UNIVERZITA PARDUBICE
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Laplaceova transformace

Radek Štaffa

Bakalářská práce
2013

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Akademický rok: **2009/2010**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	[illegible]
Osobní číslo:	[illegible]
Studijní program:	**B2646 Informační technologie**
Studijní obor:	**Informační technologie**
Název tématu:	[illegible]
Zadávající katedra:	**Katedra informačních technologií**

Zásady pro vypracování:

[illegible]

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

***Kathy Sierra, Bert Bates: Head First Java, O'Reilly Media 2005, počet stran 720, ISBN-10 1600330002**
***Kline Kevin, Kline Daniel, Hunt Brand: SQL in a Nutshell, O'Reilly Media 2008, počet stran 592, ISBN-10 0596518846**
***Ajit Sagar, Sue Spielman a kol.: Professional Java Server Programming J2Ee 1.4 Edition, Wrox Press 2003, počet stran 850, ISBN-10 1861008139**
***Vivek Chopra, Sing Li, Jeff Genender: Professional Apache Tomcat 6, WROX Press 2006, ISBN-10: 0471753610**
***Sun Microsystems: The Java EE5 Tutorial [online], 2007 [cit. 2009-10-08],dostupný z: http://java.sun.com/javaee/5/docs/tutorial/doc/docinfo.html**

Vedoucí bakalářské práce: [redacted]
Katedra informačních technologií

Datum zadání bakalářské práce: **15. ledna 2010**

Termín odevzdání bakalářské práce: **14. května 2010**

prof. Ing. Simeon Karamazov, Dr.
děkan

L.S.

Ing. [illegible], Ph.D.
vedoucí katedry

V Pardubicích dne 31. března 2010

Prohlášení autora

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 21. 8. 2013 Radek Štaffa

Poděkování

V úvodu bych rád poděkoval vedoucímu bakalářské práce, RNDr. Martinu Svobodovi, za čas, který mi věnoval, za trpělivost, připomínky a návrhy týkající se zpracovaní mé bakalářské práce.

Anotace

Cílem je vypracovat elektronickou učební oporu, která bude využitelná pro studenty oborů ŘP a KMT při studiu předmětu Matematika 3. Bude obsahovat stručné uvedení do problematiky dané oblasti matematiky, a dále sbírku řešených úloh, jejichž řešení bude možné interaktivně sledovat (např. ve více úrovních nápovědy, či postupným odkrýváním řešení).

Klíčová slova

Integrální transformace, Laplaceova transformace, Zpětná Laplaceova transformace

Title

Laplace Transform

Annotation

The aim is to develop an e-learning support that will be available for students of ŘP and KMT in the study of Mathematics 3. It will include a brief introduction to the problems of the area of mathematics, and a collection of solved problems whose solutions can be interactively monitored (eg multi-level help, or the gradual uncovering of the solution).

Keywords

Integral transform, Laplace transform, Inverse Laplace transform

Obsah

Seznam zkratek

HTML	Hyper Text Markup Language
PNG	Portable Network Graphics

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Úvod

Tato bakalářská práce vznikla z podnětu vypracovat elektronickou učební oporu, která by byla nápomocná studentům Fakulty elektrotechniky a informatiky oborů Řízení procesů (ŘP) a Komunikační a mikroprocesorové techniky (KMT) při studiu problematiky Laplaceovy transformace. Laplaceova transformace je speciálním případem integrální transformace a využívá se jako efektivní metoda k řešení různých praktických úloh z matematické fyziky, elektrotechniky i regulačních systému. Jaké výhody přineslo zavedení Laplaceovy transformace bude rozebráno v následujících kapitolách. V této bakalářské práci bude však kladen důraz především na řešení obyčejných diferenciálních rovnic a lineárních elektrických obvodů.

Text práce je rozdělen do dvou hlavních částí (kapitol). První část je rozdělena do několika podkapitol. V první podkapitole se seznámíme s obecnou problematikou integrálních transformací a jejich využití. Druhá podkapitola je pak věnována hlavnímu tématu a tím je zavedení Laplaceovy transformace. Ve třetí podkapitole se seznámíme s pojmem zpětná Laplaceova transformace. Druhá část práce obsahuje řešenou sbírku s podrobným postupem řešení úloh. Sbírka je rozdělena do dvou částí, kde první část je zaměřena na řešení obyčejných diferenciálních rovnic a druhá část se věnuje problematice lineárních elektrických obvodů.

V následujícím textu se předpokládá, že čtenář má osvojené znalosti z matematiky (např. integrální a diferenciální počet, řešení lineárních a kvadratických rovnic, stejnosměrná konvergence řad atd.)

1 Laplaceova transformace

1.1 Integrální *transformace*

Integrální transformace se začaly používat na počátku 19. století zejména v praktických úlohách o vodivosti tepla. Některé praktické záležitosti byly velice komplikované a ulehčení přinesly právě tyto transformace, které se používají i v současné době v oblastech matematické fyziky, jako je teorie pružnosti, tekutin, plynů, akustiky, elektromagnetického vlnění, včetně zpracování signálů, řešení analogových elektronických obvodů a automatického řízení procesů. Můžeme je rozdělit do dvou hlavních skupin. Na analogové (spojité v čase) a na diskrétní a číslicové, u kterých počítáme i s kvantizací hodnot. Každý z těchto typů má, své určité matematická pravidla převodu. Použijeme je tehdy, když pracujeme s matematickými funkcemi, kde vztahy mezi nimi představují příliš komplikované matematické řešení nebo nejsme schopni takové řešení vůbec provést. V takovém případě, příslušným funkcím pomocí jistých integrálů přiřadíme obrazy, tak aby složitější vztahy mezi předměty odpovídaly jednodušším vztahům mezi obrazy. Vyřešíme-li matematicky tyto vztahy mezi obrazy, stačí se pak vrátit k původním předmětům tzv. zpětnou integrální transformací. Integrální transformace převádějí tedy pomocí integrálního vztahu jednu funkci na jinou. Dochází tak k převodu z prostoru jedné proměnné do prostoru druhé proměnné. Jedná se vlastně o určitý typ operátoru, který se aplikuje na funkci a převádí ji na jinou funkci.

Obraz takovéto funkce $f(x)$ obecně při nějaké integrální transformaci je dán vztahem:

$$F(p) = \int_a^b K(p,x)\, f(x)\, dx \qquad (1.1)$$

kde a, b -jsou dané integrační meze $(a, b \in R$ nebo $a = -\infty, b = \infty)$,

p, x -je komplexní proměnná, reálná proměnná ,

K -je daná komplexní funkce proměnných p, x zvaná jádro integrální transformace ,

$f(x)$ -je libovolná komplexní funkce proměnné x.

Požaduje se, aby integrál na pravé straně rovnice existoval (konvergoval) alespoň pro jednu číselnou hodnotu $p \in C$. Ačkoli uvedený vztah platí jak pro komplexní tak i reálné funkce, budeme se zabývat převážně reálnými funkcemi reálné proměnné. V následující tabulce je zveřejněn seznam některých nejznámějších a nejpoužívanějších integrálních transformací.

Tabulka 1 - Integrální transformace

Transformace	Jádro	Obor integrace
Laplaceova	$K(p,x) = e^{-px}$,	$(a,b) = (0,\infty)$
Laplace-Carsonova	$K(p,x) = pe^{-px}$,	$(a,b) = (0,\infty)$
Dvojrozměrná Laplaceova	$K(p,x) = e^{-px}$,	$(a,b) = (-\infty,\infty)$
Fourierova (komplexní)	$K(p,x) = e^{-jpx}$,	$(a,b) = (-\infty,\infty)$
Kosinová Fourierova	$K(p,x) = \cos px$,	$(a,b) = (0,\infty)$
Sinová Fourierova	$K(p,x) = \sin px$,	$(a,b) = (0,\infty)$
Mellinova	$K(p,x) = x^{p-1}$,	$(a,b) = (0,\infty)$

1.2 Zavedení Laplaceovy transformace

Laplaceovu transformaci poprvé použil v roce 1737 švýcarský matematik a fyzik Leonhard Euler k řešení jistých obyčejných diferenciálních rovnic. V roce 1812, ji odvodil a ucelil francouzský matematik Pierre Simon de Laplace. Do dnešní podoby ji dovedl Oliver Heaviside (anglický elektroinženýr, matematik a fyzik). Pierre Simon de Laplace (1749-1827) byl francouzský matematik, fyzik, astronom a politik. Zabýval se matematickou analýzou, teorii pravděpodobnosti, zavedl pojem Laplaceova transformace, užil tzv. Laplaceův operátor (v parciální diferenciální rovnici pro potenciál silového pole) a mnoha dalších teorií a metod s mnoha aplikacemi. Proto byl právem považován za jednoho z největších vědců vůbec.

Obrázek 1.1 - Pierre S. de Laplace (převzato z [1])

Laplaceova transformace je, jak jsme si řekli, speciálním případem integrální transformace a využívá se jako efektivní metoda k řešení různých praktických úloh z oblastí matematické fyziky, elektrotechniky i regulačních systémů. Například v teoriích lineárních, spojitě pracujících obvodů je cílem najít řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, které mají různé pravé strany a různé počáteční podmínky. Výhodnost Laplaceovy transformace spočívá v možnosti snadného převodu z časové (reálné) oblasti do oblasti komplexní. Důsledkem toho se pak složité matematické operace v okruhu lineárních diferenciálních rovnic nahradí mnohem jednoduššími algebraickými operacemi. Názorně to pak uvidíme na obrázku 1.2.

Nechť komplexní funkce f reálné proměnné $x \in (-\infty, \infty)$, je definována $f : R \Rightarrow C$, reálnou a imaginární část komplexního čísla p označíme:

$$\operatorname{Re} p = \sigma, \qquad \operatorname{Im} p = \varsigma$$

Komplexní číslo p je dáno

$$p = \sigma + j\varsigma,$$

kde j je imaginární jednotka.

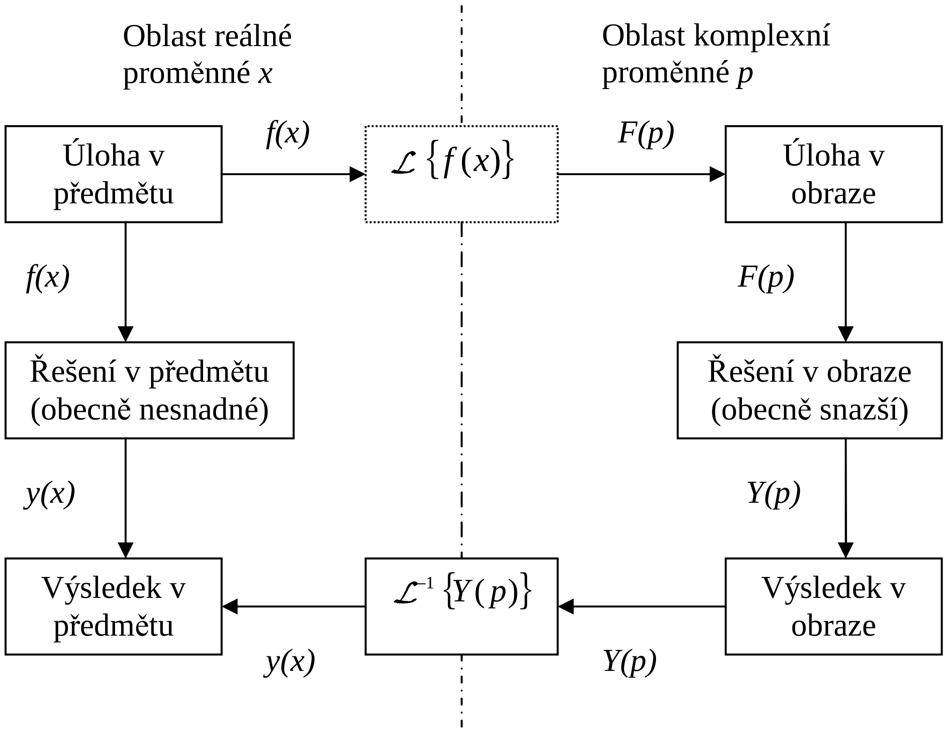
Transformační vztah pro ostatní funkce při Laplaceově transformaci je dán vzorcem:

$$F(p) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-px} dx \tag{1.2}$$

což jsme ostatně uvedli už v tabulce 1.1. Funkci f je tedy Laplaceovou transformací přiřazena funkce *F*. Jestliže integrál konverguje alespoň pro jednu hodnotu *p* tak můžeme funkci *F(p)* nazvat **Laplaceovým obrazem** funkce f, zároveň funkci f můžeme nazvat **předmětem** (originálem) a píšeme

$$F(p) = \mathcal{L}\{f\}$$

kde $\mathcal{L}$ značí operátor, jenž dané funkci přiřazuje její Laplaceův obraz. Celá situace je znázorněna na následujícím obrázku.



Obrázek 1.2 – Jak funguje Laplaceova transformace

1.2.1 Věta (o existenci obrazu)

Laplaceův obraz má každá funkce $f = f(x),\ x \in R$, splňující následující podmínky:

1. pro všechna $x < 0$ je $f(x) = 0$

2. Funkce f je po částech spojitá na každém konečném intervalu, přitom má nejvýše konečný počet bodů nespojitosti prvního druhu a existují v nich jednostranné limity

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = f(x_{0-})\ ,\ \lim_{x \to x_{0+}} f(x) = f(x_{0+})\ .$$

Pro každý takový bod pak definujeme velikost:

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left[\, f(x_{0-}) + f(x_{0+})\right].$$

2. Existují reálné konstanty $M > 0$ a $\alpha \in R$, takové, že pro každou hodnotu argumentu $x \in \langle 0, \infty)$ platí nerovnost: $|f(x)| \le Me^{\alpha x}$. Každou funkci, která splňuje tuto podmínku, nazýváme funkcí exponenciálního řádu α .

Funkce splňující všechny předchozí uvedené podmínky nazýváme **časové funkce**.

Příklad:

Nechť jsou dány funkce f_1, f_2 f_3 takto:

$$f_1(x) = \cos x \text{ pro } x > 0,\ f_1(x) = 0,\ \text{ pro } x < 0$$

$$f_2(x) = x \text{ pro } x > 0,\ f_2(0) = 1,\ f_2(x) = 0, \text{ pro } x < 0$$

$$f_3(x) = e^{ax},\ x > 0,\ f_3(x) = 0 \text{ pro } x \le 0$$

Na základě předchozí věty dokažme, že všechny tři uvedené funkce mají Laplaceův obraz.

Řešení:

A) funkce f_1

1. podmínka vyplívá přímo z definice funkce f_1 .
2. podmínka platí, funkce je po částech spojitá pro $x \in R$.
3. podmínka platí, protože pro každé $x \in R$ *platí* $|\cos x| \le 1 = 1 \cdot e^0$. Dále můžeme volit $M = 1$, $\alpha = 0$ a funkce je tedy exponenciálního řádu 0.

B) funkce f_2

1. podmínka vyplívá přímo z definice funkce f_2 .
2. podmínka platí, funkce je po částech spojitá s jedním bodem nespojitosti prvního druhu v bodě $x = 0$.
3. podmínka platí, protože pro každé $x \in R$ je: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$.

Zajímáme se pouze o oblast, kde $x > 0$, proto $|x| \le e^x$ a můžeme volit $M = 1$, $\alpha = 1$, funkce je tedy exponenciálního řádu 1.

C) funkce f_3

1. podmínka vyplívá přímo z definice funkce f_3 .
2. podmínka platí, funkce je po částech spojitá $x \in R$.
3. podmínka platí, konstantu a můžeme vyjádřit jako komplexní číslo: $a = \operatorname{Re} a + j \operatorname{Im} a = \sigma + j\varsigma$ a platí $e^{ax} = e^{(\sigma + j\varsigma)x}$, přitom platí $|e^{j\varsigma x}| = 1$, pak $|e^{ax}| = |e^{\sigma x}| = e^{\sigma x}$ a můžeme volit $M = 1$, $\alpha = \sigma$, funkce je tedy exponenciálního řádu σ.

1.1 Poznámka

Důležitá je skutečnost, že definiční integrál Laplaceovy transformace (1.2) absolutně konverguje, tím pádem i existuje, pro každé $p > \alpha$, jestliže předmět f je časovou funkcí exponenciálního řádu α.

Důkaz:

$$\int_0^\infty \left| f(x)\, e^{-px} \right| dx \le \int_0^\infty M e^{\alpha x} e^{-px} dx = M \int_0^\infty e^{\alpha x - px} dx = M \int_0^\infty e^{x(\alpha - p)} dx =$$

$$M \left[\frac{1}{\alpha - p} e^{x(\alpha - p)} \right]_0^\infty = \frac{M}{\alpha - p} \left[\lim_{x \to \infty} e^{x(\alpha - p)} - 1 \right] = \frac{M}{\alpha - p} [0 - 1] = \frac{M}{p - \alpha},$$

což je pro $p > \alpha$ kladné číslo.

1.3 Vlastnosti Laplaceovy transformace

V této podkapitole se budeme zabývat základními vlastnostmi Laplaceovy transformace. Ukážeme si některé základní věty, které nám umožní výhodně a efektivně tuto transformaci používat v aplikacích (např. při řešení diferenciálních rovnic, atd.). Je nutné používat vhodný matematický postup k hledání základních typů Laplaceových obrazů. Ne všechny obrazy jdou snadno odvodit z definičního integrálu (1.2). Využívá se souboru vět a vlastností, které následně probereme. Zmiňované věty a vlastnosti nám poskytnou velké množství obrazů funkcí, které jsou důležité při řešení jak teoretických úloh, tak i praktických aplikací.

1.3.1 Věta (O jednoznačnosti předmětu)

Vztah (1.2) splňuje pro $p > \alpha$ při dané funkci *F(p)* nejvýše jedna spojitá funkce $f(x)$ exponenciálního řádu α.

1.3.2 Věta (O linearitě transformace)

Nechť f_k jsou předměty a F_k jejich obrazy. Neboli platí: $\mathcal{L}\left\{ f_k(x) \right\} = F_k(p)$ a $c_k \in C$ pro $k = 1, 2, 3, \ldots n$.

Pak Laplaceův obraz libovolné lineární kombinace $\sum_{k=1}^{n} c_k f_k$ bude roven:

$$\mathcal{L}\left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \right\} = \int_0^\infty \{ \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x) \} \, dx = \mathcal{L}\left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x) \right\} = \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p)$$

Jinými slovy $\mathcal{L}$ je lineární operátor. Obraz libovolné lineární kombinace funkcí f_k je roven lineární kombinaci obrazů těchto funkcí f_k s týmiž koeficienty.
Speciálně například platí: $\mathcal{L}\left\{ f_{k_1} + f_{k_2} + f_{k_3} \right\} = \mathcal{L}\left\{ f_{k_1} \right\} + \mathcal{L}\left\{ f_{k_2} \right\} + \mathcal{L}\left\{ f_{k_3} \right\}$.

Důkaz (O linearitě transformace)

Například lze trvdit, že:

$$\mathcal{L}\left\{7-\frac{1}{2}x+3e^{-x}\right\}=7\ \mathcal{L}\left\{1\right\}-\frac{1}{2}\ \mathcal{L}\left\{x\right\}+3\ \mathcal{L}\left\{e^{-x}\right\}=7\frac{1}{p}-\frac{1}{2p^{2}}+\frac{1}{p+1}\,.$$

1.3.3 Věta (O podobnosti transformace)

Nechť f je předmět a F_k jeho obraz. Neboli píšeme:

$$F(p)=\mathcal{L}\left\{f(x)\right\},\ p>\alpha$$

Nechť a je kladná reálná konstanta. Pro libovolné $a\in R$, pak platí:

$$\mathcal{L}\left\{f(ax)\right\}=\frac{1}{a}L\left(\frac{p}{a}\right)$$

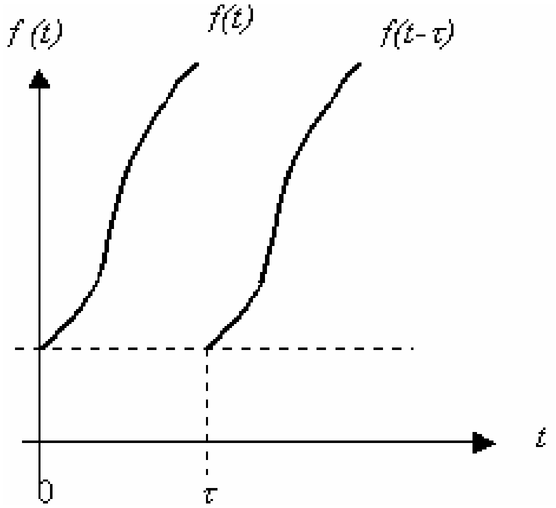
Důkaz (O podobnosti transformace)

$$\int_{0}^{\infty}f(ax)e^{-px}dx=\left|\frac{substituce}{ax=t}\right|=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-\frac{p}{a}t}\frac{1}{a}dt=\frac{1}{a}L\left(\frac{p}{a}\right).$$

1.3.4 Věta (O posunutí doprava)

Jinak řečeno věta o translaci (zpoždění). Nechť je $F(p)=\mathcal{L}\left\{f(x)\right\}$. Kvůli interpretaci proměnné časové funkce f coby času, budeme místo parametru x psát raději t. Předchozí vztah se pak změní na $F(p)=\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$. Pak posunutí proměnné t v předmětu f o konstantní reálnou hodnotu $\tau>0$ (obr. 1.3) bude:

$$F(p)=\mathcal{L}\left\{f(t-\tau)\right\}=e^{-p\tau}F(p)\,.$$



Obrázek 1.3 – Posunutí doprava (převzato z [2])

Důkaz (O posunutí doprava)

Pomocí definičního integrálu sestavíme a vypočteme Laplaceův integrál:

$\mathcal{L}\left\{f(t-\tau)\right\}=\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-p\tau}dt=\int_0^\tau f(t-\tau)e^{-pt}dt+\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt$, první integrál z

poslední rovnosti můžeme rozložit na:

$$\int_0^\tau f(t)e^{-pt}dt-\int_0^\tau f(\tau)e^{-pt}dt==\left[\frac{e^{-pt}}{-p^2}(-pt-1)\right]_0^\tau-\left[\frac{e^{-pt}}{-p^2}(-pt-1)\right]_0^\tau=0$$

K výpočtu druhého integrálu použijeme substituci

$\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt=\left|\frac{substituce}{t-\tau=u}\right|=\int_\tau^\infty f(u)e^{-p(u+\tau)}du==\int_\tau^\infty f(u)e^{-pu-p\tau}du=\int_\tau^\infty f(u)e^{-pu}\,e^{-p\tau}du$,

a tím se dostáváme k důkazu:

$$\mathcal{L}\left\{f(t-\tau)\right\}=e^{-p\tau}\int_\tau^\infty f(u)e^{-pu}du=e^{-p\tau}F(p).$$

1.3.5 Věta (O posunutí doleva)

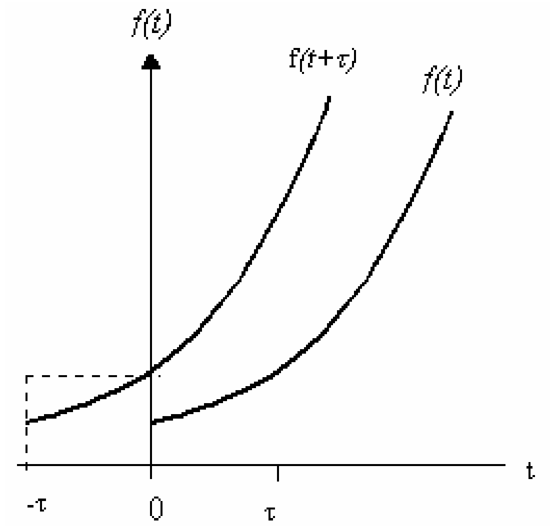
Podobně jako u posunutí doprava lze odvodit větu o posunutí doleva (věta o předstihu)

$$\int_\tau^\infty f(t+\tau)e^{-pt}dt=\left|\frac{substituce}{t+\tau=u}\right|=\int_\tau^\infty f(u)e^{-p(u-\tau)}du=\int_\tau^\infty f(u)e^{-pu+p\tau}du=$$

$$= e^{p\tau}\int_0^{\infty} f(u)e^{-pu}du = e^{p\tau}F(p)\,.$$

Pak Laplaceův integrál bude

$$\mathcal{L}\left\{f(t+\tau)\right\} = e^{p\tau}F(p) - e^{p\tau}\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt\,.$$



Obrázek 1.4 – Posunutí doleva (převzato z [2])

1.3.6 Věta (O substituci)

Její tvrzení lze popsat následovně. Nechť *f(x)* je předmět a konstanta *a* je exponenciálního řádu α. Pak pro funkci $g(x) = e^{ax} f(x)$ a pro její Laplaceův obraz platí:

$$G(p) = F(p-a)\text{, tedy } \mathcal{L}\left\{e^{ax} f(x)\right\} = F(p-a),$$

kde $a, p \in C$

Věta o substituci vlastně říká, že násobení předmětu *f(x)* funkcí e^{ax} se projeví nahrazením (substitucí) výrazu *p* výrazem $p-a$.

1.3.7 Věta (O derivaci předmětu)

Nechť funkce *f* a její derivace f' jsou předměty, které jsou spojité v otevřeném intervalu $(0,\infty)$. A nechť má *f* ve svém počátečním bodě $x=0$ zprava vlastní jednostrannou limitu $f(0_+) = \lim\limits_{x\to 0_+} f(x)$. Potom platí:

$$\mathcal{L}\left\{f'(x)\right\} = pF(p) - \lim_{x\to 0_+} f(x) = pF(p) - f(0_+)\,.$$

Důkaz (O derivaci předmětu)

K ověření použijeme metodu integrace per partes

$$\int u * v' dx = u * v - \int u' * v \, dx .$$

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = \int_0^\infty f'(x) e^{-px} dx = \left| \begin{matrix} u' = f'(x) & u = f(x) \\ v = e^{-px} & v' = -p e^{-px} \end{matrix} \right| =$$

$$= \left[f(x) e^{-px} \right]_0^\infty + p \int_0^\infty f'(x) e^{-px} dx = \lim_{x \to \infty} f(x) e^{-px} - \lim_{x \to 0_+} f(x) e^{-px} + p F(p) =$$

$$0 - f(0_+) + pF(p) = p F(p) - f(0_+) .$$

1.2 Poznámka

Další důležitou skutečností je, jak se příslušný vzorec pro první derivaci předmětu může změnit, když bude mít funkce f v bodě $a > 0$ nespojitost prvního druhu bude platit:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = \int_0^a f'(x) e^{-px} dx + \int_a^\infty f'(x) e^{-px} dx = \left| \begin{matrix} u' = f'(x) & u = f(x) \\ v = e^{-px} & v' = -p e^{-px} \end{matrix} \right| =$$

$$= \left[f'(x) e^{-px} \right]_0^a + p \int_0^a f(x) e^{-px} dx + \left[f'(x) e^{-px} \right]_0^\infty + p \int_a^\infty f(x) e^{-px} dx =$$

$$= \lim_{x \to a_-} f(x) e^{-px} - \lim_{x \to 0_+} f(x) e^{-px} + p \int_0^a f(x) e^{-px} dx + \lim_{x \to \infty} f(x) e^{-px}$$

$$- \lim_{x \to a_+} f(x) e^{-px} + p \int_ä^\infty f(x) e^{-px} dx = - f(0_+) + p \left(\int_0^a f(x) e^{-px} dx + \int_a^\infty f(x) e^{-px} dx \right) +$$

$$+ f(a_-) e^{-pa} - f(a_+) e^{-pa} = p F(p) - f(0_+) + \left(f(a_-) + f(a_+) \right) e^{-pa} .$$

1.3.8 Věta (O n-té derivaci předmětu)

Pro Laplaceův obraz derivace libovolného řádu funkce f platí:

$$\mathcal{L}\left\{ f^{(n)}(x) \right\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0_+) - p^{n-2} f'(0_+) - \ldots - f^{n-1}(0_+) ,$$

jestliže jsou derivace spojité funkce až do řádu $n-1$ v otevřeném intervalu $(0, \infty)$. K tomu ovšem stačí, aby byla spojitá pouze funkce $f^{(n-1)}$.

Větu ponecháme bez důkazu, pouze si ji ověříme například pro $n = 2$.

$$\mathcal{L}\left\{f''(x)\right\} = \int_0^\infty f''(x)e^{-px}dx = \left| \begin{matrix} u' = f''(x) & u = f'(x) \\ v = e^{-px} & v' = -pe^{-px} \end{matrix} \right| = \left[f'(x)e^{-px}\right]_0^\infty +$$

$$+ p\int_0^\infty f'(x)e^{-px}dx = \left(\lim_{x\to\infty} f'(x)e^{-px} - \lim_{x\to 0_+} f'(x)e^{-px}\right) + p\int_0^\infty f'(x)e^{-px}dx =$$

$$\left| \begin{matrix} u' = f'(x) & u = f(x) \\ v = e^{-px} & v' = -pe^{-px} \end{matrix} \right| = -f'(0_+) + p\left\{\left[f(x)e^{-px}\right]_0^\infty + p\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx\right\} =$$

$$= -f'(0_+) + p\left\{\left(\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-px} - \lim_{x\to 0_+} f(x)e^{-px}\right) + p\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx\right\} =$$

$$= -f'(0_+) - p\,f(0_+) + p^2F(p) = p^2F(p) - p\,f(0_+) - f'(0_+).$$

1.3.9 Věta (O integrálu předmětu)

Nechť funkce f je předmětem, který je integrovatelný v intervalu $(0,\infty)$. Potom pro Laplaceův obraz integrálu platí:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(u)\,du\right\} = \frac{F(p)}{p}.$$

Důkaz (O integrálu předmětu)

Nechť funkce g je také předmětem a označme $g = \int_0^x f(u)\,du$, což je primitivní funkce k funkci *f*, tedy platí $g' = f(x)$, navíc ještě platí $\lim_{x\to 0_+} g(x) = 0$.

A podle věty o derivaci předmětu platí:

$$F(p) = \mathcal{L}\left\{f(x)\right\} = \mathcal{L}\left\{g'(x)\right\} = p\,G(p) - g(0_+) = p\;\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(u)\,du\right\}.$$

1.3 Poznámka

- Předchozí věta platí jen pro primitivní funkci, která je nulová pro $x = 0$.
- Jestliže funkce *f* bude mít v bodě $a > 0$ nespojitost prvního druhu bude platit:

$$\mathcal{L}\left\{\int_a^x f(u)\,du\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^x f(u)\,du - \int_0^a f(u)\,du\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^x f(u)\,du\right\} -$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^a f(u)\,du\right\} = \frac{F(p)}{p} - \frac{1}{p}\int_0^a f(u)\,du\,,$$

protože $\int_0^a f(u)\,du$ je konstanta a víme, že Laplaceův obraz konstanty je roven $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}$.

1.4 Zpětná Laplaceova transformace

Použili jsme Laplaceovu transformaci za účelem efektivně vyřešit jistou matematickou nebo fyzikální úlohu. Pro její ulehčení jsme tedy použili definiční integrál podle vztahu (1.2) k převodu funkce f z reálné oblasti, do oblasti komplexní. Máme tedy Laplaceův obraz funkce f a k dokončení řešené úlohy se zbývá vrátit k původní funkci. Takže cílem je najít k určité funkci (obrazu) předmět. Funkci, která převádí obraz na předmět nazýváme zpětnou Laplaceovou transformací.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(x)\}\} = f(x)$$

Nebudeme se zabývat podmínkami pro existenci předmětu k dané funkci. Pouze si připomeneme větu (1.3.1), podle které dvě různé reálné funkce mají různé Laplaceovy obrazy. V tomto případě jde tedy o prosté zobrazení, k němuž existuje prosté inverzní zobrazení. Pokud by jsme chtěli nějaké explicitní vyjádření, existuje v podobě následujícího integrálu:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi j}\,\Psi\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)\,e^{px}\,dp\,, \qquad (1.3)$$

kde j je imaginární jednotka ,

c je reálné číslo ležící v $(0,\infty)$, pak pro celou přímku přes niž se integruje platí: $y(x) \le e^{cx}$ pro $x \le 0$,

$F(p)$ je Laplaceův obraz funkce f,

p je komplexní proměnná,

Ψ značí, že z nevlastního integrálu na pravé straně rovnice bereme tzv. hlavní hodnotu, definovanou vztahem:

$$\Psi\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(p)\,dp = \lim_{a\to\infty}\int_{c-ja}^{c+ja} f(p)\,dp$$, přičemž na pravé straně rovnice integrujeme po úsečce s počátečním bodem $c - ja$ a koncovým bodem $c + ja$.

Vztah (1.3) má obecnou platnost a lze jej využít pro zpětnou Laplaceovu transformaci široké třídy obrazů. Vzhledem k jeho složitosti ho nebudeme používat a budeme se zabývat jen funkcemi, jejichž Laplaceův obraz má tvar racionální lomené funkce. Nejjednodušší způsob převodu obrazu na předmět spočívá v užití tzv. slovníku Laplaceovy transformace. Pomocí tohoto slovníku lze efektivně převádět i původní funkce (předměty) na Laplaceovy obrazy. Slovník je zveřejněn na konci této podkapitoly.

Při řešení například regulačních obvodů mají Laplaceovy obrazy tvar racionální lomené funkce, tj. jde o podíl dvou mnohočlenů (polynomů) ve tvaru

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)},$$

kde $A(p) = a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + ... + a_1 p + a_0 = a_m (p - p_1)(p - p_2)...(p - p_m),$

$B(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + ... + b_1 p + b_0,$

$p_1, p_2, ..., p_m$ jsou obecně různé komplexní nebo reálné kořeny jmenovatele,

n, m jsou stupně polynomů $A(p), B(p)$.

Racionální funkce $F(p)$ se nazývá **ryze lomená**, jestliže $m > n$. Neboli když stupeň čitatele je ostře menší, než stupeň jmenovatele. Pokud by platilo $m \leq n$, nazývá se $F(p)$ **neryze lomená**. V takovém případě musíme nejprve polynom $B(p)$, vydělit polynomem $A(p)$. Tím získáme $F(p)$ v následujícím tvaru

$$F(p) = p + \frac{D(p)}{A(p)},$$

kde p je polynom stupně $n - m$,

$\frac{D(p)}{A(p)}$ je už ryze lomená racionální funkce.

Lze ukázat, že každou ryze lomenou racionální funkci je možno rozložit na součet konečného počtu zlomků typu

$$\frac{A_i}{p - p_i} \qquad ; \qquad \frac{B_k}{(p - p_i)^k},$$

kde p_i jsou obecně komplexní kořeny jmenovatele,

A_i, B_k jsou reálné konstanty.

Uvedené zlomky se nazývají parciální zlomky. Důležité je, že tyto zlomky jsou Laplaceovy obrazy známých předmětů

$$\frac{A_i}{p-p_i} = \mathcal{L}\left\{A_i\, e^{p\,x}\right\} = A_i\, \mathcal{L}\left\{e^{p\,x}\right\},$$

$$\frac{B_k}{(p-p_i)^k} = \mathcal{L}\left\{B_k\, \frac{x^{k-1}e^{p\,x}}{(k-1)!}\right\} = B_k\, \mathcal{L}\left\{\frac{x^{k-1}e^{p\,x}}{(k-1)!}\right\}.$$

Rozkladem na parciální zlomky rozložíme Laplaceův obraz na součet dílčích obrazů.

$$F(p) = F_1(p) + F_2(p) + \ldots + F_n(p)$$

A předmět je pak roven součtu dílčích předmětů

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{F_1(p)\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{F_2(p)\right\} + \ldots + \mathcal{L}^{-1}\left\{F_n(p)\right\} =$$

$$= f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = y(x).$$

Polynom *A(p)* je tedy m-tého stupně a má *m* kořenů, které mohou být různé, reálné, vícenásobné i komplexní.

- **Kořeny reálné různé**

Nechť Laplaceův obraz funkce *f(x)* má tvar:

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{B(p)}{a_m(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_m)}.$$

Ryze lomenou racionální funkci *F(p)*, lze rozložit na součet racionálních zlomků

$$F(p) = \frac{A_1}{(p-p_1)} + \frac{A_2}{(p-p_2)} + \ldots + \frac{A_m}{(p-p_m)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{p-p_i}.$$

Příklad rozkladu na parciální zlomky:

Nechť je dán Laplaceův obraz $F(p) = \dfrac{p+1}{p(p-1)(p+2)}$. Nalezněte předmět *f(x)* k uvedenému obrazu.

Řešení:

Rozklad obrazu *F(p)* na parciální zlomky zapíšeme do tvaru:

$$F(p) = \frac{p+1}{p(p-1)(p+2)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p-1} + \frac{A_3}{p+2}$$

Po sečtení jednotlivých zlomků na pravé straně předchozí rovnosti dostáváme

$$\frac{A_1(p-1)(p+2)+A_2p(p+2)+A_3p(p-1)}{p(p-1)(p+2)}=$$

$$=\frac{A_1p^2+A_1p-2A_1+A_2p^2+2A_2p+A_3p^2-A_3p}{p(p-1)(p+2)}$$

Rovnost se tak upraví na:

$$p+1=A_1p^2+A_1p-2A_1+A_2p^2+2A_2p+A_3p^2-A_3p$$

Rovnost dále upravíme tak, že osamostatníme jednotlivé mocniny proměnné p:

$$0p^2+1p^1+1p^0=(A_1+A_2+A_3)p^2+(A_1+2A_2-A_3)p^1+(-2A_1)p^0$$

Nyní porovnáme jednotlivé konstanty kvadratických trojčlenů polynomu proměnné p na obou stranách předchozí rovnosti. Následně dostáváme soustavu algebraických rovnic pro hledané konstanty:

$$\begin{aligned}
p^2 &: \quad A_1+A_2+A_3=0\\
p^1 &: \quad A_1+2A_2-A_3=1\\
p^0 &: -2A_1=1 \quad \Rightarrow\; A_1=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Rovnici pro p^1 sečteme s rovnicí pro p^2. A dostáváme následující rovnici, ze které vyjádříme konstantu A_2

$$2A_1+3A_2=1 \quad \Rightarrow A_2=\frac{1-2A_1}{3}=\frac{1-2\left(-\frac{1}{2}\right)}{3}=\frac{2}{3}.$$

Nyní zbývá vyjádřit konstantu A_3, například z rovnice pro p^2

$$A_1+A_2+A_3=0 \quad \Rightarrow A_3=-A_1-A_2=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}.$$

Obraz řešení je dán součtem tří parciálních zlomků

$$F(p)=-\frac{1}{2}\frac{1}{p}+\frac{2}{3}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{6}\frac{1}{p+2}.$$

Nyní můžeme použít zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že ke každému parciálnímu zlomku (obrazu) najdeme příslušný předmět

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\} - \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{1}{p+2}\right\} = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}e^{x} - \frac{1}{6}e^{-2x}.$$

- **Kořeny vícenásobné**

Nechť Laplaceův obraz funkce *f(x)* má tvar:

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{B(p)}{a_m(p-p_1)^{m_1}(p-p_2)^{m_2}\dots(p-p_n)^{m_n}}$$

Ryze lomenou racionální funkci *F(p)*, lze rozložit na součet racionálních zlomků

$$F(p) = \frac{A_{11}}{(p-p_1)} + \frac{A_{12}}{(p-p_1)^2} + \dots + \frac{A_{1m_1}}{(p-p_1)^{m_1}} + \frac{A_{21}}{(p-p_2)} + \frac{A_{22}}{(p-p_2)^2} + \dots + \frac{A_{2m_2}}{(p-p_2)^{m_2}} +$$

$$+ \dots + \frac{A_{11}}{(p-p_n)} + \frac{A_{12}}{(p-p_n)^2} + \dots + \frac{A_{nm_1}}{(p-p_n)^{m_1}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{A_{ik}}{(p-p_i)^k}.$$

Příklad rozkladu na parciální zlomky:

Nechť je dán Laplaceův obraz $F(p) = \frac{p-1}{p^2(p+2)^2}$. Nalezněte předmět *f(x)* k uvedenému obrazu.

Řešení:

Rozklad obrazu *F(p)* na parciální zlomky zapíšeme do tvaru:

$$F(p) = \frac{p-1}{p^2(p+2)^2} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{A_3}{p+1} + \frac{A_4}{(p+1)^2}$$

Po sečtení jednotlivých zlomků na pravé straně předchozí rovnosti dostáváme

$$\frac{A_1 p(p+1)^2 + A_2(p+1)^2 + A_3 p^2(p+1) + A_4 p^2}{p^2(p+2)^2} =$$

$$= \frac{A_1 p^3 + 2A_1 p^2 + A_1 p + A_2 p^2 + 2A_2 p + A_2 + A_3 p^3 + A_3 p^2 + A_4 p^3}{p^2(p+2)^2}$$

Rovnost se tak upraví na:

$$p-1=A_1p^3+2A_1p^2+A_1p+A_2p^2+2A_2p+A_2+A_3p^3+A_3p^2+A_4p^2$$

Rovnost dále upravíme tak, že osamostatníme jednotlivé mocniny proměnné *p*:

$$0p^3+0p^2+1p^1-1p^0=\left(A_1+A_3\right)p^3+\left(2A_1+A_2+A_3+A_4\right)p^2+$$

$$+\left(A_1+2A_2\right)p^1+A_2p^0$$

Nyní porovnáme jednotlivé konstanty lineární kombinace polynomu proměnné *p* na obou stranách předchozí rovnosti. Následně dostáváme soustavu algebraických rovnic pro hledané konstanty:

$$\begin{aligned}
&p^3: \quad A_1+A_3=0 \quad \Rightarrow A_3=-A_1=-3\\
&p^2: \quad 2A_1+A_2+A_3+A_4=0 \quad \Rightarrow A_4=-2A_1-A_2-A_3=-6-(-1)-(-3)=-2\\
&p^1: A_1+2A_2=1 \quad \Rightarrow A_1=1-2A_2 \Rightarrow 1-2(-1)=3\\
&p^0: \quad A_2=-1
\end{aligned}$$

Obraz řešení je dán součtem čtyř parciálních zlomků

$$F(p)=3\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-3\frac{1}{p+1}-2\frac{1}{(p+1)^2}\,.$$

Nyní můžeme použít zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že ke každému parciálnímu zlomku (obrazu) najdeme příslušný předmět

$$f(x)=\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}=3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\}-3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\}$$
$$-2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^2}\right\}=3-x-3e^{-x}-2xe^{-x}\,.$$

- **Kořeny komplexní**

Nechť Laplaceův obraz funkce *f(x)* má tvar:

$$F(p)=\frac{B(p)}{A(p)}=\frac{C_1}{p_1-a-j\omega}+\frac{C_2}{p_2-a+j\omega}$$

A nechť se v uvedeném obrazu vyskytuje dvojice komplexně sdružených kořenů $p_1=a+j\omega$ a $p_2=a-j\omega$. Pak k tomuto obrazu odpovídá v reálné oblasti funkce

$$f(x)=C_1e^{(a+j\omega)x}+C_2e^{(a-j\omega)x}=C_1e^{ax}e^{j\omega x}+C_2e^{ax}e^{-j\omega x}=\left(C_1e^{j\omega x}+C_2e^{-j\omega x}\right)e^{ax}\,.$$

Kde koeficienty C_1 a C_2 jsou také čísla komplexně sdružená. A pro uvedené koeficienty platí:

$$C_1 = a + jb = |C| e^{j\varphi} \qquad ; \qquad C_2 = a - jb = |C| e^{-j\varphi}$$

Dále platí vztahy:

$$|C| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad ; \qquad \varphi = arctg \frac{b}{a},$$

kde φ je fázový posuv [rad],
a, b reálná konstanta, imaginární konstanta.

Po dosazení uvedených vztahů do předchozí funkce *f(x)*, dostáváme následující tvar

$$f(x) = \left(|C| e^{j\varphi} e^{j\omega x} + |C| e^{-j\varphi} e^{-j\omega x}\right) e^{ax} = \left(e^{j(\varphi+\omega x)} + e^{-j(\varphi+\omega x)}\right) |C| e^{ax} =$$

$$= \left(\frac{e^{j(\varphi+\omega x)} + e^{-j(\varphi+\omega x)}}{2}\right) 2|C| e^{ax} = \left(\cos(\varphi + \omega x)\right) A e^{ax},$$

kde *A* je reálná konstanta.

Chceme-li se pak vyhnout operacím s komplexními čísly, můžeme využít odvozené vztahy pro obrazy funkcí $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$. Následně použijeme rozklad na parciální zlomky.

Například výraz tvaru $\dfrac{Mp + N}{(p-a)^2 + b^2}$, kde M, N, a, b jsou reálné konstanty.

S přihlédnutím k tomu, že platí

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}\right\} = e^{ax}\cos bx \qquad ; \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(p-a)^2 + b^2}\right\} = e^{ax}\sin bx,$$

dostaneme

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Mp + N}{(p-a)^2 + b^2}\right\} = e^{ax}\left(M\cos bx + \frac{aM + N}{b}\sin bx\right).$$

Příklad rozkladu na parciální zlomky:

Nechť je dán Laplaceův obraz $F(p) = \dfrac{p}{p^2 + 2p + 2}$. Nalezněte předmět *f(x)* k uvedenému obrazu.

Řešení:

Nejprve upravíme kvadratický polynom ve jmenovateli tak, aby obsahoval přímo obrazy funkcí $e^{-ax}\cos bx$, $e^{-ax}\sin bx$. Následně zapíšeme rozklad obrazu *F(p)* na parciální zlomky do tvaru:

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 2} = \frac{p}{(p+1)^2 + 1} = \frac{A(p+1) + B}{(p+1)^2 + 1}$$

Po sečtení jednotlivých zlomků na pravé straně předchozí rovnosti dostáváme

$$Ap + A + B,$$

Rovnost se tak upraví na:

$$p = Ap + A + B$$

Rovnost dále upravíme tak, že osamostatníme jednotlivé mocniny proměnné *p*:

$$1p = Ap^1 + (A+B)p^0$$

Nyní porovnáme jednotlivé konstanty lineární kombinace polynomu proměnné *p* na obou stranách předchozí rovnosti. Následně dostáváme soustavu algebraických rovnic pro hledané konstanty:

$$\begin{aligned} p^1 &: \quad A = 1 \\ p^0 &: \quad A + B = 0 \quad \Rightarrow B = -A = -1 \end{aligned}$$

Obraz řešení je dán součtem dvou parciálních zlomků

$$F(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} - \frac{1}{(p+1)^2 + 1}$$

Nyní můžeme použít zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že ke každému parciálnímu zlomku (obrazu) najdeme příslušný předmět

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+1}{(p+1)^2 + 1}\right\} -$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^2 + 1}\right\} = e^{-ax}\cos bx - e^{-ax}\sin bx .$$

Konvoluce

Konvoluce je matematický operátor spojitě zpracovávající dvě funkce. Značí se symbolem $*$. Nechť funkce f, g jsou po částech spojité. Pak jejich konvoluci definujeme vztahem

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(u)g(x-u)du = h(x).$$

Konvoluce je jistá funkce h, která je dána konvolucí funkcí f , g. Konvoluci tedy budeme značit $h(x) = (f * g)(x)$.

1.4.1 Věta (O vlastnostech konvoluce)

Nechť f, g, h jsou reálné funkce. Potom $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$, $G(p) = \mathcal{L}\{g(x)\}$ a $H(p) = \mathcal{L}\{h(x)\}$ jsou jejich Laplaceovy obrazy. Pro jejich konvoluce platí:

1. Komunikativní zákon: $f * g = g * f$. Pro $h(x) = (f * g)(x)$ můžeme psát

$$h(x) = \int_0^x f(u)g(x-u)du = \int_0^x g(u)f(x-u)du.$$

2. Asociativní zákon: $(f * g) * h = f * (g * h)$.
Tato vlastnost umožňuje psát konvoluci tří funkcí bez závorky: $f * g * h$ (platí pro libovolný konečný počet funkcí).

3. Distributivní zákon vzhledem ke sčítání: $f * (g + h) = f * g + f * h$.

4. $(c f) * g = f * (cg) = c(f * g)$ pro každé $c \in R$.

5. $\mathcal{L}\{f * g\} = F(p) \cdot G(p)$ neboli $\mathcal{L}^{-1}\{F(g) \cdot G(p)\} = f(x) * g(x)$.
Tento vztah se nazývá Borelův vzorec, který slouží k nalezení předmětu k součinu dvou Laplaceových obrazů jistých funkcí.

Tabulka 2 – Slovník Laplaceovy transformace

Předmět $f(x)$	**Obraz** $F(p)$
1	$\frac{1}{p}$
x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}, n \in N$
e^{ax}	$\frac{1}{p-a}$
$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}, n \in N$
$\sin ax$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos ax$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\sinh ax$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\cosh ax$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
$x \sin ax$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$
$x \cosh ax$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
$e^{bx} \sin ax$	$\frac{a}{(p-b)^2+a^2}$
$e^{bx} \cos ax$	$\frac{p-b}{(p-b)^2+a^2}$
$e^{bx} \sinh ax$	$\frac{a}{(p-b)^2-a^2}$
$e^{bx} \cosh ax$	$\frac{p-b}{(p-b)^2-a^2}$
$\frac{e^{ax}-e^{bx}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}, a \neq b$

2 Sbírka příkladů

2.1 Laplaceova transformace k řešení funkčních rovnic

Laplaceovu transformaci používáme nejčastěji při řešení obyčejných diferenciálních rovnic a jejich soustav, rovnic integrálních nebo integrodiferenciálních. Pro nedostatek místa nebudeme zde všechny příslušné úvahy provádět v obecné podobě. Uvedeme jen obecné použití Laplaceovy transformace při řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Půjde vždy o hledání konkrétních funkcí (partikulárních řešení), které splňují předem danou počáteční podmínku, určené derivacemi funkce v bodě $x = 0$. Máme danou diferenciální rovnici pro neznámou funkci y proměnné $x \in R$:

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f\,,$$

kde $a_i\,(i = 0,1,\ldots,n)$ jsou reálné konstanty, $a_n \neq 0$, f je po částech spojitá funkce proměnné x. Máme určit partikulární řešení y(x) diferenciální rovnice za daných počátečních podmínek

$$y(0) = b_0\,,\; y'(0) = b_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = b_n\,,$$

kde $b_i\,(i = 0,1,\ldots,n-1)$ jsou dané konstanty. Tato úloha se nazývá počáteční a má právě jedno řešení *y(x).* Z věty (1.2.1) plyne, že existuje obraz $Y(p) = \mathcal{L}\{y(x)\}$. Označíme $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ a užitím věty (1.3.8) dostaneme pro obraz *Y(p)* rovnici

$$a_n\left(p^n Y(p) - p^{n-1}b_0 - \ldots - pb_{n-2} - b_{n-1}\right) + \ldots + a_2\left(p^2 Y(p) - pb_0 - b_1\right) + a_1\left(pY(p) - b_0\right) +$$

$$+ a_0 Y(p) = F(p)\,.$$

Tato rovnice je obrazem diferenciální rovnice a nazývá se **obrazová rovnice**.
Po úpravě dostaneme tvar

$$\left(a_n p^n + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0\right)Y(p) = F(p)B_{n-1}(p)\,,$$

kde $B_{n-1}(p)$ je mnohočlen stupně nejvýše $n-1$. Obraz řešení dané diferenciální rovnice převedeme na tvar

$$Y(p) = \frac{F(p) + B_{n-1}(p)}{A_n(p)}\,.$$

Předmět *y(x)* k obrazu *Y(p)* budeme hledat metodou rozkladu na parciální zlomky.

2.2 Příklad 1

Určete partikulární řešení diferenciální rovnice prvního řádu $y' = y + x^2$, s počáteční podmínkou $y(0) = 1$.

Řešení:

Partikulární řešení diferenciální rovnice prvního řádu provedeme v několika následujících krocích.

Krok 1.
Převedeme jednotlivé argumenty rovnice na Laplaceův obraz *Y(p)*

$$\mathcal{L}\{y\} = Y \quad , \quad \mathcal{L}\{y'\} = pY - y(0) = pY - 1 \, , \quad \mathcal{L}\{x^2\} = \frac{2}{p^3} \, .$$

Příslušná obrazová rovnice po dosazení Laplaceových obrazů jednotlivých argumentů z původní diferenciální rovnice:

$$pY - 1 = Y + \frac{2}{p^3}$$

Krok 2.
Upravíme obrazovou rovnici tak, že převedeme výrazy s *Y* na levou stranu a zbytek na pravou stranu rovnice

$$pY - Y = \frac{2}{p^3} + 1 \, .$$

Krok 3.
Na levé straně rovnice vytkneme *Y* a na pravé straně výrazy sečteme

$$Y \cdot (p-1) = \frac{2+p^3}{p^3} \, .$$

Krok 4.
Vyjádříme *Y(p)* :

$$Y(p) = \frac{2+p^3}{p^3} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{2+p^3}{p^3(p-1)}$$

Krok 5.
Abychom mohli použít zpětnou Laplaceovu transformaci, musíme rozložit ryze lomenou racionální funkci *Y(p)* na součet parciálních zlomků

$$\frac{2+p^3}{p^3(p-1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p^3} + \frac{D}{(p-1)} \, .$$

Krok 6.
Abychom mohli sestavit soustavu algebraických rovnic, musíme provést součet všech jednotlivých zlomků na pravé straně předchozí rovnosti

$$\frac{Ap^2(p-1)+Bp(p-1)+C(p-1)+Dp^3}{p^3(p-1)}=\frac{Ap^3-Ap^2+Bp^2-Bp+Cp-C+Dp^3}{p^3(p-1)}.$$

Rovnost se tak upraví na

$$2+p^3=Ap^3-Ap^2+Bp^2-Bp+Cp-C+Dp^3.$$

Rovnost dále upravíme tak, že vytkneme jednotlivé mocniny proměnné p

$$1p^3+0p^2+0p^1+2p^0=(A+D)p^3+(-A+B)p^2+(-B+C)p^1-Cp^0.$$

Krok 7.
Nyní porovnáme jednotlivé konstanty lineární kombinace polynomu proměnné p na obou stranách předchozí rovnosti. Následně dostáváme soustavu algebraických rovnic pro hledané konstanty:

$$\begin{aligned}
&p^3: \quad A+D=1 \quad \Rightarrow D=1-A=1-(-2)=3\\
&p^2: \quad -A+B=0 \quad \Rightarrow -A=-B \quad \Rightarrow A=B=-2\\
&p^1: \quad -B+C=0 \quad \Rightarrow -B=-C \Rightarrow B=C=-2\\
&p^0: \qquad -C=2 \quad \Rightarrow C=-2
\end{aligned}$$

Obraz řešení je dán součtem čtyř parciálních zlomků

$$Y(p)=\frac{-2}{p}-\frac{2}{p^2}-\frac{2}{p^3}+\frac{3}{p-1}.$$

Krok 8.
Nyní můžeme provést zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že ke každému parciálnímu zlomku (obrazu) najdeme příslušnou funkci (předmět)

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\}=-2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\}-2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\}-2\left\{\frac{1}{p^3}\right\}+3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\}.$$

Hledané partikulární řešení diferenciální rovnice prvního řádu je

$$y(x)=-2-2x-2\frac{x^2}{2}+3e^x=3e^x-x^2-2x-2.$$

2.3 Příklad *2*

Určete partikulární řešení diferenciální rovnice prvního řádu $y'+4y=\sin 2x$, s počáteční podmínkou $y(0)=1$.

Řešení:

Partikulární řešení diferenciální rovnice prvního řádu provedeme v několika následujících krocích.

Krok 1.

Převedeme jednotlivé argumenty rovnice na Laplaceův obraz *Y(p)*

$$\mathcal{L}\{y\} = Y \quad , \quad \mathcal{L}\{y'\} = pY - y(0) = pY - 1 \,, \quad \mathcal{L}\{\sin 2x\} = \frac{2}{p^2+4} \,.$$

Příslušná obrazová rovnice po dosazení Laplaceových obrazů jednotlivých argumentů z původní diferenciální rovnice:

$$pY - 1 + 4Y = \frac{2}{p^2+4}$$

Krok 2.

Upravíme obrazovou rovnici tak, že ponecháme výrazy s Y na levé straně rovnice a zbytek převedeme na pravou stranu rovnice

$$pY + 4Y = \frac{2}{p^2+4} + 1 \,.$$

Krok 3.

Na levé straně rovnice vytkneme Y a na pravé straně výrazy sečteme

$$Y(p+4) = \frac{2 + p^2 + 4}{p^2+4} = \frac{p^2+6}{p^2+4} \,.$$

Krok 4.

Vyjádříme *Y(p)* :

$$Y(p) = \frac{p^2+6}{\left(p^2+4\right)\left(p+4\right)}$$

Krok 5.

Abychom mohli použít zpětnou Laplaceovu transformaci, musíme rozložit ryze lomenou racionální funkci *Y(p)* na součet parciálních zlomků

$$\frac{p^2+6}{\left(p^2+4\right)\left(p+4\right)} = \frac{Ap+B}{p^2+4} + \frac{C}{p+4} \,.$$

Krok 6.

Abychom mohli sestavit soustavu algebraických rovnic, musíme provést součet všech jednotlivých zlomků na pravé straně předchozí rovnosti

$$\frac{(Ap+B)(p+4)+C(p^2+4)}{(p^2+4)(p+4)}=\frac{Ap^2+4Ap+Bp+4B+Cp^2+4C}{(p^2+4)(p+4)}.$$

Rovnost se tak upraví na

$$p^2+6=Ap^2+4Ap+Bp+4B+Cp^2+4C.$$

Rovnost dále upravíme tak, že osamostatníme jednotlivé mocniny proměnné p

$$1p^2+0p^1+6p^0=(A+C)p^2+(4A+B)p^1+(4B+4C)p^0.$$

Krok 7.

Nyní porovnáme jednotlivé konstanty lineární kombinace polynomu proměnné p na obou stranách předchozí rovnosti. Následně dostáváme soustavu algebraických rovnic pro hledané konstanty:

$$\begin{aligned}
&p^2: \quad A+C=1 \quad \Rightarrow C=1-A=1+\frac{1}{10}=\frac{11}{10}\\
&p^1: \quad 4A+B=0 \quad \Rightarrow A=-\frac{-B}{4}=-\frac{2}{5}\frac{1}{4}=-\frac{1}{10}\\
&p^0: \quad 4B+4C=6
\end{aligned}$$

Rovnici pro p^2 vynásobíme minus čtyřmi a následně sečteme s rovnicí pro p^1. Dostáváme tak rovnici:

$$-4C+B=-4$$

A tuto rovnici sečteme s rovnicí pro p^0. Tím získáme následující rovnici, ze které vyjádříme konstantu B

$$6=5B+2 \quad \Rightarrow B=\frac{2}{5}.$$

Obraz řešení je dán součtem tří parciálních zlomků

$$Y(p)=-\frac{1}{10}\frac{p}{p^2+4}+\frac{1}{5}\frac{2}{p^2+4}+\frac{11}{10}\frac{1}{p+4}.$$

Krok 8.

Nyní můžeme provést zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že ke každému parciálnímu zlomku (obrazu) najdeme příslušnou funkci (předmět)

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\}=-\frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+4}\right\}+\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p^2+4}\right\}+\frac{11}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+4}\right\}.$$

Hledané partikulární řešení diferenciální rovnice prvního řádu je

$$y(x)=-\frac{1}{10}\cos 2x+\frac{1}{5}\sin 2x+\frac{11}{10}e^{-4x}.$$

2.4 Příklad 3

Určete partikulární řešení diferenciální rovnice druhého řádu $2y'' - 4y' + 2y = 4 - 2x + x^2$, s počátečními podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = -2$.

Řešení:

Partikulární řešení diferenciální rovnice druhého řádu provedeme v několika následujících krocích.

Krok 1.

Převedeme jednotlivé argumenty rovnice na Laplaceův obraz *Y(p)*

$$\mathcal{L}\{y\} = Y \quad , \qquad \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p} \quad , \qquad \mathcal{L}\{2x\} = \frac{2}{p^2}\ , \qquad \mathcal{L}\{x^2\} = \frac{2}{p^3}\ ,$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = pY - y(0) = pY - 1 \qquad , \qquad \mathcal{L}\{y''\} = p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - p\,.$$

Příslušná obrazová rovnice po dosazení Laplaceových obrazů jednotlivých argumentů z původní diferenciální rovnice:

$$2\left(p^2Y - p + 2\right) - 4\left(pY - 1\right) + 2Y = \frac{4}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3}$$

Krok 2.

Upravíme obrazovou rovnici tak, že ponecháme výrazy s *Y* na levé straně rovnice a zbytek převedeme na pravou stranu rovnice

$$2p^2Y - 2p + 4 - 4pY + 4 + 2Y = \frac{4p^2 - 2p + 2}{p}\,,$$

$$2p^2Y - 4pY + 2Y = \frac{4p^2 - 2p + 2}{p} + 2p - 8\,,$$

Krok 3.

Na levé straně rovnice vytkneme *Y* a na pravé straně výrazy sečteme

$$Y\left(2p^2 - 4p + 2\right) = \frac{4p^2 - 2p + 2 + 2p^4 - 8p^3}{p^3}\,.$$

Krok 4.

Vyjádříme *Y(p)* :

$$Y(p) = \frac{4p^2 - 2p + 2 + 2p^4 - 8p^3}{p^3\left(2p^2 - 4p + 2\right)} = \frac{2\left(2p^2 - p + 1 + p^4 - 4p^3\right)}{2p^3\left(p^2 - 2p + 1\right)} = \frac{2p^2 - p + 1 + p^4 - 4p^3}{p^3\left(p - 1\right)^2}$$

Krok 5.
Abychom mohli použít zpětnou Laplaceovu transformaci, musíme rozložit ryze lomenou racionální funkci *Y(p)* na součet parciálních zlomků

$$\frac{2p^2 - p + 1 + p^4 - 4p^3}{p^3(p-1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p^3} + \frac{D}{p-1} + \frac{E}{(p-1)^2}\,.$$

Krok 6.
Abychom mohli sestavit soustavu algebraických rovnic, musíme provést součet všech jednotlivých zlomků na pravé straně předchozí rovnosti

$$\frac{Ap^2(p-1)^2 + Bp(p-1)^2 + C(p-1)^2 + Dp^3(p-1) + Ep^3}{p^3(p-1)^2} =$$

$$= \frac{Ap^4 - 2Ap^3 + Ap^2 + Bp^3 - 2Bp^2 + Bp + Cp^2 - 2Cp + C + Dp^4 - Dp^3 + Ep^3}{p^3(p-1)^2}\,.$$

Rovnost se tak upraví na

$$2p^2 - p + 1 + p^4 - 4p^3 = Ap^4 - 2Ap^3 + Ap^2 + \ldots + Cp^2 - 2Cp + C + Dp^4 - Dp^3 + Ep^3\,.$$

Rovnost dále upravíme tak, že vytkneme jednotlivé mocniny proměnné *p*

$$1p^4 - 4p^3 + 2p^2 - 1p^1 + 1p^0 = (A+D)p^4 + (-2A + B - D + E)p^3 + (A - 2B + C)p^2 +$$

$$+ (A - 2B + C)p^1 + (B - 2C)p^0\,.$$

Krok 7.
Nyní porovnáme jednotlivé konstanty lineární kombinace polynomu proměnné *p* na obou stranách předchozí rovnosti. Následně dostáváme soustavu algebraických rovnic pro hledané konstanty:

$$\begin{aligned}
&p^4: \quad A + D = 1 \quad \Rightarrow D = 1 - A = 1 - 3 = -2\\
&p^3: \quad -2A + B - D + E = -4 \quad \Rightarrow E = 2A - B + D - 4 = 6 - 1 - 2 - 4 = -1\\
&p^2: \quad A - 2B + C = 2 \quad \Rightarrow A = 2B - C + 2 = 2 - 1 + 2 = 3\\
&p^1: \quad B - 2C = -1 \quad \Rightarrow B = -1 + 2C = -1 + 2 = 1\\
&p^0: \quad C = 1
\end{aligned}$$

Obraz řešení je dán součtem pěti parciálních zlomků

$$Y(p) = \frac{3}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} - \frac{2}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2}\,.$$

Krok 8.

Nyní můžeme provést zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že ke každému parciálnímu zlomku (obrazu) najdeme příslušnou funkci (předmět)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(p)\right\} = 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^3}\right\} - 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^2}\right\}.$$

Hledané partikulární řešení diferenciální rovnice druhého řádu je

$$y(x) = 3 + x + \frac{1}{2}x^2 - 2e^x - xe^x .$$

2.5 Příklad 4

Určete partikulární řešení diferenciální rovnice třetího řádu $y''' + 4y'' + 4y' = e^{\frac{-x}{2}}$, s počátečními podmínkami $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ a $y''(0) = 0$.

Řešení:

Partikulární řešení diferenciální rovnice třetího řádu provedeme v několika následujících krocích.

Krok 1.
Převedeme jednotlivé argumenty rovnice na Laplaceův obraz *Y(p)*

$$\mathcal{L}\left\{y'\right\} = pY - y(0) = pY \qquad , \qquad \mathcal{L}\left\{y''\right\} = p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y ,$$

$$\mathcal{L}\left\{y'''\right\} = p^3Y - p^2 y(0) - py'(0) - y'(0) = p^3Y \qquad , \qquad \mathcal{L}\left\{e^{\frac{-x}{2}}\right\} = \frac{2}{2p+1} .$$

Příslušná obrazová rovnice po dosazení Laplaceových obrazů jednotlivých argumentů z původní diferenciální rovnice:

$$p^3Y + 4p^2Y + 4pY = \frac{2}{2p+1}$$

Krok 2.
Na levé straně rovnice vytkneme *Y*

$$Y\left(p^3 + 4p^2 + 4p\right) = \frac{2}{2p+1} .$$

Krok 3.
Vyjádříme *Y(p)* :

$$Y(p)=\frac{2}{(2p+1)\left(p^3+4p^2+4p\right)}=\frac{2}{p\left(p^2+4p+4\right)(2p+1)}=\frac{2}{p(2p+1)(p+2)^2}$$

Krok 4.
Abychom mohli použít zpětnou Laplaceovu transformaci, musíme rozložit ryze lomenou racionální funkci *Y(p)* na součet parciálních zlomků

$$\frac{2}{p(2p+1)(p+2)^2}=\frac{A}{p}+\frac{2B}{2p+1}+\frac{C}{p+2}+\frac{D}{(p+2)^2}\,.$$

Krok 5.
Abychom mohli sestavit soustavu algebraických rovnic, musíme provést součet všech jednotlivých zlomků na pravé straně předchozí rovnosti

$$\frac{A(2p+1)(p+2)^2+2Bp(p+2)^2+Cp(2p+1)(p+2)+Dp(2p+1)}{p(2p+1)(p+2)^2}=$$

$$=\frac{2Ap^3+9Ap^2+12Ap+4A+2Bp^3+8Bp^2+8Bp+2Cp^3+5Cp^2+2Cp+2Dp^2+Dp}{p(2p+1)(p+2)^2}\,.$$

Rovnost se tak upraví na

$$2=2Ap^3+9Ap^2+12Ap+4A+2Bp^3+8Bp^2+8Bp+2Cp^3+5Cp^2+2Cp+2Dp^2+Dp$$

Rovnost dále upravíme tak, že vytkneme jednotlivé mocniny proměnné *p*

$$0p^3+0p^2+0p^1+2p^0=(2A+2B+2C)p^3+(9A+8B+5C+2D)p^2+$$

$$+(12A+8B+2C+D)p^1+4Ap^0\,.$$

Krok 6.
Nyní porovnáme jednotlivé konstanty lineární kombinace polynomu proměnné *p* na obou stranách předchozí rovnosti. Následně dostáváme soustavu algebraických rovnic pro hledané konstanty:

$$\begin{aligned}
p^3: &\quad 2A+2B+2C=0\\
p^2: &\quad 9A+8B+5C+2D=0\\
p^1: &\quad 12A+8B+2C+D=0\\
p^0: &\quad 4A=2 \quad\Rightarrow A=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Kde A vyplívá přímo z rovnice pro p^0, $B = -\frac{8}{9}$, $C = \frac{7}{18}$ a $D = \frac{1}{3}$.

Obraz řešení je dán součtem čtyř parciálních zlomků

$$Y(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{p} - \frac{8}{9}\frac{2}{2p+1} + \frac{7}{18}\frac{1}{p+2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(p+2)^2} \ .$$

Krok 7.
Nyní můžeme provést zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že ke každému parciálnímu zlomku (obrazu) najdeme příslušnou funkci (předmět)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} - \frac{8}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{2p+1}\right\} + \frac{7}{18}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)^2}\right\}.$$

Hledané partikulární řešení diferenciální rovnice třetího řádu je

$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{8}{9}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{7}{18}e^{-2x} + \frac{1}{3}xe^{-2x} \ .$$

2.6 Příklad 5

Určete partikulární řešení diferenciální rovnice čtvrtého řádu $y^{(4)} - y = \sinh x$, s počátečními podmínkami $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$ a $y'''(0) = 1$.

Řešení:

Partikulární řešení diferenciální rovnice čtvrtého řádu provedeme v několika následujících krocích.

Krok 1.
Převedeme jednotlivé argumenty rovnice na Laplaceův obraz *Y(p)*

$\mathcal{L}\{y\} = Y$, $\mathcal{L}\{y''\} = p^4Y - p^3y(0) - p^2y'(0) - py''(0) - y'''(0) = p^4Y - 1$,

$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{p^2-1}\right\}$.

Příslušná obrazová rovnice po dosazení Laplaceových obrazů jednotlivých argumentů z původní diferenciální rovnice:

$$p^4Y - 1 - Y = \frac{1}{(p^2-1)}$$

Krok 2.
Upravíme obrazovou rovnici tak, že ponecháme výrazy s Y na levé straně rovnice a zbytek převedeme na pravou stranu rovnice

$$p^4Y - Y = \frac{1}{\left(p^2-1\right)} + 1 .$$

Krok 3.
Na levé straně rovnice vytkneme *Y* a na pravé straně výrazy sečteme

$$Y\left(p^4-1\right) = \frac{1+p^2-1}{\left(p^2-1\right)} .$$

Krok 4.
Vyjádříme *Y(p)* :

$$Y(p) = \frac{p^2}{\left(p^2-1\right)\left(p^4-1\right)} = \frac{p^2}{\left(p^2-1\right)\left(p^2-1\right)\left(p^2+1\right)} = \frac{p^2}{\left(p^2-1\right)^2\left(p^2+1\right)}$$

Krok 5.
Abychom mohli použít zpětnou Laplaceovu transformaci, musíme rozložit ryze lomenou racionální funkci *Y(p)* na součet parciálních zlomků

$$Y(p) = \frac{p^2}{\left(p^2-1\right)^2\left(p^2+1\right)} = \frac{Ap+B}{\left(p^2-1\right)} + \frac{C\left(p^2+1\right)+2Dp}{\left(p^2-1\right)^2} + \frac{Ep+F}{\left(p^2+1\right)} .$$

Krok 6.
Abychom mohli sestavit soustavu algebraických rovnic, musíme provést součet všech jednotlivých zlomků na pravé straně předchozí rovnosti

$$\frac{(Ap+B)\left(p^4-1\right)+\left(Cp^2+C+2Dp\right)\left(p^2+1\right)+(Ep+F)\left(p^2-1\right)^2}{\left(p^2-1\right)^2\left(p^2+1\right)} =$$

$$= \frac{Ap^5 - Ap + Bp^4 - B + Cp^4 + 2Cp^2 + C + 2Dp^3 + 2Dp}{\left(p^2-1\right)^2\left(p^2+1\right)} +$$

$$\frac{+Ep^5 - 2Ep^3 + Ep + Fp^4 - 2Fp^2 - F}{\left(p^2-1\right)^2\left(p^2+1\right)} .$$

Rovnost se tak upraví na

$$p^2 = Ap^5 - Ap + Bp^4 - B + Cp^4 + 2Cp^2 + C + 2Dp^3 + 2Dp +$$

$$+ Ep^5 - 2Ep^3 + Ep + Fp^4 - 2Fp^2 - F .$$

Rovnost dále upravíme tak, že vytkneme jednotlivé mocniny proměnné *p*

$$0p^5 + 0p^4 + 0p^3 + 1p^2 + 0p^1 + 0p^0 = (A+E)p^5 + (B+C+F)p^4 + (2D-2E)p^3 +$$

$$+(-2F+2C)p^2 + (-A+E)p^1 + (-B+C)p^0 .$$

Krok 7.
Nyní porovnáme jednotlivé konstanty lineární kombinace polynomu proměnné *p* na obou stranách předchozí rovnosti. Následně dostáváme soustavu algebraických rovnic pro hledané konstanty:

$$\begin{aligned}
p^5 &: \quad A+E=0 \\
p^4 &: \quad B+C+F=0 \\
p^3 &: \quad 2D-2E=0 \\
p^2 &: \quad -2F+2C=1 \\
p^1 &: \quad -A+E=0 \\
p^0 &: \quad -B+C+F=0
\end{aligned}$$

Kde $A=0$, $B=0$, $C=\frac{1}{4}$, $D=0$, $E=0$ a $F=-\frac{1}{2}$.

Obraz řešení je dán součtem dvou parciálních zlomků

$$Y(p) = \frac{1}{4}\frac{(p^2+1)}{(p^2-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{p^2+1} .$$

Krok 8.
Nyní můžeme provést zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že ke každému parciálnímu zlomku (obrazu) najdeme příslušnou funkci (předmět)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\} = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(p^2+1)}{(p^2-1)^2}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\}.$$

Hledané partikulární řešení diferenciální rovnice čtvrtého řádu je

$$y(x) = \frac{1}{4}x\cosh x - \frac{1}{4}\sin x = \frac{1}{4}(x\cosh x - \sin x).$$

2.7 Příklad 6

Určete partikulární řešení soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu $\begin{aligned} y_1' + y_1 &= y_2 + e^x \\ y_2' + y_2 &= y_1 + e^x \end{aligned}$,

s počátečními podmínkami $y_1(0) = 6$ a $y_2(0) = 0$.

Řešení:

Partikulární řešení soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu provedeme v několika následujících krocích.

Krok 1.

Převedeme jednotlivé argumenty rovnic na Laplaceův obraz *Y(p)*

$$\mathcal{L}\{y_1\} = Y_1 \quad , \quad \mathcal{L}\{y_1'\} = pY_1 - y_1(0) = pY_1 - 6 \quad , \quad \mathcal{L}\{e^x\} = \frac{1}{p-1},$$

$$\mathcal{L}\{y_2\} = Y_2 \quad , \quad \mathcal{L}\{y_2'\} = pY_2 - y_2(0) = pY_2 .$$

Příslušná soustava obrazových rovnic po dosazení Laplaceových obrazů jednotlivých argumentů z původní soustavy diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} pY_1 - 6 + Y_1 &= Y_2 + \frac{1}{p-1} \\ pY_2 + Y_2 &= Y_1 + \frac{1}{p-1} \end{aligned}$$

Krok 2.

Upravíme soustavu obrazových rovnic tak, že převedeme výrazy obsahující *Y* v každé rovnici na levou stranu a zbytek převedeme na pravou stranu rovnice

$$\begin{aligned} pY_1 + Y_1 - Y_2 &= \frac{6p-5}{p-1} \\ pY_2 + Y_2 - Y_1 &= \frac{1}{p-1} \end{aligned} . \qquad (2.1)$$

Krok 3.

Dále se budeme snažit odečíst Y_2, tak že Y_2 ve druhé rovnici vytkneme

$$Y_2(p+1) = Y_1 + \frac{1}{p-1} . \qquad (2.2)$$

Potom rovnici upravíme na následující tvar

$$Y_2 - \frac{Y_1}{p+1} = \frac{1}{(p-1)(p+1)} .$$

Krok 4.

Nyní předchozí rovnici sečteme s první rovnicí ze (2.1)

$$pY_1 + Y_1 - \frac{Y_1}{p+1} = \frac{6p-5}{p-1} + \frac{1}{(p-1)(p+1)} .$$

Krok 5.
Na levé straně rovnice vytkneme Y_1 a na pravé straně výrazy sečteme

$$Y_1\left(p+1-\frac{1}{p+1}\right)=\frac{(6p-5)(p+1)+1}{(p-1)(p+1)}=\frac{6p^2+p-4}{(p-1)(p+1)}.$$

Krok 6.
Vyjádříme $Y_1(p)$:

$$Y_1(p)=\frac{6p^2+p-4}{(p-1)(p+1)}\cdot\frac{1}{\left(p+1-\frac{1}{p+1}\right)}=\frac{6p^2+p-4}{(p-1)(p+1)}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p(p+2)}{p+1}\right)}=$$

$$Y_1(p)=\frac{6p^2+p-4}{(p-1)(p+1)}\cdot\frac{p+1}{p(p+2)}=\frac{6p^2+p-4}{p(p-1)(p+2)}$$

Krok 7.
Abychom mohli použít zpětnou Laplaceovu transformaci, musíme rozložit ryze lomenou racionální funkci $Y_1(p)$ na součet parciálních zlomků

$$Y_1(p)=\frac{6p^2+p-4}{p(p-1)(p+2)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p+2}.$$

Krok 8.
Abychom mohli sestavit soustavu algebraických rovnic, musíme provést součet všech jednotlivých zlomků na pravé straně předchozí rovnosti

$$\frac{A(p-1)(p+2)+Bp(p+2)+Cp(p-1)}{p(p-1)(p+2)}=\frac{Ap^2+Ap-2A+Bp^2+2Bp+Cp^2-Cp}{p(p-1)(p+2)}.$$

Rovnost se tak upraví na

$$6p^2+p-4=Ap^2+Ap-2A+Bp^2+2Bp+Cp^2-Cp.$$

Rovnost dále upravíme tak, že vytkneme jednotlivé mocniny proměnné p

$$6p^2+1p^1-4p^0=(A+B+C)p^2+(A+2B-C)p^1-2Ap^0.$$

Krok 9.
Nyní porovnáme jednotlivé konstanty lineární kombinace polynomu proměnné p na obou stranách předchozí rovnosti. Následně dostáváme soustavu algebraických rovnic pro hledané konstanty:

$$p^2: \quad A + B + C = 6$$
$$p^1: \quad A + 2B - C = 1$$
$$p^0: \quad -2A = -4 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{4}{2} = 2$$

Kde A vyplívá přímo z rovnice pro p^0, $B = 1$ a $C = 3$.

Obraz řešení je dán součtem tří parciálních zlomků

$$Y_1(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{p-1} + \frac{3}{p+2}.$$

Krok 10.
Dále za Y_1 dosadíme výsledný algebraický výraz do některé obrazové rovnice. Např. do rovnice ze (2.2).

$$pY_2 + Y_2 = \frac{6p^2 + p - 4}{p(p-1)(p+2)} + \frac{1}{p-1}$$

Krok 11.
Na levé straně rovnice vytkneme Y_1 a na pravé straně výrazy sečteme

$$Y_2(p+1) = \frac{6p^2 + p - 4 + p^2 + 2p}{(p-1)(p^2 + 2p)} = \frac{7p^2 + 3p - 4}{(p-1)(p^2 + 2p)}.$$

Krok 12.
Vyjádříme $Y_2(p)$:

$$Y_2(p) = \frac{(7p-4)(p+1)}{(p-1)(p^2+2p)} \cdot \frac{1}{p+1} = \frac{7p-4}{p(p-1)(p+2)}$$

Krok 13.
Abychom mohli použít zpětnou Laplaceovu transformaci, musíme rozložit ryze lomenou racionální funkci $Y_2(p)$ na součet parciálních zlomků

$$Y_2(p) = \frac{7p-4}{p(p-1)(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+2}.$$

Krok 14.
Abychom mohli sestavit soustavu algebraických rovnic, musíme provést součet všech jednotlivých zlomků na pravé straně předchozí rovnosti

$$\frac{A(p-1)(p+2) + Bp(p+2) + Cp(p-1)}{p(p-1)(p+2)} = \frac{Ap^2 + Ap - 2A + Bp^2 + 2Bp + Cp^2 - Cp}{p(p-1)(p+2)}.$$

Rovnost se tak upraví na

$$7p - 4 = Ap^2 + Ap - 2A + Bp^2 + 2Bp + Cp^2 - Cp\,.$$

Rovnost dále upravíme tak, že vytkneme jednotlivé mocniny proměnné *p*

$$0p^2 + 7p^1 - 4p^0 = (A + B + C)p^2 + (A + 2B - C)p^1 - 2Ap^0\,.$$

Krok 15.
Nyní porovnáme jednotlivé konstanty lineární kombinace polynomu proměnné *p* na obou stranách předchozí rovnosti. Následně dostáváme soustavu algebraických rovnic pro hledané konstanty:

$$\begin{aligned}
p^2 &: \quad A + B + C = 0\\
p^1 &: \quad A + 2B - C = 7\\
p^0 &: \quad -2A = -4 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{4}{2} = 2
\end{aligned}$$

Kde A vyplívá přímo z rovnice pro p^0, $B = 1$ a $C = -3$.

Obraz řešení je dán součtem tří parciálních zlomků

$$Y_2(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{p-1} - \frac{3}{p+2}\,.$$

Krok 16.
Nyní můžeme provést zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že ke každému parciálnímu zlomku (obrazu) jednotlivých rovností $Y_1(p)$ a $Y_2(p)$ najdeme příslušnou funkci (předmět)

$$y_1(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_1(p)\} = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\} + 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\},$$

$$y_2(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_2(p)\} = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\} - 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\}.$$

Hledané partikulární řešení soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu je

$$y_1(x) = 2 + e^x + 3e^{-2x}, \qquad y_2(x) = 2 + e^x - 3e^{-2x}\,.$$

2.8 Příklad *7*

Určete partikulární řešení soustavy diferenciálních rovnic druhého řádu $\begin{aligned} y_1'' - y_2' &= 0\\ y_1' - y_2'' &= 4\cos x \end{aligned}$,

s počátečními podmínkami $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 4$, $y_1'(0) = 4$ a $y_2'(0) = 0$.

Řešení:

Partikulární řešení soustavy diferenciálních rovnic druhého řádu provedeme v několika následujících krocích.

Krok 1.
Převedeme jednotlivé argumenty rovnic na Laplaceův obraz *Y(p)*

$$\mathcal{L}\{y_1'\} = pY_1 - y_1(0) = pY_1 \quad , \quad \mathcal{L}\{y_1''\} = p^2Y_1 - py_1(0) - y_1'(0) = p^2Y_1 - 4\,,$$

$$\mathcal{L}\{y_2'\} = pY_2 - y_2(0) = pY_2 - 4 \quad , \quad \mathcal{L}\{y_2''\} = p^2Y_2 - py_2(0) - y_2'(0) = p^2Y_2 - 4p$$

$$\mathcal{L}\{\cos x\} = \frac{p}{p^2+1}\,,$$

Příslušná soustava obrazových rovnic po dosazení Laplaceových obrazů jednotlivých argumentů z původní soustavy diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} p^2Y_1 - 4 - (pY_2 - 4) &= 0 \\ pY_1 - (p^2Y_2 - 4p) &= \frac{4p}{p^2+1} \end{aligned}$$

Krok 2.
Upravíme soustavu obrazových rovnic tak, že ponecháme výrazy obsahující *Y* v každé rovnici na levé straně a zbytek převedeme na pravou stranu rovnice. Následně výrazy na pravé straně rovnice sečteme.

$$\begin{aligned} p^2Y_1 - pY_2 &= 4 - 4 = 0 \\ pY_1 - p^2Y_2 &= \frac{4p}{p^2+1} - 4p = \frac{-4p^3}{p^2+1}\,. \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Krok 3.
Dále se budeme snažit odečíst Y_2, tak že první rovnici z předchozí soustavy vynásobíme výrazem -*p* a následně sečteme s druhou rovnicí z předchozí soustavy.

$$-p^3Y_1 + pY_1 = \frac{-4p^3}{p^2+1}\,.$$

Krok 4.
Na levé straně rovnice vytkneme Y_1

$$Y_1 \cdot (p - p^3) = \frac{-4p^3}{p^2+1}\,.$$

Krok 6.
Vyjádříme $Y_1(p)$:

$$Y_1(p) = \frac{-4p^3}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p-p^3} = \frac{-4p^3}{p^2+1} \cdot \frac{1}{(-p)(p^2-1)} = \frac{4p^2}{(p^2+1)(p^2-1)}$$

Krok 7.
Abychom mohli použít zpětnou Laplaceovu transformaci, musíme rozložit ryze lomenou racionální funkci $Y_1(p)$ na součet parciálních zlomků

$$Y_1(p) = \frac{4p^2}{(p^2+1)(p^2-1)} = \frac{Ap+B}{(p^2+1)} + \frac{Cp+D}{(p^2-1)}.$$

Krok 8.
Abychom mohli sestavit soustavu algebraických rovnic, musíme provést součet všech jednotlivých zlomků na pravé straně předchozí rovnosti

$$\frac{(Ap+B)(p^2-1)+(Cp+D)(p^2+1)}{(p^2+1)(p^2-1)} = \frac{Ap^3 - Ap + Bp^2 - B + Cp^3 + Cp + Dp^2 + D}{(p^2+1)(p^2-1)}.$$

Rovnost se tak upraví na

$$4p^2 = Ap^3 - Ap + Bp^2 - B + Cp^3 + Cp + Dp^2 + D.$$

Rovnost dále upravíme tak, že vytkneme jednotlivé mocniny proměnné p

$$0p^3 + 4p^2 + 0p^1 - 0p^0 = (A+C)p^3 + (B+D)p^2 + (-A+C)p^1 + (-B+D)p^0.$$

Krok 9.
Nyní porovnáme jednotlivé konstanty lineární kombinace polynomu proměnné p na obou stranách předchozí rovnosti. Následně dostáváme soustavu algebraických rovnic pro hledané konstanty:

$$\begin{aligned}
p^3 &: \quad A + C = 0 \\
p^2 &: \quad B + D = 4 \\
p^1 &: \quad -A + C = 0 \\
p^0 &: \quad -B + D = 0
\end{aligned}$$

Kde $A = 0$, $B = 2$, $C = 0$, a $D = 2$.

Obraz řešení je dán součtem dvou parciálních zlomků

$$Y_1(p) = \frac{2}{p^2+1} + \frac{2}{p^2-1}.$$

Krok 10.
Dále za Y_1 dosadíme výsledný algebraický výraz do některé obrazové rovnice. Např. do první rovnice ze (2.3). Rovnici však nejdříve upravíme

$$p^2 Y_1 - pY_2 = 0 \qquad , \qquad Y_2 = pY_1 .$$

Nyní můžeme dosadit

$$Y_2 = p\frac{4p^2}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)} = \frac{4p^3}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)} .$$

Krok 11.
Abychom mohli použít zpětnou Laplaceovu transformaci, musíme rozložit ryze lomenou racionální funkci $Y_2(p)$ na součet parciálních zlomků

$$Y_2(p) = \frac{4p^3}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)} = \frac{Ap+B}{\left(p^2+1\right)} + \frac{Cp+D}{\left(p^2-1\right)} .$$

Krok 12.
Abychom mohli sestavit soustavu algebraických rovnic, musíme provést součet všech jednotlivých zlomků na pravé straně předchozí rovnosti

$$\frac{(Ap+B)\left(p^2-1\right)+(Cp+D)\left(p^2+1\right)}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)} = \frac{Ap^3 - Ap + Bp^2 - B + Cp^3 + Cp + Dp^2 + D}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)} .$$

Rovnost se tak upraví na

$$4p^3 = Ap^3 - Ap + Bp^2 - B + Cp^3 + Cp + Dp^2 + D .$$

Rovnost dále upravíme tak, že vytkneme jednotlivé mocniny proměnné p

$$4p^3 + 0p^2 + 0p^1 - 0p^0 = (A+C)p^3 + (B+D)p^2 + (-A+C)p^1 + (-B+D)p^0 .$$

Krok 13.
Nyní porovnáme jednotlivé konstanty lineární kombinace polynomu proměnné p na obou stranách předchozí rovnosti. Následně dostáváme soustavu algebraických rovnic pro hledané konstanty:

$$\begin{aligned} p^3 &: \quad A + C = 4 \\ p^2 &: \quad B + D = 0 \\ p^1 &: \quad -A + C = 0 \\ p^0 &: \quad -B + D = 0 \end{aligned}$$

Kde $A = 2$, $B = 0$, $C = 2$, a $D = 0$.

Obraz řešení je dán součtem dvou parciálních zlomků

$$Y_1(p) = \frac{2p}{p^2+1} + \frac{2p}{p^2-1}.$$

Krok 16.
Nyní můžeme provést zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že ke každému parciálnímu zlomku (obrazu) jednotlivých rovností $Y_1(p)$ a $Y_2(p)$ najdeme příslušnou funkci (předmět)

$$y_1(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_1(p)\} = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\} + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2-1}\right\},$$

$$y_2(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_1(p)\} = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+1}\right\} + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2-1}\right\}.$$

Hledané partikulární řešení soustavy diferenciálních rovnic druhého řádu je

$$y_1(x) = 2\sin x + 2\sinh x \quad , \quad y_2(x) = 2\cos x + 2\cosh x.$$

2.9 Příklad 8

Určete partikulární řešení integrální rovnice $2y + \int_0^x y(u)du = 3xe^{-x}$.

Řešení:

Partikulární řešení integrální rovnice provedeme v několika následujících krocích.

Krok 1.
Převedeme jednotlivé argumenty rovnice na Laplaceův obraz *Y(p)*

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{p} \quad , \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^x y(u)du\right\} = \frac{Y}{p} \quad , \quad \mathcal{L}\{xe^{-x}\} = \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Příslušná obrazová rovnice po dosazení Laplaceových obrazů jednotlivých argumentů z původní integrální rovnice:

$$2Y + \frac{Y}{p} = \frac{3}{(p+1)^2}$$

Krok 2.
Na levé straně obrazové rovnice vytkneme *Y*

$$Y \cdot \left(2 + \frac{1}{p}\right) = \frac{3}{(p+1)^2},$$

$$Y \cdot \left(\frac{2p+1}{p} \right) = \frac{3}{(p+1)^2} .$$

Krok 3.
Vyjádříme *Y(p)* :

$$Y(p) = \frac{3p}{(p+1)^2 (2p+1)}$$

Krok 4.
Abychom mohli použít zpětnou Laplaceovu transformaci, musíme rozložit ryze lomenou racionální funkci *Y(p)* na součet parciálních zlomků

$$\frac{3p}{(p+1)^2 (2p+1)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{2C}{2p+1} .$$

Krok 5.
Abychom mohli sestavit soustavu algebraických rovnic, musíme provést součet všech jednotlivých zlomků na pravé straně předchozí rovnosti

$$\frac{A(p+1)(2p+1) + B(2p+1) + C(p+1)^2}{(p+1)^2 (2p+1)} = \frac{2Ap^2 + 3Ap + A + 2Bp + B + Cp^2 + 2Cp + C}{(p+1)^2 (2p+1)} .$$

Rovnost se tak upraví na

$$3p = 2Ap^2 + 3Ap + A + 2Bp + B + Cp^2 + 2Cp + C .$$

Rovnost dále upravíme tak, že vytkneme jednotlivé mocniny proměnné *p*

$$0p^2 + 3p^1 + 0p^0 = (2A + C)p^2 + (3A + 2B + 2C)p^1 + (A + B + C)p^0 .$$

Krok 7.
Nyní porovnáme jednotlivé konstanty lineární kombinace polynomu proměnné *p* na obou stranách předchozí rovnosti. Následně dostáváme soustavu algebraických rovnic pro hledané konstanty:

$$\begin{aligned} p^2 &: \quad 2A + C = 0 \\ p^1 &: \quad 3A + 2B + 2C = 3 \\ p^0 &: \quad A + B + C = 0 \end{aligned}$$

Kde $A = 3$, $B = 3$ a $C = -6$.

Obraz řešení je dán součtem tří parciálních zlomků

$$Y(p) = \frac{3}{p+1} + \frac{3}{(p+1)^2} - \frac{6 \cdot 2}{2p+1}.$$

Krok 8.
Nyní můžeme provést zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že ke každému parciálnímu zlomku (obrazu) najdeme příslušnou funkci (předmět)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(p)\right\} = 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} + 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^2}\right\} - 6\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{2p+1}\right\}.$$

Hledané partikulární řešení integrální rovnice je

$$y(x) = 3e^{-x} + 3xe^{-x} - 6e^{\frac{-x}{2}}.$$

2.10 Příklad 9

Určete partikulární řešení integrodiferenciální rovnice prvního řádu $y' + 2y + 2\int_0^x y(u)du = e^{-x}$, s počáteční podmínkou $y(0) = 0$.

Řešení:

Partikulární řešení integrodiferenciální rovnice prvního řádu provedeme v několika následujících krocích.

Krok 1.
Převedeme jednotlivé argumenty rovnice na Laplaceův obraz *Y(p)*

$$\mathcal{L}\left\{y\right\} = \frac{1}{p} \quad , \qquad \mathcal{L}\left\{y'\right\} = pY - y(0) = pY \quad , \qquad \mathcal{L}\left\{\int_0^x y(u)du\right\} = \frac{Y}{p},$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{-x}\right\} = \frac{1}{p+1}.$$

Příslušná obrazová rovnice po dosazení Laplaceových obrazů jednotlivých argumentů z původní integrodiferenciální rovnice:

$$pY + 2Y + \frac{2Y}{p} = \frac{1}{p+1}$$

Krok 2.
Na levé straně obrazové rovnice vytkneme *Y*

$$Y \cdot \left(p + 2 + \frac{2}{p} \right) = \frac{1}{p+1},$$

$$Y \cdot \left(\frac{p^2 + 2p + 2}{p} \right) = \frac{1}{p+1}.$$

Krok 3.
Vyjádříme *Y(p)* :

$$Y(p) = \frac{p}{(p+1)\left(p^2 + 2p + 2\right)} = \frac{p}{(p+1)\left[(p+1)^2 + 1\right]}$$

Krok 4.
Abychom mohli použít zpětnou Laplaceovu transformaci, musíme rozložit ryze lomenou racionální funkci *Y(p)* na součet parciálních zlomků

$$\frac{p}{(p+1)\left[(p+1)^2 + 1\right]} = \frac{A}{p+1} + \frac{B(p+1) + C}{(p+1)^2 + 1}.$$

Krok 5.
Abychom mohli sestavit soustavu algebraických rovnic, musíme provést součet všech jednotlivých zlomků na pravé straně předchozí rovnosti

$$\frac{A\left[(p+1)^2 + 1\right] + B(p+1)}{(p+1)\left[(p+1)^2 + 1\right]} = \frac{2Ap^2 + 2Ap + 2A + Bp^2 + 2Bp + 2B + Cp^2 + Cp + C}{(p+1)\left[(p+1)^2 + 1\right]}.$$

Rovnost se tak upraví na

$$p = 2Ap^2 + 2Ap + 2A + Bp^2 + 2Bp + 2B + Cp^2 + Cp + C.$$

Rovnost dále upravíme tak, že vytkneme jednotlivé mocniny proměnné p

$$0p^2 + 1p^1 + 0p^0 = (A+B)p^2 + (2A + 2B + C)p^1 + (2A + 2B + C)p^0.$$

Krok 7.
Nyní porovnáme jednotlivé konstanty lineární kombinace polynomu proměnné p na obou stranách předchozí rovnosti. Následně dostáváme soustavu algebraických rovnic pro hledané konstanty:

$$\begin{aligned} p^2 &: \quad A + B = 0 \\ p^1 &: \quad 2A + 2B + C = 1 \\ p^0 &: \quad 2A + B + C = 0 \end{aligned}$$

Kde $A = -1$, $B = 1$ a $C = 1$.

Obraz řešení je dán součtem tří parciálních zlomků

$$Y(p) = \frac{-1}{p+1} + \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2+1}.$$

Krok 8.
Nyní můžeme provést zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že ke každému parciálnímu zlomku (obrazu) najdeme příslušnou funkci (předmět)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(p)\right\} = -\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+1}{(p+1)^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^2+1}\right\}.$$

Hledané partikulární řešení integrodiferenciální rovnice prvního řádu je

$$y(x) = -e^{-x} + e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x = e^{-x}\cdot(\cos x + \sin x - 1).$$

2.11 Příklad 10

Určete partikulární řešení integrodiferenciální rovnice druhého řádu $y'' + y = \sin x + \int_0^x \sin(x-u)y(u)du$, s počátečními podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$.

Řešení:

Partikulární řešení integrální rovnice provedeme v několika následujících krocích.

Krok 1.
Převedeme jednotlivé argumenty rovnice na Laplaceův obraz *Y(p)*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x \sin(x-u)y(u)du\right\} = \mathcal{L}\left\{y(x)\cdot\sin x\right\} = \mathcal{L}\left\{y(x)\right\}\cdot\mathcal{L}\left\{\sin x\right\} = Y\cdot\frac{1}{p^2+1}, \qquad \mathcal{L}\left\{y\right\} = Y,$$

$$\mathcal{L}\left\{y''\right\} = p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - 1, \qquad \mathcal{L}\left\{\sin x\right\} = \frac{1}{p^2+1}.$$

Příslušná obrazová rovnice po dosazení Laplaceových obrazů jednotlivých argumentů z původní integrodiferenciální rovnice druhého řádu:

$$p^2Y - 1 + Y = \frac{1}{p^2+1} + \frac{Yp}{p^2+1}$$

Krok 2.
Upravíme obrazovou rovnici tak, že převedeme výrazy s *Y* na levou stranu rovnice a zbytek převedeme na pravou stranu rovnice

$$p^2Y + Y - \frac{Yp}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1} + 1\,.$$

Krok 3.
Na levé straně rovnice vytkneme *Y* a na pravé straně výrazy sečteme

$$Y \cdot \left(p^2 + 1 - \frac{1}{p^2+1} \right) = \frac{p^2+2}{p^2+1}\,,$$

$$Y \cdot \left(\frac{p^2\left(p^2+1\right) + p^2}{p^2+1} \right) = \frac{p^2+2}{p^2+1}$$

Krok 4.
Vyjádříme *Y(p)* :

$$Y(p) = \frac{p^2+2}{p^2+1} \cdot \frac{p^2+1}{p^4+2p^2} = \frac{p^2+2}{p^2\left(p^2+2\right)} = \frac{1}{p^2}$$

Krok 5.
Nyní můžeme provést zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že ke každému parciálnímu zlomku (obrazu) najdeme příslušnou funkci (předmět)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\}.$$

Hledané partikulární řešení integrodiferenciální rovnice druhého řádu je

$$y(x) = x\,.$$

2.12 Aplikace Laplaceovy transformace k řešení elektrických obvodů

Omezíme se pouze na lineární elektrické obvody, kde jsou základními členy ideální rezistory, kondenzátory a cívky. Každý z těchto členů je charakterizován jedním kladným parametrem:

- ***R*** je ohmický odpor $[\Omega]$,
- ***C*** je kapacita $[F]$,
- ***L*** je vlastní indukčnost $[H]$.

Budeme se zabývat pouze obvody, kde tyto parametry nezávisí na čase. Předpokládejme, že proud a napětí nejsou všude stejné. Potom můžeme tvrdit, že zmiňované veličiny jsou funkcí času. Takováto zapojení nazýváme obvody se soustředěnými parametry. Jednotlivé obvodové elementy (členy) jsou navzájem propojeny ideálními vodiči a připojeny ke zdroji elektrické energie. Naším úkolem bude najít proudy, které protékají určitými elementy nebo napětí mezi jednotlivými body obvodu. Tyto obvody popisují obyčejné diferenciální rovnice a jak již bylo řečeno v předchozích kapitolách, jejich řešení by bylo příliš složité. Z tohoto důvodu použijeme Laplaceovu transformaci. Obrazem soustavy rovnic popisujících elektrický obvod je soustava algebraických rovnic. Tyto algebraické rovnice zahrnují obrazy proudu nebo napětí, které obsahují počáteční podmínky proudu, popř. napětí.

Na nejjednodušší elektrický obvod o jediném elementu připojíme napětí *u(t)* a bude jím protékat proud *i(t)*. Pak můžeme uvažovat platnost vztahů:

- na rezistoru o ohmickém odporu *R*: $i(t) = \dfrac{u(t)}{R}$, neboli $u(t) = Ri(t)$,
- na kondenzátoru o kapacitě *C*: $i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt}$, neboli $u(t) = \dfrac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + u(t_0)$,
- na cívce o vlastní indukčnosti *L*: $i(t) = \dfrac{1}{L}\int_0^t u(\tau)d\tau + i(t_0)$, neboli $u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$,

kde $i(t_0)$, $u(t_0)$ jsou počáteční hodnoty proudu a napětí. Jestliže je v obvodu zapojen pouze rezistor, počáteční podmínky ve vztahu nejsou.
Dále označíme $\mathcal{L}\{i(t)\} = I(p)$, $\mathcal{L}\{u(t)\} = U(p)$ a z předchozích rovnic dostaneme následující vztahy:

- na rezistoru: $I(p) = \dfrac{U(p)}{R}$, neboli $U(p) = RI(p)$,
- na kondenzátoru: $I(p) = CpI(p) - Ci(t_0)$, neboli $U(p) = \dfrac{I(p)}{Cp} + \dfrac{u(t_0)}{p}$,
- na cívce: $I(p) = \dfrac{U(p)}{Lp} + \dfrac{i(t_0)}{p}$, neboli $U(p) = LpI(p) - Li(t_0)$.

Uvedené vztahy můžeme napsat ve společném tvaru

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} \qquad ; \qquad U(p) = I(p)Z(p),$$

kde *Z(p)* je obrazová impedance elektrického obvodu.

Nyní vyjádříme obrazovou impedanci pro jednotlivé obvodové elementy:

- na rezistoru: $Z_R = R$,
- na kondenzátoru: $Z_C = \dfrac{1}{Cp}$,

- na cívce: $Z_L = Lp$.

Sériové zapojení více obvodových elementů

Jestliže zapojíme do série (za sebou) více obvodových elementů, bude součet napětí na jednotlivých elementech roven přivedenému napětí na vstupní svorky obvodu. Z věty 1.2 plyne, že pro obraz napětí to platí také.

$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = Z_1 I + Z_2 I + \ldots + Z_n I = (Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n) I = ZI$$

Neboli konečný počet obrazových impedancí zapojených do série se chová jako jeden element.

Paralelní zapojení více obvodových elementů

U paralelního zapojení platí vztahy:

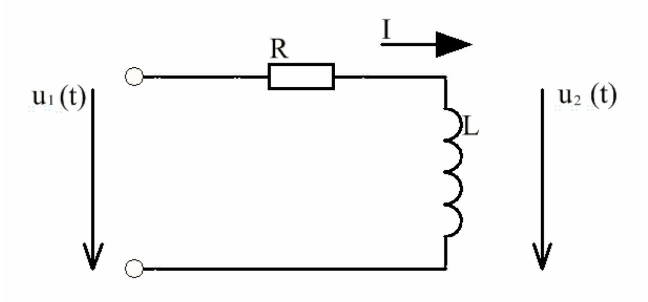
$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n, \quad \text{kde } I_1 = \frac{U}{Z_1},\ I_2 = \frac{U}{Z_2},\ I_n = \frac{U}{Z_n},$$

$$U = Z_1 I_1 = Z_2 I_2 = \ldots = Z_n I_n \qquad ; \qquad I = U\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots \frac{1}{Z_n}\right).$$

Uvedené vztahy jak pro sériové tak i pro paralelní zapojení, platí pouze za nulových počátečních podmínek.

2.13 Příklad 11.

Nechť je na vstupní svorky lineárního elektrického obvodu (obr.1) za nulových počátečních podmínek přivedeno napětí $u_1(t) = U_1 = konst$ pro $t \geq 0$. Pro $t < 0$ je napětí $u_1(t) = 0$. Určeme průběh napětí $u_2(t)$ na cívce L.



Obrázek 2.1 -Př. zadání elektrického obvodu

Řešení:

Řešení provedeme v několika následujících krocích.

Krok 1.
Vyjádříme obrazové napětí *U(p)* na jednotlivých obvodových elementech.

- na vstupních svorkách: $U(p) = U_1\ \mathcal{L}\ \{1\} = \dfrac{U_1}{p}$,
- na rezistoru: $U(p) = R\ \mathcal{L}\ \{i(t)\} = RI(p)$,
- na cívce: $U(p) = L\ \mathcal{L}\ \{i(t)\} = LpI(p) - Li(t_0) = LpI(p) - 0 = LpI(p)$.

Krok 2.
Stanovíme celkovou obrazovou impedanci obvodu

$$Z(p) = Z_R + Z_L = R + Lp\ .$$

Krok 3.
Abychom mohli stanovit obrazové napětí $U_2(p)$, musíme nejprve vyjádřit obrazový proud *I(p)* obvodem

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{U_1}{p\left(R + Lp\right)}\ .$$

Krok 4.
Nyní můžeme určit obrazové napětí $U_2(p)$

$$U_2(p) = \mathcal{L}\ \{u_2(t)\} = I(p)Z_L = \frac{pU_1L}{p\left(R + Lp\right)} = \frac{U_1L}{R + Lp} = \frac{U_1L}{L\left(p + \dfrac{R}{L}\right)} = \frac{U_1}{p + \dfrac{R}{L}}\ .$$

Krok 5.
Dále provedeme zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že k danému obrazu napětí $U_2(p)$ najdeme příslušnou časovou funkci.

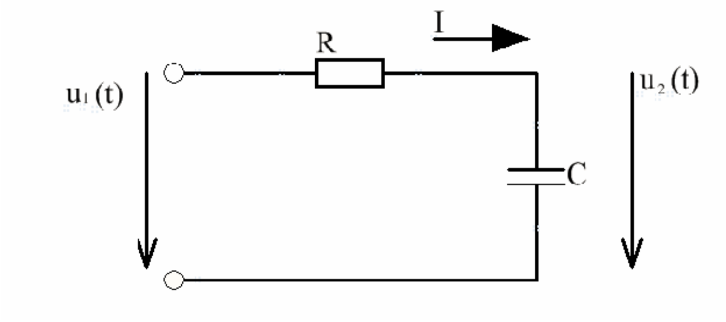
$$u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\ \{U_2(p)\} = U_1\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p + \dfrac{R}{L}}\right\}.$$

Hledaný časový průběh napětí $u_2(t)$ je

$$u_2(t) = U_1\, e^{-\frac{R}{L}t}\ .$$

2.14 Příklad 12.

Nechť je na vstupní svorky lineárního elektrického obvodu (obr.2) za nulových počátečních podmínek přivedeno napětí $u_1(t) = U_1 \cdot t$ pro $t \geq 0$. Pro $t < 0$ je napětí $u_1(t) = 0$. Určeme průběh proudu *i(t)* na kondenzátoru *C*.



Obrázek 2.2 -Př2. Zadání elektrického obvodu

Řešení:

Řešení provedeme v několika následujících krocích.

Krok 1.
Vyjádříme obrazové napětí *U(p)* na vstupních svorkách obvodu

$$U(p) = U_1 \,\mathcal{L}\{t\} = \frac{U_1}{p^2}.$$

Krok 2.
Stanovíme celkovou obrazovou impedanci obvodu

$$Z(p) = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{Cp} = \frac{RCp + 1}{Cp}.$$

Krok 3.
Nyní můžeme určit obrazový proud *I(p)*

$$I(p) = \mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{U_1}{p^2}\frac{Cp}{RCp+1} = \frac{U_1 C}{RCp\left(p + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{U_1}{R}\frac{1}{p\left(p + \frac{1}{RC}\right)}.$$

Krok 4.
Dále provedeme rozklad obrazu proudu *I(p)* na součet parciálních zlomků. Rozklad zapíšeme do následujícího tvaru

$$I(p) = \frac{U_1}{R}\frac{1}{p\left(p + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{1}{RC}}.$$

Krok 5.

Abychom mohli sestavit soustavu algebraických rovnic, musíme provést součet všech jednotlivých zlomků na pravé straně předchozí rovnosti

$$\frac{A\left(p+\frac{1}{RC}\right)+Bp}{p\left(p+\frac{1}{RC}\right)}=\frac{Ap+\frac{A}{RC}+Bp}{p\left(p+\frac{1}{RC}\right)},$$

rovnost se tak upraví na

$$\frac{U_1}{R}=Ap+\frac{A}{RC}+Bp\,.$$

Rovnost dále upravíme tak, že osamostatníme jednotlivé mocniny proměnné *p*

$$0p^1+\frac{U_1}{R}p^0=\left(A+b\right)p^1+\frac{A}{RC}p^0\,.$$

Krok 6.

Nyní porovnáme jednotlivé konstanty lineární kombinace polynomu proměnné *p* na obou stranách předchozí rovnosti. Následně dostáváme soustavu algebraických rovnic pro hledané konstanty:

$$\begin{aligned}
p^1:&\quad A+b=0 &&\Rightarrow B=-A=-U_1C\\
p^0:&\quad \frac{A}{RC}=\frac{U_1}{R} &&\Rightarrow A=\frac{U_1}{R}RC=U_1C
\end{aligned}$$

Obraz řešení je dán součtem dvou parciálních zlomků

$$I(p)=\frac{U_1C}{p}-\frac{U_1C}{p+\frac{1}{RC}}\,.$$

Krok 7.

Dále provedeme zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že ke každému obrazu proudu *I(p)* najdeme příslušnou časovou funkci. A součet těchto obrazů je hledaný časový průběh proudu *i(t)*

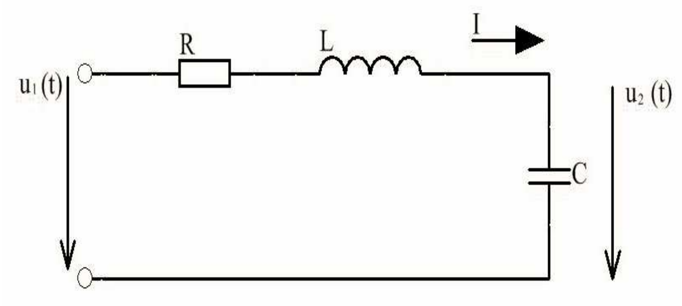
$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{I(p)\right\}=U_1C\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\}-U_1C\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+\frac{1}{RC}}\right\},$$

Hledaný časový průběh proudu $i(t)$ je

$$i(t) = U_1 C - U_1 C\, e^{\frac{-t}{RC}} = U_1 C\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right).$$

2.15 Příklad 13.

Nechť je na vstupní svorky lineárního elektrického obvodu (obr.3) za nulových počátečních podmínek přivedeno napětí $u_1(t) = U_1 = konst$ pro $t \geq 0$. Pro $t < 0$ je napětí $u_1(t) = 0$. Určeme průběh proudu *i(t)* na rezistoru *R*.



Obrázek 2.3 -Př3. Zadání elektrického obvodu

Řešení:

Řešení provedeme v několika následujících krocích.

Krok 1.
Vyjádříme obrazové napětí *U(p)* na vstupních svorkách obvodu

$$U(p) = U_1\, \mathcal{L}\{1\} = \frac{U_1}{p}.$$

Krok 2.
Stanovíme celkovou obrazovou impedanci obvodu

$$Z(p) = Z_C + Z_L + Z_R = \frac{1}{Cp} + Lp + R = \frac{RCp + 1 + LCp^2}{Cp}.$$

Krok 3.
Nyní můžeme určit obrazový proud *I(p)*

$$I(p) = \mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{U_1(p)}{Z(p)} =$$

$$= \frac{U_1}{p} \cdot \frac{Cp}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{U_1 C}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{U_1 C}{C\left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)} = \frac{U_1}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}.$$

Krok 4.
Abychom mohli použít zpětnou Laplaceovu transformaci, musíme určit kořenové činitele p_1, p_2 kvadratické rovnice jmenovatele na pravé straně předchozí rovnosti

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = L(p - p_1)(p - p_2),$$

kde p_1, p_2 určíme ze známého vzorce pro kvadratickou rovnici

$$p_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}.$$

Pro p_1 platí: $p_1 = \dfrac{-R + \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} = \dfrac{-R}{2L} + \sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2} - \dfrac{4L}{4L^2C}} = \dfrac{-R}{2L} + \sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 - \dfrac{1}{LC}}$.

Pro p_2 platí: $p_2 = \dfrac{-R - \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} = \dfrac{-R}{2L} - \sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2} - \dfrac{4L}{4L^2C}} = \dfrac{-R}{2L} + \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}$.

Obraz řešení je dán součtem dvou parciálních zlomků

$$I(p) = \frac{U_1}{L(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{U_1}{L}\frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)}.$$

Krok 5.
Dále provedeme zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že k danému obrazu proudu *I(p)* najdeme příslušnou časovou funkci.

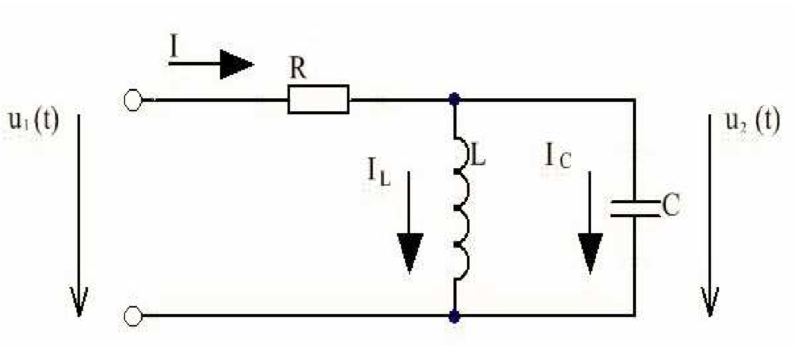
$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(p)\} = \frac{U_1}{L}\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)}\right\}.$$

Hledaný časový průběh proudu $i(t)$ je

$$\frac{U_1}{L}\frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} = \frac{U_1}{L(p_1 - p_2)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right).$$

2.16 Příklad 14.

Nechť je na vstupní svorky lineárního elektrického obvodu (obr.4) za nulových počátečních podmínek přivedeno napětí $u_1(t) = U_1 = konst$ pro $t \geq 0$. Pro $t < 0$ je napětí $u_1(t) = 0$. Určeme průběh napětí $u_2(t)$ na kondenzátoru *C*.



Obrázek 2.4 -Př4. Zadání elektrického obvodu

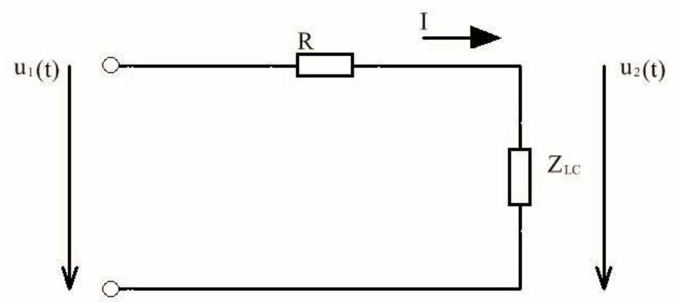
Řešení:

Řešení provedeme v několika následujících krocích.

Krok 1.
Vyjádříme obrazové napětí *U(p)* na vstupních svorkách obvodu

$$U(p) = U_1 \mathcal{L}\{1\} = \frac{U_1}{p} .$$

Krok 2.
Obvod na (obr.4) překreslíme do následujícího zapojení (obr.5). Dále vyjádříme obrazovou impedanci $Z_{LC}(p)$ dvou paralelně navzájem zapojených elementů *L* a *C*



Obrázek 2.5 -Př4. Náhradní zapojení obvodu

$$\frac{1}{Z_{LC}(p)} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{Lp} + Cp = \frac{1 + LCp^2}{Lp} \quad \Rightarrow \quad Z_{LC}(p) = \frac{Lp}{1 + LCp^2} .$$

Krok 3.
Stanovíme celkovou obrazovou impedanci obvodu

$$Z(p) = Z_R + Z_{LC} = R + \frac{pL}{1 + LCp^2} = \frac{R\left(1 + LCp^2\right) + pL}{1 + LCp^2} = \frac{LCRp^2 + Lp + R}{1 + LCp^2} .$$

Krok 4.
Vyjádříme obrazový proud *I(p)*:

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{U_1}{p} \cdot \frac{1 + LCp^2}{LCRp^2 + Lp + R}$$

Krok 5.
Nyní můžeme určit obrazové napětí $U_2(p)$

$$U_2(p) = \mathcal{L}\{u_2(t)\} = I(p) \cdot Z_{LC} = \frac{U_1}{p} \cdot \frac{1 + LCp^2}{LCRp^2 + Lp + R} \cdot \frac{Lp}{1 + LCp^2} = \frac{U_1 L}{LCRp^2 + Lp + R} =$$

$$= \frac{U_1 L}{L\left(CRp^2 + p + \frac{R}{L}\right)} = \frac{U_1}{RCp^2 + p + \frac{R}{L}}.$$

Krok 6.
Abychom mohli použít zpětnou Laplaceovu transformaci, musíme určit kořenové činitele p_1, p_2 kvadratické rovnice jmenovatele na pravé straně předchozí rovnosti

$$RCp^2 + p + \frac{R}{L} = RC(p - p_1)(p - p_2),$$

kde p_1, p_2 určíme ze známého vzorce pro kvadratickou rovnici

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4R^2C}{L}}}{2RC}.$$

Pro p_1 platí:

$$p_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{4R^2C}{L}}}{2RC} = \frac{-1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{4R^2C}{4R^2C^2L}} = \frac{-1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Pro p_2 platí:

$$p_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \frac{4R^2C}{L}}}{2RC} = \frac{-1}{2RC} - \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{4R^2C}{4R^2C^2L}} = \frac{-1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$$

Obraz řešení je dán součtem dvou parciálních zlomků

$$U_2(p) = \frac{U_1}{RC(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{U_1}{RC} \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)}.$$

Krok 7.
Dále provedeme zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že k danému obrazu napětí $U_2(p)$ najdeme příslušnou časovou funkci.

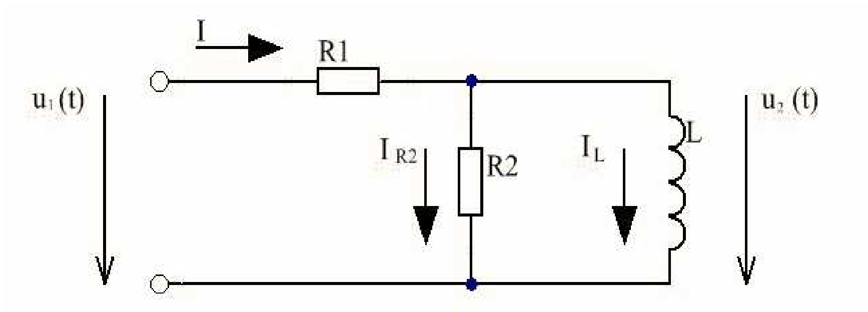
$$u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(p)\} = \frac{U_1}{RC}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)}\right\}$$

Hledaný časový průběh napětí $u_2(t)$ je

$$u_2(t) = \frac{U_1}{RC}\cdot\frac{e^{p_1 t}-e^{p_2 t}}{p_1-p_2} = \frac{U_1}{RC(p_1-p_2)}\left(e^{p_1 t}-e^{p_2 t}\right).$$

2.17 Příklad 15.

Nechť je na vstupní svorky lineárního elektrického obvodu (obr.6) za nulových počátečních podmínek přivedeno napětí $u_1(t) = U_1 = konst$ pro $t \geq 0$. Pro $t < 0$ je napětí $u_1(t) = 0$. Určeme průběh napětí $u_2(t)$ na cívce L.



Obrázek 2.6 -Př5. Zadání elektrického obvodu

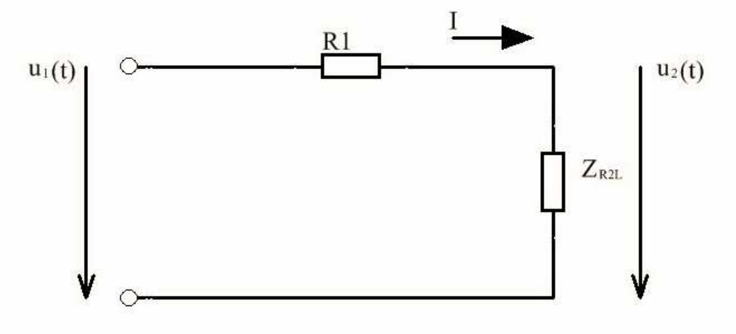
Řešení:

Řešení provedeme v několika následujících krocích.

Krok 1.
Vyjádříme obrazové napětí *U(p)* na vstupních svorkách obvodu

$$U(p) = U_1\,\mathcal{L}\{1\} = \frac{U_1}{p}.$$

Krok 2.
Obvod na (obr.6) překreslíme do následujícího zapojení (obr.7). Dále vyjádříme obrazovou impedanci $Z_{R_2L}(p)$ dvou paralelně navzájem zapojených elementů R_2 a L



Obrázek 2.7 -Př5. Náhradní zapojení obvodu

$$\frac{1}{Z_{R_2L}(p)} = \frac{1}{Z_{R_2}} + \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{Lp} = \frac{Lp + R_2}{R_2 Lp} \quad \Rightarrow \quad Z_{RL}(p) = \frac{R_2 Lp}{R_2 + Lp} .$$

Krok 3.
Stanovíme celkovou obrazovou impedanci obvodu

$$Z(p) = Z_{R_1} + Z_{R_2L} = R_1 + \frac{R_2 Lp}{R_2 + Lp} = \frac{R_1(R_2 + Lp) + R_2 Lp}{R_2 + Lp} .$$

Krok 4.
Vyjádříme obrazový proud *I(p)*:

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{U_1}{p} \cdot \frac{R_2 + Lp}{R_1(R_2 + Lp) + R_2 Lp}$$

Krok 5.
Nyní můžeme určit obrazové napětí $U_2(p)$

$$U_2(p) = \mathcal{L}\{u_2(t)\} = I(p) \cdot Z_{RL} =$$

$$= \frac{U_1}{p} \cdot \frac{R_2 + Lp}{R_1(R_2 + Lp) + R_2 Lp} \cdot \frac{R_2 Lp}{R_2 + Lp} = \frac{U_1}{p} \cdot \frac{R_2 Lp}{R_1 R_2 + R_1 Lp + R_2 Lp} =$$

$$= \frac{U_1}{p} \cdot \frac{R_2 Lp}{L\left(\frac{R_1 R_2}{L} + R_1 p + R_2 p\right)} = \frac{U_1 R_2}{\frac{R_1 R_2}{L} + p(R_1 + R_2)} \cdot \frac{\frac{1}{R_1 + R_2}}{\frac{1}{R_1 + R_2}} =$$

$$= \frac{\frac{U_1 R_2}{R_1 + R_2}}{p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}} = \frac{U_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{p + \frac{R_1 R_2}{LR_1 + LR_2}} .$$

Krok 6.

Dále provedeme zpětnou Laplaceovu transformaci tak, že k danému obrazu napětí *U(p)* najdeme příslušnou časovou funkci

$$u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(p)\} = \frac{U_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p + \frac{R_1 R_2}{LR_1 + LR_2}}\right\}.$$

Hledaný časový průběh napětí $u_2(t)$ je

$$u_2(t) = \frac{U_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot e^{\frac{-R_1 R_2}{LR_1 + LR_2} t}.$$

Pro zachování velikosti daného rozsahu bakalářské práce, zde sbírka příkladů končí. Zbylé příklady z funkčních rovnic a elektrických obvodů jsou realizovány pomocí softwarové aplikace (viz Příloha A a B).

Závěr

Vypracovaná bakalářská práce shrnuje základní poznatky o Laplaceově transformaci. Práce je částečně zaměřena na aplikaci Laplaceovy transformace k analýze lineárních elektrických obvodů. Aplikací Laplaceovy transformace jsme schopni určit časový průběh napětí mezi dvěmi body elektrického obvodu nebo proudu jednotlivým obvodovým elementem. Nevýhodou Laplaceovy transformace je složitost řešení elektrických obvodů, kde parametry jednotlivých obvodových elementů závisí na čase, což je důsledkem absence názorné úlohy ve sbírce příkladů. V rozsahu bakalářské práce nebylo možné zabývat se všemi oblastmi, ve kterých se využívá Laplaceova transformace. Pozornost byla kladena na řešení různých funkčních rovnic, což je využitelné pro studenty předmětu Matematika 3.

Nejvýznamnější částí je ovšem vypracovaná sbírka příkladů s podrobným postupem řešení diferenciálních rovnic a jejich soustav, rovnic integrálních nebo integrodiferenciálních i lineárních elektrických obvodů Laplaceovou transformací. Sbírka obsahuje celkem patnáct úloh, které jsou rozděleny na dvě části. První část sbírky se věnuje úlohám z oblasti funkčních rovnic a druhá část je zaměřena na řešení lineárních elektrických obvodů. Převodem jednotlivých argumentů zadané funkční rovnice na Laplaceův obraz, přináší výhodnost jednoduššího řešení v podobě algebraické rovnice. Po vyjádření hledané funkce v obraze se stačí vrátit k původní hledané funkci zpětnou Laplaceovou transformací, což je výsledkem každé úlohy. Na závěr sbírky je uvedeno pět úloh s příslušnou teorií z aplikace Laplaceovy transformace k řešení lineárních elektrických obvodů. V každé úloze je zadán elektrický obvod, kde je známo vstupní napětí a hledanou funkcí je časový průběh výstupního napětí nebo proudu jednotlivým obvodovým elementem. Pro zachování velikosti rozsahu bakalářské práce neobsahuje sbírka příkladů kompletní počet úloh, kde zbylé úlohy jsou uvedeny v elektronické učební opoře, která obsahuje celkem pětadvacet příkladů.

Celkovým výsledkem bakalářské práce je kromě vlastního textu elektronická učební opora, která by měla mít za úkol pomoci při studiu této látky.

Literatura

A.I.F. Associazione per l'Insegnamento della Fisica. [Online] [Citace: 10.7. 2013] http://www.aif.it/index.php?FISICI_9/fisico12.htm

Častová, N., Kozubek, T.: Integrální transformace. [Online] [Citace: 18.7. 2013] http://hpc.vsb.cz/studium/integralni_transformace/

Dĕmidovič, B., P.: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment 2003.

Seibert, J. 1997. *Matematika III***.** Pardubice : Univerzita Pardubice, 1997. ISBN 987-80-7194-930-5.

Příloha A – Popis realizace elektronické učební opory

K tvorbě webové stránky jsem zvolil jazyk HTML, zejména pro jednoduchost řešení. Webová stránka obsahuje úlohy z obou částí sbírky příkladů, kde jsou jednotlivé příklady rozděleny do sloupců z důvodu lepší přehlednosti. Řešení jednotlivých příkladů je možné postupně odkrývat nebo se odkázat na určitou nápovědu (např. Slovník Laplaceovy transformace). Jednotlivé webové stránky se skládají ze souboru HTML a obrázků rovnic, rovností nebo obvodů ve formátu PNG. Tyto obrázky byly pořízeny snímkem obrazovky z editoru rovnic programu Microsoft Word. V HTML souboru je definována struktura webové stránky pomocí HTML tagů (např. pro obrázek – img, pro text - p a pro odkaz - a). Nevýhodou tohoto řešení je složitější správa a přidávání nových příkladů, což v podstatě nebudeme využívat.

Příloha B – Zdrojový kód souboru HTML – Příklad 2

```
<!DOCTYPE html>
<html>
<body>

<div id="hlavicka">
<h1>Sbírka příkladů z Laplaceovy transformace</h1>
</div>

<div id="telo"><!-- Zacatek DIVu telo-->
	<h2>2. Příklad</h2>
	<p>Určete partikulární řešení diferenciální rovnice druhého řádu</p>
	<img src="zadani1.png">
	<p>s počátečními podmínkami</p>
	<img src="zadani1a.png">

<div id="menu_prikladu"><!-- Zacatek DIVu menu_prikladu-->
	<a href="../../../teorie/slovnik.png">Pomůcka</a>
	<a href="napoveda11.html">Nápověda</a>
	<a href="vysledek1.html">Výsledek</a>
</div><!-- Konec DIVu menu_prikladu-->

</div><!-- Konec DIVu telo-->

</body>
</html>
```