebnou na vzrůst kinetické energie $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$. Při brzdění se opět v motoru spotřebuje práce na úbytek energie $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$.

# III. Mechanika tělesa

Teorie:

Rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb ($\alpha$ je úhlové zrychlení):
Úhlová rychlost: $\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$
Úhlová dráha: $\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$
Vztah mezi úhlovou rychlostí a frekvencí (periodou): $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T}$
Vzorec pro výpočet těžiště: $x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$, $y_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ a $z_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$,
Pohybová rovnice pro otáčivý pohyb: $M = J \cdot \alpha$
Moment síly *M* se vypočítá podle vztahu: $M = R \cdot F$, kde *R* je rameno síly a *F* je velikost síly, jež je vůči rotační ose mimoběžná ve vzdálenosti *R* a navíc k ose otáčení kolmá.

Moment setrvačnosti *J*:

| Těleso | Obrázek | Vzorec |
|---|---|---|
| Hmotný bod |  | $J = m \cdot r^2$ |
| Obruč |  | $J = m \cdot r^2$ |
| Disk |  | $J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$ |
| Koule |  | $J = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$ |

Kinetická energie rotačního pohybu $E_k = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$

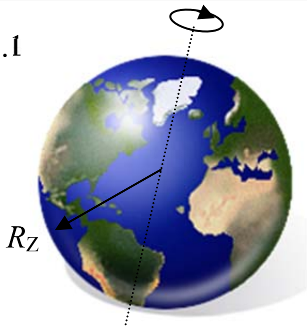
Podmínky rovnováhy – silová $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \vec{0}$
- momentová $\sum_{i=1}^{n} \vec{M_i} = \vec{0}$

Moment hybnosti $L = J \cdot \omega$

konstanty: tíhové zrychlení $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

1. Vypočtěte moment setrvačnosti a kinetickou energii rotující planety Země, považujeme-li ji za homogenní kouli s hmotností $6 \cdot 10^{24}$ kg a poloměrem 6378 km. Doba jednoho otočení Země okolo její geometrické osy je 24 h.

Obrázek 3.1




$M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg
$R_Z = 6378$ km
$T = 24$ h = 1440 min = 86400 s
$J_{Země} = ?$
$E_k = ?$

Řešení:
Můžeme-li planetu Zemi považovat za homogenní kouli rotující okolo své geometrické osy, lze její moment setrvačnosti vypočítat dle vzorce:

$$J = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2,$$

kde *m* je hmotnost koule a *r* je poloměr koule.
Pro Zemi je tedy:

$$J_{Země} = \frac{2}{5} \cdot M_z \cdot R_z^2$$

Číselně:

$$J_{Země} = \frac{2}{5} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (6378 \cdot 10^3)^2 = 9{,}76 \cdot 10^{37}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

Kinetická energie rotujícího tělesa se vypočítá dle vzorce:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

Pro Zemi je tedy:

$$E_k^{Země} = \frac{1}{2} \cdot J_{Země} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot M_z \cdot R_z^2\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2$$

Číselně:

$$E_k^{Země} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (6378 \cdot 10^3)^2\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot 3{,}14}{86400}\right)^2 = 2{,}58 \cdot 10^{29}\ \mathrm{J}$$

Odpověď: Moment setrvačnosti planety Země je $9{,}76 \cdot 10^{37}$ kg·m² a její kinetická energie je $2{,}58 \cdot 10^{29}$ J.

2. Setrvačník s momentem setrvačnosti 20 kg·m$^2$, který pohání gyromobil, sníží svou frekvenci z 25 s$^{-1}$ na 12,5 s$^{-1}$ během půl hodiny. Jaký výkon musí mít elektromotor ovládající setrvačník?

---

$f_1 = 25\ \mathrm{s}^{-1}$
$f_2 = 12{,}5\ \mathrm{s}^{-1}$
$t = 30\ \mathrm{min} = 1800\ \mathrm{s}$
$J = 20\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}$
$P = ?$

---

Řešení:
Výkon vypočteme jako $P = \frac{W}{t}$
$W$ je práce potřebná na snížení otáček z frekvence $f_1$ na $f_2$:
Tuto práci lze vyjádřit jako změnu kinetické energie:

$$W = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_2^2 - \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_1^2$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot J \cdot [(2 \cdot \pi \cdot f_2)^2 - (2 \cdot \pi \cdot f_1)^2] = \frac{1}{2} \cdot J \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot (f_2^2 - f_1^2)$$

Výkon elektromotoru je tedy:

$$P = \frac{|W|}{t} = \frac{2 \cdot J \cdot \pi^2 \cdot (f_1^2 - f_2^2)}{t}$$

Číselně:

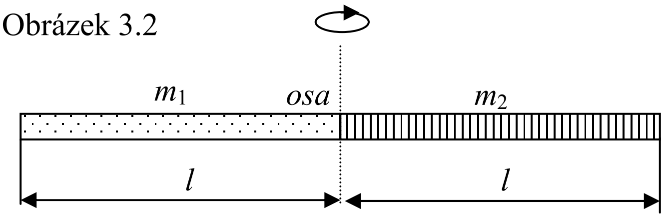
$$P = \frac{2 \cdot 20 \cdot 3{,}14^2 \cdot (25^2 - 12{,}5^2)}{1800} = 103\ \mathrm{W}$$

Odpověď: Výkon elektromotoru je 103 W.

3. Tyč se skládá ze dvou částí stejné délky $l$ = 2 m. První má hmotnost $m_1$ = 5 kg a druhá hmotnost $m_2$ = 8 kg. Jakou práci vykonáme, máme-li tyč roztočit kolem osy kolmé na směr délky, procházející středem tyče tak, aby se otáčela s frekvencí $f$ = 2 s$^{-1}$?

$l$ = 2 m
$m_1$ = 5 kg
$m_2$ = 8 kg
$f$ = 2 s$^{-1}$
$W$ = ?

Obrázek 3.2




Řešení:
Nejprve vypočteme moment setrvačnosti tyče. Moment setrvačnosti je aditivní veličina, tj. pokud je $J_1$ moment setrvačnosti levé části tyče a $J_2$ moment setrvačnosti pravé části tyče je celkový moment setrvačnosti tyče:

$$J_{tyče} = J_1 + J_2$$

Protože levou část tyče můžeme chápat jako samostatnou tyč o hmotnosti $m_1$ = 5 kg a délce $l$ = 2 m otáčející se okolo osy procházející koncem tyče, je její moment setrvačnosti:

$$J_1 = \frac{1}{3} \cdot m_1 \cdot l^2 = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 2^2 = 6{,}7\ \text{kg·m}^2$$

Podobně, pravou část tyče lze chápat jako samostatnou tyč o hmotnosti $m_2$ = 8 kg a délce $l$ = 2 m otáčející se okolo osy procházející koncem tyče, její moment setrvačnosti je:

$$J_2 = \frac{1}{3} \cdot m_2 \cdot l^2 = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 2^2 = 10{,}7\ \text{kg·m}^2$$

Moment setrvačnosti celé tyče je tedy:

$$J_{tyče} = J_1 + J_2 = \frac{1}{3} \cdot m_1 \cdot l^2 + \frac{1}{3} \cdot m_2 \cdot l^2 = \frac{1}{3} \cdot (m_1 + m_2) \cdot l^2 = \frac{1}{3} \cdot (5 + 8) \cdot 2^2$$
$$J_{tyče} = 17{,}4\ \text{kg·m}^2$$

Práce, kterou vykonáme, se spotřebuje na zvýšení kinetické energie rotující tyče. Počáteční kinetická energie je nula (tyč je v klidu vůči předem zvolené vztažné souřadné soustavě), konečná kinetická energie rotující tyče je
$E_k = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$. Práce je:

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} \cdot J_{tyče} \cdot \omega^2 - 0 = \frac{1}{2} \cdot J_{tyče} \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2$$

Dosadíme za moment setrvačnosti tyče:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (m_1 + m_2) \cdot l^2\right] \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2$$

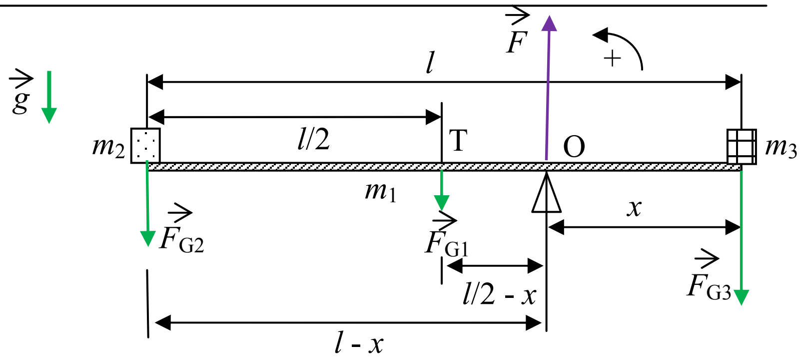
Číselně:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (5 + 8) \cdot 2^2\right] \cdot (2 \cdot 3{,}14 \cdot 2)^2 = 1372\ \text{J}$$

Odpověď: Práce potřebná na roztočení tyče je 1372 J.

4. Tyč, jejíž hmotnost je 5 kg a délka 2 m, je na koncích zatížena dvěma závažími o hmotnostech 10 kg a 15 kg. Najděte místo, kde musíme tyč podepřít, aby byla v rovnováze.

$m_1 = 5$ kg
$l = 2$ m
$m_2 = 10$ kg
$m_3 = 15$ kg
$x = ?$




Obrázek 3.3

Řešení:
Na tyč působí čtyři síly $\vec{F}_{G1}$ (tíhová síla působící na tyč – působí v těžišti tyče, které je uprostřed tyče), $\vec{F}_{G2}$ (tíhová síla působící na závaží o hmotnosti $m_2$), $\vec{F}_{G3}$ (tíhová síla působící na závaží o hmotnosti $m_3$) a $\vec{F}$ (síla tlaková v bodě podepření).

Tyč bude v rovnováze vůči bodu O, ve kterém je podepřena, budou-li splněny následující dvě podmínky:

a) Silová rovnováha, tj. výsledná síla působící na tyč je nulová.

$$\vec{F}_{G1} + \vec{F}_{G2} + \vec{F}_{G3} + \vec{F} = \vec{0}$$

Tuto rovnici lze využít pro výpočet velikosti tlakové síly $F$. Bereme-li směr dolů kladně, je:
$F_{G1} + F_{G2} + F_{G3} - F = 0$, tj.

$$F = F_{G1} + F_{G2} + F_{G3} = m_1 \cdot g + m_2 \cdot g + m_3 \cdot g = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot g$$

Číselně: $F = (5 + 10 + 15) \cdot 10 = 300$ N

b) Momentová rovnováha, tj. výsledný moment sil působící na tyč je nulový.

$$\vec{M}_F + \vec{M}_{FG1} + \vec{M}_{FG2} + \vec{M}_{FG3} = \vec{0} \rightarrow -\vec{M}_F = \vec{M}_{FG1} + \vec{M}_{FG2} + \vec{M}_{FG3}$$

Počítáme momenty vzhledem k bodu O (moment síly vypočteme jako rameno · síla)
Z této rovnice určíme polohu výsledné síly. Znaménková konvence momentu sil je, že pokud síla otáčí s tyčí proti směru hodinových ručiček, bereme jej kladně. Kladné jsou momenty sil $F_{G1}$ a $F_{G2}$, záporný je moment síly $F_{G3}$. Moment tlakové síly je nulový (nulové rameno)

$$0 \cdot F = \left(\frac{l}{2} - x\right) \cdot F_{G1} + (l - x) \cdot F_{G2} - x \cdot F_{G3}$$

$$0 = \left(\frac{l}{2} - x\right) \cdot m_1 \cdot g + (l - x) \cdot m_2 \cdot g - x \cdot m_3 \cdot g$$

Celou rovnici můžeme vydělit tíhovým zrychlením $g$. Na jednu stranu rovnice převedeme neznámou $x$, na druhou stranu rovnice ostatní členy.

$$m_1 \cdot x + m_2 \cdot x + m_3 \cdot x = \frac{l}{2} \cdot m_1 + l \cdot m_2$$

$$x = \frac{l}{2} \cdot \frac{m_1 + 2 \cdot m_2}{m_1 + m_2 + m_3}$$

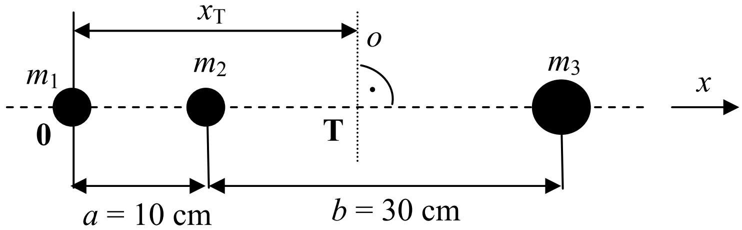
Číselně:

$$x = \frac{2}{2} \cdot \frac{5 + 2 \cdot 10}{5 + 10 + 15} = 0{,}83 \text{ m}$$

Odpověď: Aby byla tyč v rovnováze, musíme ji podepřít 83 cm od konce, na kterém je závaží o hmotnosti $m_3$.

5. Tři kovové kuličky, jejichž hmotnosti jsou postupně $m_1$ = 200 g, $m_2$ = 350 g a $m_3$ = 600 g, leží v jedné přímce ve vzdálenostech $m_1$ a $m_2$ 10 cm a $m_2$ a $m_3$ 30 cm. Určete moment setrvačnosti této soustavy vzhledem k rotační ose $o$ procházející jejím těžištěm kolmo na spojnici všech tří těles.

$m_1 = 0{,}2$ kg
$m_2 = 0{,}35$ kg
$m_3 = 0{,}6$ kg
$a = 0{,}1$ m
$b = 0{,}3$ m
$J = ?$




Obrázek 3.4

Řešení:
Pro výpočet momentu setrvačnosti nejprve potřebujeme vypočítat polohu těžiště soustavy kuliček $x_T$. Úlohu budeme řešit v soustavě souřadnic dle obr.

Těžiště soustavy hmotných bodů lze určit pomocí vzorce $x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$

Přičemž $n$ je počet hmotných bodů, $m_i$ je hmotnost daného hmotného bodu a $x_i$ je poloha daného hmotného bodu v soustavě souřadnic.

V našem případě tří hmotných bodů je $x_T = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

V soustavě souřadnic dle obr. je $x_1 = 0$, $x_2 = a$ a $x_3 = a + b$

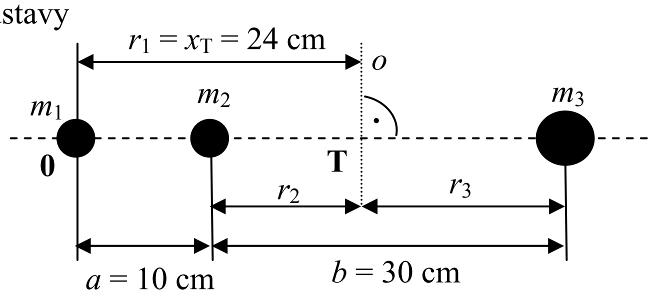
Poloha těžiště je:

$$x_T = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot a + m_3 \cdot (a + b)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_T = \frac{0{,}2 \cdot 0 + 0{,}35 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot (0{,}1 + 0{,}3)}{0{,}2 + 0{,}35 + 0{,}6} = 0{,}24 \text{ m}$$

Nyní vypočteme moment setrvačnosti soustavy

Obrázek 3.5




Moment setrvačnosti je skalární aditivní veličina, tj. celkový moment setrvačnosti soustavy tří hmotných bodů je

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i = J_1 + J_2 + J_3$$

Moment setrvačnosti hmotného bodu vypočteme jako $J_i = m_i \cdot r_i^2$, kde $m_i$ je hmotnost daného hmotného bodu a $r_i$ je vzdálenost daného hmotného bodu od osy otáčení. Podle obrázku je:
$r_1 = x_T = 24$ cm; $r_3 = a + b - x_T = 16$ cm; $r_2 = b - r_3 = x_T - a = 14$ cm

Moment setrvačnosti tří kuliček dle zadání je:

$$J = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2$$

Číselně:

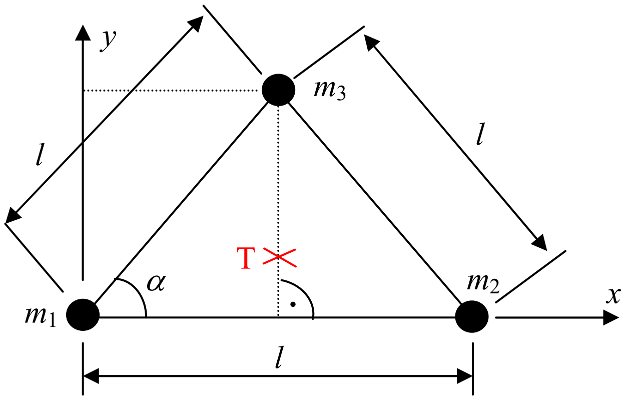
$$J = 0{,}2 \cdot 0{,}24^2 + 0{,}35 \cdot 0{,}14^2 + 0{,}6 \cdot 0{,}16^2 = 0{,}034\ \text{kg·m}^2$$

Odpověď: Moment setrvačnosti soustavy tří kovových kuliček je 0,034 kg·m$^2$.

6. Ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o délce strany 2 m jsou umístěny tři koule
   a) o stejných hmotnostech 2 kg,
   b) o hmotnostech $m_1 = m_2 = 2$ kg a $m_3 = 5$ kg.
   Určete těžiště této soustavy hmotných bodů.

a) Stejné hmotnosti koulí
$m_1 = m_2 = m_3 = 2$ kg
$l = 2$ m
$x_T = ?$
$y_T = ?$

Obrázek 3.6




Řešení:
Těžiště soustavy hmotných bodů lze určit pomocí vzorce:
$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ a $y_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$

Do vzorce je potřeba dosadit hmotnosti a souřadnice jednotlivých koulí v dané soustavě souřadnic dle obr. V rovnostranném trojúhelníku je úhel $\alpha = 60°$ a souřadnice vrcholů jsou:
$m_1$: $[0, 0] \rightarrow x_1 = 0; y_1 = 0$
$m_2$: $[l, 0] = [2, 0] \rightarrow x_2 = 2$ m; $y_2 = 0$
$m_3$: $[l \cdot \cos\alpha, l \cdot \sin\alpha] = [2 \cdot \cos 60°, 2 \cdot \sin 60°] = [1; 1{,}73] \rightarrow x_3 = 1$ m; $y_3 = 1{,}73$ m

Souřadnice těžiště jsou tedy:

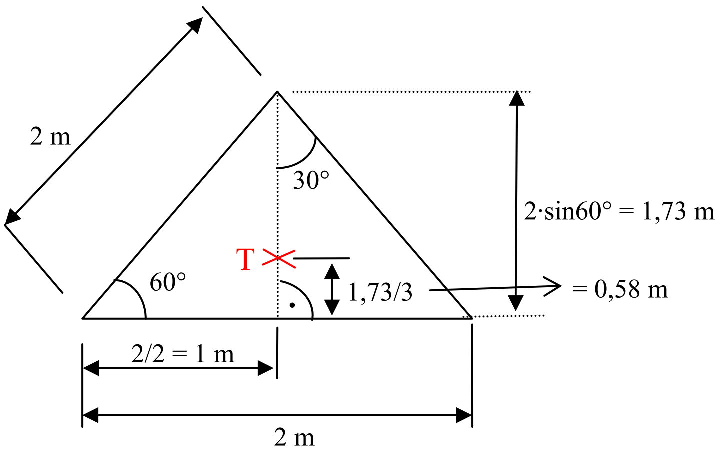
$$x_T = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{2 + 2 + 2} = 1 \text{ m}$$

$$y_T = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1{,}73}{2 + 2 + 2} = 0{,}58 \text{ m}$$

Odpověď: Těžiště trojúhelníka má v dané soustavě souřadnic souřadnice [1 m; 0,58 m], je zobrazeno v obrázku.

Pozn.: Těžiště soustavy hmotných bodů je v tomto případě totožné s geometrickým těžištěm trojúhelníka.

Obrázek 3.7



b) Nestejné hmotnosti koulí

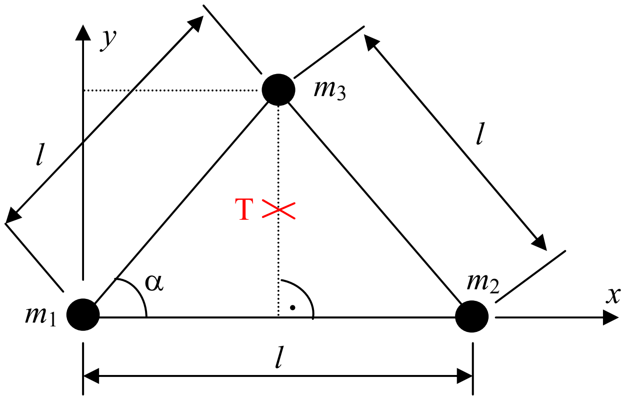
$m_1 = m_2 = 2$ kg

$m_3 = 5$ kg

$l = 2$ m

$x_T = ?$

$y_T = ?$




Obrázek 3.8

Řešení:

Těžiště soustavy hmotných bodů lze určit pomocí vzorce:

$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ a $y_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$

Souřadnice jednotlivých koulí v soustavě souřadnic dle obr. (úhel $\alpha = 60°$) jsou stejné jako v předchozím:

$m_1$: $[0, 0] \rightarrow x_1 = 0; y_1 = 0$

$m_2$: $[l, 0] = [2, 0] \rightarrow x_1 = 2$ m; $y_1 = 0$

$m_3$: $[\, l \cdot \cos\alpha, l \cdot \sin\alpha] = [2 \cdot \cos 60°, 2 \cdot \sin 60°] = [1; 1{,}73] \rightarrow x_1 = 1$ m; $y_1 = 1{,}73$ m

Souřadnice těžiště jsou tedy:

$$x_T = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{2 + 2 + 5} = 1 \text{ m}$$

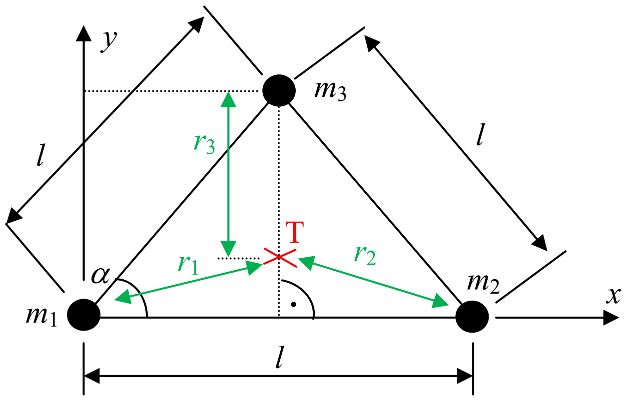
$$y_T = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1{,}73}{2 + 2 + 5} = 0{,}96 \text{ m}$$

Odpověď: Těžiště trojúhelníka má v dané soustavě souřadnic souřadnice [1 m; 0,96 m], je zobrazeno v obrázku.

Pozn.: Ze symetrie lze často uhodnout alespoň přímku, na které těžiště leží. V tomto případě je rozložení hmotností koulí symetrické okolo těžnice trojúhelníka procházející koulí o hmotnosti $m_3$.

7. Ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o délce strany 2 m jsou umístěny tři koule o stejných hmotnostech $m$ = 2 kg. Určete moment setrvačnosti soustavy vzhledem k ose procházející jejím hmotným středem (těžištěm) kolmo na rovinu trojúhelníka.

$m_1 = m_2 = m_3 = 2$ kg
$l = 2$ m
$J = ?$




Obrázek 3.9

Řešení:
Pro určení momentu setrvačnosti je potřeba určit těžiště a vzdálenosti jednotlivých koulí od těžiště. Souřadnice jednotlivých koulí v soustavě souřadnic dle obr. jsou stejné jako v předchozím:
$m_1$: [0, 0] $\rightarrow x_1 = 0; y_1 = 0$
$m_2$: [$l$, 0] = [2, 0] $\rightarrow x_1 = 2$ m; $y_1 = 0$
$m_3$: [ $l \cdot \cos\alpha$, $l \cdot \sin\alpha$] = [2·cos60°, 2·sin60°] = [1; 1,73] $\rightarrow x_1 = 1$ m; $y_1 = 1{,}73$ m

Souřadnice těžiště v soustavě souřadnic lze určit pomocí vzorce:
$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ a $y_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$

$$x_T = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{2 + 2 + 2} = 1 \text{ m}$$
$$y_T = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1{,}73}{2 + 2 + 2} = 0{,}577 \text{ m}$$

Těžiště soustavy hmotných bodů je v tomto případě totožné s geometrickým těžištěm trojúhelníka – viz. př. č. 6.

Vzdálenost mezi těžištěm a všemi koulemi je stejná ($r_1 = r_2 = r_3$) a lze ji vypočítat např. pomocí vzorce pro vzdálenost dvou bodů (Jsou-li souřadnice bodu A[$x_A$, $y_A$] a souřadnice bodu B[$x_B$, $y_B$], lze vzdálenost bodů A a B vypočítat jako: $|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$).
Vzdálenost mezi $T$ a $m_1$: $r_1 = \sqrt{(1-0)^2 + (0{,}577 - 0)^2} = 1{,}15$ m
nebo z obrázku $r_3 = y_3 - y_T = 1{,}73 - 0{,}58 = 1{,}15$ m.

Moment setrvačnosti je aditivní veličina, tj. celkový moment setrvačnosti je

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i = J_1 + J_2 + J_3$$

Tedy:

$$J = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2$$

Protože $m_1 = m_2 = m_3$ a $r_1 = r_2 = r_3$ je $J = 3 \cdot m_1 \cdot r_1^2$

Číselně:

$$J = 3 \cdot 2 \cdot 1{,}15^2 = 7{,}9\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}$$

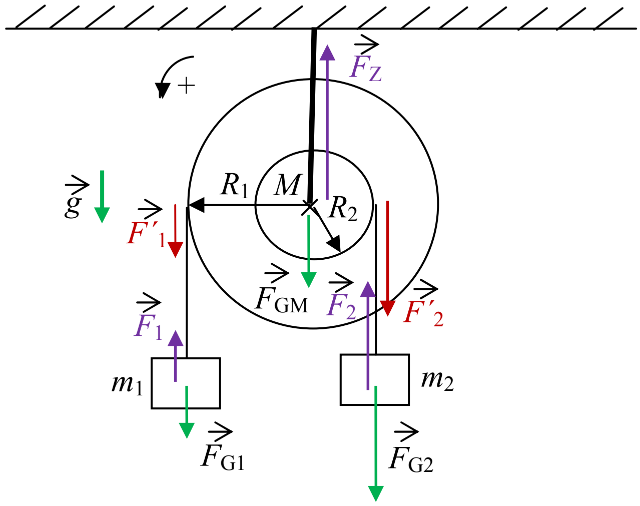
Odpověď: Moment setrvačnosti soustavy tří kovových kuliček vůči dané ose je 7,9 $\mathrm{kg{\cdot}m^2}$

8. Na kladce o hmotnosti $M$ = 10 kg jsou zavěšena dvě závaží o hmotnostech $m_1$ = 5 kg a $m_2$ = 20 kg způsobem zachyceným na obrázku. Kladka i závaží jsou v klidu. Určete $R_1$, je-li $R_2$ = 0,5 m.

---

$M$ = 10 kg
$m_1$ = 5 kg
$m_2$ = 20 kg
$R_2$ = 0,5 m
$R_1$ = ?

---




Obrázek 3.10

Řešení:
Protože je soustava v klidu (tj. v rovnováze), jsou výslednice sil působící na jednotlivá závaží rovna nule.
Silová rovnováha pro závaží $m_1$: $\vec{F}_1 + \vec{F}_{G1} = \vec{0}$ a pro závaží $m_2$: $\vec{F}_2 + \vec{F}_{G2} = \vec{0}$
Uvažujeme-li kladný směr nahoru, je pro velikosti sil:
Závaží $m_1$: $F_1 - F_{G1} = 0 \rightarrow F_1 = F_{G1} \rightarrow F_1 = m_1 \cdot g$
Závaží $m_2$: $F_2 - F_{G2} = 0 \rightarrow F_2 = F_{G2} \rightarrow F_2 = m_2 \cdot g$
Síly působící na provaz jsou podle třetího Newtonova zákona:
$F_1' = F_1 = m_1 \cdot g$ a $F_2' = F_2 = m_2 \cdot g$

Protože je soustava v rovnováze, výsledný moment sil je roven nule, tj.:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{0}$$

Znaménková konvence je taková, že moment síly otáčející proti směru hodinových ručiček je kladný (v našem případě jde o moment síly $F_1'$: $M_1 = F_1 \cdot R_1$) a moment síly otáčející ve směru hodinových ručiček je záporný (v našem případě jde o moment síly $F_2'$: $M_2 = -F_2 \cdot R_2$)
Podmínka pro rovnováhu momentů sil je tedy:

$$F_1' \cdot R_1 - F_2' \cdot R_2 = 0 \rightarrow F_1' \cdot R_1 = F_2' \cdot R_2$$

Můžeme dosadit za $F_1'$ a $F_2'$:

$$m_1 \cdot g \cdot R_1 = m_2 \cdot g \cdot R_2$$

Lze zkrátit tíhové zrychlení $g$ a vyjádřit hledanou vzdálenost $R_1$:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{20}{5} = 4 \rightarrow R_1 = 4 \cdot R_2$$

Číselně:

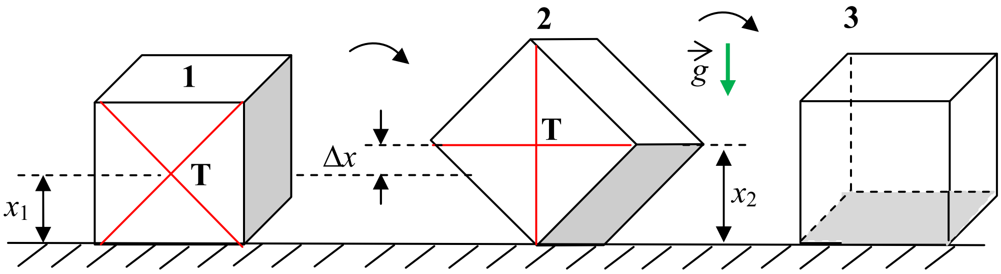
$$R_1 = 4 \cdot R_2 = 4 \cdot 0{,}5 = 2 \text{ m}$$

Odpověď: Poloměr větší kladky je 2 m.

Pozn.: Na hmotnosti kladky v tomto případě nezáleží, neboť moment síly $F_{GM}$ vůči ose otáčení je nulový (síla $F_{GM}$ působí v ose otáčení, její rameno je nulové).

9. Žulová krychle se stranou $a$ = 1 m stojí na vodorovné podložce. Hustota žuly je 3000 kg/m$^3$. Jaké práce je třeba k překlopení krychle kolem její podstavné hrany?

$a$ = 1 m
$\rho$ = 3000 kg/m$^3$
$W$ = ?




Obrázek 3.11

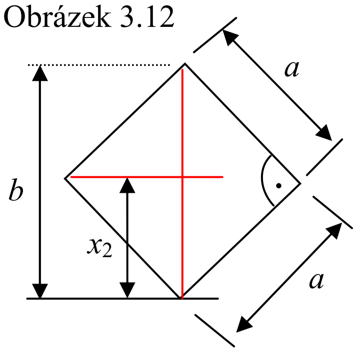
Řešení:

Práce potřebná na překlopení krychle se spotřebuje na zvýšení polohy těžiště krychle nad vodorovnou podložkou mezi stavem 1 a 2. Pohyb krychle mezi stavem 2 a 3 je samovolný, není potřeba na něj vykonat žádnou práci, resp. práci koná tíhové pole.

Pokud si místo krychle představíme hmotný bod umístěný v těžišti, spotřebuje se práce na zvýšení polohové energie tohoto hmotného bodu (resp. těžiště)

$$W = E_{p2} - E_{p1} = m \cdot g \cdot x_2 - m \cdot g \cdot x_1 = m \cdot g \cdot \Delta x$$

Obrázek 3.12




Hmotnost krychle je: $m = \rho \cdot V = \rho \cdot a^3$

Číselně: $m = 3000 \cdot 1^3 = 3000$ kg

Poloha těžiště nad podložkou ve stavu 1 je: $x_1 = a/2 = 0{,}5$ m

Vypočteme polohu těžiště nad podložkou ve stavu 2.

Nejprve vypočteme:

$$b = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} \cdot a$$

Pak:

$$x_2 = \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = 0{,}71 \text{ m}$$

Výška, o kterou se zvedne těžiště, je tedy:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a - \frac{a}{2} = \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right) \cdot a = \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right) \cdot 1 = 0{,}21 \text{ m}$$

Práce potřebná na zvýšení potenciální energie krychle mezi stavem 1 a 2 je tedy:

$$W = m \cdot g \cdot \Delta x = \rho \cdot a^3 \cdot g \cdot \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right) \cdot a$$

Číselně:

$$W = 3000 \cdot 1^3 \cdot 10 \cdot \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right) \cdot 1 = 6300 \text{ J}$$

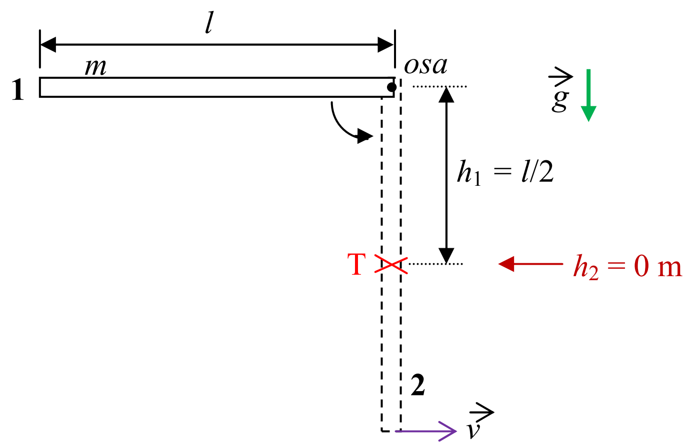
Odpověď: Práce potřebná na překlopení krychle je 6300 J.

10. Tyč hmotnosti 2 kg a délky 1 m se může volně otáčet kolem vodorovné osy, procházející koncem tyče. Jakou rychlostí ($v$) proběhne druhý konec tyče nejnižší polohou, pustíme-li tyč z vodorovné polohy?

---

$m = 2$ kg
$l = 1$ m
$v = ?$

Obrázek 3.13




Řešení:
Úlohu lze vyřešit pomocí zákona zachování mechanické energie. Pro výpočet potenciální energie je podstatná výška těžiště tyče nad zvolenou nulovou hladinou, která je v nejvyšší poloze $h_1 = l/2$ (viz. obr.).
Označíme-li stav 1 jako tyč v horní poloze, pak
Potenciální energie je $E_{p1} = m \cdot g \cdot h_1 = m \cdot g \cdot \frac{l}{2}$
Kinetická energie je $E_{k1} = 0\,J$ (tyč je v klidu)

Energie tyče ve stavu 2 (dolní poloha) jsou:
Potenciální energie $E_{p1} = m \cdot g \cdot h_2 = 0\,J$
Kinetická energie $E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$

Moment setrvačnosti tyče otáčející se okolo osy procházející koncem tyče je $J = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2$
Vztah mezi rychlostí a úhlovou rychlostí je: $\omega = \frac{v}{R} = \frac{v}{l}$ (kde $R$ je poloměr kružnice)

Zákon zachování mechanické energie:

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

Tedy:

$$0 + m \cdot g \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 + 0$$

Dosadíme za moment setrvačnosti a úhlovou rychlost:

$$m \cdot g \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2\right) \cdot \left(\frac{v}{l}\right)^2 \rightarrow m \cdot g \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{6} \cdot m \cdot l^2 \cdot \frac{v^2}{l^2}$$

Rovnici můžeme vydělit hmotností tyče $m$. Z této rovnice vyjádříme neznámou rychlost:

$$v = \sqrt{3 \cdot g \cdot l}$$

Číselně:

$$v = \sqrt{3 \cdot 10 \cdot 1} = 5{,}5\ \mathrm{m/s}$$

Odpověď: Konec tyče proběhne nejnižší polohou rychlostí 5,5 m/s.

11. Na setrvačník roztáčející se z klidu působí konstantní silový moment 10 N·m. Setrvačník dosáhne za dobu 3 min frekvence 10 Hz. Jaký je jeho moment setrvačnosti?

---

$M$ = 10 N·m
$t$ = 3 min = 180 s
$f_0$ = 0 Hz
$f_1$ = 10 Hz
$J$ = ?

---

Řešení:
Pro výpočet momentu síly lze použít pohybovou rovnici pro otáčivý pohyb: $M = J \cdot \alpha$, kde $J$ je moment setrvačnosti a $\alpha$ je úhlové zrychlení.
Protože moment síly je konstantní, jde o rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb. Úhlové zrychlení lze proto vypočítat jako:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_1 - f_0}{t}$$

Moment síly lze tedy vypočítat jako:
$M = J \cdot \alpha$, tj.

$$M = J \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_1 - f_0}{t}$$

Z této rovnice lze vypočítat moment setrvačnosti:

$$J = \frac{M \cdot t}{2 \cdot \pi \cdot (f_1 - f_0)}$$

Číselně:

$$J = \frac{10 \cdot 180}{2 \cdot 3{,}14 \cdot (10 - 0)} = 28{,}65\ \text{kg·m}^2$$

Odpověď: Moment setrvačnosti setrvačníku je 28,7 kg·m$^2$.

12. Moment hybnosti rotujícího disku o hmotnosti 50 kg a poloměru 0,5 m se rovnoměrně zvětší ze 100 kg·m$^2$·s$^{-1}$ na 250 kg·m$^2$·s$^{-1}$ během 150 s. Určete, jakým momentem síly působily na disk otáčivé síly.

---

$L_0$ = 100 kg·m$^2$·s$^{-1}$
$L_1$ = 250 kg·m$^2$·s$^{-1}$
$m$ = 50 kg
$R$ = 0,5 m
$t$ = 150 s
$M$ = ?

---

Řešení:
Moment hybnosti rotujícího tělesa souvisí s momentem setrvačnosti: $L = J \cdot \omega$
Pokud se nemění moment setrvačnosti (nemění se hmotnost tělesa, ani jeho rozměry, ani rotační osa), souvisí změna momentu hybnosti se změnou úhlové rychlosti.
Mění-li se moment hybnosti rovnoměrně, znamená to, že rotující disk se otáčí rovnoměrně zrychleně.

Úhlové zrychlení lze tedy vypočítat pomocí vzorců pro rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb:

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha \cdot t \rightarrow \alpha = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t}$$

Moment síly vypočteme pomocí pohybové rovnice pro rotaci:

$$M = J \cdot \alpha$$

Moment setrvačnosti disku vypočteme jako: $J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$
Číselně: $J = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 0{,}5^2 = 6{,}25$ kg·m$^2$

Moment síly lze vypočítat přímo ze změny momentu hybnosti, což lze ověřit dosazením do pohybové rovnice pro rotační pohyb, za úhlové zrychlení:

$$M = J \cdot \alpha = J \cdot \frac{\omega_1 - \omega_0}{t} = \frac{J \cdot \omega_1 - J \cdot \omega_0}{t} = \frac{L_1 - L_0}{t}$$

Dostáváme známý vztah mezi momentem síly a momentem hybnosti:

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

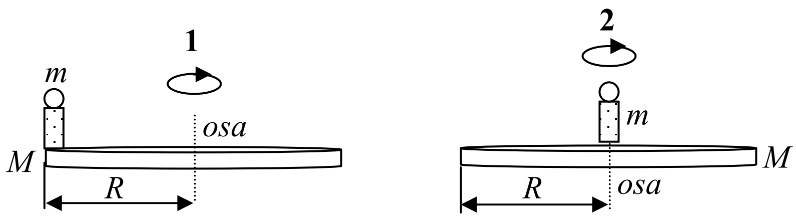
Z tohoto vzorce lze přímo vypočítat moment síly:

$$M = \frac{L_1 - L_0}{t} = \frac{250 - 100}{150} = 1 \text{ N·m}$$

Odpověď: Moment otáčivých sil je 1 N·m.

13. Vodorovná deska o hmotnosti 50 kg a poloměru 1 m se otáčí bez tření kolem svislé osy vedené jejím středem úhlovou rychlostí 1 $s^{-1}$. Jak se změní úhlová rychlost otáčení, pokud závaží o hmotnosti 10 kg přesuneme od okraje desky k jejímu středu?

$M$ = 50 kg
$R$ = 1 m
$\omega_1$ = 1 $s^{-1}$
$m$ = 10 kg
$\omega_2$ = ?




Obrázek 3.14

Řešení:
Protože se jedná o izolovanou soustavu, použijeme pro řešení příkladu zákon zachování momentu hybnosti:

Jako stav 1 označíme desku se závažím na kraji. V tomto stavu je moment hybnosti:

$$L_1 = J_1 \cdot \omega_1,$$

kde $J_1$ je moment setrvačnosti soustavy ve stavu 1 a $\omega_1$ úhlová rychlost otáčení.

Těleso se skládá z disku, který se otáčí okolo osy procházející jejím středem, jehož moment setrvačnosti je $J_{disk}^1 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$, a ze závaží, jehož moment setrvačnosti je $J_{závaží}^1 = m \cdot R^2$.

Moment setrvačnosti je aditivní veličina, lze jej vypočítat jako $J_1 = J_{disk}^1 + J_{závaží}^1$

$$J_1 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 + m \cdot R^2$$

Stav 2 je deska se závažím ve středu. V tomto stavu je moment hybnosti:

$$L_2 = J_2 \cdot \omega_2$$

Těleso se skládá z disku, který se otáčí okolo osy procházející jejím středem, jehož moment setrvačnosti je $J_{disk}^2 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$, a ze závaží, jehož moment setrvačnosti je $J_{závaží}^2 = 0$.

Moment setrvačnosti je aditivní veličina, lze jej vypočítat jako $J_2 = J_{disk}^2 + J_{závaží}^2$

$$J_2 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$$

Zákon zachování momentu hybnosti: $\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \rightarrow L_1 = L_2$

$$J_1 \cdot \omega_1 = J_2 \cdot \omega_2 \rightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 + m \cdot R^2\right) \cdot \omega_1 = \left(\frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2\right) \cdot \omega_2$$

Celou rovnici lze vydělit $R^2$ a vyjádřit neznámou úhlovou rychlost $\omega_2$:

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot M + m\right)}{\left(\frac{1}{2} \cdot M\right)} = \omega_1 \cdot \frac{M + 2 \cdot m}{M}$$

Číselně:

$$\omega_2 = 1 \cdot \frac{50 + 2 \cdot 10}{50} = 1{,}4 \text{ s}^{-1}$$

Odpověď: Úhlová rychlost otáčení se zvětší na 1,4 $s^{-1}$.

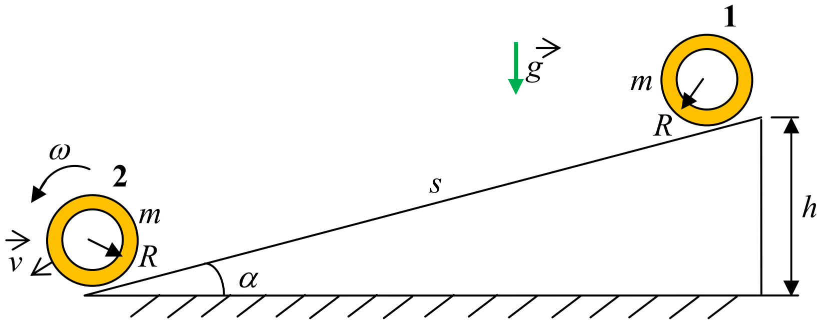
Pozn.: Protože se posunutím závaží do středu zmenší moment setrvačnosti soustavy, musí se zvětšit úhlová rychlost otáčení.

14. Z nakloněné roviny o výšce $h$ a s úhlem 15° sjíždí valivým pohybem dutý válec o hmotnosti 5 kg a poloměru 15 cm. Čas, za který sjede dutý válec z nakloněné roviny, je 2 s. Určete výšku nakloněné roviny.
Jak by se situace změnila, pokud by nešlo o dutý válec, ale o kvádr o hmotnosti 5 kg? Pozn.: V prvním případě zanedbejte tloušťku stěny dutého válce, v obou případech zanedbejte práci sil tření.

---

$\alpha = 15°$
$m = 50$ kg
$R = 0{,}15$ m
$t = 2$ s
$h = ?$

Obrázek 3.15




Řešení:

a) dutý válec

Rychlost dutého válce dole na nakloněné rovině určíme pomocí zákona zachování energie.

$$E_{k1}^{posuv} + E_{k1}^{rotace} + E_{p1} = E_{k2}^{posuv} + E_{k2}^{rotace} + E_{p2}$$

Jednotlivé členy v této rovnici jsou:
kinetická energie posuvného pohybu, kterou vypočteme jako $E_k^{posuv} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$,
kinetickou energii otáčivého pohybu, kterou vypočteme jako $E_k^{rotace} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$ a potenciální energii, kterou vypočteme jako $E_p = m \cdot g \cdot h$.

Ve stavu 1 je dutý válec v klidu, ve stavu 2 má dutý válec rychlost $v$ a úhlovou rychlost $\omega$.

Dosadíme do zákona zachování energie

$$0 + 0 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 + 0$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2$$

Vyjádříme rychlost dutého válce dole na nakloněné rovině:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{v^2}{2} \cdot \left(m + \frac{J}{R^2}\right) \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h}{\left(m + \frac{J}{R^2}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{\left(1 + \frac{J}{m \cdot R^2}\right)}}$$

Válec se po nakloněné rovině pohybuje rovnoměrně zrychleně se zrychlením $a$. Použijeme vzorce pro rovnoměrně zrychlený pohyb, ve kterých počáteční rychlost $v_0 = 0$ m/s.
Rychlost $v = v_0 + a \cdot t = a \cdot t \rightarrow a = \frac{v}{t}$
Dráha $s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{t}\right) \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t$
Doba, za kterou sjede dutý válec po nakloněné rovině, je: $t = \frac{2 \cdot s}{v}$
Souvislost dráhy a výšky nakloněné roviny: $sin\alpha = \frac{h}{s} \rightarrow s = \frac{h}{sin\alpha}$

Dosadíme-li za délku nakloněné roviny *s* a za rychlost *v*, pak je čas sjezdu dutého válce:

$$t = \frac{2 \cdot s}{v} = \frac{2 \cdot \frac{h}{sin\alpha}}{\sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{\left(1 + \frac{J}{m \cdot R^2}\right)}}}$$

Rovnici umocníme na druhou a z této rovnice vyjádříme výšku nakloněné roviny:

$$t^2 = \frac{4 \cdot \frac{h^2}{(sin\alpha)^2}}{\frac{2 \cdot g \cdot h}{\left(1 + \frac{J}{m \cdot R^2}\right)}} = \frac{2 \cdot h \cdot \left(1 + \frac{J}{m \cdot R^2}\right)}{g \cdot (sin\alpha)^2}$$

Výška nakloněné roviny je:

$$h = \frac{g \cdot t^2 \cdot (sin\alpha)^2}{2 \cdot \left(1 + \frac{J}{m \cdot R^2}\right)}$$

Moment setrvačnosti dutého válce je $J = m \cdot R^2$. Výška nakloněné roviny je tedy:

$$h = \frac{g \cdot t^2 \cdot (sin\alpha)^2}{2 \cdot \left(1 + \frac{m \cdot R^2}{m \cdot R^2}\right)} = \frac{g \cdot t^2 \cdot (sin\alpha)^2}{4}$$

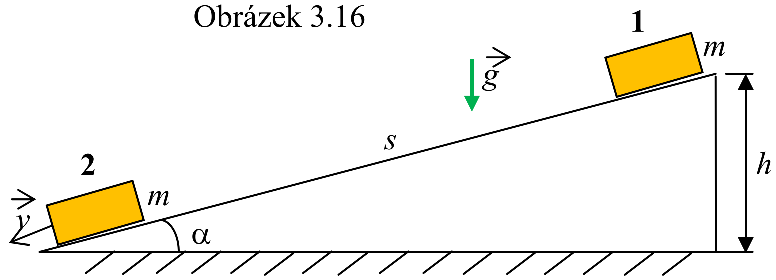
Číselně:

$$h = \frac{10 \cdot 5^2 \cdot (sin15°)^2}{4} = 4{,}19 \text{ m}$$

Odpověď: Výška nakloněné roviny, ze které sjíždí dutý válec, je 4,2 m.

b) Pro kvádr
$m = 50$ kg
$t = 5$ s
$h = ?$

Obrázek 3.16




Řešení:
Rychlost kvádru dole na nakloněné rovině určíme pomocí zákona zachování energie.

$$E_{k1}^{posuv} + E_{p1} = E_{k2}^{posuv} + E_{p2}$$

Na rozdíl od rovnice pro dutý válec tato rovnice neobsahuje kinetickou energii pro otáčivý pohyb. Ve stavu 1 je kvádr v klidu, ve stavu 2 má rychlost *v*. Dosadíme

$$0 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + 0$$

Vydělíme hmotností kvádru a vyjádříme rychlost kvádru dole na nakloněné rovině:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Kvádr se po nakloněné rovině pohybuje rovnoměrně zrychleně se zrychlením $a$. Použijeme vzorce pro rovnoměrně zrychlený pohyb, ve kterých počáteční rychlost $v_0$ = 0 m/s.:
Rychlost $v = v_0 + a \cdot t = a \cdot t \rightarrow a = \frac{v}{t}$
Dráha $s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{t}\right) \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t$
Doba, za kterou sjede dutý válec po nakloněné rovině je: $t = \frac{2 \cdot s}{v}$
Souvislost dráhy a výšky nakloněné roviny: $sin\alpha = \frac{h}{s} \rightarrow s = \frac{h}{sin\alpha}$

Dosadíme-li za délku nakloněné roviny $s$ a za rychlost $v$, pak pro čas $t$:

$$t = \frac{2 \cdot s}{v} = \frac{2 \cdot \frac{h}{sin\alpha}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}$$

Rovnici umocníme na druhou a z této rovnice vyjádříme výšku nakloněné roviny:

$$t^2 = \frac{4 \cdot \frac{h^2}{(sin\alpha)^2}}{2 \cdot g \cdot h} = \frac{2 \cdot h}{g \cdot (sin\alpha)^2}$$

Výška nakloněné roviny je:

$$h = \frac{g \cdot t^2 \cdot (sin\alpha)^2}{2}$$

Číselně:

$$h = \frac{10 \cdot 5^2 \cdot (sin15°)^2}{2} = 8{,}37 \text{ m}$$

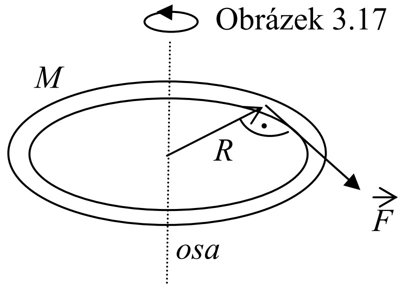
Odpověď: Výška nakloněné roviny, ze které sjíždí kvádr, je 8,4 m.

Poznámka: Porovnáme-li rychlost, kterou získá dutý válec a kvádr při pohybu z nakloněné roviny konstantní výšky, je vyšší rychlost (tj. kratší doba sjezdu) pro kvádr, protože část potenciální energie dutého válce se přemění na kinetickou energii rotace a tím se sníží rychlost (a zvětší doba sjezdu) dutého válce proti kvádru. Za stejnou dobu tedy kvádr sjede z nakloněné roviny vyšší výšky („je rychlejší“) než dutý válec.

15. Obruč o hmotnosti 4 kg a poloměrem 19 cm rotuje okolo své geometrické osy s frekvencí 50 Hz. Jakou brzdnou silou musíme působit tečně na obruč, abychom ji zastavili za dobu 10 s? O jaký úhel se obruč během zastavování otočí? Jakou práci vykonáme při brzdění? Jaký je výkon brzdící síly?

---

$M$ = 4 kg
$R$ = 19 cm = 0,19 m
$f$ = 50 Hz
$t$ = 10 s
$F$ = ?
$\varphi$ = ?
$W$ = ?
$P$ = ?



Obrázek 3.17

Řešení:
Moment setrvačnosti rotující obruče vypočteme jako:

$$J = M \cdot R^2$$

Číselně:

$$J = 4 \cdot 0{,}19^2 = 0{,}144 \text{ kg·m}^2$$

Na zastavení otáčení obruče je potřeba na ní působit momentem síly (proti směru rotace), který je konstantní, když je úhlové zpomalení obruče konstantní. Uvažujme tedy rovnoměrně zpomalený otáčivý pohyb obruče. Úhlové zpomalení můžeme vypočítat z rovnice pro rovnoměrně zpomalený otáčivý pohyb:

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha \cdot t \rightarrow \alpha = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t}$$

Kde $\omega_0$ je počáteční úhlová rychlost rotace a $\omega_1 = 0 \text{ s}^{-1}$ koncová úhlová rychlost. Tedy

$$\alpha = -\frac{\omega_0}{t} = -\frac{2 \cdot \pi \cdot f}{t}$$

Moment síly potřebný na zastavení obruče vypočteme pomocí pohybové rovnice pro rotační pohyb:

$$M = J \cdot \alpha = J \cdot \left(-\frac{2 \cdot \pi \cdot f}{t}\right)$$

Moment síly můžeme vypočítat jako rameno · síla, tj.

$$M = R \cdot F$$

$$M = R \cdot F = J \cdot \left(-\frac{2 \cdot \pi \cdot f}{t}\right)$$

Vyjádříme hledanou sílu, pomocí které obruč zastavíme:

$$F = -\frac{J \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}{R \cdot t} = -\frac{M \cdot R^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}{R \cdot t} = -\frac{M \cdot R \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}{t}$$

Číselně: $F = -\frac{4 \cdot 0{,}19 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50}{10} = -23{,}9 \text{ N}$

Znaménko síly určuje její směr (proti směru otáčení).

Úhel, o který se během zastavování obruč otočí, vypočteme pomocí vzorce pro rovnoměrně zpomalený otáčivý pohyb

$$\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

Protože

$$\alpha = -\frac{\omega_0}{t}$$

Je

$$\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\omega_0}{t}\right) \cdot t^2 = \frac{\omega_0 \cdot t}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot t}{2} = \pi \cdot f \cdot t$$

Číselně:

$$\varphi = \pi \cdot f \cdot t = 3{,}14 \cdot 50 \cdot 10 = 1570$$

Práci, kterou brzdná síla při zastavování vykoná, lze vypočítat jako rozdíl kinetických energií:

$$W = E_{k1} - E_{k0}$$

Konečná kinetická energie $E_{k1}$ je rovna nule, protože obruč se zastaví. Práci lze tedy vypočítat jako:

$$W = -E_{k0} = -\frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

Dosadíme za moment setrvačnosti a úhlovou rychlost:

$$W = -\frac{1}{2} \cdot (M \cdot R^2) \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2$$

Číselně:

$$W = -\frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 0{,}19^2) \cdot (2 \cdot 3{,}14 \cdot 50)^2 = -7126\ \mathrm{J}$$

Záporné znaménko práce odpovídá tomu, že práce brzdné síly je prací spotřebovanou.

Výkon brzdné síly je potom

$$P = \frac{|W|}{t} = \frac{(M \cdot R^2) \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2}{2 \cdot t}$$

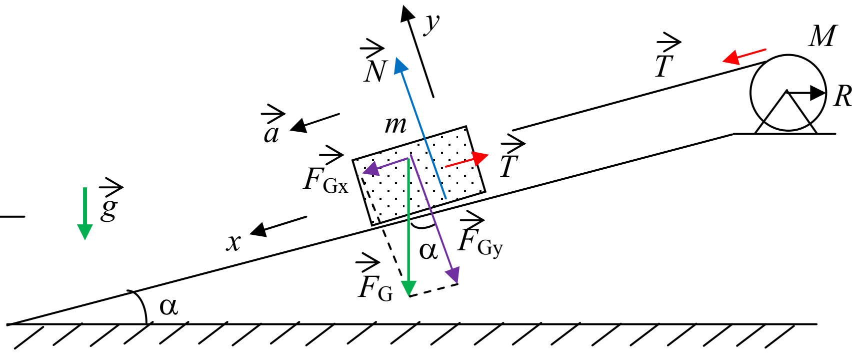
Číselně:

$$P = \frac{(4 \cdot 0{,}19^2) \cdot (2 \cdot 3{,}14 \cdot 50)^2}{2 \cdot 10} = 713\ \mathrm{W}$$

Odpověď: Abychom obruč zastavili, musíme na ni působit silou 24 N. Během zastavování se obruč otočí o úhel 1570. Práci, kterou během zastavování brzdné síly vykonají, je 7126 J, výkon brzdných sil je 713 W.

16. Na vrcholu dokonale hladké nakloněné roviny s úhlem sklonu 15° je kladka o hmotnosti 10 kg a poloměru 10 cm. Na této kladce je navinuto lano, na kterém je připevněno těleso o hmotnosti 5 kg položené na nakloněné rovině. Určete zrychlení $a$ se kterým se pohybuje těleso dolů po nakloněné rovině.

$m = 5$ kg
$M = 10$ kg
$R = 0{,}1$ m
$\alpha = 15°$
$a = ?$




Obrázek 3.18

Řešení:
Soustava obsahuje dvě tělesa: závaží a kladku.

Rozložíme tíhovou sílu $\vec{F}_G$ působící na těleso na nakloněné rovině do směrů osy $x$ a $y$:
$F_{Gx} = F_G \cdot sin\alpha = m \cdot g \cdot sin\alpha$
$F_{Gy} = F_G \cdot cos\alpha = m \cdot g \cdot cos\alpha$

Popíšeme pohybové rovnice pro každé těleso zvlášť.

Pro těleso použijeme druhý Newtonův zákon rozepsaný v ose $x$:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = m \cdot a_x$$

Kladný směr osy $x$ je po nakloněné rovině dolů (viz. obr.). Na těleso působí složka tíhové síly $\vec{F}_{Gx}$ a tažná síla $\vec{T}$:

$$F_{Gx} - T = m \cdot a \ \rightarrow m \cdot g \cdot sin\alpha - T = m \cdot a$$

Pro kladku použijeme pohybovou rovnici pro rotační pohyb, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = J \cdot \alpha$$

Na levé straně rovnice jsou všechny momenty sil působící na kladku, na pravé straně rovnice úhlové zrychlení kladky. Na kladku působí jediná síla $T$ = tažná síla, která působí na kladku momentem sil: $M = T \cdot R$
Úhlové zrychlení má souvislost se zrychlením: $\alpha = \frac{a}{R}$
Pohybová rovnice pro rotační pohyb:

$$M = J \cdot \alpha \ \rightarrow \ T \cdot R = J \cdot \frac{a}{R}$$

Z této rovnice lze vyjádřit tažnou sílu lana $T$:

$$T = J \cdot \frac{a}{R^2}$$

Dosadíme tažnou sílu do pohybové rovnice pro závaží:

$$m \cdot g \cdot sin\alpha - T = m \cdot a \ \rightarrow m \cdot g \cdot sin\alpha - \ J \cdot \frac{a}{R^2} = m \cdot a$$

Vyjádříme z této rovnice neznámé zrychlení tělesa *a* na nakloněné rovině:

$$m \cdot g \cdot sin\alpha = J \cdot \frac{a}{R^2} + m \cdot a$$

$$a \cdot \left(m + \frac{J}{R^2}\right) = m \cdot g \cdot sin\alpha$$

$$a = \frac{m \cdot g \cdot sin\alpha}{\left(m + \frac{J}{R^2}\right)} = \frac{g \cdot sin\alpha}{\left(1 + \frac{J}{m \cdot R^2}\right)}$$

Moment setrvačnosti kladky je:

$$J = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$$

Zrychlení tělesa na nakloněné rovině je tedy:

$$a = \frac{g \cdot sin\alpha}{\left(1 + \frac{\frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2}{m \cdot R^2}\right)} = \frac{g \cdot sin\alpha}{\left(1 + \frac{M}{2 \cdot m}\right)}$$

Dosadíme:

$$a = \frac{10 \cdot sin15°}{\left(1 + \frac{10}{2 \cdot 5}\right)} = 1{,}29 \ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Odpověď: Zrychlení tělesa na nakloněné rovině je 1,29 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

## IV. Mechanika tekutin

tlak způsobený vnější silou $F$ působící kolmo na plochu $S$ : $p = \frac{F}{S}$

tlak způsobený vlastní vahou kapaliny - hydrostatický tlak v hloubce $h$: $p = h.\rho.g + p_0$

vztlaková síla působící na těleso o objemu $V$ zcela ponořené v tekutině s hustotou $\rho$:

$$F_{vz} = V.\rho.g$$

rovnice kontinuity: $S.v = konst. \Leftrightarrow S_1.v_1 = S_2.v_2$

Bernoulliho rovnice:

$$\frac{1}{2}.\rho.v^2 + h.\rho.g + p = konst. \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\rho.{v_1}^2 + h_1.\rho.g + p_1 = \frac{1}{2}.\rho.{v_2}^2 + h_2.\rho.g + p_2$$

konstanty: normální atmosférický tlak $p_a$= 101 325 Pa
hustota vody $\rho_{H2O}$ = 1000 kg.m$^{-3}$
tíhové zrychlení $g$ = 10 m.s$^{-2}$

1. Jak se změní tlak vody u dna PET lahve (výška 32 cm, průměr 8 cm), jestliže ji převrhneme?

$h$ = 32 cm
$d$ = 8 cm
$\rho_{H2O}$ = 1000 kg.m$^{-3}$
$\Delta p$ = ?

Jedná se o změnu tlaku hydrostatického.
pro hydrostatický tlak platí: $p = h.\rho.g + p_0$

počítáme změnu tlaku, tzn. : $\Delta p = p_2 - p_1$,
kde $p_1$ je tlak vody u dna lahve ve svislé poloze, $p_2$ je tlak vody po převrhnutí lahve

pro změnu tlaku pak platí:
$\Delta p = (h_2.\rho.g + p_0) - (h_1.\rho.g + p_0) = (h_2 - h_1).\rho.g = (h - d).\rho.g = (0{,}08 - 0{,}32).1000.10$
$\Delta p = -2400 Pa \approx -2{,}4 kPa$

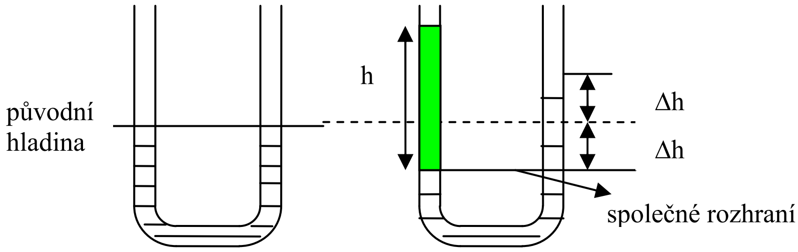
Odpověď: Při převrhnutí PET lahve tlak vody u dna klesne o 2,4 kPa.

*poznámka*: tato hodnota odpovídá např. tlaku, který by vyvolalo těleso o hmotnosti 2,4 kg působící na plochu čtverce o straně 10 cm.

2. Přilijeme-li do jednoho z ramen trubice tvaru U (o průměru 4 cm), ve kterém byla původně voda, olej ($\rho$ = 870 kg.m$^{-3}$), stoupne hladina vody v druhém rameni o 10 cm. Určete objem použitého oleje.

---

$d$ = 4 cm
$\rho_o$=870 kg.m$^{-3}$
$\Delta h$ = 10 cm = 0,1 m
$V$ = ?




Chceme určit objem použitého oleje.

Pro objem tělesa platí: $V = S.h$, kde $h$ je výška tělesa, $S$ je obsah podstavy; v našem případě jde o kruh o průměru $d$ = 4 cm $\Rightarrow$ $V = \pi.r^2.h = \pi.(\frac{d}{2})^2.h$

$\Rightarrow$ musíme určit výšku $h$ oleje v levém rameni U – trubice

Po nalití oleje do trubice se kapaliny v obou ramenech U–trubice ustálí v určité výšce. Soustava je v klidu - v rovnováze, v místě společného rozhraní dvou nemísitelných kapalin (viz obrázek) musí být stejný tlak $\Rightarrow$

$$p_{olej} = p_{H_2O}$$
$$p_a + h.\rho_o.g = p_a + h_{H_2O}.\rho_{H_2O}.g$$

kde $p_a$ je atmosférický tlak působící na obě otevřená ramena U-trubice, $h$, resp. $h_{H2O}$ jsou výšky sloupců kapalin, $\rho_O$, resp. $\rho_{H2O}$ je hustota oleje, resp. vody

Po úpravě: $h.\rho_o = h_{H_2O}.\rho_{H_2O}$

Pak pro výšku oleje: $h = \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_O}.h_{H_2O}$

Stoupne-li hladina vody v jednom rameni o $\Delta h$ = 10 cm, musí nutně v druhém rameni o stejnou výšku klesnout (objem kapaliny se musí zachovat). Z toho je zřejmé, že výška vody $h_{H2O}$ nad společným rozhraním je 20 cm.

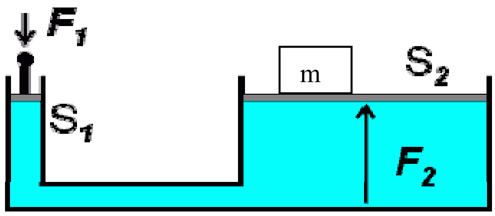
Výška oleje po dosazení: $h = \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_O}.h_{H_2O} = \frac{1000}{870}.20 = 23\,cm$

Objem použitého oleje: $V = \pi(\frac{d}{2})^2.h = \pi(\frac{4}{2})^2.23 = 289\,cm^3 = 0{,}289\,dm^3 = 0{,}29\,l$

Odpověď: Objem použitého oleje je 0,29 dm$^3$.

3. Jak velká síla působí na píst hydraulického zařízení o průměru 6 cm, aby vyvážila předmět o hmotnosti 200 kg umístěný na pístu o průměru 26 cm. O kolik cm se posune větší píst, urazí-li menší dráhu 40 cm?

$F_1 = ?$
$d_1 = 6$ cm
$m = 200$ kg
$d_2 = 26$ cm
$s_2 = ?$
$s_1 = 40$ cm




síla $F_1$ působící kolmo na plochu $S_1$ menšího pístu vyvolá v kapalině tlak $p$ ( $p = \frac{F_1}{S_1}$ )

tento tlak je podle Pascalova zákona všude v kapalině stejný $\Rightarrow$ na plochu většího pístu $S_2$ působí síla $F_2$ : $F_2 = p.S_2$

síla $F_2$ je vyrovnaná tíhovou silou závaží, které je umístěno na větším pístu

$$F_2 = F_G \Rightarrow p.S_2 = m.g$$

z této rovnice vypočítáme tlak $p$ v kapalině : $p = \frac{m.g}{S_2}$

pak síla $F_1$, která působí na menší píst: $F_1 = p.S_1 = \frac{m.g}{S_2}.S_1 = \frac{m.g}{\pi.(\frac{d_2}{2})^2}.\pi.(\frac{d_1}{2})^2 = m.g.(\frac{d_1}{d_2})^2$

po dosazení: $F_1 = 200.10.(\frac{0{,}06}{0{,}26})^2 = 106{,}5N$

**dráhu** většího pístu určíme z podmínky, že PRÁCE ($W = \vec{F}.\vec{s}$), kterou vykoná síla $F_1$ je stejně velká jako práce, kterou vykoná síla $F_2$

$$W_1 = F_1 s_1 = F_2 \frac{S_1}{S_2} s_1 = F_2 \frac{S_2 s_2}{S_2} = F_2 s_2$$

současně totiž platí * Pascalův zákon: $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_1 = F_2 . \frac{S_1}{S_2}$

* nestlačitelnost kapaliny: $V_1 = V_2 \Rightarrow S_1 s_1 = S_2 s_2$

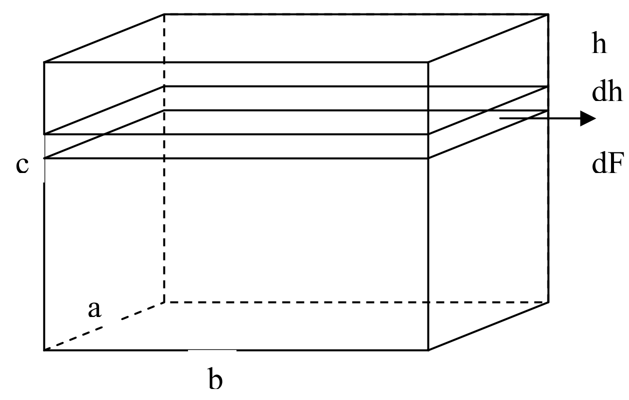
pak lze psát: $F_1 s_1 = F_2 s_2 \Rightarrow s_2 = \frac{F_1}{F_2}.s_1$

po dosazení: $s_2 = \frac{F_1}{F_2}.s_1 = \frac{F_1}{m.g}.s_1 = \frac{106{,}5}{2000}.0{,}4 = 0{,}021m = 2{,}1cm$

Odpověď: Na píst hydraulického zařízení působí síla o velikosti 106,5N. Větší píst se posune o 2,1 cm.

4. Jak velkou silou působí voda na dno a na stěny akvária o rozměrech 30x50x50 cm?

$a = 30$ cm
$b = 50$ cm
$c = 50$ cm
$F = ?$




**síla působící na dno:**

pro tlak – hydrostatický- působící na dno nádoby platí: $p_h = c.\rho.g$

síla působící na dno: $F = S.p = a.b.p = a.b.c.\rho.g$

po dosazení: $F = 0{,}3.0{,}5.0{,}5.1000.10 = 750\,N$

*pozn.:* Síla působící na dno nádoby závisí pouze na výšce vody v nádobě a ploše dna, nezávisí na tvaru nádoby a celkovém objemu kapaliny – hydrostatické paradoxon.

**síla působící na stěnu o rozměrech a,c:**
jde o tlakovou sílu vody na stěnu akvária; tato síla není konstantní, ale mění se s hloubkou pod hladinou, protože s rostoucí hloubkou pod hladinou se mění (roste) hydrostatický tlak (nulová hodnota při hladině, maximální u dna akvária)

protože působící tlak není konstantní, nelze pro výpočet použít vztah $F = p.S$ , ale musíme stěnu akvária rozdělit na malé plošky (obdélníčky) o velikosti *dS,* na kterých lze hydrostatický tlak za konstantní považovat
pak spočítáme elementární sílu *dF* působící na plochu *dS* a celkovou sílu *F* dostaneme sečtením těchto elementárních sil *dF*

pro velikost plošky *dS* platí – viz obrázek: $dS = a.dh$
pro sílu *dF* působící v hloubce *h,* kde působí tlak $p = h.\rho.g$ platí: $dF = p.dS = h.\rho.g.dS$

celková síla působící na stěnu o rozměrech a,c:
$$F = \int dF = \int p.dS = \int h.\rho.g.a.dh = \rho.g.a.\int h.dh$$

hloubka se mění v intervalu <0 , c> $\Rightarrow$
$$F = \rho.g.a\int_0^c h.dh = \rho.g.a.\left[\frac{h^2}{2}\right]_0^c = \frac{1}{2}.\rho.g.a.(c^2 - 0) = \frac{1}{2}.\rho.g.a.c^2$$

po dosazení: $F = \frac{1}{2}.1000.10.0,3.0,5^2 = 375N$

**síla působící na stěnu o rozměrech b,c:**
výpočet je analogický výše uvedenému postupu, změní se pouze velikost plošky ( $dS = b.dh$ )

pak pro působící sílu platí:
$$F = \int dF = \int p.dS = \int h.\rho.g.b.dh = \rho.g.b.\int h.dh$$
$$F = \rho.g.b\int_0^c h.dh = \rho.g.b.\left[\frac{h^2}{2}\right]_0^c = \frac{1}{2}.\rho.g.b.(c^2 - 0) = \frac{1}{2}.\rho.g.b.c^2$$

po dosazení: $F = \frac{1}{2}.1000.10.0,5.0,5^2 = 625\,N$

Odpověď: Na dno působí síla o velikosti 750 N, na boční stěny působí síly o velikosti 375 N , resp. 625 N.

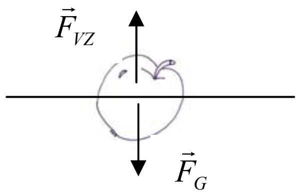
*poznámka:* Vzhledem k tomu, že hydrostatický tlak roste s hloubkou lineárně, lze sílu na boční stěnu spočítat jako součin plochy stěny a průměrného tlaku: $F = p.S = \frac{0+c}{2}\rho.g.a.c = \frac{1}{2}\rho.g.a.c^2$

5. Na hladině rybníka plave jablko, které je ponořeno z 95% svého objemu. Určete jeho hustotu.

---

$V^* = 0{,}95V$ ( kde $V$ je objem celého jablka)
$\rho\ = ?$

---




jablko, které spadne do vody, vyplave po chvíli na hladinu

k této situaci dochází v případě, že hustota tělesa je menší než hustota okolní kapaliny; výslednice sil (na jablko působí síla tíhová svisle dolů a síla vztlaková svisle vzhůru) pak směřuje svisle vzhůru a těleso stoupá k volné hladině kapaliny; kdyby neexistoval odpor prostředí proti pohybu tělesa, byl by pohyb tělesa vzhůru rovnoměrně zrychlený

po dosažení hladiny se těleso částečně vynoří a ustálí se v poloze, kdy tíhová síla $\vec{F}_G$ bude v rovnováze se vztlakovou silou $\vec{F}_{VZ}$, jejíž velikost je ovšem dána pouze objemem $V^*$ ponořené části tělesa (protože jenom tento objem kapaliny těleso vytlačuje)

pro jablko, které se volně vznáší na hladině musí platit: $\vec{F}_G + \vec{F}_{VZ} = \vec{0}$

$$F_G - F_{VZ} = 0$$

$$F_G = F_{VZ}$$

$$m.g = V^*.\rho_{H2O}.g$$

vyjádříme hmotnost jablka: $m = V.\rho_{jablko}$ **!!** hmotnost jablka je dána celým objemem **!!**

po dosazení lze vyjádřit hustotu jablka: $V.\rho_{jablko} = V^*.\rho_{H2O}$

$$V.\rho_{jablko} = 0{,}95V.\rho_{H2O}$$

$$\rho_{jablko} = 0{,}95.\rho_{H2O}$$

po dosazení: $\rho_{jablko} = 0{,}95.1000 = 950\,kg.m^{-3}$

Odpověď: Hustota jablka je 950 kg.m$^{-3}$.

6. Na hladině rybníka plave tenisový míček (vnější průměr 7 cm, tloušťka stěny 0,5 cm), který je ponořen z jedné poloviny svého objemu. Určete hustotu materiálu, ze kterého je vyroben.

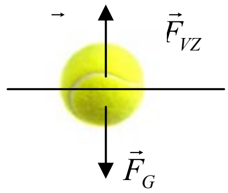
---

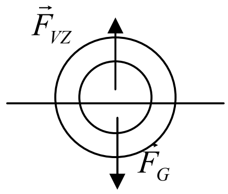
$d = 7$ cm

$\Delta d = 0{,}5$ cm

$V^* = ½\ V$ ( kde $V$ je vnější objem tenisového míčku)

$\rho = ?$




---

platí stejná teorie jako u výše uvedeného příkladu č.5; rozdíl je v tom, že se tentokrát jedná o **předmět dutý**

tenisový míček, který spadne do vody, vyplave po chvíli na hladinu

k této situaci dochází v případě, že hustota tělesa je menší než hustota okolní kapaliny; výslednice sil (na tenisový míček působí síla tíhová svisle dolů a síla vztlaková svisle vzhůru) pak směřuje svisle vzhůru a těleso stoupá k volné hladině kapaliny; kdyby neexistoval odpor prostředí proti pohybu tělesa, byl by pohyb tělesa vzhůru rovnoměrně zrychlený

po dosažení hladiny se těleso částečně vynoří a ustálí se v poloze, kdy tíhová síla $\vec{F}_G$ bude v rovnováze se vztlakovou silou $\vec{F}_{VZ}$, jejíž velikost je ovšem dána pouze objemem $V^*$ ponořené části tělesa (protože jenom tento objem kapaliny těleso vytlačuje).

pro tenisový míček, který se volně vznáší na hladině musí platit: $\vec{F}_G + \vec{F}_{VZ} = \vec{0}$

$$F_G - F_{VZ} = 0$$

$$m.g = V^*.\rho_{H2O}.g$$

vyjádříme hmotnost tenisového míčku: $m = V.\rho_{micek}$

míček ≈ dutá koule **!!**

objem plné koule: $V = \frac{4}{3}.\pi.r^3 = \frac{4}{3}.\pi.(\frac{d}{2})^3$

objem dutého míčku: $V = V_{vnejsi} - V_{vnitřni}$

$$V = \frac{4}{3}.\pi.r_{vnejsi}{}^3 - \frac{4}{3}.\pi.r_{vnitrni}{}^3$$

poloměr vnější koule: $r = \frac{d}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5\,cm$

poloměr vnitřní koule: $r = \frac{d - 2.\Delta d}{2} = \frac{7 - 2.0{,}5}{2} = 3\,cm$

po dosazení: $(V_{vněněj} - V_{vnitřni}).\rho_{micek} = V^*.\rho_{H2O}$

$$(V_{vnejsi} - V_{vnitřni}).\rho_{micek} = \frac{1}{2}V_{vnejsi}.\rho_{H2O}$$

$$(\frac{4}{3}.\pi.r_{vnejsi}{}^{3} - \frac{4}{3}.\pi.r_{vnitrni}{}^{3}).\rho_{micek} = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\pi.r_{vnejsi}{}^{3}.\rho_{H2O}$$

po úpravách: $(r_{vnejsi}{}^{3} - r_{vnitrni}{}^{3}).\rho_{micek} = \frac{1}{2}.r_{vnejsi}{}^{3}.\rho_{H2O}$

$$\rho_{micek} = \frac{1}{2}.\rho_{H2O}.\frac{r_{vnejsi}{}^{3}}{r_{vnejsi}{}^{3} - r_{vnitrni}{}^{3}}$$

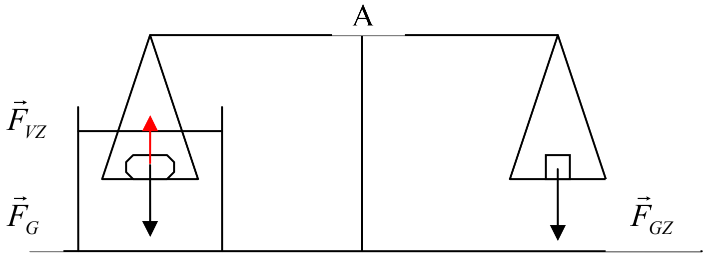
po dosazení: $\rho_{micek} = \frac{1}{2}.1000.\frac{0{,}035^{3}}{0{,}035^{3} - 0{,}03^{3}} = 1350\,kg.m^{-3}$

Odpověď: Hustota tenisového míčku je 1350 kg.m$^{-3}$.

7. Předmět nepravidelného tvaru je ponořen do vody a vyvážen na rovnoramenných vahách závažím o hmotnosti 560 g. Ponoříme-li ho do lihu o hustotě 789 kg.m$^{-3}$, vyvážíme ho závažím o hmotnosti 620 g. Určete objem a hmotnost (resp. hustotu) tělesa.

---

$m_1 = 560$ g
$m_2 = 620$ g
$\rho_{H2O} = 1000$ kg.m$^{-3}$
$\rho_{lih} = 789$ kg.m$^{-3}$
$m = ?$
$V = ?$
$\rho = ?$




Je-li předmět vyvážen závažím o určité hmotnosti, je soustava v rovnováze $\Rightarrow$ je splněna podmínka rovnováhy: výsledný moment všech sil působících na soustavu je nulový.
Moment síly působící na levou misku vah musí být co do velikosti stejný jako moment síly působící na pravou misku. (pozn.: moment síly určujeme vůči bodu A )
Vzhledem k tomu, že jde o váhy rovnoramenné (ramena stejné délky), stačí uvažovat rovnost sil působících na opačných stranách vah.

Síly působící : na pravou misku - směrem dolů síla tíhová $\vec{F}_{GZ}$ (vyvolaná závažím o hmotnosti $m_1$, resp. $m_2$)
na levou misku - směrem dolů síla tíhová $\vec{F}_G$ (vyvolaná tělesem o hmotnosti $m$)
- směrem vzhůru síla vztlaková $\vec{F}_{VZ}$ (protože je těleso ponořeno v tekutině )

Výsledná síla působící na pravou misku vah: $\vec{F}_{GZ}$
na levou misku vah: $\vec{F}_G + \vec{F}_{VZ}$

jde o rovnováhu $\Rightarrow$ $\vec{F}_G + \vec{F}_{VZ} = \vec{F}_{GZ}$

pro velikost sil:
$$F_G - F_{VZ} = F_{GZ}$$
$$m.g - V.\rho_{kapalina}.g = m_{zavazi}.g$$

1. vážení je provedeno ve vodě: $m.g - V.\rho_{H2O}.g = m_1.g$

2. vážení je provedeno v lihu: $m.g - V.\rho_{lih}.g = m_2.g$

získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých – hmotnost $m$ a objem $V$ daného předmětu po úpravě: $V.\rho_{H2O}.g - V.\rho_{lih}.g = m_2.g - m_1.g$

$$V.(\rho_{H2O} - \rho_{lih}).g = (m_2 - m_1).g \Rightarrow V = \frac{m_2 - m_1}{\rho_{H2O} - \rho_{lih}}$$

po dosazení: $V = \dfrac{0,62 - 0,56}{1000 - 789} = 2,84.10^{-4}\,m^3$

hmotnost předmětu určíme z rovnice: $m.g - V.\rho_{H2O}.g = m_1.g \Rightarrow m = m_1 + V.\rho_{H2O}$

po dosazení: $m = 0,56 + 2,84.10^{-4}.1000 = 0,84\,kg$

hustota daného předmětu: $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{0,84}{2,84.10^{-4}} = 2973\,kg.m^{-3}$

Odpověď: Daný předmět má hmotnost 0,84 kg, jeho objem je $2,84.10^{-4}$ $m^3$ a hustota 2973 $kg.m^{-3}$.

*poznámka:*

* může jít o žulu, čedič, mramor

* ve skutečnosti působí vztlaková síla $\vec{F}_{VZ}$ ( $F_{VZ} = V.\rho_{vzduch}.g$ ) směrem vzhůru i na závaží umístěné na pravé misce vah; vzhledem k malé hustotě vzduchu ($\rho$ = 1,29kg.$m^{-3}$) a malému objemu závaží (objem není v příkladu ani uveden) lze v tomto případě tuto sílu zanedbat (na rozdíl od příkladu č. 13, kde má tato síla rozhodující roli)

- pokud bychom chtěli přesné vážení, pak je nutné ji uvažovat – tzv. redukce na vakuum

8. V říčce široké 3 m proudí voda rychlostí 2 $ms^{-1}$. Jakou rychlostí voda poteče, zúží-li se náhle šířka říčky na 2 m? Jaký objem proteče oběma místy za 1 hod? Jak se změnil tlak v korytě říčky?

---

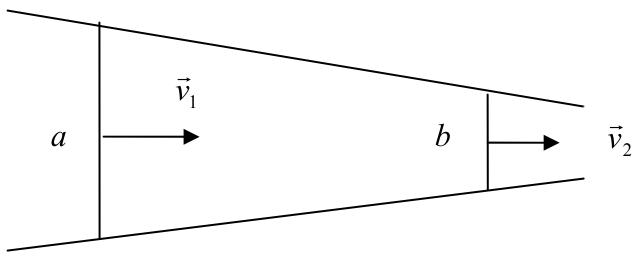
$a$ = 3 m
$v_1$ = 2 $ms^{-1}$
$b$ = 2 m
$v_2$ = ?
$V$ = ?
$t$ = 1 hod = 3 600s
$\Delta p$ = ?

---

Abychom byli schopni tuto úlohu vyřešit, provedeme zjednodušující předpoklady:

- vodu považujeme vzhledem k jejím vlastnostem za ideální kapalinu
- potok si představíme jako vodorovné potrubí s proměnným průřezem, ve kterém voda proudí laminárně
- tlak vody bereme stejný v celém průřezu koryta

⇒ na výpočet použijeme rovnici kontinuity a rovnici Bernoulliho




**výpočet rychlosti v užší části**: objem vody, která proteče korytem říčky, se nemění

⇒ použijeme rovnici kontinuity: $S_1.v_1 = S_2.v_2 \Rightarrow v_2 = v_1.\frac{S_1}{S_2}$

kde $S_1$, $S_2$ jsou obecně plochy průřezů potrubí

v našem případě uvažujeme, že koryto řeky má tvar půlkruhu o ploše $S = \frac{1}{2}.\pi.r^2 = \frac{1}{2}.\pi.(\frac{d}{2})^2 = \frac{1}{8}.\pi.d^2$

Dosadíme do rovnice kontinuity ⇒

$$v_2 = v_1.\frac{S_1}{S_2} = v_1.\frac{\frac{1}{8}.\pi.d_1^{\,2}}{\frac{1}{8}.\pi.d_2^{\,2}} = v_1.\frac{d_1^2}{d_2^2} = v_1.\frac{a^2}{b^2}$$

po dosazení: $v_2 = 2.\frac{3^2}{2^2} = 4{,}5\,m.s^{-1}$

**objem, který proteče říčkou** za $t$ = 1 hod: jde o objem půlválce, jehož podstavu tvoří plocha průřezu koryta a výškou je dráha, kterou urazí „čelo válce“ pohybující se konstantní rychlostí $v$ za danou dobu, v našem případě za 1 hod

$$V = S.x = S.v.t = \frac{1}{8}.\pi.d^2.v.t$$

protože objem vody, která proteče korytem říčky se nemění, lze pro výpočet použít hodnoty v širším nebo užším průřezu:

$$V = \frac{1}{8}.\pi.{d_1}^2.v_1.t = \frac{1}{8}.\pi.{d_2}^2.v_2.t$$

po dosazení: $V = \frac{1}{8}.\pi.3^2.2.3600 = \frac{1}{8}.\pi.2^2.4{,}5.3600 = 25434\, m^3$

**změna tlaku**: na výpočet změny tlaku použijeme Bernoulliho rovnici vyjadřující energetické zákonitosti proudící kapaliny

$$\frac{1}{2}.\rho.v_1^2 + h_1.\rho.g + p_1 = \frac{1}{2}.\rho.v_2^2 + h_2.\rho.g + p_2$$

jde o vodorovné potrubí (nemění se výška potrubí nad zvolenou vodorovnou hladinou): $h_1 = h_2 \Rightarrow \frac{1}{2}.\rho.v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}.\rho.v_2^2 + p_2$

pak změna tlaku: $\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2}.\rho.v_2^2 - \frac{1}{2}.\rho.v_1^2$

po dosazení: $\Delta p = \frac{1}{2}.1000.4{,}5^2 - \frac{1}{2}.1000.3^2 = 5\,625\, Pa$

Odpověď: V zúženém místě poteče voda rychlostí 4,5 m.s$^{-1}$, oběma místy proteče za 1 hod 25 434 m$^3$ vody a pokles tlaku v korytě říčky je 5 625 Pa.

9. Z hluboké těžní jámy je vyčerpávaná voda rychlostí 4 ms$^{-1}$ hadicí o průměru 4 cm. Hladina vody v jámě je v hloubce 5 m pod úrovní terénu. Určete výkon čerpadla.

---

$v = 4$ m.s$^{-1}$
$d = 4$ cm
$h = 5$ m
$P = ?$

---

jedná se o průměrný výkon čerpadla: $P = \dfrac{\Delta W}{\Delta t}$

kde $\Delta W$ je celková práce, kterou musí čerpadlo vykonat za dobu $\Delta t$

- voda se musí dostat z jámy hluboké 4 m na povrch země $\Rightarrow$ mění se potenciální energie vody
- voda vytéká na povrchu země z hadice určitou rychlostí $\Rightarrow$ má kinetickou energii

$\Rightarrow$ celková práce vykonaná čerpadlem je rovna změně energie:

$$W = \Delta E$$
$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p$$

kde $\Delta E_k = E_{k\_povrch\_zeme} - E_{k\_hladina\_vody} = \dfrac{1}{2}.m.v^2 - 0$, voda v jámě je v klidu (v = 0 m.s$^{-1}$)

$\Delta E_p = E_{p\_povrch\_zeme} - E_{p\_hladina\_vody} = m.g.h - 0$, nulovou hladinu potenciální energie volíme na hladině vody v těžní jámě

pak $W = \dfrac{1}{2}.m.v^2 + m.g.h$

kde $m$ je hmotnost vody, kterou musí čerpadlo dostat z jámy na povrch země hadicí o průměru 4 cm za dobu $t$

$$m = V.\rho = S.x.\rho = \pi.r^2.v.t.\rho = \pi.(\frac{d}{2})^2.v.t.\rho$$

kde $V$ je objem vody, který proteče hadicí o průměru $d$ rychlostí $v$ = 4m.s$^{-1}$ za danou dobu $t$

$$\Rightarrow \; P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}.m.v^2 + m.g.h}{\Delta t} = m.\frac{\frac{1}{2}.v^2 + g.h}{\Delta t} = \pi.(\frac{d}{2})^2.v.t.\rho.\frac{\frac{1}{2}.v^2 + g.h}{t}$$

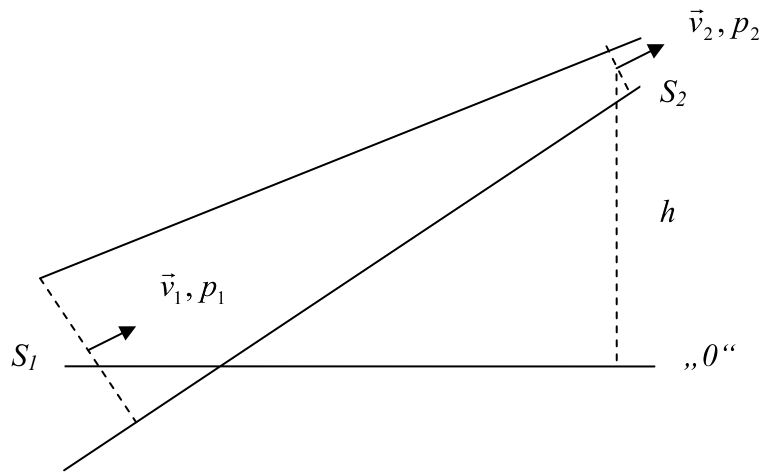
$$P = \pi.(\frac{d}{2})^2.v.\rho.(\frac{1}{2}.v^2 + g.h)$$

po dosazení: $P = \pi.(\dfrac{0{,}04}{2})^2.4.1000.(\dfrac{1}{2}.4^2 + 10.5) = 291{,}4W$

Odpověď: Výkon čerpadla je 291 W.

10. V přízemí panelového domu teče voda rychlostí 5 ms$^{-1}$ potrubím o průřezu 10 cm$^2$. Jak vysoko je první patro, klesne-li tlak o 0,91.10$^5$ Pa a průřez se zmenší na 4 cm$^2$?

$v_1 = 5$ m.s$^{-1}$
$S_1 = 10$ cm$^2$
$\Delta p = 0{,}91.10^5$ Pa
$S_2 = 4$ cm$^2$
$h = ?$




* jde o proudění kapaliny potrubím s proměnným průřezem, u něhož se mění výška nad vodorovnou rovinou
* vodu považujeme vzhledem k jejím vlastnostem za ideální kapalinu
$\Rightarrow$ na výpočet použijeme rovnici Bernoulliho a rovnici kontinuity

Bernoulliho rovnice vyjadřuje energetické zákonitosti proudící kapaliny

$$\frac{1}{2}.\rho.v_1^2 + h_1.\rho.g + p_1 = \frac{1}{2}.\rho.v_2^2 + h_2.\rho.g + p_2$$

kde $h_1$, $h_2$ jsou výšky průřezů potrubí $S_1$, $S_2$ nad vodorovnou rovinou (dle volby základní hladiny - podle obrázku - je $h_1 = 0$ m, $h_2 = h$)
$p_1$, $p_2$ je tlak kapaliny v průřezu $S_1$, $S_2$ $\Rightarrow$ vzhledem k zadání víme, že tlak poklesl o určitou hodnotu $\Rightarrow$ lze určit pouze rozdíl tlaků v jednotlivých místech: $\Delta p = p_1 - p_2$
$v_1$, $v_2$ rychlosti kapaliny v daných průřezech

rychlost $v_2$, kterou proudí kapalina v užší části potrubí ve výšce $h$, se určí pomocí rovnice kontinuity: $S_1.v_1 = S_2.v_2 \Rightarrow v_2 = v_1.\dfrac{S_1}{S_2}$

dosadíme do Bernoulliho rovnice:

$$\frac{1}{2}.\rho.v_1^2 + p_1 - p_2 = \frac{1}{2}.\rho.(v_1.\frac{S_1}{S_2})^2 + h.\rho.g$$

$$\frac{1}{2}.\rho.v_1^2 + \Delta p = \frac{1}{2}.\rho.(v_1.\frac{S_1}{S_2})^2 + h.\rho.g \Rightarrow h.\rho.g = \frac{1}{2}.\rho.v_1^2 + \Delta p - \frac{1}{2}.\rho.(v_1.\frac{S_1}{S_2})^2$$

$$h.\rho.g = \frac{1}{2}.\rho.v_1^2.(1-(\frac{S_1}{S_2})^2) + \Delta p$$

$$h = \frac{\frac{1}{2}.\rho.v_1^2.(1-(\frac{S_1}{S_2})^2) + \Delta p}{\rho.g}$$

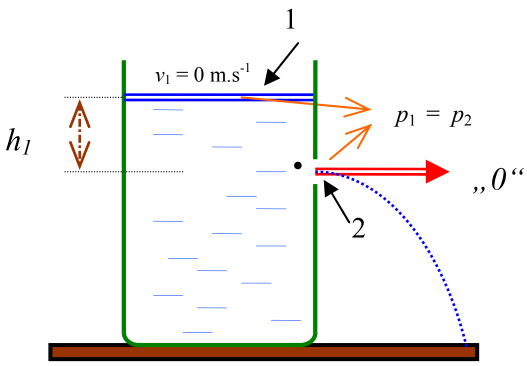
po dosazení: $h = \dfrac{\frac{1}{2}.1000.5^2.(1-(\frac{10}{4})^2) + 0,91.10^5}{1000.10} = 2,54\,m$

Odpověď: První patro je ve výšce 2,5 metrů.

11. Jakou rychlostí bude vytékat voda z otevřené nádoby otvorem o průměru 4 cm, který se nachází v hloubce 2 m pod hladinou vody, kterou udržujeme ve stálé výšce?

---

$v = ?$
$d = 4$ cm
$h = 2$ m




jde o proudění kapaliny „potrubím s proměnným průřezem“, u něhož se mění výška nad vodorovnou rovinou; vodu považujeme vzhledem k jejím vlastnostem za ideální kapalinu
⇒ na výpočet použijeme rovnici Bernoulliho

Bernoulliho rovnice vyjadřuje energetické zákonitosti proudící kapaliny (celková energie proudící kapaliny se zachovává)

$$\frac{1}{2}.\rho.v_1^2 + h_1.\rho.g + p_1 = \frac{1}{2}.\rho.v_2^2 + h_2.\rho.g + p_2$$

kde $h_1$, $h_2$ jsou výšky průřezů potrubí $S_1$, $S_2$ nad vodorovnou rovinou (dle volby základní hladiny - podle obrázku - je $h_2 = 0$ m, $h_1 = h$)

$p_1$, $p_2$ je tlak kapaliny v průřezu $S_1$, $S_2$ ⇒ vzhledem k zadání uvažujeme tlak atmosférický jak na volnou hladinu, tak na výtokový otvor (vzhledem k malému rozdílu výšek $h_1$ a $h_2$ považujeme atmosférický tlak za konstantní - v obou místech stejný)

$v_1$ je rychlost, se kterou klesá hladina – vzhledem k zadání (hladinu udržujeme ve stálé výšce) je $v_1 = 0\,m.s^{-1}$

$v_2$ je rychlost, kterou počítáme ($v_2 = v$)

po dosazení výše uvedených hodnot: $h.\rho.g = \frac{1}{2}.\rho.v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2.g.h}$

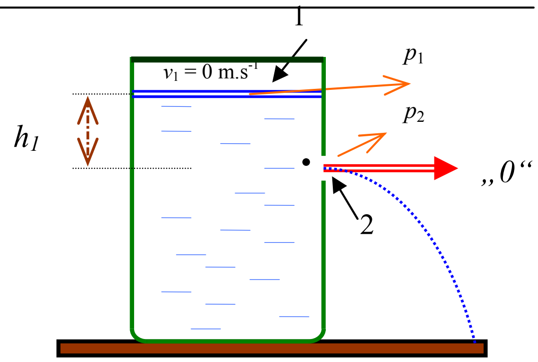
číselná hodnota: $v = \sqrt{2.10.2} = 6{,}3\,m.s^{-1}$

Odpověď: Voda vytéká rychlostí 6,3 m.s$^{-1}$.

*poznámka:* Velikost otvoru není k výpočtu rychlosti vytékající kapaliny potřeba. Tento údaj by se uplatnil např. v případě, že bychom chtěli spočítat objem kapaliny, která vyteče daným otvorem za nějakou dobu.

12. Jakou rychlostí bude vytékat voda z uzavřené nádoby otvorem o průměru 4 cm, který se nachází v hloubce 2 m pod hladinou, uvažujeme-li na hladině kapaliny tlak $2.10^5$ Pa a hladinu udržujeme ve stálé výšce.

$v = ?$
$d = 4$ cm
$h = 2$ m
$p = 2.10^5$ Pa




jde o proudění kapaliny „potrubím s proměnným průřezem“, u něhož se mění výška nad vodorovnou rovinou; vodu považujeme vzhledem k jejím vlastnostem za ideální kapalinu
$\Rightarrow$ na výpočet použijeme rovnici Bernoulliho

odlišnost oproti předchozímu příkladu je v tom, že
nyní uvažujeme uzavřenou nádobu, kdy na hladinu působí jiný než atmosférický tlak

Bernoulliho rovnice vyjadřuje energetické zákonitosti proudící kapaliny
(celková energie proudící kapaliny se zachovává)

$$\frac{1}{2}.\rho.v_1^2 + h_1.\rho.g + p_1 = \frac{1}{2}.\rho.v_2^2 + h_2.\rho.g + p_2$$

kde $h_1$, $h_2$ jsou výšky průřezů potrubí $S_1$, $S_2$ nad vodorovnou rovinou (dle volby základní hladiny - podle obrázku - je $h_2 = 0$ m, $h_1 = h$)
$p_2$ je tlak kapaliny v průřezu $S_2 \Rightarrow$ jde o tlak atmosférický ($p_2 = p_a$= 101 325 Pa), který je v místě výtokového otvoru
$p_1$ je tlak na hladinu kapaliny v průřezu $S_1$ ($p_1 = p = 2.10^5$ Pa )
$v_1$ je rychlost, se kterou klesá hladina – vzhledem k zadání (hladinu udržujeme ve stálé výšce) je $v_1 = 0\,m.s^{-1}$
$v_2$ je rychlost, kterou počítáme

po dosazení výše uvedených hodnot: $h\ .\rho.g + p = \frac{1}{2}.\rho.v_2^2 + p_a \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}.\rho.v_2^2 = h\ .\rho.g + p - p_a \quad \Rightarrow v_2^2 = \frac{2}{\rho}(h\ .\rho.g + p - p_a)$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(h\ .\rho.g + p - p_a)} = \sqrt{2gh + \frac{2(p - p_a)}{\rho}}$$

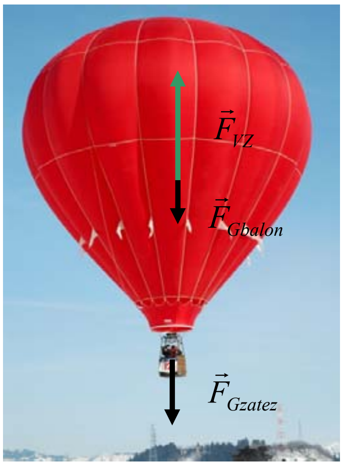
číselná hodnota: $v = \sqrt{\frac{2}{1000}(2.1000.10 + 2.10^5 - 101\,325)} = 15{,}4\,m.s^{-1}$

Odpověď: Voda vytéká rychlostí 15,4 m.s$^{-1}$.

*poznámka:* Díky vyššímu tlaku nad uzavřenou hladinou (vliv členu $\frac{2(p - p_a)}{\rho}$) je tato rychlost vyšší než v předchozím příkladě.

13. Jak velkou zátěž může nést balón o průměru 18 m naplněný heliem ($\rho_{He}$= 0,18 kg.m$^{-3}$), pohybuje-li se v nízké výšce nad povrchem Země, kde je hustota vzduchu $\rho$ = 1,29 kg.m$^{-3}$. Objem nákladu zanedbejte.

$d$ = 18 m
$\rho_{He}$= 0,18 kg.m$^{-3}$
$\rho_{vzduch}$ = 1,29 kg.m$^{-3}$
$m$ = ?




balón se pohybuje nad povrchem Země:
- ve vodorovném směru vlivem působícího větru (to v daném příkladě neřešíme)
- ve svislém směru po vystoupání do určité výšky už k žádnému pohybu nedochází ⇒

jedná se o silovou rovnováhu – vztlaková síla vzduchu $\vec{F}_{VZ}$, tíhová
síla zátěže $\vec{F}_{Gzatez}$ a tíhová síla samotného hélia $\vec{F}_{Gbalon}$ musí být v rovnováze

$$\vec{F}_{Gzatez} + \vec{F}_{Gbalon} + \vec{F}_{VZ} = \vec{0}$$

pro jejich velikosti platí vztah

$$F_{Gzatez} + F_{Gbalon} - F_{VZ} = 0$$
$$F_{Gzatez} + F_{Gbalon} = F_{VZ}$$
$$m_{zatez}.g + m_{balon}.g = V.\rho_{vzduch}.g$$

kde $V$ je objem balónu: $V = \frac{4}{3}.\pi.r^3 = \frac{4}{3}.\pi.(\frac{d}{2})^3 = \frac{1}{6}.\pi.d^3$

$m_{balon}$ je hmotnost helia, které je v balonu obsaženo: $m_{balon} = V.\rho_{He} = \frac{1}{6}.\pi.d^3.\rho_{He}$

pak platí: $m_{zatez} + m_{balon} = V.\rho_{vzduch}$

$$m_{zatez} = V.\rho_{vzduch} - m_{balon}$$
$$m_{zatez} = \frac{1}{6}.\pi.d^3.\rho_{vzduch} - \frac{1}{6}.\pi.d^3.\rho_{He}$$
$$m_{zatez} = \frac{1}{6}.\pi.d^3.(\rho_{vzduch} - \rho_{He})$$

po dosazení: $m_{zatez} = \frac{1}{6}.\pi.18^3.(1{,}29 - 0{,}18) = 3388\,kg$

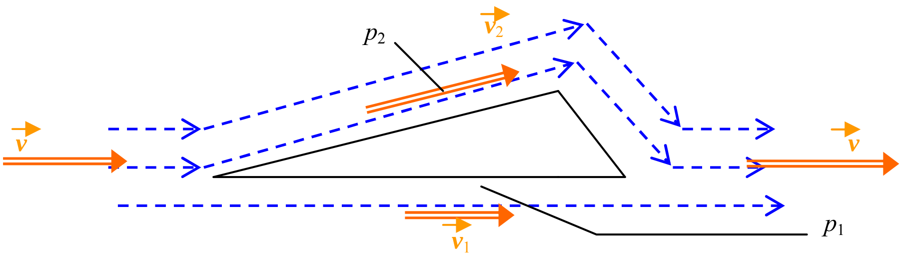
Odpověď: Hledaná hmotnost zátěže je 3388 kg.

*poznámka:* Zátěží rozumíme hmotnost prázdného koše, balonu, lidí a vybavení.

14. Letadlo letí rychlostí 800 km.h$^{-1}$ ve výšce 11 km nad povrchem Země, kde je hustota vzduchu $\rho$ = 0,36 kg.m$^{-3}$. Určete rozdíl tlaků nad a pod křídlem letadla, je-li horní strana o 10% delší než strana spodní.

---

$v$ = 800 km.h$^{-1}$ = 800/3,6 m.s$^{-1}$
$h$ = 11 km
$\rho$= 0,36 kg.m$^{-3}$
$\Delta p$ = ?
$s_h = 1{,}1 s_d$




princip létání těles „těžších než vzduch“ (resp. těles, jejichž střední hustota je vyšší než hustota okolního vzduchu) lze vysvětlit na základě Bernoulliho rovnice

nosné plochy letadel – křídla – mají nesouměrný tvar ⇒ v důsledku toho musí obtékat vzduch horní část křídla vyšší rychlostí, než jakou obtéká kolem spodní části křídla ($v_2 > v_1$) ⇒ tlak $p_2$ u horní části křídla je naopak menší než tlak $p_1$ u části spodní

Bernoulliho rovnice vyjadřuje energetické zákonitosti proudící tekutiny - vzduchu (celková energie proudící tekutiny se zachovává) – uvažujeme zjednodušený tvar pro vodorovnou trubici (výšku křídla letadla lze zanedbat) ⇒ $h_2 = h_1$ ⇒

$$\frac{1}{2}.\rho.v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}.\rho.v_2^2 + p_2$$

chceme určit rozdíl tlaků $\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2}.\rho.v_2^2 - \frac{1}{2}.\rho.v_1^2$

rychlost $v_1$: $v_1 = v = 800\,km.h^{-1}$
rychlost $v_2$: - doba, za kterou obteče vzduch horní i dolní část křídla je stejná
- uvažujeme rovnoměrný přímočarý pohyb ⇒

$$t_1 = t_2$$

$$\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} \Rightarrow v_2 = \frac{s_2}{s_1}.v_1 = \frac{s_h}{s_d}.v_1 = \frac{1{,}1.s_d}{s_d}.v_1 = 1{,}1.v_1$$

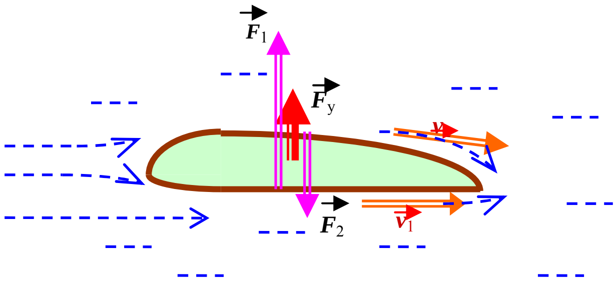
pak rozdíl tlaků: $\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2}.\rho.v_2^2 - \frac{1}{2}.\rho.v_1^2 = \frac{1}{2}.\rho.(1{,}1.v_1)^2 - \frac{1}{2}.\rho.v_1^2$

po dosazení: $\Delta p = \frac{1}{2}.0{,}36.(1{,}1.\frac{800}{3{,}6})^2 - \frac{1}{2}.0{,}36.\frac{800}{3{,}6}^2 = 49\ 382\,Pa \approx 50\,kPa$

Odpověď: Rozdíl tlaků nad a pod křídlem letadla je 50 kPa.

poznámka: * je důležité si uvědomit, že tlakový rozdíl $\Delta p = p_1 - p_2$ je úměrný rozdílu druhých mocnin rychlostí proudícího vzduchu ($\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2}.\rho.v_2^2 - \frac{1}{2}.\rho.v_1^2$) $\Rightarrow$ malý rozdíl rychlostí má za následek velký rozdíl tlaků

$\Rightarrow$ tlaková síla $\vec{F}_2$ působící na horní plochu křídla má menší velikost než síla $\vec{F}_1$ působící na plochu dolní.
Výslednice $\boldsymbol{F}_y$ těchto dvou sil má velikost
$F_y = F_1 - F_2$
$\vec{F}_y$ = aerodynamická vztlaková síla




* pro zjednodušení uvažujeme, že hustota vzduchu zůstává konstantní

# V. Literatura

Sestaveno na základě uvedených zdrojů:

HALLIDAY, David, RESNICK, Robert a WALKER, Jearl: Fyzika. Brno: Vutium, 2000. ISBN 80-214-1868-0.

TULKA, Jiří: Výpočtové úlohy z fyziky pro posluchače UPa (I). Pardubice, 2001. ISBN 80-7194-383-5.

ZAJÍC, Jan a KAŠPAROVÁ, Jana: Základy fyziky I (Sbírka příkladů pro posluchače prezenčního studia DFJP Univerzity Pardubice). Pardubice, 2003.

| | |
|---|---|
| Název | Sbírka řešených příkladů z mechaniky |
| Autoři | RNDr. Petr Janíček, Ph.D., Mgr. Jana Kašparová, Ph.D. |
| Vydavatel | Univerzita Pardubice |
| Určeno pro | studenty Fakulty chemicko-technologické a Dopravní fakulty Jana Pernera Univerzity Pardubice |
| Odpovědný redaktor | doc. Ing. Zdeněk Palatý, CSc. |
| Stran | 100 |
| Vydání | první |
| Forma vydání | e-kniha (pdf) |
| AA/VA | 4,16 / 4,19 |

ISBN 978-80-7395-721-6 (pdf)