UNIVERZITA PARDUBICE
Fakulta elektrotechniky a informatiky

# Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Jan Polák

Bakalářská práce
2012

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Akademický rok: **2011/2012**

# ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

| | |
|---|---|
| Jméno a příjmení: | **Jan Polák** |
| Osobní číslo: | **I08141** |
| Studijní program: | **B2646 Informační technologie** |
| Studijní obor: | **Informační technologie** |
| Název tématu: | **Soustavy lineárních diferenciálních rovnic** |
| Zadávající katedra: | **Katedra informačních technologií** |

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Cílem je vypracovat učební text, který bude využitelný pro studenty oborů ŘP a KMT při studiu předmětu Matematika 3. Bude obsahovat stručné uvedení do problematiky dané oblasti matematiky, několik příkladů s podrobným postupem řešení a nakonec sbírku úloh, jejichž řešení bude možné sledovat např. jako interaktivní nápovědu (např. volitelnou v různých úrovních).
Vhodné by bylo také vytipovat alespoň dva aplikační příklady, které se k dané problematice vztahují a uvést je.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

***Boris Pavlovič Děmidovič: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment 2003**
***Seibert, J. Matematika III. Univerzita Pardubice 2007**

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Martin Svoboda**
Katedra matematiky a fyziky

Datum zadání bakalářské práce: **16. prosince 2011**
Termín odevzdání bakalářské práce: **11. května 2012**

L.S.

prof. Ing. Simeon Karamazov, Dr.
děkan

Ing. Lukáš Čegan, Ph.D.
vedoucí katedry

V Pardubicích dne 30. března 2012

**Prohlášení autora**

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 5. 8. 2013 Jan Polák

**Poděkování**

Na tomto místě bych chtěl v první řadě poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce RNDr. Martinu Svobodovi, který mi byl nápomocen během řešení matematických problémů spojených s tvorbou tohoto dokumentu a také za čas strávený konzultacemi. Dále bych chtěl poděkovat své rodině, která mě po celou dobu podporovala.

**Anotace**

Anotace je souhrnem základních informací o bakalářské práci. Slouží k povšechné orientaci o řešené problematice, celkovém pojetí práce a její hodnotě. Obsah anotace musí odpovídat obsahu bakalářské práce.

**Klíčová slova**

Soustavy, lineární, diferenciální, rovnice

**Title**

System of linear differential equations

**Annotation**

My work was dedicated to subject system of linear differential equations. My job was creating of study material and application suitable for other students. The most important aspect was creating a task set, with option to watch a solving of examples step by step. I chose as base of my application internet pages.

**Keywords**

System, linear, differential, equations

## Obsah

## Seznam zkratek

| | |
|---|---|
| HTTP | HyperText Transfer Protocol |
| HTML | HyperText Markup Language |
| CSS | Cascading style sheets |
| AJAX | Asynchronsous JavaScript XML |
| XML | Extensible Markup Language |
| ŘP | Řízení procesů |
| KMT | Komunikační a mikroprocesorová technika |
| XHTML | Extensible HyperText Markup Language |
| PHP | Hypertext Preprocessor (Personal Home Page |
| SLDR | Soustavy lineárních diferenciálních rovnic |
| LN | Lineárně nezávislé |

## Seznam obrázků

# Úvod

Tato práce je završením tříletého bakalářského studia oboru Informační technologie na Fakultě elektrotechniky a informatiky. Tématem mé bakalářské práce jsou soustavy lineárních diferenciálních rovnic. Hlavním cílem je seznámit čtenáře s pojmy a možnostmi řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic a vytvořit interaktivní sbírku úloh.

Teoretická část obsahuje základní pojmy potřebné k řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic. Dále pak slouží především jako učební text vhodný pro studenty vysokých škol při studiu dané problematiky. Praktická část je potom vypracovaná jako webové stránky. Obsahuje jak obecnou teorii k možnostem řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic, tak i sbírku úloh. Příklady ve sbírce je možné sledovat jako nápovědu v několika krocích.

Bakalářská práce je rozdělena do 4 kapitol. První kapitola je věnována především rozdělení soustav lineárních diferenciálních rovnic a specifikování typů soustav, kterými se budeme zabývat. Druhá kapitola se soustředí na pojmy související s řešením těchto soustav. Třetí kapitola obsahuje jednotlivé možnosti řešení vysvětlené na ilustračním příkladu. Poslední kapitola se potom soustřeďuje především na praktickou část resp. samotnou aplikaci, ať už z hlediska funkčnosti, tak i využití.

Samotný dokument je psán takovým stylem, aby byl snadno srozumitelný pro studenty, ale zároveň, aby jeho odbornost odpovídala dané problematice.

# 1 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

## 1.1 Rozdělení

Téma soustav lineárních diferenciálních rovnic je poměrně obsáhlé, proto by bylo dobré si jej z počátku trochu rozdělit. Takovým nejzákladnějším rozdělením je rozdělení na soustavy:

- homogenní
- nehomogenní

Tvar těchto rovnic bude dále vysvětlen v následující kapitole. Dále lze podle řádu soustavy rozdělit na:

- soustavy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu
- soustavy lineárních diferenciálních rovnic vyššího řádu

  - tyto soustavy se řeší převedením na soustavu 1. řádu (v teoretické části, kterými se nebudeme zabývat)

Pro potřeby naší teoretické části, ale i samotné aplikace, se budeme věnovat výhradně soustavám lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

## 1.2 Soustava s konstantními koeficienty

Pod termínem soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty rozumíme takovou soustavu, která má tvar

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + q_1,$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + q_2 ,$$

$$x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + q_3 .$$

Kde $a_{i,j} \in R, i, j = 1, 2, \dots n$ nazýváme koeficienty soustavy a funkce $q_i, \ i = 1, 2, \dots n$ definované na intervalu *I* nazýváme pravé strany. Pokud jsou pravé strany nulové, nazýváme soustavu homogenní, v opačném případě nehomogenní. Přičemž funkce $x_i(t)$ jsou neznámé – ty se při řešení SLDR snažíme najít. Resp. hledáme celou n-tici těchto funkcí. Počátečními podmínkami v bodě $t_0 \in \ I$ rozumíme:

$$x_1(t_0) = x_{0,1}, \quad x_2(t_0) = x_{0,2}, \qquad \dots, \quad x_n(t_0) = x_{0,n}.$$

# 2 Základní pojmy

## 2.1 Matice soustavy, charakteristická rovnice

Soustavu diferenciálních rovnic můžeme také zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

nebo také

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}(t),$$

kde vektorové funkce jsou zapsány jako sloupcové vektory. Matice **A** se nazývá matice soustavy. Je-li, **A** matice typu *n x n*, jejímiž prvky jsou reálná čísla, tj.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

nazýváme polynom (symbolem **E** značíme jednotkovou matici typu *n x n*)

$$P(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

charakteristickým polynomem matice A. Kořeny tohoto polynomu jsou potom nazývány **vlastní čísla** nebo také **vlastní hodnoty** matice A. Dále pak rovnice P(λ) = 0, je nazývána **charakteristickou rovnicí** příslušnou k matici A.

## 2.2 Obecné tvary matice 2. a 3. řádu

**Příklad 1:** Nechť A je matice řádu 2, tj.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Pak

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}$$

a

$$\det(A - \lambda \mathrm{E}) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1.2)$$

je polynomem druhého stupně v proměnné λ.

**Příklad 2:** Nyní se vraťme k Příkladu 1 a vztahu (1.2). Označme

$$Tr\,A = a_{11} + a_{22}$$

$Výraz\ a_{11} + a_{22}$ se nazývá **stopou matice** A. Pak charakteristická rovnice matice A řádu 2 má tvar

$$\lambda^2 - (Tr\,A)\lambda + \det A = 0$$

**Příklad 3:** Pro matici A řádu 3, tj.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

má charakteristická rovnice tvar

$$\lambda^3 - (Tr\ A)\lambda^2 + (M_{11} + M_{22} + M_{33})\lambda - \det A = 0 \qquad (1.3)$$

kde $Tr\ A = a_{11} + a_{22} + a_{33}\ a\ M_{ii},\ i = 1,2,3$ jsou **hlavní minory** matice A.

Výpočet vlastních čísel matice a vlastních vektorů matice si ukážeme na následujícím konkrétním příkladu. U tohoto výpočtu se můžeme setkat s několika problémy. A to tehdy, když je výsledkem výpočtu kořenů charakteristické rovnice násobné reálné vlastní číslo, nebo dokonce vlastní číslo matice je imaginární. Obě tyto varianty si předvedeme na konkrétních příkladech.

## 2.3 Vlastní číslo a vektor matice

**Příklad 4:** Mějme matici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

najděme její vlastní čísla a vlastní vektory. Použijme vztah (1.3). Charakteristická rovnice příslušná matici A má pak tvar

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + (12 + 15 + 12)\lambda - 45 = 0$$

a po úpravě

$$(\lambda - 5)(\lambda - 3)^2 = 0$$

takže matice A má vlastní číslo $\lambda_1 = 5$ (jednoduché) a $\lambda_{2,3} = 3$ (dvojnásobné). Určíme vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 5$, který dostaneme řešením soustavy

$$(A - 5E)\vec{h} = 0$$

takže

$${}^1\vec{h} = t\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

kde volíme např. t = 1. Dále určíme vlastní vektor příslušný k $\lambda_{2,3} = 3$, tj. řešíme soustavu

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 0 & 2\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

jejímž řešením je každý vektor tvaru

$$\vec{h} = r\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \qquad r, s \in \mathbb{C}.$$

Tudíž k dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_{2,3} = 3$ existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory, např.

$${}^2\vec{h} = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \quad {}^3\vec{h} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Přesněji, každá netriviální lineární kombinace těchto dvou vektorů je vlastním vektorem matice A příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_{2,3} = 3$.

# 3 Metody řešení soustav

## 3.1 Imaginární číslo

**Příklad 5:** Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$x' = -x - 4y$$
$$y' = x - y$$

položme

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} => \quad z'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$$

přepišme zadanou soustavu pomocí matic:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad => \quad z' = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{z}$$

maticí soustavy je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

řešení této soustavy hledáme ve tvaru

$$z(t) = e^{\lambda t} * \vec{h}$$

kde λ je vlastní číslo matice $A$ $a$ $\vec{h}$ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ. Číslo λ tedy řeší tzv. charakteristickou rovnici matice A:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

a k němu příslušný vlastní vektor $\vec{h}$ je pak řešením soustavy

$$(A - \lambda E)\vec{h} = \vec{0}$$

pro tento konkrétní případ je charakteristická rovnice matice A:

$$det\left(\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = 0 \;=>\; \begin{vmatrix}-1-\lambda & -4\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix} = 0 \;=>$$

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda)+4=0 \;=>\; \lambda^2+2\lambda+5=0$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = -1+2i,\ \lambda_2 = -1-2i.$

Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = -1+2i$ musí splňovat rovnost

$$(A-(-1+2i)E)\vec{h} = \vec{0}.$$

$$\left(\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1+2i & 0\\ 0 & -1+2i\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \;=>\; \begin{bmatrix}-2i & -4\\ 1 & -2i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}-2ih_1 - 4h_2 &= 0\\ h_1 - 2ih_2 &= 0\end{aligned}$$

První rovnice předchozí soustavy je násobkem druhé rovnice (vždy to tak musí být), proto má soustava nekonečně mnoho řešení $(h_1, h_2)$.

Protože hledáme jeden vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = -1+2i$, chceme jedno libovolné řešení v oboru komplexních čísel. Zvolíme např. $h_2 = 1$, pak z druhé rovnice $h_1 - 2i * 1 = 0$ => $h_1 = 2i$

Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = -1+2i$ je

$$\vec{h}_1 = \begin{bmatrix}2i\\ 1\end{bmatrix}$$

Má-li charakteristická rovnice matice soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic dva imaginární komplexně sdružené kořeny $\lambda_1 = a+bi, \lambda_2 = a-bi$, pak obecné řešení této soustavy má tvar

$$\vec{z}(t) = C_1 Re\left(e^{\lambda_1 t}\vec{h}_1\right) + C_2 Im\left(e^{\lambda_1 t}\vec{h}_1\right), \qquad t \in R, \qquad C_1, C_2 \in R$$

Kde $\vec{h}_1$ je příslušný vlastní vektor k $\lambda_1$. Hledejme reálnou a imaginární část komplexního řešení

$$\vec{z}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{h}_1 = e^{(-1+2i)t}\begin{bmatrix}2i\\1\end{bmatrix}$$

Použijme vzorec $e^{(a+bi)t} = e^{at}(\cos bt + i\sin bt)$.
Potom

$$\vec{z}_1(t) = (e^{-t}\cos 2t + ie^{-t}sin\ 2t)\begin{bmatrix}2i\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2ie^{-t}\cos 2t + 2i * ie^{-t}\sin 2t\\ e^{-t}\cos 2t + ie^{-t}\sin 2t\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}i2e^{-t}\cos 2t - 2e^{-t}\sin 2t\\ e^{-t}\cos 2t + ie^{-t}\sin 2t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2e^{-t}\sin 2t\\ e^{-t}\cos 2t\end{bmatrix} + i\begin{bmatrix}2e^{-t}\cos 2t\\ e^{-t}\sin 2t\end{bmatrix}$$

Reálná a imaginární část komplexního řešení $\vec{z}_1(t)$ je

$$Re\ \vec{z}_1(t) = \begin{bmatrix}-2e^{-t}\sin 2t\\ e^{-t}\cos 2t\end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix}-2\sin 2t\\ \cos 2t\end{bmatrix} \qquad Im\ \vec{z}_1(t) = \begin{bmatrix}2e^{-t}\cos 2t\\ e^{-t}\sin 2t\end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix}2\cos 2t\\ \sin 2t\end{bmatrix}$$

Obecné řešení zadané soustavy lineárních diferenciálních rovnic tedy je

$$\vec{z}(t) = C_1 e^{-t}\begin{bmatrix}-2\sin 2t\\ \cos 2t\end{bmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{bmatrix}2\cos 2t\\ \sin 2t\end{bmatrix}$$

Rozepišme ho po složkách

$$x(t) = -2C_1e^{-t}\sin 2t + 2C_2e^{-t}\cos 2t$$
$$y(t) = C_1e^{-t}\cos 2t + C_2e^{-t}\sin 2t$$

## 3.2 Násobné číslo

**Příklad 6:** Uvažujeme soustavu, která má dvojnásobné vlastní číslo, ovšem k němu nemá dva LN vlastní vektory

$$x_1' = 2x_1 + x_2$$

$$x_2' = -x_1 + 4x_2 \qquad (1.4)$$

Matice soustavy je

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

a má charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$ =0. Tudíž matice má **jedno** dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_0 = 3$, k němuž přísluší vlastní vektor

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Protože matice

$$C - 3E = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

má hodnost h = 1, což je jen o 1 méně než je její řád, pak žádný další vlastní vektor, příslušný k $\lambda_0 = 3$, který by byl lineárně nezávislý s vlastním vektorem $\vec{h}$, neexistuje. Máme tedy jedno řešení

$${}^{1}\vec{x}(t) = e^{\lambda_0 t}\vec{h} = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Protože nemáme druhý vlastní vektor, chybí nám ještě jedno řešení, které by spolu s $\vec{x}_1(t)$ tvořilo fundamentální systém soustavy (1.5). Toto druhé řešení obdržíme následujícím postupem:

Pomocí vlastního vektoru $\vec{h}$ získáme **zobecněný vlastní vektor** $\vec{k}$ jako řešení nehomogenní soustavy lineárních algebraických rovnic

$$(C - \lambda_0 E)\vec{k} = \vec{h} \qquad (1.5)$$

Druhé řešení soustavy (1.4), které nám chybí pro fundamentální systém soustavy, má tvar

$$\vec{x}_2(t) = e^{\lambda_0 t}(t\vec{h} + \vec{k})$$

Neboť

$$\vec{x}_2' = \lambda_0 e^{\lambda_0 t}\left(t\vec{h} + \vec{k}\right) + e^{\lambda_0 t}\vec{h} = e^{\lambda_0 t}(t\lambda_0\vec{h} + \lambda_0\vec{k} + \vec{h})$$

a dále

$$C\vec{x}_2 = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}C\left(t\vec{h} + \vec{k}\right) = e^{\lambda_0 t}(t\lambda_0\vec{h} + \lambda_0\vec{k} + \vec{h})$$

neboli

$C\ {}^2\vec{x} = {}^2\vec{x}'$ a tedy ${}^2\vec{x}(t)$ je řešením funkce (1.4)

Použili jsme rovnosti $C\vec{k} = \lambda_0\vec{k} + \vec{h}$, plynoucí z (1.5).

Vztah (1.5) má po dosazení a rozepsání do souřadnic tvar

$$-k_1 + k_2 = 1$$
$$-k_1 + k_2 = 1$$

Řešením je pak např. zobecněný vlastní vektor

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Fundamentální systém řešení je pak tvořen řešeními

$$\vec{x}_1(t) = e^{3t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \qquad \vec{x}_2(t) = e^{3t}\left(t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = e^{3t}\begin{bmatrix}t+1\\t+2\end{bmatrix}$$

## 3.3 Eliminační metoda

Tato metoda se využívá k řešení jak homogenních tak i nehomogenních soustav lineárních diferenciálních rovnic. Omezíme-li se na **lineární soustavy s konstantními koeficienty**, můžeme základní úlohu zadat ve tvaru

$$a_1y' + a_2z' + a_3y + a_4z = b_1(x)$$

$$c_1y' + c_2z' + c_3y + c_4z = b_2(x)$$

kde $a_1 \dots a_4, c_1 \dots c_4$ jsou reálné konstanty a $b_1(x), b_2(x)$ známe funkce (pravé strany soustavy). Je-li $b_1(x) = b_2(x) = 0$, hovoříme o **homogenní soustavě rovnic**. Řešení takovéto soustavy nevyžaduje hlubší teoretické poznatky nezbytné pro úlohy s větším počtem neznámých, tj. i rovnic. Eliminační metodou můžeme tuto soustavu převést na diferenciální rovnici druhého řádu. Postup si demonstrujme na příkladu.

**Příklad 5**: Máme najít funkce $y(x)\ a\ z(x)$ které jsou řešením soustavy

$$y' - 4z' + 2y - 8z = 0$$

$$z' - y + z = 0$$

při těchto podmínkách $y(0) = 3, z(0) = 2$.

**Řešení**: Druhá z rovnic této homogenní soustavy je podstatně jednodušší, proto z ní snadno vyjádříme funkci y a následně její derivaci

$$y = z' + z \qquad y' = z'' + z'$$

Po dosazení do první rovnice a úpravě máme diferenciální rovnici druhého řádu bez pravé strany pro funkci $z(x)$:

$$z'' - z' - 6z = 0$$

Její charakteristická rovnice $r'' - r - 6 = 0$ má kořeny $r_1 = -2, r_2 = 3$, kterým odpovídá obecné řešení

$$z(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} \quad a\ jeho\ derivace\ z'(x) = -2C_1 e^{3x} + 3C_2 e^{2x}$$

Funkci $y(x)$ vytvoříme pomocí vztahu, který jsme použili úvodem při eliminaci:

$$y(x) = z' + z = -C_1 e^{-2x} + 4C_2 e^{3x}$$

Nyní zbývá určit z počátečních podmínek konstanty $C_1\ a\ C_2$. Položíme-li $x = 0$ v obecném řešení

$$y(x) = -C_1 e^{-2x} + 4c_2 e^{3x}$$

$$z(x) = c_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$$

obdržíme soustavu

$$3 = -C_1 + 4C_2$$

$$2 = C_1 + C_2$$

Jejím řešením jsou hodnoty $C_1 = C_2 = 1$, takže můžeme napsat hledaný výsledek počáteční úlohy:

$$y_p(x) = 4e^{3x} - e^{-2x}$$

$$z_p(x) = e^{3x} + e^{-2x}$$

## 3.4 Metoda variace konstant

Metoda variace konstant je univerzální metoda používaná k výpočtu nehomogenních soustav lineárních diferenciálních rovnic. Nejprve je však nutné vypočítat přidruženou homogenní soustavu.

**Příklad 8**: Určete obecné řešení soustavy

$$y_1' = y_2 + tg^2 x - 1$$

$$y_2' = -y_1 + tg\, x$$

**Řešení:** Nyní přeskočíme řešení přidružené homogenní soustavy, které byste již měli zvládnout, vezmeme si pouze výsledek, který označíme $y_h$.

$$y_h = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

Hledejme nyní obecné řešení původní soustavy metodou variace konstant ve tvaru

$$y = C_1(x) \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2(x) \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \qquad C_1(x), C_2(x) = ?$$

Neboli na místě konstant $C_1, C_2$ uvažujeme funkce $C_1, C_2$.

Určení $C_1(x), C_2(x)$ je možné pomocí soustavy pro neznámé $C_1'(x), C_2'(x)$, která má takovýto tvar:

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tg^2 x - 1 \\ tg\, x \end{pmatrix}$$

Pomocí Cramerova pravidla dostáváme

$$C_1'(x) = (tg^2x - 1)\cos x - tg\ x \sin x = \frac{sin^2x}{cos\ x} - \cos x - \frac{sin^2x}{\cos x} = -\cos x$$

$$C_2'(x) = \cos x\ tg\ x + \sin x(tg^2x - 1) = \sin x + \frac{sin^3x}{cos^2x} - \sin x = \frac{sin^3x}{cos^2x}$$

Odtud přímou integrací máme $C_1(x) = -\sin x + K_{1.}$ Druhý integrál vypočteme pomocí substituce $t = \cos x$ $(tj.\ dt = -\sin x\, dx,\ \ sin^2x = 1 - cos^2x = 1 - t^2)$.

Odtud

$$C_2(x) = \int \frac{sin^3x}{cos^2x}dx = -\int \frac{1-t^2}{t^2}dt = \frac{1}{t} + t + K_2 = \frac{1}{\cos x} + \cos x + K_2$$

Odtud dosazením a úpravou máme

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (-\sin x + C_1)\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{\cos x} + \cos x + C_2\right)\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

$$= C_1\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tg\ x \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2\ \in R$$

# 4 Praktická část

Tato část páce byla věnovaná vytvoření interaktivní nápovědy pro sbírku příkladů. Po dohodě s vedoucím práce bylo rozhodnuto, že nejlepší možnost pro tuto práci bude, že samotná aplikace a sbírka bude vytvořena jako webové stránky obsahující základy teorie a zároveň sbírku příkladů.

## 4.1 Požadavky

První krokem bylo logicky určit požadavky, jaké by měla aplikace splňovat z hlediska uživatelského, ale i z hlediska náročnosti na provedení:

- jednoduchý grafický design
- nezávislost na typu internetového prohlížeče
- možnost zobrazení příkladů v několika krocích
- jednoduché ovládání a orientace v aplikaci

## 4.2 Jazyk pro tvorbu webových aplikací

Dalším krokem byl výběr vhodného značkovacího jazyka a kaskádového stylu, v kterém bude aplikace napsaná. Jelikož vhodných značkovacích jazyků není mnoho, tak možnosti byly následující:

- HTML
- XHTML
- XML
- Případně další

Nejrozšířenějším kaskádovým stylem současnosti je:

- CSS

Mezi programovací jazyky webových stránek potom patří:

- Ajax
- JavaScript
- Php
- Další

Jako základ aplikace byl vybrán značkovací jazyk HTML. Díky znalostem získaným během studia tak byla použita jeho nejnovější verze, a to konkrétně verze HTML5. Jako zobrazovací styl byl určen kaskádový styl CSS, přesněji opět nejnovější verze toho stylu a to konkrétně CSS3. Obě tyto novější verze jsou adaptacemi svých předchůdců, doplněné o řadu nových možností.

Jako velmi vhodné se ukázalo využití vlastností Ajaxu a Javascriptu. Díky jeho vlastnostem se sbírka úloh jeví jako velmi přehledná a snadno ovladatelná. I ostatní vlastnosti, jako interaktivní zobrazování obsahu bez nutnosti znovu načtení stránek, jsou zde výhodou.

## 4.3 Zobrazování rovnic v prohlížeči

Jako největší problém se ovšem ukázalo zobrazování jednotlivých rovnic v prohlížeči. Jelikož aplikace je psána jako jakýsi učební text a zároveň obsahuje jednotlivé příklady, tak se jejich zobrazování jevilo jako velmi náročné. Internet nabízí hned několik způsobů jak zobrazovat rovnice, ale ne všechny byly vhodné pro tento typ aplikace.

Typy zobrazení rovnic:

1. MathML
   MathML je z anglického Mathematical Markup Language, neboli matematický značkovací jazyk. Funguje jako podmnožina jazyka XML a slouží pro zápis matematických a jiných vzorců. Přestože syntaxe není náročná, tak možnost jeho využití na větším množství rovnic je značně omezená. Problém nastává i v podpoře prohlížečů pro tento jazyk, kdy ne všechny prohlížeče jej plně podporují.

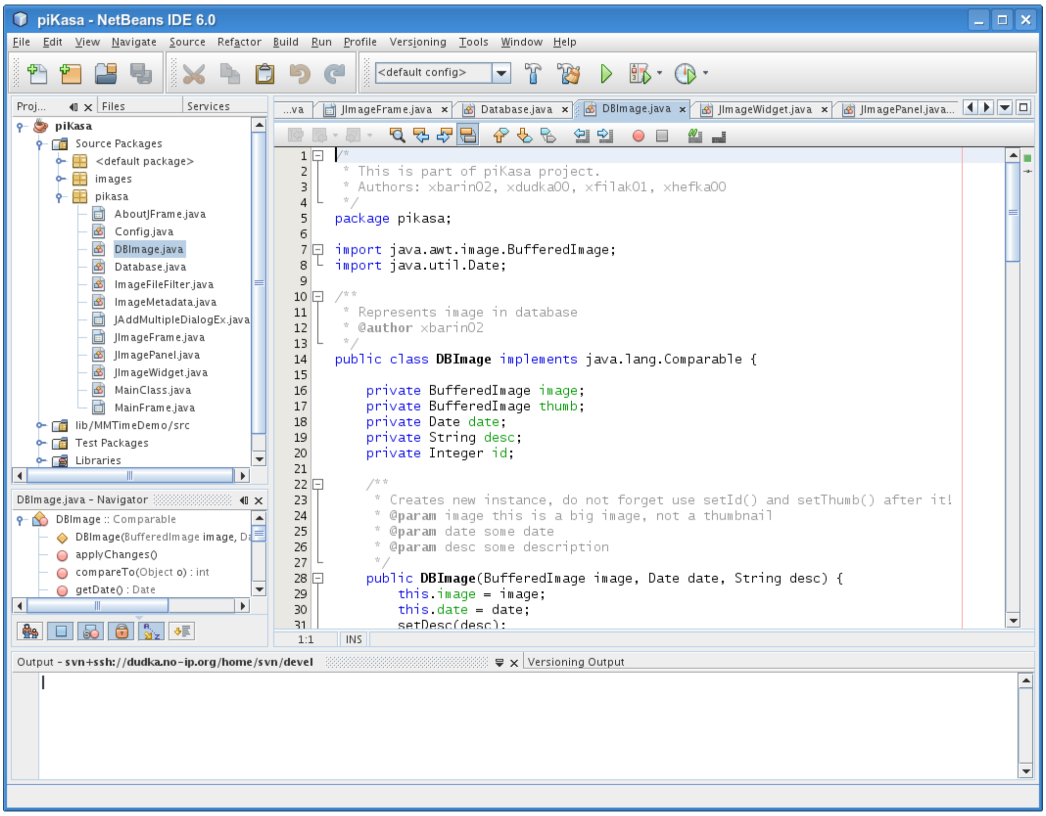
2. Zobrazení pomocí obrázků
   Velmi málo využívaná metoda zobrazení. Hlavní výhodou je jednoduchost zakomponování obrázků do aplikace a přehlednost zdrojového kódu. Velikou nevýhodou je ale velká paměťová náročnost aplikace a nemožnost kopírovat jakýkoliv text. Pro můj typ aplikace však velmi vhodná.

3. Zobrazení pomocí obrázků a textu
   Na internetu velmi hojně využívaný způsob zobrazování. Ovšem v případě poměrně velkého množství textu a zároveň vzorců je velmi nepřehledný a časově velmi náročný.

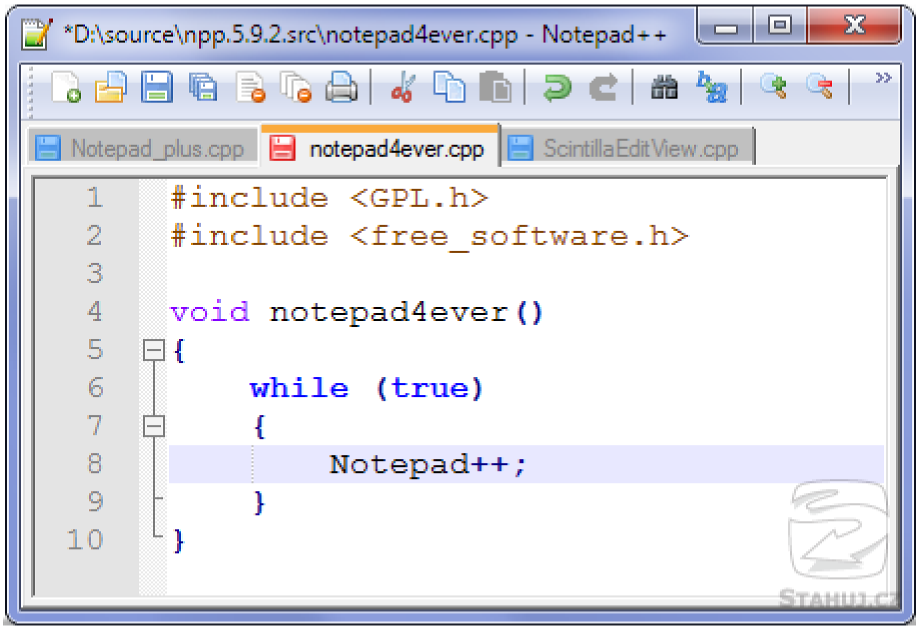
Po zhodnocení výhod a nevýhod, byl jako hlavní způsob zobrazování matematických vzorců v teoretické části vybrán způsob zobrazení pomocí obrázků.

## 4.4 Nástroje pro vývoj aplikace

Jako hlavní programovací nástroje byly zvoleny programy NetBeans a to konkrétně verze Netbeans 7.2.1 a Notepad++, resp. jeho verze Notepad++ v6.4.2. Oba tyto nástroje jsou open source projekty s rozsáhlou uživatelskou základnou a dostupné pro vývojáře.




**Obrázek 1 – Ukázka prostředí NetBeans**

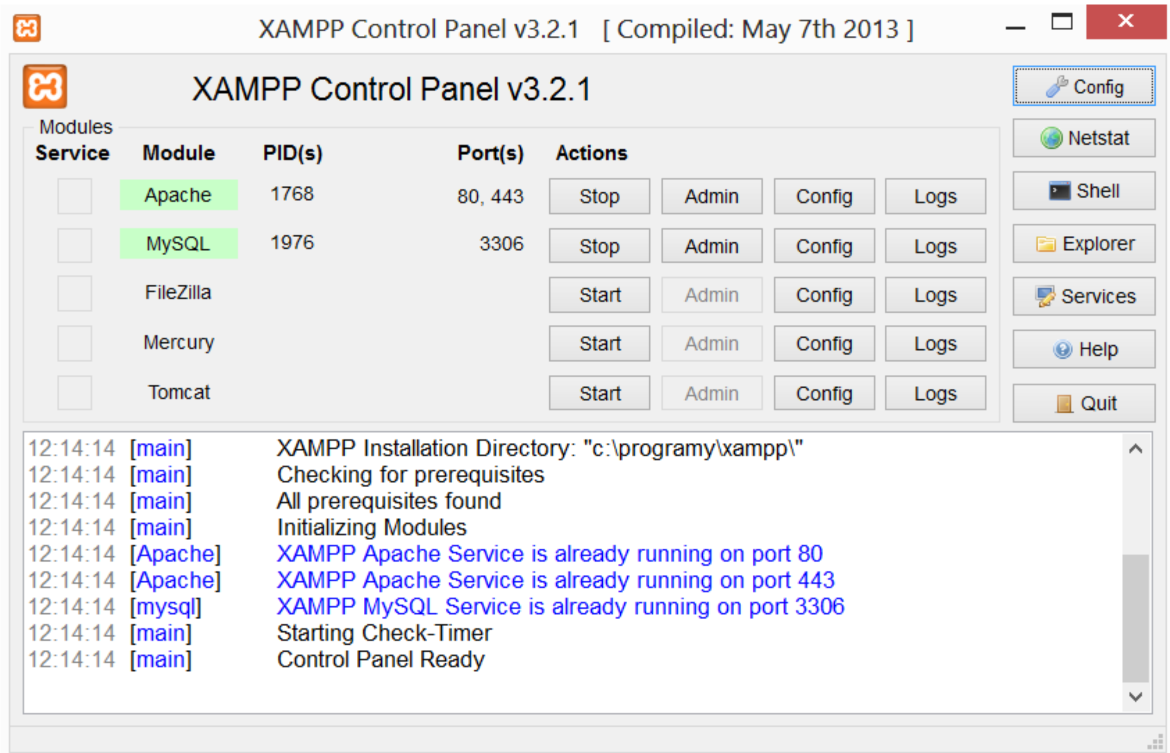



**Obrázek 2 – Ukázka prostředí Notepad++**

Nejdůležitějším nástrojem pro vývoj aplikace byl Xampp, a to konkrétně jeho verze v3.2.1. Xampp, je další z řady open source projektů. Je to balíček obsahující především:

- Apache HTTP server
- MySQL
- PHP
- Perl
- a další

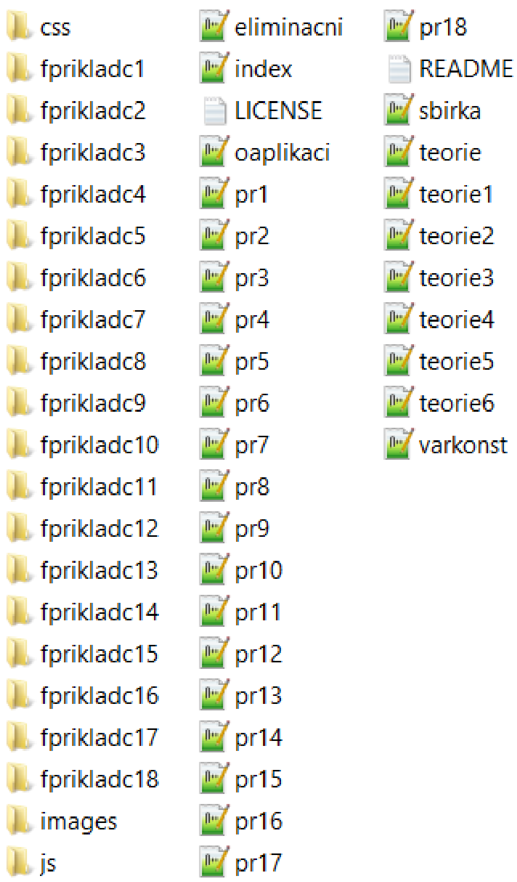
Tento nástroj simuluje prostředí serveru a umožnuje tvůrci zobrazovat snadno a rychle grafické změny, ale také díky právě Apache http serveru provozovat a kontrolovat funkčnost JavaScriptu a Ajaxu během vývoje aplikace, bez nutnosti neustálého uploadu na server. Takto v podstatě lze navrhnout kompletní prostředí, bez nutnosti připojení k internetu. Další obrovskou výhodou této aplikace je její jednoduchost a minimální nároky na nastavení. V podstatě ji stačí pouze nainstalovat a spustit.




**Obrázek 3 - Xampp**

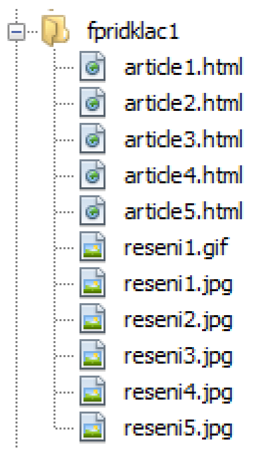
## 4.5 Adresářová struktura aplikace

Struktura zachycuje umístění souboru v rámci kořenového adresáře aplikace.




**Obrázek 4 – Adresářová struktura aplikace**

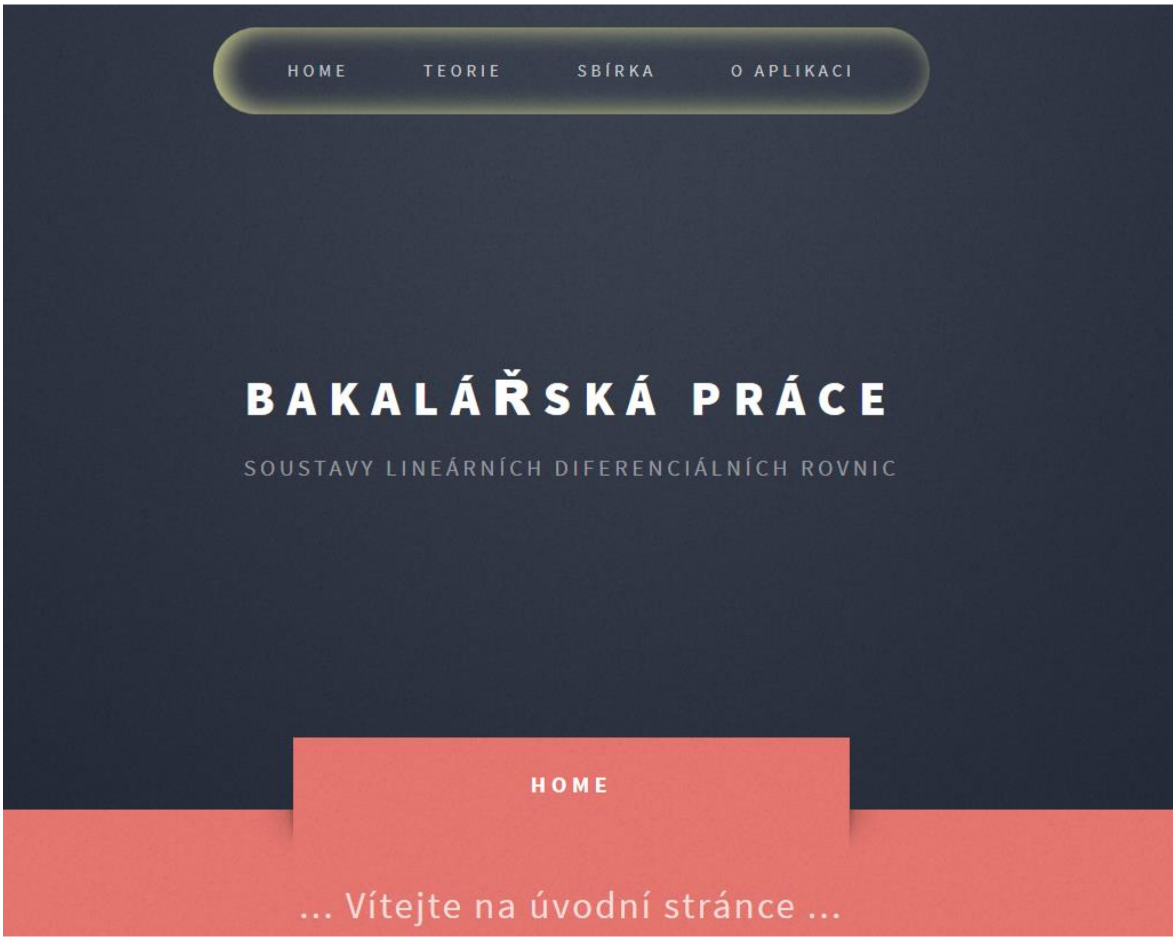
Struktura složky jednotlivých příkladů je zachycena na obrázku č. 5.



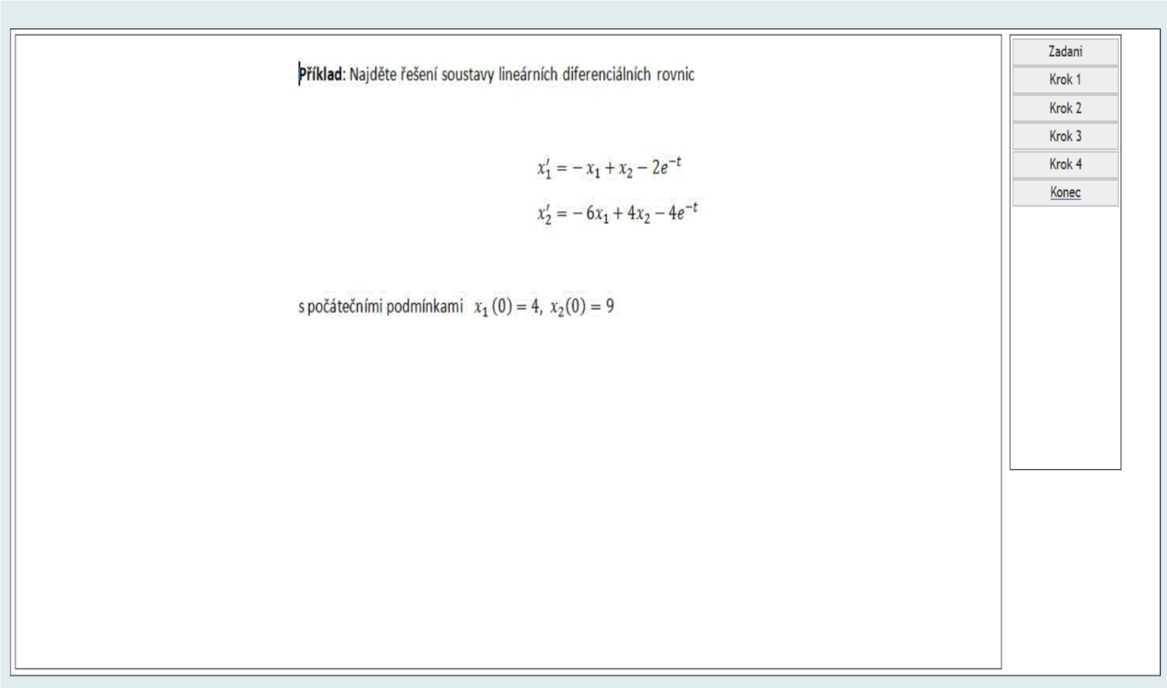

**Obrázek 5 – Struktura složky jednotlivých příkladů**

## 4.6 Grafické zobrazení

Grafická podoba aplikace je velmi přehledná a jednoduchá. Obsahuje hlavní orientační panel s odkazy na teorii, sbírku příkladů a dalších informacích o aplikaci. Sbírka příkladů potom obsahuje odkazy již na jednotlivé příklady.




**Obrázek 6 – Grafická podoba aplikace (úvodní stránka)**




**Obrázek 7 – Grafická reprezentace příkladu sbírky**

## 4.7 Využití aplikace

Aplikace je využitelná pro všechny studenty vysokých škol, ale i pro ostatní zájemce, kteří se zajímají o danou studijní oblast soustav lineárních diferenciálních rovnic. Především je pak určená pro studenty předmětu Matematika 3, oboru ŘP a KMT Fakulty informačních technologii v Pardubicích. Uživatelé si mohou zobrazit jednotlivou teorii, ale především podle sbírky úloh řešit po jednotlivých krocích dané příklady.

# Ukázka příkladů sbírky

**Příklad 9:** Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$x' = -x - y$$
$$y' = 5x + y$$

které vyhovuje počáteční podmínce x(0) = 1, y(0) = -1.

Matice soustavy je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Charakteristická rovnice matice A je

$$(-1-\lambda)(1-\lambda)+5=0 \qquad => \qquad \lambda^2+4=0$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i.$ Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 2i$ musí splňovat rovnost

$$(A-2iE)\vec{h} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}(-1-2i)h_1 - h_2 &= 0\\ 5h_1 + (1-2i)h_2 &= 0\end{aligned}$$

Protože hledáme jeden vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 2i$, chceme jedno libovolné řešení v oboru komplexních čísel. Zvolíme např. $h_1 = 1$, pak z první rovnice

$$(-1-2i)*1-h_2=0 \qquad => \qquad h_2=-1-2i$$

Vlastní vektor příslušný k $\quad \lambda_1 = 2i\ je \quad {}^1\vec{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-2i \end{bmatrix}$

Má-li charakteristická rovnice matice soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic dva imaginární komplexně sdružené kořeny $\lambda_1 = a+bi, \lambda_2 = a-bi$, pak obecné řešení této soustavy má tvar

$$\vec{z}(t) = C_1 Re\left(e^{\lambda_1 t}\vec{h}_1\right) + C_2 Im\left(e^{\lambda_1 t}\vec{h}_1\right), \qquad t \in R, \qquad C_1, C_2 \in R$$

Hledejme reálnou a imaginární část komplexního řešení

$$\vec{z}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{h}_1 = e^{2\,i\,t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1-2i \end{bmatrix}$$

Použijme vzorec $e^{b\,i\,t} = \cos bt + i\sin bt$

$$\vec{z}_1(t) = (\cos 2t + i\sin 2t)\begin{bmatrix} 1 \\ -1-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2t + isin\ 2t \\ -\cos 2t + 2\sin 2t + i\,(-\sin 2t - 2\cos 2t) \end{bmatrix}$$

Reálná a imaginární část komplexního řešení $\vec{z}_1(t)$ je

$$Re\,\vec{z}_1(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2\sin 2t - \cos 2t \end{bmatrix} \quad Im\,\vec{z}_1(t) = \begin{bmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t - \sin 2t \end{bmatrix}$$

Obecné řešení zadané soustavy lineárních diferenciálních rovnic tedy je

$$\vec{z}(t) = C_1 \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2\sin 2\mathrm{t} - \cos 2t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2\mathrm{t} - \sin 2t \end{bmatrix}$$

Rozepišme ho po složkách

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \\ y(t) &= 2C_1 \sin 2t - C_1 \cos 2t - 2C_2 \cos 2t - C_2 \sin 2t \end{aligned}$$

Nyní určíme konstanty $C_1, C_2$ tak, aby nalezené řešení vyhovovalo počáteční podmínce x(0) = 1, y(0) = -1. Po dosazení počátečních podmínek do obecného řešení dostaneme

$$\begin{aligned} 1 = x(0) &= C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \\ -1 = y(0) &= 2C_1 \sin 0 - C_1 \cos 0 - 2C_2 \cos 0 - C_2 \sin 0 \end{aligned}$$

Odtud

$$C_1 = 1 \qquad C_2 = 0$$

Hledané řešení je tedy

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos 2t \\ y(t) &= 2\sin 2t - \cos 2t \end{aligned}$$

**Příklad 10:** Řešte soustavu dvou diferenciálních rovnic

$$y' + 2y - 2z = x$$

$$z'' - 3y' + z' = -1$$

**Řešení:** Neznámé funkce jsou y = y(x), z = z(x). Z první rovnice vyjádříme

$$z = \frac{1}{2}(y' + 2y - x)$$

A odtud po derivování (podle x) plyne

$$z' = \frac{1}{2}(y'' + 2y' - 1) \text{ a dále } z'' = \frac{1}{2}(y''' + 2y'').$$

Dosadíme-li do druhé rovnice za $z'$ $a$ $z''$, dostaneme po jednoduché úpravě nehomogenní lineární diferenciální rovnici 3. řádu s konstantními koeficienty tvaru

$$y''' + 3y'' - 4y' = -1$$

Nejprve řešíme příslušnou rovnici homogenní

$$y''' + 3y'' - 4y' = 0$$

Což vede k charakteristické rovnici

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

S kořeny $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -4$

Proto obecné řešení homogenní rovnice lze psát ve tvaru $y_h = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-4x}$

Stačí ještě najít jedno partikulární řešení $y_p$ nehomogenní rovnice.

Protože pravá strana má speciální tvar (konstanta) a nula je kořenem rovnice charakteristické, lze partikulární řešení hledat ve tvaru $y_p = Ax$, kde A je zatím neznámá konstanta. Po trojnásobném derivování $y_p$a dosazení do nehomogenní rovnice, vypočítáme snadno $A = \frac{1}{4}$.

Celkem tedy $y = y_{h+}y_p = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-4x} + \frac{1}{4}x$

Odtud

$$y' = c_2 e^{x} - 4c_3 e^{-4x} + \frac{1}{4}$$

a po dosazení

$$z = \frac{1}{2}\left(c_2 e^{x} - 4c_3 e^{-4x} + \frac{1}{4} + 2c_1 + 2c_2 e^{x} + 2c_3 e^{-4x} + \frac{1}{2}x - x\right) = c_1 + \frac{3}{2}c_2 e^{x} - c_3 e^{-4x} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$$

K tomuto výsledku dospějeme i při použití metody variace konstant.

**Příklad 11**: Najděte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$x_1' = -x_1 + x_2 - 2e^{-t}$$

$$x_2' = -6x_1 + 4x_2 - 4e^{-t}$$

s počátečními podmínkami

$$x_1(0) = 4, x_2(0) = 9$$

**Řešení:** Z první rovnice vyjádříme $x_2$, derivujeme a dosadíme do druhé rovnice.

$$x_2 = x_1' + x_1 + 2e^{-t}$$

$$x_2' = x_1'' + x_1' - 2e^{-t}$$

$$x_1'' + x_1' - 2e^{-t} = -6x_1 + 4(x_1' + x_1 + 2e^{-t}) - 4e^{-t}$$

$$x_1'' - 3x_1' + 2x_1 = 6e^{-t}$$

Řešením rovnice je funkce

$$x_1(t) = e^{-t} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{t}$$

Derivujeme, dosadíme a získáme:

$$x_2(t) = -e^{-t} + 2c_1e^{2t} + c_2e^t + e^{-t} + c_1e^{2t} + c_2e^t + 2e^{-t} = 2e^{-t} + 3c_1e^{2t} + 2c_2e^t$$

Dosadíme počáteční podmínky

$$x_1(0) = 1 + c_1 + c_2 = 4$$

$$x_2(0) = 2 + 3c_1 + 2c_2 = 9$$

tato soustava má řešení $c_1 = 1$ $a$ $c_2 = 2$, řešením soustavy diferenciálních rovnic jsou funkce

$$x_1(t) = e^{-t} + e^{2t} + 2e^t, \quad x_2(t) = 2e^{-t} + 3e^{2t} + 4e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Můžeme zapsat také vektorově

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} + & e^{2t} + & 2e^t \\ 2e^{-t} + & 3e^{2t} + & 4e^t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R} \ .$$

# Závěr

Hlavním cílem této práce bylo vytvořit učební materiál využitelný pro studenty oboru ŘP a KMT v rámci předmětu Matematika 3. Bylo poměrně obtížné formulovat teorii takovým stylem, aby byla lehce srozumitelná pro studenty a zároveň aby nestrádala na odbornosti. V teoretické části je popsáno rozdělení, pojmy potřebné k řešení těchto soustav a jednotlivé metody řešení soustav, které jsou dále podrobně vysvětleny na jednoduchých příkladech. Jednotlivé postupy řešení jsou popsány tak, aby student mohl sledovat jednotlivé kroky výpočtu.

Další částí bakalářské práce je sbírka řešených příkladů. Tyto příklady s podrobným popisem řešení jsou součástí přiloženého disku CD. Tyto příklady jsou zároveň obsahem sbírky úloh samotné webové aplikace. Přestože se jedná o na první pohled nižší počet příkladů, tak časová náročnost na vytipování a popsání postupu řešení byla poměrně vysoká.

Cílem praktické části bylo potom vytvořit pro studenty interaktivní nápovědu k řešení těchto soustav v několika úrovních. Po konzultaci s vedoucím práce jsme se dohodli na vytvoření jednoduchých webových stránek, které budou obsahovat jak teoretickou část, tak i sbírku úloh. Aplikace měla mít možnost zobrazit teorii a hlavně řešené příklady s určitou úrovní nápovědy. Aplikace a zdrojové kódy jsou součástí přiloženého disku CD.

V praxi je potom samotná aplikace vhodná nejen pro studenty oboru ŘP a KMT předmětu Matematika 3, ale také pro ostatní studenty, kteří se zajímají o danou problematiku. Teprve samotné využívání aplikace v praxi rozhodne, které kroky a metody vývoje aplikace byly zvoleny správně.  Avšak už teď díky způsobu reprezentace jednotlivých příkladu, jako obrázky a tudíž nemožnosti kopírovat jednotlivé části textu, by bylo vhodné použít jinou metodu zobrazování matematických znaků.

## Literatura


**SEIBERT, Jaroslav.** Matematika III. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2003. ISBN 80-71942-75-8

**DĚMIDOVIČ, Boris Pavlovič.** Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, 2003. ISBN 80-72005-87-1

**TOMICZEK, Petr.** Sbírka příkladů z matematické analýzy II. Plzeň: Západočeská univerzita, 2006.

**KLÍČ Alois, Miroslava DUBCOVÁ a Lubor BUŘIČ.** *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic – kvalitativní teorie, dynamické systémy* [online]. Version Praha : VŠCHT Praha,
2009 [cit. 2012-08-13]. Dostupné z www: http://vydavatelstvi.vscht.cz/knihy/uid_isbn-978-80-7080-724-8/ ISBN 978-80-7080-724-8.

**ČEGAN, Lukáš.** HTML. Návrh a tvorba www stránek. 4. 10. 2011, [cit. 6. 8. 2012]. Dostupný pouze pro studenty předmětu Návrh a tvorba www stránek na FEI UPa. Přednáška č. 2.

**ČEGAN, Lukáš**. CSS3. Návrh a tvorba www stránek. 17. 10. 2011, [cit. 6. 8. 2012]. Dostupný pouze pro studenty předmětu Návrh a tvorba www stránek na FEI UPa. Přednáška č. 3.

Sbírka příkladů Matematika II pro strukturované studium. Ústav matematiky VŠCHT, Praha. Dostupné z www: http://www.vscht.cz/mat/El_pom/sbirka/sbirkaII.pdf.

**TAUFER, Ivan, Josef KOTYK a Milan JAVŮREK.** Jak psát a obhajovat závěrečnou práci bakalářskou, diplomovou, rigorózní, disertační, habilitační. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2009. ISBN 978-80-7395-157-3.

**RYCHNOVSKÝ, Richard.** Obyčejné diferenciální rovnice a jejich řešení. Praha, 1972.

# Příloha A – Ukázka CSS

```
body{
	background-repeat:no-repeat;
	font-family: Trebuchet MS, Lucida Sans Unicode, Arial, sans-serif;
	font-size:0.9em;
	line-height:130%;
	text-align:center;
	height:100%;
	background-color: #E2EBED;
}
#contentContainer h2{   /* No margins above <h2> tags */
	margin-top:0px;
}


#mainContainer{
	width:95%;
	margin:0 auto;
	text-align:center;
	padding:5px;
	margin-top:55px;
	border:1px solid #000;
	background-color: #FFF;
	height:95%;
}
#contentContainer{
	float:left;
```

```
        border:1px solid #000;
        background-color: #FFFFFF;
        overflow:auto;
        margin-right:10px;
        padding:10px;

        /* CSS HACK */
        width: 1050px;    /* IE 5.x */
        width/* */:/**/1050px;  /* Other browsers */
        width: /**/1050px


}
```

## Příloha B – Obsah přiloženého CD

Přiložený disk obsahuje text bakalářské práce ve formátu pdf, řešené příklady sbírky a zdrojové kódy aplikace.