

**Univerzita Pardubice**  
**Fakulta ekonomicko-správní**  
**Ústav systémového inženýrství a informatiky**

**Využití Box-Jenkinsových modelů v investičním životním  
pojištění**

**Bc. Milada Librová**

**Diplomová práce**  
**2012**

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Milada Librová**  
Osobní číslo: **E10264**  
Studijní program: **N6209 Systémové inženýrství a informatika**  
Studijní obor: **Pojistné inženýrství**  
Název tématu: **Využití Box-Jenkinsových modelů v investičním životním pojištění**  
Zadávací katedra: **Ústav systémového inženýrství a informatiky**

### Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Charakterizace Box-Jenkinsovy metodologie zpracování časových řad.
2. Zhodnocení současného stavu v oblasti investičního životního pojištění.
3. Volba vhodného modelu Box-Jenkinsovy metodologie a aplikace na modelování vývoje cen investičních fondů.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

**ARLT, J., ARLTOVÁ, M.** *Finanční časové řady*. 1. vyd. Praha: Grada, 2003. 220 s. ISBN 80-247-0330-0.

**ARLT, J., ARLTOVÁ, M.** *Ekonomické časové řady*. 1. vyd. Praha: Grada, 2007. 285 s. ISBN 80-247-1319-5.

**CIPRA, T.** *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1986. 248 s.


Vedoucí diplomové práce:

  
**Ing. Jan Panuš, Ph.D.**

Ústav systémového inženýrství a informatiky

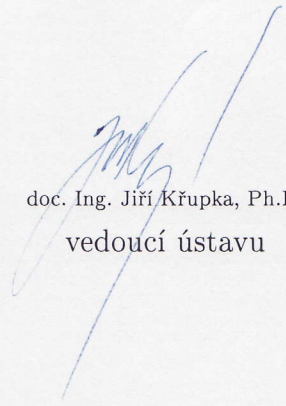
Datum zadání diplomové práce: **3. října 2011**

Termín odevzdání diplomové práce: **30. dubna 2012**

  
doc. Ing. Renáta Myšková, Ph.D.

děkanka

L.S.

  
doc. Ing. Jiří Křupka, Ph.D.

vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 3. října 2011

## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako Školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 24. 4. 2012

Bc. Milada Librová

## **PODĚKOVÁNÍ:**

Děkuji vedoucímu práce Ing. Janu Panušovi, Ph.D za odborné rady a ochotu při psaní této práce. Dále děkuji rodičům za podporu během celého studia.

## **ANOTACE**

*Diplomová práce se zabývá analýzou finančních časových řad. Jsou uvedeny přístupy, které se v dnešní době používají k modelování rutinní korelovanosti v časových pozorováních v praxi, jako jsou lineární modely typu ARMA a nelineární modifikace do podoby modelů typu GARCH. Tyto modely jsou aplikovány na konkrétním příkladě finanční časové řady z oblasti investičních fondů.*

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

*Box-Jenkinsova metodologie, finanční časové řady, analýza časových řad, modely ARMA, modely GARCH, investiční životní pojištění, fondy*

## **TITLE**

Using Box-Jenkins models in investment life insurance

## **ANNOTATION**

*Diploma thesis deals with the analysis of financial time series. Provides the current approaches, which are used to model the routine correlation in time observations in practice, such as linear ARMA models and nonlinear modifications into a GARCH-type models. These models are applied to the practical example of financial time series in the field of investment stocks.*

## **KEYWORDS**

*Box-Jenkins methodology, financial time series, time series analysis, ARMA models, GARCH models, investment life insurance, stocks*

# OBSAH

ÚVOD.....	10
<b>1. SOUČASNÝ STAV V OBLASTI INVESTIČNÍHO ŽIVOTNÍHO POJIŠTĚNÍ.....</b>	<b>12</b>
1.1. ŽIVOTNÍ POJIŠTĚNÍ.....	12
1.2. UNIVERZÁLNÍ ŽIVOTNÍ POJIŠTĚNÍ .....	13
1.3. INVESTIČNÍ ŽIVOTNÍ POJIŠTĚNÍ .....	14
1.3.1. Fondy investičního životního pojištění .....	15
1.3.2. Výhody a nevýhody investičního životního pojištění .....	16
1.4. STATISTICKÉ ÚDAJE O ŽIVOTNÍM POJIŠTĚNÍ V ČR .....	17
1.5. SOUČASNÉ TRENDY VE VÝVOJI IŽP .....	18
<b>2. ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD.....</b>	<b>19</b>
2.1. VÝZNAM ANALÝZY ČASOVÝCH ŘAD.....	19
2.2. VYBRANÉ CHARAKTERISTIKY ČASOVÝCH ŘAD .....	20
2.2.1. Stochastický proces .....	20
2.2.2. Stacionarita .....	20
2.2.3. Autokorelační funkce (ACF) .....	21
2.2.4. Parciální autokorelační funkce (PACF).....	21
2.2.5. Proces bílého šumu .....	22
2.2.6. Lineární proces .....	22
2.3. FINANČNÍ ČASOVÉ ŘADY A JEJICH VLASTNOSTI.....	23
2.3.1. Hypotéza efektivního trhu .....	24
2.3.2. Výnosy aktiva .....	25
2.3.3. Leptokurtické rozdělení.....	26
2.3.4. Heteroskedasticita .....	27
2.3.5. Pákový efekt .....	27
2.3.6. Nelineární formy závislosti .....	28
<b>3. BOX-JENKINSOVA METODOLOGIE .....</b>	<b>29</b>
3.1. ZÁKLADNÍ MODELY BOXOVY-JENKINSOVY METODOLOGIE .....	29
3.1.1. Autoregresní proces AR .....	29
3.1.2. Proces klouzavých součtů MA .....	32
3.1.3. Smíšený proces ARMA.....	34
3.2. DALŠÍ MOŽNOSTI KLASICKÉ BOXOVY-JENKINSOVY METODOLOGIE.....	35
3.2.1. Proces náhodné procházky („Random Walk Process“). .....	35
3.2.2. Procesy ARIMA .....	35
3.2.3. Sezonní modely SARIMA.....	37
3.2.4. Modely časových řad s dlouhou pamětí.....	37
3.3. KONSTRUKCE MODELŮ BOXOVY-JENKINSOVY METODOLOGIE .....	38
3.3.1. Identifikace modelu.....	38
3.3.2. Odhad parametrů.....	40
3.3.3. Diagnostika modelu .....	41
3.4. KONSTRUKCE PŘEDPOVĚDÍ NA ZÁKLADĚ ODHADNUTÉHO MODELU .....	43
<b>4. MODEL Y VOLATILITY .....</b>	<b>44</b>
4.1. OBECNÉ SCHÉMA.....	44
4.2. AUTOREGRESNÍ MODEL Y VOLATILITY.....	45
4.3. MODEL Y ARCH.....	45
4.4. MODEL Y GARCH.....	47
4.5. MODIFIKACE MODELU GARCH.....	48
4.5.1. Model IGARCH.....	48
4.5.2. Model EGARCH.....	48
4.5.3. Model GJR GARCH .....	48
4.5.4. Další modifikace .....	49
4.6. VÝSTAVBA MODELŮ VOLATILITY GARCH.....	49
4.6.1. Testování podmíněné heteroskedasticity.....	49
4.6.2. Volba řádu modelu a odhad parametrů .....	50

4.6.3. Diagnostická kontrola .....	50
<b>5. METODICKÁ VÝCHODISKA ŘEŠENÍ A SOFTWARE .....</b>	<b>51</b>
5.1. SPECIFIKACE ŘEŠENÉHO PROBLÉMU .....	51
5.2. VOLBA SOFTWARE.....	52
5.2.1. STATISTICA .....	52
5.2.2. MATLAB a Toolbox GARCH .....	52
<b>6. APLIKACE MODELŮ NA DATECH.....</b>	<b>53</b>
6.1. VÝBĚR A POPIS DAT .....	53
6.1.1. Základní informace o fondu .....	53
6.2. ANALÝZA DAT .....	53
6.1. ODHAD PARAMETRŮ MODELU A OVĚŘENÍ MODELU VE STATISTICA.....	57
6.2. ODHAD MODELU A JEHO PARAMETRŮ V PROGRAMU MATLAB .....	60
6.2.1. Odhady parametrů pro model ARMA(1,0) GJR GARCH(1,1) .....	62
6.3. DIAGNOSTIKA MODELU .....	63
6.4. INTERPRETACE DOSAŽENÝCH VÝSLEDKŮ .....	65
6.5. PREDIKCE BUDOUCÍCH HODNOT .....	66
<b>ZÁVĚR.....</b>	<b>67</b>
<b>POUŽITÁ LITERATURA .....</b>	<b>69</b>



## SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Vývoj životního pojištění v ČR v letech 1998 - 2010.....	18
Tabulka 2: Základní výběrové charakteristiky logaritmu výnosů fondu ČSOB Akciový mix .	27
Tabulka 3: Tvary ACF a PACF modelů AR, MA a ARMA .....	39
Tabulka 4: Odhady pro model ARIMA (1,1,0) .....	57
Tabulka 5: Odhady parametru modelu ARIMA(0,1,1).....	60
Tabulka 6: Odhady parametrů modelu ARIMA(1,1,1).....	60
Tabulka 7: ARCH test.....	60
Tabulka 8: Hodnoty AIC a BIC jednotlivých modelů .....	61
Tabulka 9: Odhady parametrů modelu ARCH(1,0) GJR GARCH(1,1) .....	62
Tabulka 10: Odhady parametrů dalších modelů .....	62
Tabulka 11: Výsledek Box-Ljungova testu.....	65
Tabulka 12: Výsledcích ARCH testu.....	65
Tabulka 13: Předpověď budoucích hodnot .....	66

## SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Struktura pojistného trhu v životním pojištění v roce 2010 .....	17
Obrázek 2: Ceny podílových jednotek fondu ČSOB akciový mix .....	24
Obrázek 3: Logaritmy výnosů ČSOB akciový mix .....	25
Obrázek 4: Skutečné rozdělení logaritmu výnosů a normální rozdělení .....	26
Obrázek 5: ACF procesu AR(1) .....	31
Obrázek 6: PACF procesu AR(1) .....	31
Obrázek 7: ACF a PACF procesu MA(2) .....	33
Obrázek 8: Původní časová řada cen fondu Akciový mix .....	54
Obrázek 9: Ceny fondu ČSOB akciový mix v logaritmickém vyjádření .....	54
Obrázek 10: ACF logaritmované časové řady.....	55
Obrázek 11: Logaritmy výnosů řady ČSOB Akciový mix .....	56
Obrázek 12: ACF logaritmu výnosů .....	56
Obrázek 13: PACF logaritmu výnosů .....	57
Obrázek 14: Rezidua modelu ARIMA (1,1,0) .....	58
Obrázek 15: Rozdělení reziduí modelu ARIMA (1,1,0).....	58
Obrázek 16: ACF reziduí modelu ARIMA (1,1,0).....	59
Obrázek 17: PACF reziduí modelu ARIMA (1,1,0).....	59
Obrázek 18: Rezidua, směrodatná odchylka a výnosy .....	63
Obrázek 19: Standardizovaná rezidua modelu ARMA(1,0) GJR GARCH(1,1).....	64
Obrázek 20: Autokorelační funkce čtverců standard. reziduí modelu.....	64

## SEZNAM ZKRATEK

ACF	Autokorelační funkce
AIC	Akaikeho informační kritérium
AR	Autoregresní modely
ARCH	Autoregresní podmíněná heteroskedasticita
ARMA	Autoregresní proces klouzavých součtů
ARFIMA	Autoregresní frakcionálně integrovaný proces klouzavých součtů
ARIMA	Autoregresní integrovaný proces klouzavých součtů
BIC	Bayesovo informační kritérium
CZK	Česká koruna
ČAP	Česká asociace pojišťoven
ČSOB	Československá obchodní banka, a. s.
ČR	Česká republika
ČŘ	Časové řady
EGARCH	Exponenciální GARCH
FES	Fakulta ekonomicko-správní
GARCH	Zobecněný ARCH
GJR	Glosten, Jagannathan a Runkle
IŽP	Investiční životní pojištění
IGARCH	Integrovaný GARCH
LLF	Log-věrohodnostní optimalizační funkce
MA	Proces klouzavých součtů
PACF	Parciální autokorelační funkce
SARIMA	Sezonní autoregresní integrovaný proces klouzavých součtů
Sb.	Sbírka zákonů
ŽP	Životní pojištění

# ÚVOD

Data ve formě časových řad vznikají v mnoha oborech, jako například v technice, meteorologii, biologii, společenských vědách a ekonomii. Teorie časových řad patří v ekonomii k nejdůležitějším kvantitativním metodám při analýze ekonomických dat, neboť značná část ekonomických údajů je předkládána právě ve tvaru časových řad. Cílem analýzy časové řady je většinou konstrukce odpovídajícího modelu, který umožní porozumět mechanismu, na jehož základě jsou generovány sledované údaje. Lze si představit, že znalost modelu odpovídá znalosti algoritmu, na jehož základě jsou data generována, přičemž do tohoto algoritmu jsou zapojeny generátory náhodných čísel, které dodávají celému procesu náhodný charakter. Na jedné straně je možné přesně specifikovat typ těchto generátorů, na druhé straně v žádném případě není možné stanovit konkrétní hodnoty produkované těmito generátory v jednotlivých časových okamžicích.

Volba metody pro analýzu časové řady závisí na několika faktorech, z nichž nejdůležitější je účel analýzy, typ časové řady, zkušenost analytika a programové vybavení, které je k dispozici.

Cílem této práce je analyzovat časovou řadu, jejíž data pocházejí z oblasti pojišťovnictví. Předmětem zkoumání je časová zachycující cenu podílových jednotek investičního fondu, do kterého se dá investovat v rámci uzavřeného životního pojištění. Pojednání o současných trendech v oblasti investičního životního pojištění je obsahem první kapitoly. Vypracováním dalších kapitol je snaha získat přehled a ucelenou představu o tom, jaké přístupy se v současnosti používají v oblasti analýzy ekonomických a finančních dat. V tomto případě je účelem analýzy konstrukce modelu časové řady. Jedná se o data z ekonomické praxe, která jsou typická přítomností silně závislých pozorování a bílého šumu. Box-Jenkinsova metodologie představuje v této oblasti zatím nejpropracovanější přístup k modelování korelovanosti v časových řadách a proto se charakteristice a popisu modelů, se kterými tato metodologie pracuje, věnuje celá kapitola tři. Konkrétním typem analyzované řady je finanční časová řada, která je charakteristická určitými vlastnostmi, pro něž je vhodné použít modely volatility. Obecné charakteristiky a specifické vlastnosti finančních časových řad jsou uvedeny ve druhé kapitole a příslušné modely, které jsou schopny tyto vlastnosti zachytit, uvádí kapitola čtyři. Stěžejní jsou v této kapitole především modely GARCH a jejich modifikace, které v dnešní době představují nejúspěšnější nástroj pro modelování finančních časových řad vůbec. Na základě teoretického výkladu jsou na konkrétním příkladě ilustrovány empirické vlastnosti finančních časových řad a následně je na tuto řadu aplikován vhodný model. V páté kapitole je uveden postup řešení a volba softwaru, ve kterém je analýza

provedena. Samotná aplikace teoretických modelů na praktický příklad je popsána v šesté kapitole. V konečné fázi je vybraný model ověřen statistickými testy a získané výsledky jsou interpretovány.

# 1. SOUČASNÝ STAV V OBLASTI INVESTIČNÍHO ŽIVOTNÍHO POJIŠTĚNÍ

V oblasti finančního zabezpečení existuje na trhu několik finančních instrumentů, které mohou uspokojit potřeby a přání klientů jak pro případ nepředvídatelných událostí, tak pro případ budoucích potřeb dodatečného příjmu. Životní pojištění mezi ně neodmyslitelně patří a zahrnuje celou řadu pojistných produktů, které se od sebe liší v určitých parametrech. Některé typy životního pojištění můžeme také zařadit do oblasti spoření či investování. Pravidelně ukládaná částka – pojistné je rozděleno na část, která slouží ke krytí rizik a správné náklady a zbývající prostředky jsou zhodnoceny.

## 1.1. Životní pojištění

Lidé si velmi dobře uvědomují, jaké ekonomické dopady na jejich život, či život jejich rodiny může mít nepředvídatelnost a nejistota spojená s individuální délkou života a možnost újmy na zdraví. Nejvhodnějším způsobem, jak negativní finanční důsledky těchto nahodilostí řešit, je životní pojištění. S ohledem na ekonomickou váhu životních rizik došlo k řešení prostřednictvím životního pojištění prakticky současně se zrodem pojištění. Životní pojištění se s rozvojem hospodářství přeměnilo ze vzájemné solidarity na komerční kategorii, fungující na čistě tržních principech. Původně bylo životní pojištění sjednáváno především pro zabezpečení finančních zdrojů pro rodinu v případě úmrtí živitele a mělo podobu tzv. pohřebního pojištění s pojistnou částkou odpovídající zhruba nákladům pohřbu. Souběžné životní pojištění se od dřívějšího pojetí významně liší, což je způsobeno zejména zvyšující se životní úrovní a stále nákladnějším životním stylem současných generací.

V dnešní společnosti je žádoucí, aby se společenské postavení po nástupu důchodového věku významně nezměnilo a nedošlo k omezení ekonomických možností zapojení se do plnohodnotného života. Tím se význam životního pojištění posouvá od pojištění pro případ smrti k rezervotvorným pojištěním a stává se tak finančním nástrojem pro zajištění budoucích potřeb obyvatel. Produkty klasického životního pojištění kombinují většinou dvě složky: riziko smrti, což je jev jistý, ale nejistý je okamžik realizace rizika, a událost dožití se určitého věku. Tento konkrétní věk je sjednán v pojistné smlouvě a obvykle se stanoví v návaznosti na ukončení pracovní aktivity. Při dosažení tohoto věku se vyplácí sjednaná pojistná částka. Tím se životní pojištění stává výhodnou alternativou vytvoření si dostatečných finančních zdrojů pro stáří, což je v současnosti stále zvětšující se mikroekonomický problém. „*Základní poučka v tomto smyslu praví, že aby životní pojištění bylo skutečně účinné při řešení životního*

*rizika jednotlivce, měla by sjednaná pojistná částka pro případ smrti i pro případ dožití sjednaného věku činit minimálně čtyřnásobek jeho ročního příjmu.* “[13] str. 135.

Ve smíšeném životním pojištění lze pojistnou částku sjednat v odlišných výších pro případ dožití se sjednaného věku a pro případ úmrtí. Potřeby klientů pojišťoven se v průběhu času vyvíjely, a proto vznikaly nové pojistné produkty. Z důvodů modifikací smíšeného životního pojištění je možné produkty životního pojištění rozčlenit na kapitálové, univerzální a investiční. Kapitálové životní pojištění je považováno za tradiční pojistný produkt, který je nejstarší z výše jmenovaných. Další dva typy vznikly modifikací kapitálového životního pojištění a budou popsány ve zvláštních kapitolách.

Charakteristickým znakem kapitálového životního pojištění je to, že sjednaná pojistná částka pro případ smrti a pro případ dožití obsahuje takzvané garantované zhodnocení. Výše tohoto zhodnocení je stanovena vyhláškou Ministerstva financí České republiky č. 434/2009 Sb., která určuje maximální výši tzv. technické úrokové míry. „*Technická úroková míra představuje takové zhodnocení rezervy pojistného životních pojištění, na které má klient smluvní nárok (zaručený podíl na výnosech z finančního umístění).*“ [8] Přesný výpočet je popsán v části IX, §12 výše uvedené vyhlášky. Technická úroková míra je regulována státem proto, aby pojišťovny neslibovaly klientům vyšší míry zhodnocení vložených prostředků, než jsou schopny dosáhnout. Tato výše je tedy stanovena tak, aby ji mohly pojišťovny bez problémů dlouhodobě dosahovat. Mimo toto zhodnocení pojišťovny v rámci konkurenčního boje nabízí ještě tzv. podíly na zisku.

## **1.2. Univerzální životní pojištění**

Jedná se o pružné pojištění, které umožňuje pojištěným různými způsoby přizpůsobovat rozsah pojistné ochrany svým momentálním finančním možnostem. Pojistné a doba placení pojistného může být modifikována v závislosti na potřebách pojistníka a jeho finančních možnostech. Univerzální životní pojištění se skládá ze dvou základních složek – spořicí a rizikové. Spořicí složka je pojistná částka, která se vyplácí při dožití se daného věku a rizikovou složku tvoří částka, která se vyplatí v případě smrti, úrazu, invalidity apod. Nepravidelné příspěvky pojistného se připisují ve prospěch individuálního účtu klienta a z něj se pak pravidelně sráží rizikové pojistné. Zůstatek tohoto účtu představuje rezervu, která tvoří spořicí složku. Tato složka se buď zhodnocuje tradičně (v návaznosti na technickou úrokovou míru), nebo může být investována na základě rozhodování pojištěného. Během kontraktu by měl pojistník dbát na to, aby nedošlo k vyčerpání jeho individuálního účtu a bylo tak z čeho hradit rizikové pojistné.

Výhodou pojištění je možnost kdykoliv změnit poměr rozdělení pojistného mezi pojistnou ochranu a zhodnocení finančních prostředků. Je umožněno vkládat peněžní prostředky nad stanovenou výši pojistného a čerpat část prostředků dříve vložených, což u klasického kapitálového pojištění nelze.

### 1.3. Investiční životní pojištění

Tato forma životního pojištění spojuje výhody univerzálního životního pojištění s možností investovat. Investiční životní pojištění je smíšené pojištění pro případ smrti nebo dožití, kde pojistné plnění, často jen pojistné plnění pro případ dožití, závisí na vývoji cen podílových jednotek podílového fondu, do kterého je část nebo celé pojistné investováno. V tomto případě není pohledávka pojistníka za pojistitelem definována jako pevná pojistná částka plus případné podíly na přebytcích pojistného, nýbrž jako podíl na fondu, který je definován počtem pojistníkem zakoupených podílových jednotek k celkovému počtu prodaných podílových jednotek. Charakteristickým znakem je zde možnost výběru investiční strategie. Investiční životní pojištění tedy klientům nabízí vyšší výnosový potenciál při zhodnocování rezerv, ovšem za cenu vyššího rizika. Toto investiční riziko nese plně klient a pojišťovna neposkytuje žádnou předem zaručenou míru zhodnocení investic. Spolu s rostoucími potenciálními výnosy totiž současně stoupá i riziko poklesu výnosů až pod úroveň garantovanou například u kapitálového pojištění.

Pojišťovny se však snaží vyjít zákazníkům vstříc a nabízí několik variant, jak může být konstruováno pojistné plnění v případě úmrtí. Podle [17] jde o tyto způsoby:

- **základní varianta** – kdy je v případě úmrtí pojištěného vyplacena pojistná částka, která byla sjednána v pojistné smlouvě,
- **garantované pojistné plnění, případně hodnota individuálního účtu, pokud je vyšší než garantované plnění** – kdy hodnota garantovaného pojistného plnění je oprávněné osobě vyplacena i v případě, kdy hodnota individuálního účtu této výše nedosahuje,
- **pojistné plnění jakožto součet hodnoty individuálního účtu a pojistné částky** – kdy pojistná částka je stanovena v pojistné smlouvě,
- **pojistné plnění odpovídající počtu podílových jednotek** – kdy výše pojistného plnění odpovídá aktuální hodnotě podílových jednotek.

Co se týče pojistného plnění pro případ dožití se sjednaného věku, vyplácená částka není garantována a výše pojistného plnění je zde tak plně závislá na hodnotě individuálního účtu.

V případě, že se klient dožije konce pojistné doby, bude mu vyplacena aktuální hodnota jeho podílových jednotek ve formě jednorázového plnění nebo formou postupného vyplácení.

### 1.3.1. Fondy investičního životního pojištění

Pojišťovny bývají, v souvislosti s tímto produktem, napojeny na specializované investiční společnosti, ale velké pojišťovny mohou nabízet i vlastní fondy. Kam může být pojistné investováno, je obecně definováno v obchodním plánu produktu. Konkrétní alokaci v povolených mezích pak definuje sám pojistník. Ten má většinou na výběr mezi několika strategiemi, zohledňující například sklon k riziku. *„Při volbě investičních instrumentů v úvahu nepřipadají jen otevřené podílové fondy investičních společností či fondy, vytvořené a spravované pojistitelem, ale i samotné investiční instrumenty kapitálového trhu jako jsou dluhopisy a akcie, dále reálné investiční instrumenty jako nemovitosti, drahé kovy aj.“* [11] str. 209. Mezi základní fondy obvykle patří:

- akciový fond,
- fond obligací,
- peněžní fond,
- fond státních cenných papírů,
- fond cizích měn,
- smíšené fondy.

Investiční fondy jsou rozděleny na podílové jednotky. Každá podílová jednotka představuje nárok na předepsaný podíl konkrétního investičního fondu. Z výše uvedeného vyplývá nutnost vést každému klientovi jeho vlastní účet. Klient má v pojišťovně otevřen korunový účet, na který plyne jeho pojistné a ze kterého je strháváno případné rizikové pojistné a správní náklady pojišťovny. Vedle tohoto účtu má klient ještě podílový účet, na kterém jsou prostředky ve formě podílových jednotek. Za prostředky na korunovém účtu jsou pořizovány podílové jednotky ve fondech. Hodnota podílového účtu závisí v každém okamžiku na počtu jednotek v jednotlivých fondech a na aktuálním kurzu podílových jednotek.

Zaplacené brutto pojistné se tedy rozpadá na tři části. První část se spotřebuje na úhradu správních nákladů, druhá část je tzv. netto pojistné, z něhož se hradí rizikové pojistné (riziko smrti, popř. úrazy, invalidita) a zbytek tvoří rezervu pojistného, z něhož se nakupují podílové jednotky.



Pojišťovna přenesením investičního rizika na pojištěného přichází o možnost vytvářet zisk v případě, že by dosáhla vyššího zhodnocení rezerv. V tomto případě zisk pojišťovny tvoří poplatky za správu fondů, transakční poplatky a rozdíl mezi nákupní a prodejní cenou podílových jednotek.

### **1.3.2. Výhody a nevýhody investičního životního pojištění**

Jako první výhodu je nutno uvést, že uzavřením životního pojištění vzniká pojistná ochrana, tedy v případě pojistné události musí pojišťovna plnit. Navíc se vložené finanční prostředky dále zhodnocují. Velkou výhodou výše zmíněných pojistných produktů je jejich variabilita. V případě investičního a univerzálního životního pojištění může klient jednoduše měnit parametry pojištění podle podmínek pojistné smlouvy, např. snižovat či zvyšovat výši pojistné částky či pojistného, přidávat či odebírat různá připojištění. Klient má možnost přizpůsobit životní pojištění své potřebě a aktuální životní situaci, dokonce může změnit pojistnou dobu. Klient má rovněž volnost ve výběru fondů, do kterých má zájem investovat. Zvolit může jak alokační procento, tj. jaká část pojistného má být investována, tak alokační poměr<sup>1</sup>. Tyto veličiny navíc mohou být opět v průběhu trvání pojištění libovolně měněny tak, aby odpovídaly změnám v investiční strategii daného klienta.

Dalším významným rysem životního pojištění je možnost současného sjednání některých dalších druhů pojištění s nižšími sazbami. Jedná se především o produkty neživotního pojištění např. pojištění úrazu, vážných chorob, invalidity (včetně zproštění od placení pojistného v případě plné invalidity), pracovní neschopnosti a hospitalizace.

Za určitých podmínek je životní pojištění považováno za daňově uznatelné a řídí se zákonem č. 586/1992 Sb., o daních z příjmů. Podle tohoto zákona si pojistník může od daňového základu odečíst zaplacené pojistné za daný rok.

Jednou z výhod je také možnost využití dynamizace u investičního životního pojištění, které chrání klienty před nepříznivými dopady inflace. Na základě indexové složky dochází k zachování reálné hodnoty pojistné částky inflačním vyrovnáním. Současně s tím se logicky také zvyšuje placené pojistné.

Nevýhodou životního pojištění je to, že je uzavíráno na delší časový horizont, zpravidla si ho klient uzavírá na dobu svého produktivního života. S tím je spojena návratnost investic. Problém je i s nízkou likviditou, neboť peníze nejsou tak lehce dostupné jako například u jiných typů investic. Další nevýhoda spočívá ve vyšších nákladech v případě zhodnocování volných peněžních prostředků, než je tomu u jiných spoření či investování, například

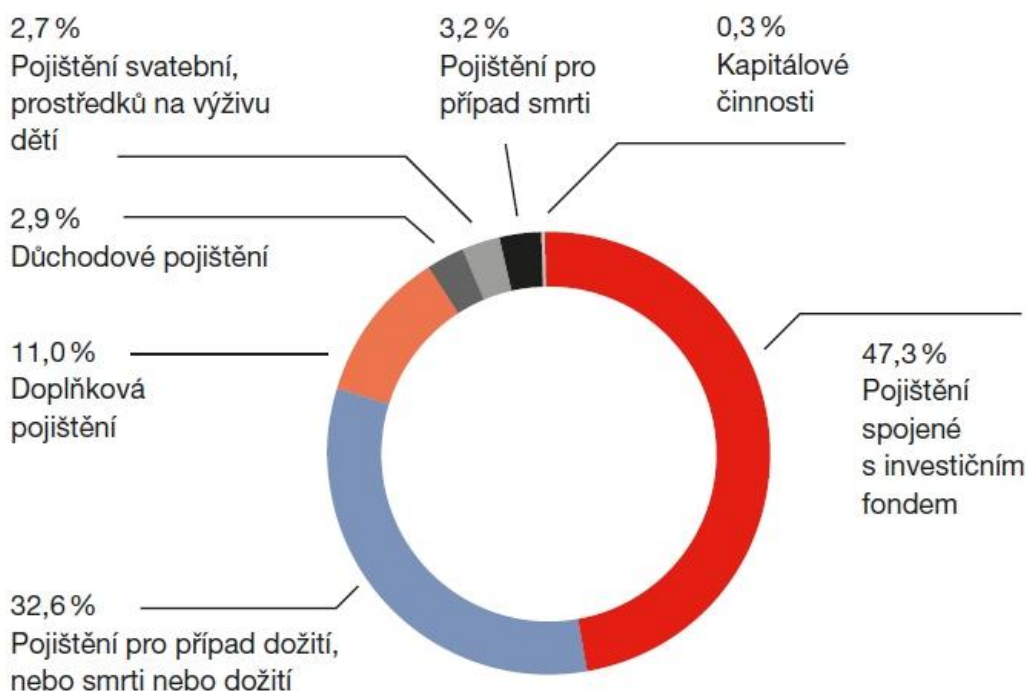
---

<sup>1</sup> Poměr, ve kterém se pojistné umísťuje do jednotlivých podílových fondů.

u otevřených podílových fondů. Nevýhoda je také to, že životní pojištění je uzavíráno až po prozkoumání zdravotního stavu pojištěného a z toho plyne, že ne každý klient může životní pojištění uzavřít. U investičního životního pojištění není garantována výše zhodnocení ani pojistná částka pro případ dožití.

#### 1.4. Statistické údaje o životním pojištění v ČR

Ve výroční zprávě České asociace pojišťoven [7] se uvádí, že pojištění spojené s investičním fondem zvýšilo své meziroční tempo. To při dosaženém objemu předepsaného pojistného 34,1 mld, jak uvádí tabulka 1, znamenalo zvýšení podílu na životním pojištění z 40,2% na 47,3%. V základní struktuře pojistného trhu došlo ke zvýšení podílu životního pojištění na předepsaném pojistném na 46,0% a znamená to další krok k postupnému přibližování se standardům evropských zemí, v nichž zaujímá ŽP průměrně 60% podíl. Strukturu pojistného trhu v oblasti životního pojištění ukazuje obrázek 1.



**Obrázek 1:** Struktura pojistného trhu v životním pojištění v roce 2010

*Zdroj: [7]*

Vývoj životního pojištění z hlediska objemu předepsaného pojistného znázorňuje tabulka 1. V prvním řádku je uveden celkový objem předepsaného pojistného v životním pojištění a ve druhém řádku podíl pojištění spojeného s investičním fondem.

**Tabulka 1:** Vývoj životního pojištění v ČR v letech 1998 - 2010

tis. Kč	1998	1999	2000	2001	2002	2003
ŽP celkem	14 965 171	19 917 397	22 770 132	28 281 966	34 160 586	41 123 386
IŽP	316 821	659 654	1 521 980	24 528 373	3 136 672	4 877 722

tis. Kč	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
ŽP celkem	44 200 964	44 954 220	47 232 898	54 119 535	56 888 290	60 207 719	71 764 756
IŽP	6 051 612	7 550 390	11 336 078	18 386 692	21 588 116	24 215 817	34 054 809

*Zdroj: upraveno podle [7]*

## 1.5. Současné trendy ve vývoji IŽP

Trendem poslední doby je propojování bankovních a pojistných produktů. Vznikají vzájemné vazby mezi bankovní sférou a sektorem pojišťoven, kdy se toto spojení nazývá bankopojištění. Mezi nejčastější důvody propojení těchto sektorů patří snaha o dosažení růstu výnosů, diverzifikace toků příjmů a také dosažení úspor nákladů spojených s využitím distribučních kanálů partnerské instituce. Banky a pojišťovny jsou schopné společně ve vzájemné spolupráci rychle reagovat na měnící se požadavky klientů a charakteristická se tak stává stále větší provázanost bankovních a pojistných produktů. Příkladem může být případ, kdy klient žádá o hypoteční úvěr a bankovní instituce požaduje uzavření životní pojistky. Další formou je vinkulace životního pojištění ve prospěch banky pro případ, kdy by klient neplnil své závazky z úvěru. V současné době se podle [9] v ČR, díky možnosti snižování daňových základů dané z příjmu fyzických osob o určitý podíl z částky vložené do životního pojištění, daří formám životního pojištění, z nichž některé minimalizují pojistnou ochranu a blíží se spíše termínovaným a spořicími účtům. Patří sem samozřejmě investiční životní pojištění, které kombinuje prvky investičních instrumentů v rámci peněžního a kapitálového trhu s prvky životního pojištění.

Pojišťovny a bankopojišťovny nabízejí takové produkty životního pojištění, kdy v jedné smlouvě lze obvykle pojistit až dvě dospělé osoby a čtyři děti, aniž by byly v příbuzenském vztahu. Navíc každá z těchto osob si může sjednat jiná pojištění, volit individuální pojistné částky a v průběhu pojištění je smlouvu možné přizpůsobovat měnícím se životním situacím.

IŽP je snadný způsob, jak se může stát investorem téměř kdokoliv z nás, a právě proto jsou fondy IŽP předmětem analýzy v praktické části této práce.

## 2. ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD

V podstatě ve všech praktických oborech generujících data, a to zvláště výrazně v ekonomii a financích, převládají data ve tvaru časových řad. „*Pojmem časová řada se obecně míní jakákoli posloupnost dat  $y_1, \dots, y_n$  chronologicky uspořádaná v čase.*“ [6] str. 227.

Data ve tvaru časových řad jsou hodnoty určité veličiny pozorované v určitém časovém intervalu s určitou frekvencí (každý obchodní den, měsíčně apod.). Frekvencí pozorování se přitom rozumí velikost intervalu mezi jednotlivými pozorováními nebo nepravidelnost, s jakou je záznam pořizován. Ekonometrické modely obvykle vyžadují, aby použité časové řady měly stejnou frekvenci pozorování. Jako označení se zde často používá časový index nebo argument  $t$  (např.  $P_t$  nebo  $P(t)$  je cena v čase  $t$ ) a pro celkový počet pozorování, tj. délku časové řady, se pak volí odpovídající symbol (např.  $T$ ). V souvislosti s délkou časové řady se v praxi objevují dvě protichůdné tendence. Boxův-Jenkinsův přístup se totiž nedoporučuje aplikovat na řady o délce menší než 50 hodnot. Na druhé straně u velice dlouhých řad je nebezpečí, že s průběhem času se podstatně změní charakteristiky modelu, který tuto řadu generuje, takže konstrukce vyhovujícího modelu se stává s rostoucí délkou řady stále obtížnější. Proto je u analýzy časových řad podstatný také pohled statistika, který analýzu provádí, a jeho zkušenosti. S tím také souvisí výpočetní technika a programové vybavení, které má k dispozici.

Významným rysem časových řad je vedle dynamiky také jejich náhodnost. Proto je nutné používat modely, které jsou založeny na principech náhodnosti (tj. na teorii pravděpodobnosti). Tyto modely jsou schopny generovat časové posloupnosti podobné konkrétní analyzované časové řadě a označují se jako náhodné procesy. Jsou to v podstatě přesně specifikované algoritmy využívající generátory náhodných čísel.

Pod pojmem časová řada tedy rozumíme statistickou časovou řadu, např. typu  $y = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$ , kde  $t$  označuje čas,  $\beta_0$  a  $\beta_1$  jsou parametry tzv. lineárního trendu a  $\varepsilon_t$  je náhodná veličina. Chování takovéto řady je zatíženo nejistotou, na rozdíl od deterministické časové řady, například typu  $y = \sin x$ , jejíž chování lze striktně popsat matematickými vzorci, takže lze zkonstruovat její přesnou předpověď.

### 2.1. Význam analýzy časových řad

Analýza časových řad včetně předpovídání jejich budoucího vývoje je bezpochyby jednou z nejdůležitějších oblastí v rozvoji statistiky a v ekonomii patří teorie časových řad k nejdůležitějším kvantitativním metodám při analýze ekonomických dat. Cílem analýzy

časové řady je většinou konstrukce odpovídajícího modelu, který pomůže porozumět mechanismu, na jehož základě jsou generovány sledované údaje, a dále umožňuje předpovídat budoucí vývoj systému. Ve zkonstruovaném modelu lze statisticky testovat hypotézy a ověřit si tak různá očekávání. Navíc konstrukce modelu umožní do jisté míry řídit a optimalizovat činnost příslušného systému vhodnou volbou vstupních parametrů a počátečních podmínek.

## 2.2. Vybrané charakteristiky časových řad

### 2.2.1. Stochastický proces

Stochastický proces neboli náhodný proces je v čase uspořádaná řada náhodných veličin, které jsou definovány na stejném pravděpodobnostním prostoru. Matematický zápis je následující  $\{Y(s, t), s \in S, t \in T\}$ , kde  $S$  je výběrový prostor a  $T$  je indexní řada. Časovou řadu lze tedy chápat jako realizaci stochastického procesu, kde indexní řada je řadou celých čísel časových okamžiků a tento stochastický proces má nespojitý charakter. Dále budu stochastické procesy značit jako  $\{y_t\}$  a jejich realizace, tedy časové řady, jako  $y_t$ . Se stochastickými procesy souvisejí další pojmy, které jsou při analýze ekonomických časových řad nezbytné a jsou uvedeny níže.

### 2.2.2. Stacionarita

Stacionarita časové řady znamená, že chování této řady je v jistém smyslu stochasticky ustálené. Rozlišuje se striktní a slabá stacionarita. **Striktní stacionarita** říká, že pravděpodobnostní chování daného stochastického procesu je časově invariantní. Platí pro ni vztah 2.1

$$F(y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_n}) = F(y_{t_1+h}, y_{t_2+h}, \dots, y_{t_n+h}), \quad (2.1)$$

kde  $F$  je sdružená distribuční funkce a  $h$  je libovolné reálné číslo. **Slabá stacionarita** znamená, že příslušný stochastický proces má konstantní střední hodnotu 2.2, konstantní rozptyl 2.3 a kovarianční strukturu druhého řádu invariantní vůči posunům v čase 2.4. Slabá stacionarita je tedy méně omezující, neboť stačí, aby příslušný proces byl invariantní vůči posunům v čase pouze v rámci momentů do druhého řádu, tj.

$$E(y_t) = \mu_t = konst, \quad (2.2)$$

$$D(y_t) = \sigma_t^2 = E(y_t - \mu_t)^2 = konst, \quad (2.3)$$

$$cov(y_s, y_t) = \gamma_{y_s, y_t} = E(y_s - \mu)(y_t - \mu) = cov(y_{s+h}, y_{t+h}) \quad \text{pro libovolné } h. \quad (2.4)$$

Kovariance náhodných veličin vyjadřuje vzájemný vztah mezi těmito veličinami. Jsou-li tyto náhodné veličiny závislé, je třeba tuto závislost vyjádřit kvantitativně. K tomu slouží korelační koeficient, který nabývá hodnot v rozmezí od -1 do 1 a je definován vztahem 2.5.

$$\text{cor}(y_s, y_t) = \rho_{y_s, y_t} = \frac{\text{cov}(y_s, y_t)}{\sqrt{D(y_s)D(y_t)}} \quad (2.5)$$

Jestliže je korelační koeficient roven 0, říkáme, že náhodné veličiny jsou nekorelované.

### 2.2.3. Autokorelační funkce (ACF)

Autokovarianční funkce pro zpoždění  $k$  se definuje jako 2.6

$$\text{cov}(y_t, y_{t+k}) = \gamma_k = E(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu), \quad k = \dots -1, 0, 1 \dots \quad (2.6)$$

a autokorelační funkce pro zpoždění  $k$  se definuje jako 2.7

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{D(y_t)}\sqrt{D(y_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \quad (2.7)$$

kde vzhledem ke stacionaritě procesu  $D(y_t) = D(y_{t-k}) = \gamma_0$ . Tyto vzorce odpovídají vzorcům pro kovarianci a korelaci, přičemž jsou do nich dosazeny veličiny z téže řady. V případě stacionárního stochastického procesu má autokorelační funkce následující vlastnosti:

$$\rho_0 = 1,$$

$$|\gamma_k| \leq \gamma_0; |\rho_k| \leq 1,$$

$\gamma_k = \gamma_{-k}; \rho_k = \rho_{-k}$  pro všechna  $k$ . Autokovarianční a autokorelační funkce je symetrická kolem  $k = 0$ . Autokorelační funkce je tedy vyjadřována pouze pro  $k \geq 0$ . Grafické znázornění pro jednotlivá  $k$  se nazývá korelogram.

### 2.2.4. Parciální autokorelační funkce (PACF)

Korelace mezi dvěma náhodnými veličinami je často způsobena tím, že tyto veličiny jsou korelovány třetí veličinou. Parciální autokorelace podává informaci o korelaci veličin  $y_t$  a  $y_{t-k}$  očištěnou o vliv veličin ležících mezi nimi. V literatuře se často PACF označuje jako  $\phi_{kk}$ , proto použijí stejné značení. Pro tuto práci jsou stěžejní vztahy 2.9 a 2.10

$$\phi_{11} = \rho_1, \quad (2.8)$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad (2.9)$$

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}}. \quad (2.10)$$

Odhady  $r_{kk}$  parciální autokorelační funkce  $\phi_{kk}$  se v praxi počítají s použitím softwarového vybavení rekurentně pomocí Durbinova vztahu 2.11, 2.12

$$r_{kk} = \frac{r_{k-1} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_j}, \quad (2.11)$$

$$r_{kj} = r_{k-1,j} - r_{kk} r_{k-1,k-1}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1. \quad (2.12)$$

### 2.2.5. Proces bílého šumu

Stochastický proces  $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ , kde  $\varepsilon_t$  jsou nekorelované náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem, se označuje jako bílý šum (white noise) a značí se

$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2). \quad (2.13)$$

Proces bílého šumu je stacionární s autokovarianční funkcí  $\gamma_k = 0$  pro všechna  $k \neq 0$  a s autokorelační funkcí 2.14

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

a parciální autokorelační funkcí 2.15

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}. \quad (2.15)$$

Pokud jsou ve vztahu 2.13 náhodné veličiny  $\varepsilon_t$  nezávislé a stejně rozdělené, pak se jedná o **iid process** (independent and identically distributed) a značí se  $\varepsilon_t \sim IID(\mu, \sigma^2)$ .

### 2.2.6. Lineární proces

Stacionární proces neobsahující deterministickou složku<sup>2</sup> může být vyjádřen jako lineární kombinace řady nekorelovaných stejně rozdělených náhodných veličin. Tato lineární kombinace se označuje jako Woldova reprezentace nebo také lineární proces. Lineárním procesem je označena řada ve tvaru 2.16

$$y_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots, \quad (2.16)$$

kde  $\varepsilon_t$  je bílý šum s rozptylem  $\sigma_\varepsilon^2$  a  $\psi_j$  jsou parametry. Lineární proces se často zapisuje s využitím tzv. operátoru zpětného posunutí  $B$ , který je definován jako

<sup>2</sup> Složka, která je na základě minulosti přesně predikovatelná.

$$By_t = y_{t-1} , \quad (2.17)$$

přičemž vztah 2.17 lze aplikovat několikanásobně a pak lze 2.16 zapsat ve tvaru

$$y_t = \psi(B)\varepsilon_t , \quad (2.18)$$

kde podle [5] lze zapsat

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j B^j . \quad (2.19)$$

Operátor zpětného posunutí se používá pro zjednodušení zápisu modelů a lze ho použít při řešení diferenčních rovnic a stanovení podmínek stacionarity a invertibility modelů stochastických procesů.

Pro praktické využití mají mnohem větší význam speciální případy lineárního procesu. Pro Boxovu-Jenkinsovu metodologii se používají případy, které vzniknou z lineárního procesu zapsaného ve tvaru 2.16 vynulováním všech parametrů až na konečný počet. Dbá se na to, aby používané modely byly konstruovány s co nejmenším počtem parametrů. Konkrétně se jedná o procesy klouzavých součtů MA, autoregresní procesy AR a smíšené procesy ARMA, které představují základní stavební prvky pro Boxovu-Jenkinsovu metodologii a budou podrobněji popsány v kapitole 3.

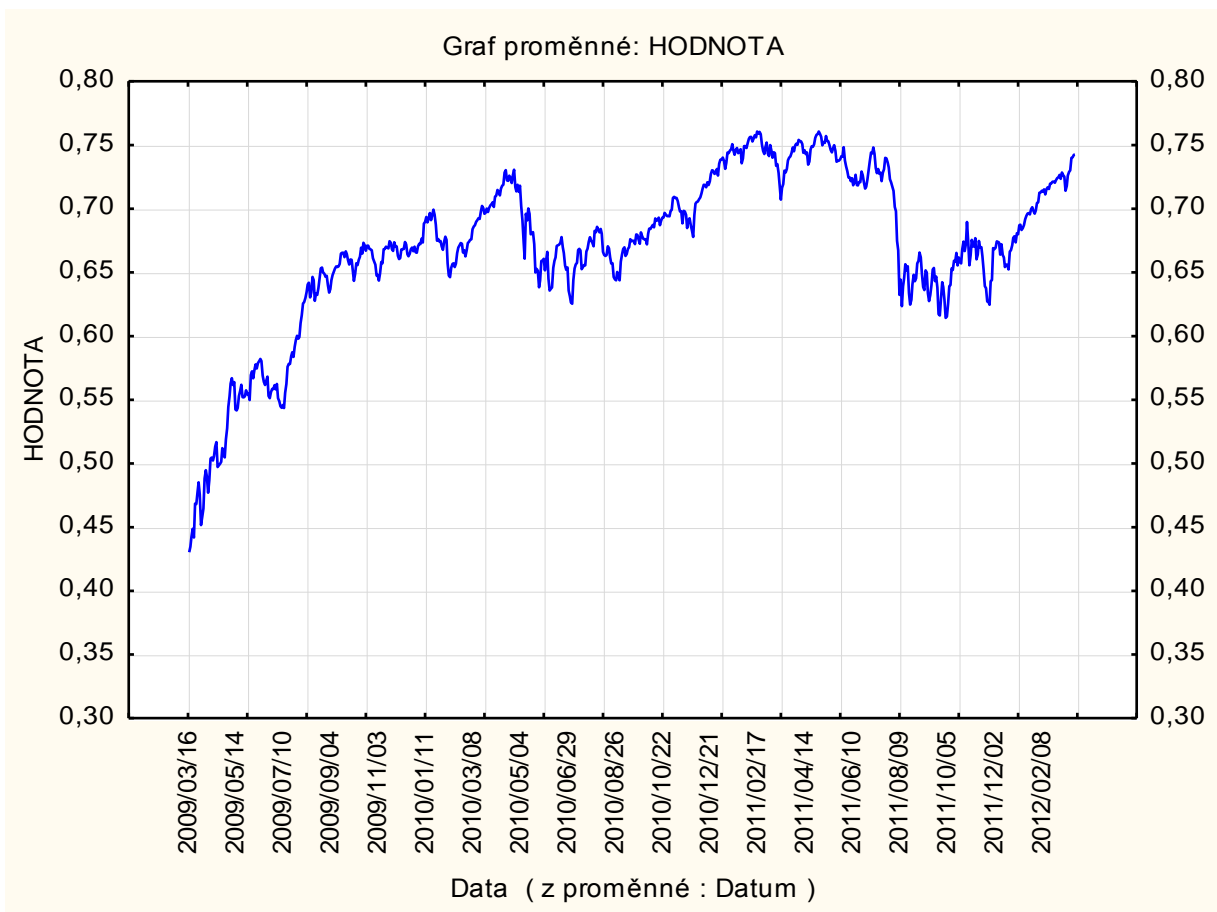
### 2.3. Finanční časové řady a jejich vlastnosti

Finanční trh je součástí tržního systému, kde se setkává nabídka a poptávka peněz a kapitálu. Základní informací finančních trhů je cena, která je sledovaná v určité frekvenci a tvoří tak časové řady. Ve srovnání s jinými ekonomickými časovými řadami mají finanční časové řady některé specifické vlastnosti a tvarové odlišnosti dané mikrostrukturou finančních trhů.

Finanční časové řady patří do skupiny tzv. vysokofrekvenčních časových řad. Je to specifické postavení v rámci krátkodobých časových řad, které jsou sledované ve frekvencích kratších než jeden rok. Hodnoty finančních časových řad jsou sledované např. v denní frekvenci, z čehož plynou zvláštní rysy těchto řad.

Následující obrázek ilustruje typický průběh finanční časové řady sledované v denní frekvenci. Obrázek 2 ukazuje vývoj podílového fondu *ČSOB akciový mix* v průběhu tří let od 16. 3. 2009 do 16. 3. 2012. Tento fond je spravován Investiční společností ČSOB a patří mezi fondy, do kterých mohou vkládat prostředky zákazníci ČSOB pojišťovny v rámci vybraných programů investičního životního pojištění. Tento fond investuje do světových akcií a je veden v CZK.





**Obrázek 2:** Ceny podílových jednotek fondu ČSOB akciový mix

*Zdroj: vlastní zpracování v programu STATISTICA na základě dat z [10]*

### 2.3.1. Hypotéza efektivního trhu

Hlavním východiskem pro fungování finančních trhů je hypotéza efektivního trhu. Ta spočívá v tom, že ceny na finančních trzích plně zahrnují očekávání a informace všech účastníků trhu a jejich změny jsou nepredikovatelné. S touto hypotézou je spojena idea modelu vývoje cen aktiv, který je známý pod pojmem martingál. Tento model lze popsat takto: pokud  $P_t$  představuje cenu aktiva v čase  $t$ , potom očekávaná cena v čase  $t + 1$  je cena v čase  $t$ , za podmínky znalosti všech cen aktiva v minulosti. Z hlediska tvorby předpovědí to znamená, že nejlepší předpovědí zítřejší ceny je cena dnešní. Z hlediska trhu je však budoucí cena prakticky nepredikovatelná a jedná se tedy o efektivní trh. Pokud stochastický proces  $\{P_t\}$  je časová řada zachycující cenu nějakého aktiva, pak formálně lze pojem martingál vyjádřit pomocí podmíněné střední hodnoty jako 2.20

$$E[P_{t+1}|P_t, P_{t-1}, \dots] = P_t. \quad (2.20)$$

### 2.3.2. Výnosy aktiva

Některé analýzy časových řad nepracují s původní časovou řadou, ale s její transformací. Co se týče finančních časových řad, pracuje se s výnosy aktiva. Výnosy jsou relativní přírůstky cen a takto transformovaná řada má lepší statistické vlastnosti z hlediska stacionarity.

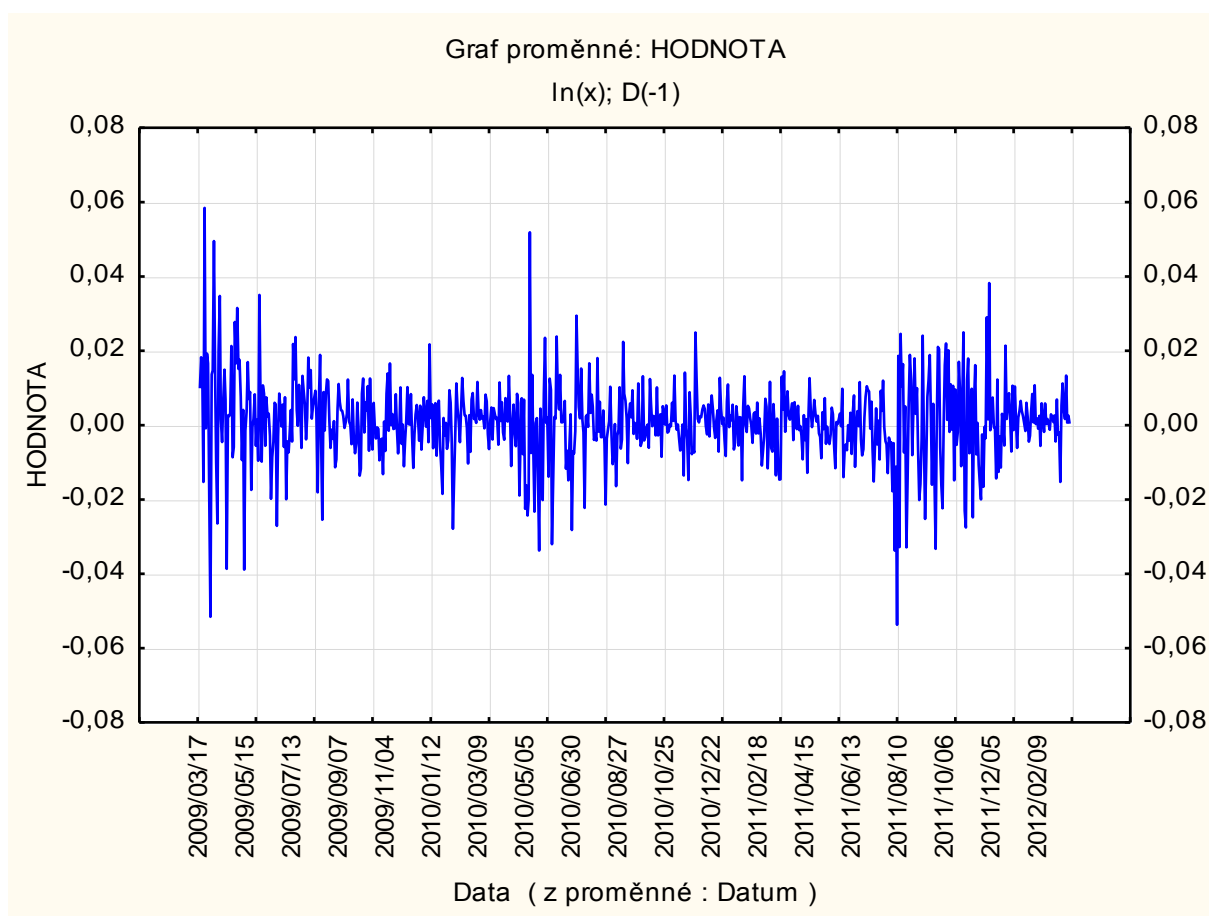
Cena aktiva nemůže být menší než nula a minimální relativní přírůstek ceny aktiva je tedy

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \text{ a potom } R_t + 1 = \frac{P_t}{P_{t-1}}, \quad (2.21)$$

kde  $P_t$  je cena aktiva v čase  $t$ . Takto definované jednoduché výnosy aktiva by měly mít rozdělení nezáporné náhodné veličiny. Pro tento případ je vhodné aplikovat rozdělení logaritmicko-normální. Potom logaritmus jednoduchého výnosu  $R_t + 1$  je definován jako

$$r_t = \ln(R_t + 1) = \ln P_t - \ln P_{t-1} \quad (2.22)$$

a má rozdělení normální. Cena aktiva nemůže být záporná, a tedy nejmenší možný jednoduchý výnos je -1. Proto mají jednoduché výnosy oproti logaritmickým tu nevýhodu, že pokud je uvažováno normální rozdělení, tak jsou pravděpodobné i hodnoty menší než -1. Proto se pracuje s logaritmickými výnosy, u kterých toto omezení není.



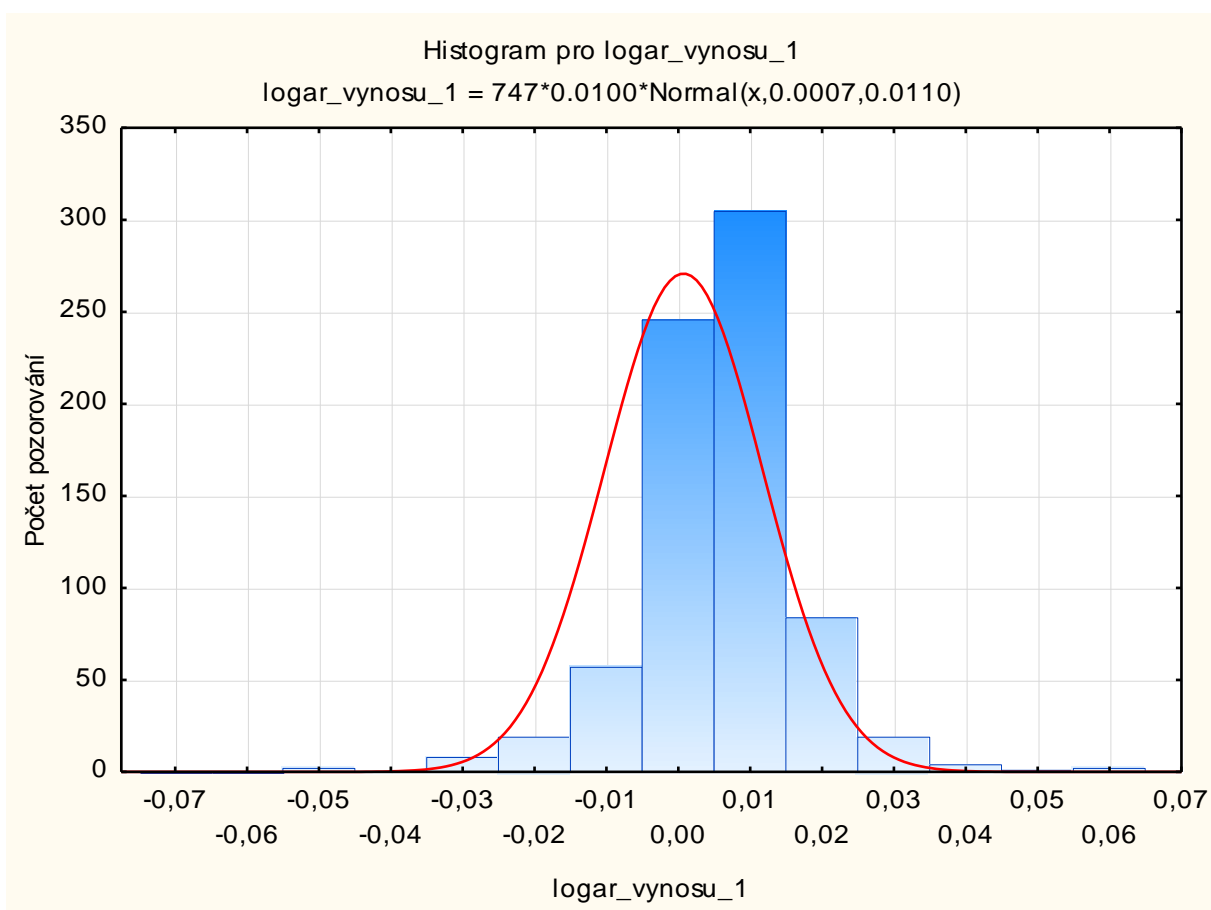
Obrázek 3: Logaritmy výnosů ČSOB akciový mix

Zdroj: vlastní zpracování v programu STATISTICA na základě dat z [10]

Na obrázku 3 jsou vypočítané logaritmy výnosů  $r_t$  na základě původních hodnot fondu *ČSOB Akciový mix* znázorněného na obrázku 2.

### 2.3.3. Leptokurtické rozdělení

Leptokurtická rozdělení jsou v praxi častá pro finanční data. Vyznačují se tím, že jsou více špičatá kolem středu, na koncích je jejich hustota větší a v ramenech menší než u normálního rozdělení, se stejnou střední hodnotou a rozptylem. Jinak řečeno, jak výnosy blízko střední hodnoty, tak výnosy velmi vysokých kladných nebo záporných hodnot se objevují častěji než je tomu u normálního rozdělení. Další odchylkou od normálního rozdělení je nesymetričnost rozdělení výnosů, tedy koeficient šikmosti není nulový jako u normálního rozdělení. To znamená, že kladné a záporné výnosy se nevyskytují se stejnou četností.



**Obrázek 4:** Skutečné rozdělení logaritmů výnosů a normální rozdělení

*Zdroj: vlastní zpracování v programu STATISTICA na základě dat z [10]*

Na obrázku 4 jsou názorně vidět výše popsané vlastnosti leptokurtického rozdělení. Histogram zobrazuje skutečné rozdělení logaritmů výnosů fondu *ČSOB Akciový mix* a normální rozdělení, které je znázorněno červenou křivkou.

Základní výběrové charakteristiky logaritmů výnosů fondu *ČSOB Akciový mix* jsou uvedeny v tabulce 2. Zde stojí za povšimnutí zejména hodnota šikmosti a špičatosti. Normální rozdělení je charakteristické tím, že jeho šikmost je rovna nule a špičatost je rovna číslu 3. I z tabulky tedy vyplývá, že toto rozdělení je špičatější a nesymetrické.

I přes výše zmíněnou odlišnost od normálního rozdělení je předpoklad normálního rozdělení poměrně běžný. Je to proto, že má příznivé statistické vlastnosti, například v podobě snadného testování hypotéz nebo při odhadu parametrů pomocí metody maximální věrohodnosti.

**Tabulka 2:** Základní výběrové charakteristiky logaritmů výnosů fondu *ČSOB Akciový mix*

Popisné statistiky								
	Průměr	Medián	Modus	Minimum	Maximum	Rozptyl	Šikmost	Špičatost
Logaritmy výnosů	0,00073	0,001127	0,0000	-0,05372	0,058452	0,000121	-0,12551	4,20059

*Zdroj: vlastní zpracování v programu STATISTICA na základě dat z [10]*

Ovšem logicky se hledá vhodnější pravděpodobnostní rozdělení, které by charakterizovalo vlastnosti dat lépe než rozdělení normální. Jako další rozdělení se často používá Studentovo *t* rozdělení, které má konečný rozptyl a momenty vyšších řádů.

V poslední době je populární také rozdělení, kdy se může vycházet z předpokladu, že logaritmus výnosu má podmíněné normální rozdělení s podmíněným rozptylem, který se mění v závislosti na čase. Tato problematika je dále rozvedena v kapitole 4.

#### 2.3.4. Heteroskedasticita

Pro modelování finančních časových řad je velmi typická heteroskedasticita. O heteroskedasticitě se mluví v případě porušení předpokladu homoskedasticity, tedy je to situace, kdy je porušena podmínka konečného a konstantního rozptylu náhodných složek. Pro detekci heteroskedasticity se používá řada formálních statistických testů. Jedním z nejpoužívanějších v ekonometrické praxi je Whiteův test, Spearmanův test korelace pořadí nebo testování podmíněné heteroskedasticity založené na principu Lagrangeových multiplikátorů blíže definovaný v kapitole 4.6.1. Testy většinou spočívají v provedení testu homoskedasticity jako nulové hypotézy.

#### 2.3.5. Pákový efekt

Řady výnosů aktiv se vyznačují různými asymetrickými efekty a vedle zešikmeného tvaru rozdělení je dalším významným asymetrickým efektem tzv. pákový efekt (*leverage effect*). Tento jev souvisí s kolísáním volatility v čase a konkrétně se jedná o tendenci volatility

zvětšit se více po cenovém poklesu než po cenovém nárůstu stejné velikosti. To znamená, že volatilita se snižuje při dobrých zprávách a naopak se zvětšuje při špatných zprávách na trhu.

### **2.3.6. Nelineární formy závislosti**

Významnou empirickou vlastností výnosů pozorovanou u vysokofrekvenčních řad je skutečnost, že výnosy nejsou nezávislé. Nelineární forma závislosti se projevuje tzv. shlukováním volatility (*volatility clustering*, *volatility bunching*). Tento jev poprvé popsal Mandelbrot<sup>3</sup> a jedná se o tendenci volatility finančních trhů objevovat se ve shlucích vysokých a nízkých volatilit, tj. velké cenové změny bývají následovány velkými změnami a malé cenové změny jsou následovány malými změnami. Shlukování volatility je jasně vidět při pohledu na vývoj řady logaritmů výnosů na obrázku 3, kdy úseky s nízkým rozptylem se střídají s úseky, kde je rozptyl vysoký.

---

<sup>3</sup> MANDELBROT, B. (1936): The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business*, 36:394-419.

### 3. BOX-JENKINSOVA METODOLOGIE

Základní principy Box-Jenkinsovy metodologie, sloužící k analýze časových řad, zformulovali statistici George Box a Gwilym Jenkins roku 1970 v publikaci [4]. Boxův-Jenkinsův přístup k analýze časových řad se vyznačuje nejen stochastickým modelováním trendu a sezónnosti, ale bere za základní prvek konstrukce reziduální složku, která může být tvořena korelovanými (závislými) náhodnými veličinami. „*Boxova-Jenkinsova metodologie tedy nejen může zpracovávat časové řady s navzájem závislými pozorováními, ale dokonce těžiště jejich postupů spočívá právě ve vyšetřování těchto závislostí neboli v tzv. korelační analýze.*“ [5] str. 19. Modely, s nimiž tato metodologie pracuje, jsou modely klouzavých součtů značené jako MA, autoregresní modely AR a smíšené modely ARMA, které v praxi představují zatím nejpropracovanější přístup k modelování rutinní korelovanosti v časových pozorováních. Řady, u kterých není třeba věnovat takovou pozornost náhodné složce a naopak je třeba se zaměřit na trendovou nebo sezónní složku, je možné modelovat pomocí tzv. integrovaných modelů ARIMA a tzv. sezónních modelů, v nichž trendová nebo sezónní složka může být modelována stochasticky<sup>4</sup>. Box-Jenkinsovy modely jsou velmi flexibilní, tedy model má schopnost se adaptovat rychle na změněný charakter časové řady. ARMA procesy představují základní nástroj moderní analýzy časových řad a jejich motivací je snadné modelování pomocí dostupného softwaru. Návrh Box-Jenkinsova modelu není možné navrhnout pouze na základě ekonomické teorie, ale je nutné provést důkladné zkoumání dat.

#### 3.1. Základní modely Boxovy-Jenkinsovy metodologie

##### 3.1.1. Autoregresní proces AR

Autoregresní proces řádu označovaný jako  $AR(p)$  je možné zapsat ve tvaru 3.1

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

nebo pomocí operátoru zpětného posunutí jako 3.2

$$\varphi(B)y_t = \varepsilon_t, \quad (3.2)$$

kde 3.3

$$\varphi(B) = 1 - \sum_{j=1}^p \varphi_j B^j \quad (3.3)$$

je tzv. autoregresní operátor. Střední hodnota stacionárního procesu  $AR(p)$  je nulová a jeho autokorelační funkce  $\rho_k$  vyhovuje soustavě diferenčních rovnic 3.4

---

<sup>4</sup> Na rozdíl od jejich deterministického modelování při klasickém dekompozičním přístupu, kdy jsou časové řady rozloženy na tyto složky: trend, sezónní složka, cyklická složka a reziduální – náhodná složka.

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p}, k > 0. \quad (3.4)$$

Tyto rovnice jsou odvozeny tak, že vztah 3.1 je postupně násoben veličinami  $y_{t-k}$  pro  $k > 0$  a tak se přejde ke středním hodnotám. Parametry procesu AR( $p$ ) se dají vypočítat pomocí hodnot jeho autokorelační funkce a používá se tzv. Yuelova-Walkerova soustava rovnic 3.5, která je tvořena vztahy 3.4 pro  $k = 1, \dots, p$ :

$$\rho_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \rho_1 + \dots + \varphi_p \rho_{p-1},$$

$$\rho_2 = \varphi_1 \rho_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_p \rho_{p-2},$$

⋮

$$\rho_p = \varphi_1 \rho_{p-1} + \varphi_2 \rho_{p-2} + \dots + \varphi_p. \quad (3.5)$$

Řešením této soustavy lineárních rovnic dostaneme parametry  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  vyjádřené pomocí hodnot autokorelační funkce. Rozptyl procesu AR( $p$ ) má formu 3.6

$$\gamma_0 = \sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \varphi_1 \rho_1 - \dots - \varphi_p \rho_p} \quad (3.6)$$

a je konstatntní v čase. Pro PACF procesu AR( $p$ ) je  $k_0 = p$ , tj.  $\rho_{kk} = 0$  pro  $k > p$ .

Ve shrnutí tedy ACF procesu AR( $p$ ) tvoří kombinace exponenciálně klesajících pohybů nebo exponenciálně klesajících sinusoidních pohybů. Hodnoty PACF pro zpoždění  $k = 1, 2, \dots, p$  jsou různé od nuly, pro další zpoždění se potom rovnají nule.

### Proces AR(1)

Tento proces má tvar 3.7

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3.7)$$

a pomocí operátoru zpětného posunutí může být vyjádřen jako 3.8

$$(1 - \varphi_1 B)y_t = \varepsilon_t, \quad (3.8)$$

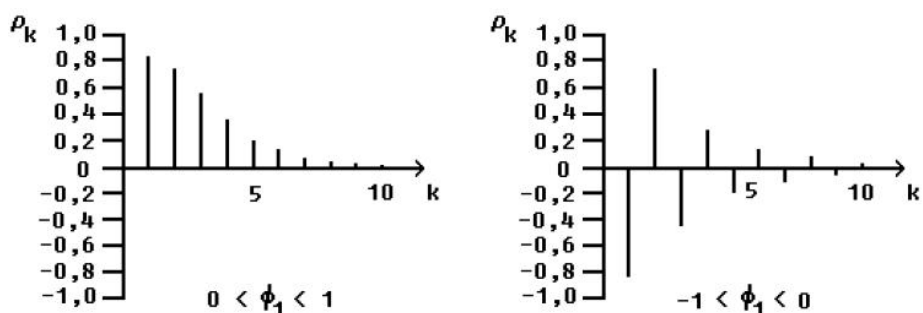
s podmínkou stacionarity  $|\varphi_1| < 1$  a ACF ve tvaru 3.9

$$\rho_k = \varphi_1^k, k \geq 0, \quad (3.9)$$

a PACF ve tvaru 3.10

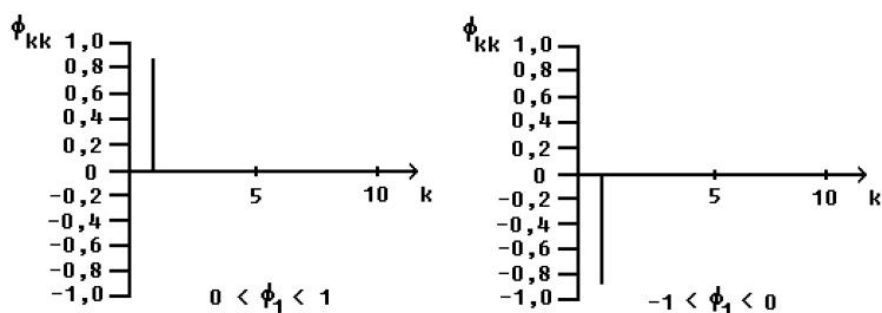
$$\phi_{11} = \varphi_1, \phi_{kk} = 0, k > 1. \quad (3.10)$$

Autokorelační funkce stacionárního procesu AR(1) je tedy geometrická posloupnost klesající v absolutní hodnotě k nule a parciální autokorelační funkce procesu AR(1) má identifikační bod  $k_0 = 1$ . Tvary autokorelační funkce procesu AR(1) znázorňují korelogramy na obázku 5 a charakteristické tvary parciální autokorelační funkce ukazuje obrázek 6.



**Obrázek 5:** ACF procesu AR(1)

Zdroj: [2]



**Obrázek 6:** PACF procesu AR(1)

Zdroj: [2]

### Proces AR(2)

Tento proces má tvar 3.11

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad (3.11)$$

a pomocí operátoru zpětného posunutí může být vyjádřen jako 3.12

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2)y_t = \varepsilon_t, \quad (3.12)$$

s podmínkou stacionarity  $\varphi_2 + \varphi_1 < 1, \varphi_2 - \varphi_1 < 1, -1 < \varphi_2 < 1$ .

Pro autokorelační funkci platí vztah 3.13

$$\rho_k - \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} = 0, k = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

a parciální autokorelační funkce 3.14

$$\phi_{11} = \frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2}, \phi_{22} = \varphi_2 \text{ a } \phi_{kk} = 0, \text{ pro } k > 1 \quad (3.14)$$

má identifikační bod  $k_0 = 2$ .



### 3.1.2. Proces klouzavých součtů MA

Proces klouzavých součtů řádu  $q$  značený jako  $MA(q)$  z anglického *moving average* má tvar 3.15

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (3.15)$$

kde  $\varepsilon_t$  je bílý šum,  $\theta_1 \dots \theta_q$  jsou parametry a  $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$  je operátor klouzavých součtů. Proces  $MA(q)$  je vždy stacionární s nulovou střední hodnotou a rozptylem ve tvaru 3.16

$$\sigma_y^2 = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)\sigma^2 \quad (3.16)$$

Autokorelační funkce procesu  $MA(q)$  má bod useknutí  $k_0$  rovný řádu modelu  $q$  a dá se vyjádřit takto

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{pro } k = 1, \dots, q \\ 0 & \text{pro } k > q \end{cases} \quad (3.17)$$

Hodnoty ACF jsou tedy pro zpoždění  $k = 1, 2, \dots, q$  různé od nuly, pro další zpoždění se potom rovnají nule.

Parciální autokorelační funkce  $\phi_{kk}$  procesu  $MA(q)$  nemá bod useknutí, ale je omezena lineární kombinací geometricky klesajících posloupností a sinusoid s geometricky klesajícími amplitudami.

#### Proces MA(1)

Model  $MA(1)$  je dán vztahem 3.18

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (3.18)$$

a lze jej rovněž vyjádřit pomocí operátoru zpětného posunutí

$$y_t = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t. \quad (3.19)$$

Platí pro něho následující autokorelační funkce

$$\rho_1 = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}, \rho_k = 0 \text{ pro } k > 1 \quad (3.20)$$

a jeho parciální autokorelační funkce má tvar 3.21

$$\phi_{kk} = \frac{(-1)^{k-1} \theta_1^k (1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2(k+1)}} \text{ pro } k = 1, 2, \dots, \quad (3.21)$$

bez bodu useknutí a je to posloupnost geometricky klesající k nule. Jestliže  $\theta_1 < 0$ , hodnoty PACF oscilují s klesající amplitudou.

## Proces MA(2)

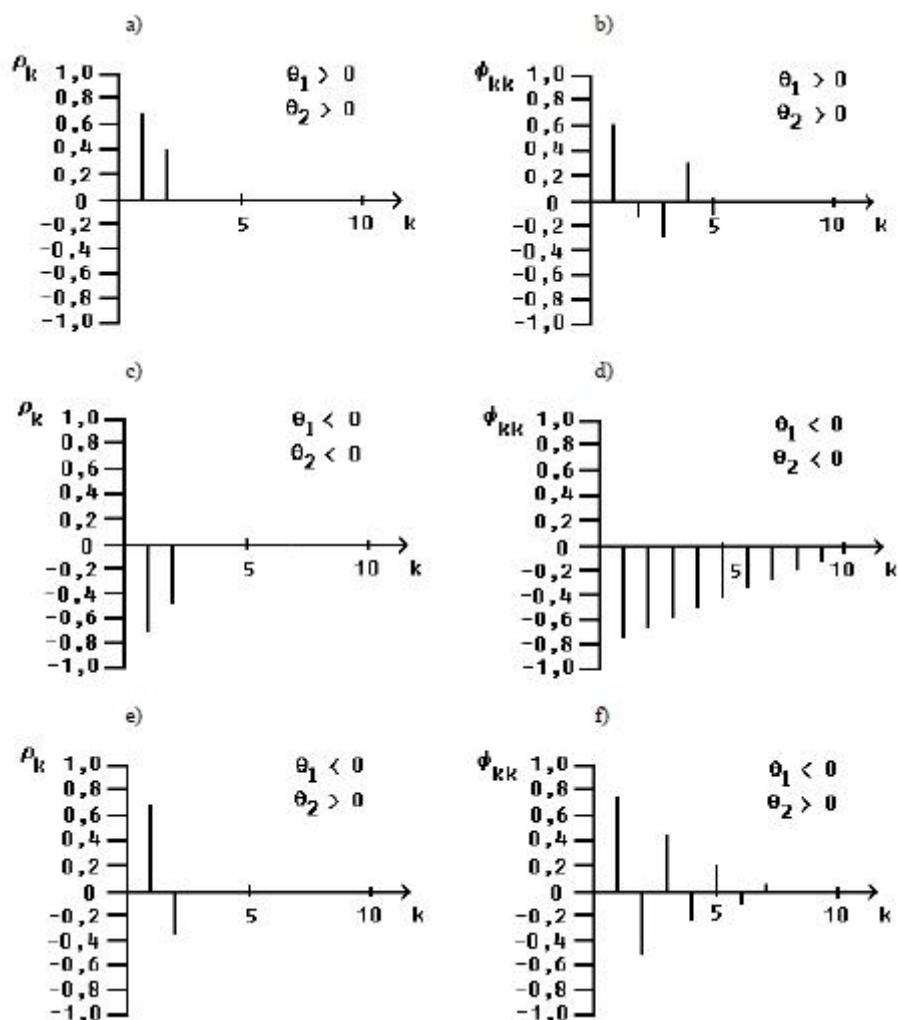
$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \quad (3.22)$$

má autokorelační funkci

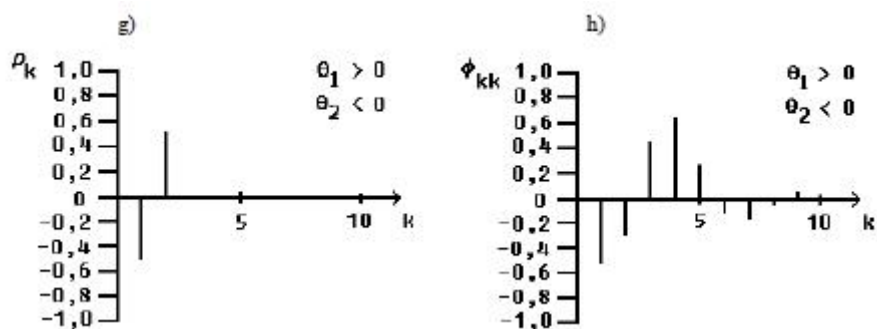
$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_1(1+\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & \text{pro } k = 1 \\ \frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & \text{pro } k = 2 \\ 0 & \text{pro } k > 2 \end{cases} \quad (3.23)$$

s bodem useknutí  $k_0 = 2$ .

Parciální autokorelační funkce procesu MA(2) je omezena buď geometricky klesající posloupností (exponenciálně klesá) nebo má tvar exponenciálně klesající sinusoidy jak lze vidět na obrázku 7.



Obrázek 7: ACF a PACF procesu MA(2)



**Obrázek 7(pokračování):** ACF a PACF procesu MA(2)

Zdroj: [2]

### 3.1.3. Smíšený proces ARMA

Smíšený proces řádu  $p$  a  $q$  značený jako  $ARMA(p,q)$  má tvar 3.24

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \text{ tj. } \varphi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (3.24)$$

kde parametry a operátory zpětného posunutí mají stejný význam jako v  $AR(p)$  a  $MA(q)$ . Střední hodnota stacionárního procesu  $ARMA(p,q)$  je nulová a jeho autokorelační funkce vyhovuje podobné soustavě rovnic jako v případě autoregresního procesu, tedy

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p}, \quad k > q. \quad (3.25)$$

Tvar ACF procesu  $ARMA(p,q)$  bude obdobný jako v případě procesu  $AR(p)$ , tj. bude mít formu kombinace exponenciálně klesajících pohybů a exponenciálně klesajících sinusoidních pohybů. Tento tvar však bude následovat až po prvních  $q - p$  hodnotách jestliže  $q > p$ . Pro  $k > p - q$  se PACF bude v případě, že  $p > q$ , chovat stejně jako u procesu  $MA(q)$ .

#### Proces ARMA(1,1)

Nejjednodušší z třídy smíšených procesů má tvar 3.26

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}. \quad (3.26)$$

Soustava 3.25 má pro tento proces tvar 3.27

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1}, \quad k > 1. \quad (3.27)$$

Autokorelační funkce stacionárního procesu  $ARMA(1,1)$  je tedy podobná ACF procesu  $AR(1)$ . Tato funkce je charakteristická exponenciálně klesajícími hodnotami, přičemž tento pokles začíná od hodnoty  $\rho_1$ . Tvar funkce PACF je podobný jako u procesu  $MA(1)$ , po počáteční hodnotě  $\phi_{11} = \rho_1$  exponenciálně klesá.

Pro všechny uvedené modely byla střední hodnota procesu nulová. Lze však pracovat i s procesem  $y_t$  s nenulovou konstantní střední hodnotou  $\mu$ . V tomto modelu stačí nahradit proces  $y_t$  procesem  $y_t - \mu$ . Parametr  $\mu$  lze odhadnout jako aritmetický průměr  $\bar{y}$  nebo se tento

parametr odhaduje jako ostatní parametry modelu. Tato úprava se někdy nazývá centrováním původní řady.

Podle [5] se při praktických aplikacích Boxovy-Jenkinsovy metodologie obvykle vystačí s procesy, pro něž  $p + q \leq 2$ . Všechny tyto procesy byly popsány výše.

### 3.2. Další možnosti klasické Boxovy-Jenkinsovy metodologie

V předchozí části jsou uvedeny modely, které se dají použít pouze na stacionární procesy. Zejména v ekonomické praxi se lze velmi často setkat s časovými řadami tvořenými nestacionárními stochastickými procesy. Nestacionarita procesu může být způsobena buď v čase se měnící střední hodnotou, nebo v čase měnícím se rozptylem procesu.

#### 3.2.1. Proces náhodné procházky („Random Walk Process“)

Proces náhodné procházky je zvláštní případ procesu AR(1), kde parametr  $\varphi_1 = 1$  a má tvar 3.28

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (3.28)$$

Proces náhodné procházky je tvořen kumulováním náhodných veličin tvořících proces bílého šumu. Nazývá se také integrovaný proces, protože jeho první diference je proces bílého šumu.

Vztah 2.28 lze vyjádřit pomocí operátoru zpětného posunutí jako

$$(1 - B)y_t = \varepsilon_t \quad (3.29)$$

a v případě jeho modifikace do tvaru 3.30

$$(1 - B)^d y_t = \varepsilon_t, \quad d = 2, 3, \dots \quad (3.30)$$

se nazývá integrovaným procesem řádu  $d$  a označuje se  $I(d)$ . Podmíněná střední hodnota procesu je v čase proměnlivá, podmíněný rozptyl je v čase konstantní.

#### 3.2.2. Procesy ARIMA

Modely ARIMA umožňují popis procesů, u nichž dochází ke změnám úrovně. Tyto změny mohou mít nesystematický náhodný charakter, jak je to běžné pro většinu časových řad z praxe. Při konstrukci těchto modelů již nepožadujeme stacionaritu analyzované řady, ale řada musí být převeditelná na stacionární přechodem k prvním nebo vyšším diferencím. Například řadu, která vykazuje stacionaritu až na náhodné změny ve velikosti své úrovně, lze stacionarizovat přechodem k řadě prvních diferencí, tedy

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}. \quad (3.31)$$

Řadu, která vykazuje stacionaritu až na náhodné změny ve sklonu úrovně, lze stacionarizovat přechodem k řadě druhých diferencí.

Integrovaný smíšený model  $ARIMA(p,d,q)$  definujeme jako

$$\varphi(B)w_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (3.32)$$

kde

$$w_t = \Delta^d y_t \quad (3.33)$$

je  $d$ -tá difference modelovaného procesu  $y_t$  a 3.32 je stacionární model  $ARMA(p,q)$  pro proces  $w_t$ . Jinak řečeno jde o to, že se nejprve provede stacionarizace pomocí vhodné difference modelované řady a vzniklá stacionární řada se modeluje pomocí modelu  $ARMA$ . Často se pro  $ARIMA(p,d,q)$  používá souhrnný zápis tvaru 3.34

$$\varphi(B)(1 - B)^d y_t = \theta(B)\varepsilon_t. \quad (3.34)$$

### Transformace časové řady a určení řádu diferencování

Účelem transformace časové řady je linearizovat řadu tak, aby ji bylo možné popsat modelem  $ARIMA$  nebo jeho speciálními případy  $AR$ ,  $MA$  nebo  $ARMA$ . Touto linearizací se dosáhne především toho, že náhodné šoky generující řadu mají opravdu charakter bílého šumu s konstantním rozptylem a často navíc s normálním rozdělením. Pro ekonomické časové řady je často vhodná logaritmická transformace.

Pro určení řádu diferencování  $d$  se podle [5] doporučuje následující postup:

1. Použije se grafický záznam řady. Pokud existují pochybnosti o stacionaritě, zakreslí se dále řada prvních a druhých diferencí a opticky se posoudí stacionarita těchto řad.
2. Pokud je potřeba rozhodnout na základě objektivnějších metod, je možné použít odhad autokorelační funkce. Je nutné sestavit ACF dané řady a diferencí této řady. Jestliže hodnoty ACF klesají pomalu, například lineárním tempem, pak je to příznak toho, že alespoň jeden kořen autoregresního operátoru je velice blízký jedné a je tedy potřeba provést další diferencování.
3. Dále je vhodné použít metodu, při níž se posuzuje velikost odhadnutého rozptylu dané řady a rozptylů jejích diferencí. Za  $d$  se pak zvolí hodnota, která dává nejmenší odhadnutý rozptyl. Platí totiž, že při postupném diferencování hodnoty odhadnutých rozptylů klesají, dokud není dosažena stacionarita, a pak opět začnou růst.

Časovou řadu není vhodné diferencovat vícekrát, než je nezbytně nutné, jinak nastává tzv. přediferencování řady. Pro časové řady se většinou používá řád diferencování  $d$  menší než 2.

### 3.2.3. Sezonní modely SARIMA

Významnou vlastností mnoha krátkodobých ekonomických časových řad je sezonnost. Sezonní složkou časových řad se rozumí periodické kolísání, které se odehrává během jednoho kalendářního roku a každý rok se opakuje. U denních finančních časových řad se může projevovat pravidelné periodické kolísání, např. ve dnech během týdne. Základním předpokladem je skutečnost, že sezonní složka má pravidelný charakter.

Proces SARIMA( $p, d, q$ ) ( $P, D, Q$ ) $_L$  je analogický procesu ARIMA, kde  $L$  je délka sezónní periody,  $p$  je řád procesu AR,  $q$  řád procesu MA,  $d$  řád běžné difference,  $P$  řád sezónního procesu AR,  $Q$  řád sezónního procesu MA a  $D$  řád sezónní difference. Identifikace obecných modelů SARIMA v nichž čísla  $p$ ,  $q$ ,  $P$  a  $Q$  mohou být nenulová je již dost komplikovanou záležitostí a obvykle hodně záleží na zkušenostech statistika, který analýzu provádí. Výstavba modelů probíhá ve třech stejných fázích jako pro modely ARIMA přičemž první fáze identifikace sezónního modelu včetně určení řádu diferencování  $d$  a  $D$  vyžaduje zvláštní pozornost.

Účelem případného diferencování řady je odstranění nestacionarity způsobené přítomností trendu a sezónním chováním. V těchto modelech se málokdy provádí běžné nebo sezonní diferencování vyššího řádu než 1. Rozhoduje se na základě studia odhadnuté autokorelační funkce  $r_k$ , přičemž se doporučuje prozkoumat asi  $4L$  prvních hodnot této funkce. To znamená, pokud je perioda 4, je třeba prozkoumat prvních 16 hodnot ACF dané časové řady. Jestliže ACF má v bodech, které jsou násobky periody lokální maxima, pak je nutné položit  $D = 1$ . Jestliže ACF klesá pomalu přibližně lineárním tempem i mezi body, které nejsou násobky  $L$ , je zapotřebí provést také běžné diferencování.

Tvary konkrétních modelů sezonních časových řad zde nebudu uvádět, neboť vycházejí ze základních modelů a pro tuto práci nejsou stěžejní. Lze je najít v bibliografii [1].

### 3.2.4. Modely časových řad s dlouhou pamětí

V praxi se lze také setkat s časovými řadami, které jsou tvořeny stacionárními procesy, kde i velmi časově vzdálené náhodné veličiny jsou poměrně silně korelované. Jejich charakteristickou vlastností je, že hodnoty ACF neklesají s rostoucím zpožděním exponenciálně, ale odhadnutý korelogram klesá hyperbolicky. Takové řady se označují jako procesy s dlouhou pamětí a pro jejich modelování se používá frakcionální diferencování.

Nejjednodušším příkladem procesu s dlouhou pamětí je frakcionálně integrovaný proces řádu  $d$ , kde  $d$  není celé číslo.

Tento proces značený jako  $FI(d)$  má tvar 3.35

$$(1 - B)^d y_t = \varepsilon_t. \quad (3.35)$$

### Procesy ARFIMA

Jestliže pro transformaci frakcionálně integrovaného procesu frakcionální diferencí  $d$ -tého řádu vykazuje výsledný proces takové hodnoty ACF a PACF, že jej lze vyjádřit pomocí modelu  $ARMA(p, q)$ , potom je možné tento proces vyjádřit ve tvaru

$$\varphi_p(1 - B)^d y_t = \theta_q(B)\varepsilon_t \quad (3.36)$$

a tento proces se pak nazývá autoregresní frakcionálně integrovaný proces klouzavých průměrů řádu  $p, d, q$  a označuje se jako  $ARFIMA(p, d, q)$ .

## 3.3. Konstrukce modelů Boxovy-Jenkinsovy metodologie

Podle [4] se doporučuje konstrukce modelu Boxovy-Jenkinsovy metodologie pro danou časovou řadu provádět ve třech krocích:

1. identifikace modelu;
2. odhad parametrů modelu;
3. diagnostika modelu.

Pokud výsledky ze třetího kroku nejsou uspokojivé, je třeba zopakovat všechny kroky od začátku a to pro jiný model.

### 3.3.1. Identifikace modelu

Identifikace modelu je první fází a jejím úkolem je rozhodnout, jaký typ modelu vybrat a určit řád modelu. Jedná se o jednu z nejtěžších úloh při výstavbě Box-Jenkinsových modelů. Je vhodné provést některé přípravné operace, jako například zobrazit grafický záznam řady. Pomocí grafu původních hodnot řady lze opticky zkontrolovat stacionaritu a střední hodnotu stacionárního procesu. Před vlastní identifikací se v případě integrovaných či sezónních modelů provádí transformace původní řady. Po těchto přípravných krocích lze začít s identifikací. Tento postup je založen na prohlídce a zkoumání průběhu grafického záznamu odhadnuté autokorelační funkce a parciální autokorelační funkce modelované časové řady. Podle těchto korelogramů se řadě přiřadí nejvhodnější typ modelu právě podle charakteristik, které jsou uvedeny v tabulce 3.

**Tabulka 3:** Tvary ACF a PACF modelů AR, MA a ARMA

Model	ACF	PACF
<b>AR(p)</b>	exponenciální a / nebo exponenciálně sinusoidní pokles	$\phi_{kk} = 0$ pro $k > p$
<b>MA(q)</b>	$\rho_k = 0$ pro $k > q$	omezená exponenciálním a/nebo exponenciálně sinusoidním poklesem
<b>ARMA(p,q)</b>	od zpoždění $(q - p)$ pro $q > p$ exponenciální nebo exponenciálně sinusoidní pokles	od zpoždění $(p - q)$ pro $p > q$ omezená exponenciálním nebo exponenciálně sinusoidním poklesem

*Zdroj: zpracováno podle[2]*

Pokud časová řada obsahuje také sezónní složku, je třeba identifikovat model typu SARIMA. V tomto případě je třeba časovou řadu stacionarizovat a pokud je to nutné, linearizovat pomocí logaritmické transformace. Když se řada diferencuje, je třeba dát pozor na to, že sezónní diference zahrnuje rovněž diferenci běžnou. Sezónní diference indikuje tvar výběrové ACF a PACF, kdy tyto funkce jsou charakteristické vysokými hodnotami v nesezónních a sezónních frekvencích. V další fázi se vypočítá výběrová ACF a PACF pro stacionarizovanou časovou řadu a s jejich pomocí se určí typ modelu. V sezónních frekvencích mají tyto funkce statisticky významně odlišné hodnoty od nuly, nejsou ale tak vysoké, aby časová řada nebyla považována za stacionární. Po identifikaci a určení modelu sezónní složky je třeba vypočítat výběrovou ACF a PACF tentokrát pro rezidua sezónního modelu a na jejich základě posoudit, zda by bylo vhodné doplnit o další složku základních modelů, tedy AR, MA nebo ARMA. Doporučuje se přezkoušet několik alternativ.

### **Identifikace modelu na základě informačních kritérií**

Pokud dojdeme k závěru, že existuje několik akceptovatelných modelů a není jednoduché z nich vybrat ten nejlepší, je nutné přistoupit na testování dodatečných kritérií. Jedná se o modernější přístup k identifikaci. Tato kritéria jsou založena na porovnání reziduí jednotlivých modelů prostřednictvím souhrnných statistik. K problému identifikace modelu se přistupuje jako k problému odhadu parametrů na základě optimalizace 3.37

$$(\hat{p}, \hat{q}) = \arg \min_{(k,l)} A(k, l), \quad k = 0, 1, \dots, K, l = 0, 1, \dots, L, \quad (3.37)$$

kde  $A(k, l)$  je kritérium, k jehož konstrukci musíme pro danou řadu odhadnout model s parametry  $k$  a  $l$ . Využívá se zde teorie informace a funkce, která penalizuje zbytečně velké řády  $k$  a  $l$ . Nejvíce využívaná informační kritéria založená na této myšlence jsou následující:



- **Kritérium AIC (Akaike information criterion)**

$$AIC(k, l) = \log \hat{\sigma}_{k,l}^2 + \frac{2(k+l)}{n}, \quad (3.38)$$

Vzhledem k jednoduchému tvaru patří kritérium AIC k nejpoužívanějším. Při jeho praktických aplikacích bylo však zjištěno, že příslušný odhad modelu je nekonzistentní.

- **Kritérium BIC (Bayes information criterion)**

$$BIC(k, l) = \ln \hat{\sigma}_{k,l}^2 + \frac{(k+l+1) \ln n}{n}, \quad (3.39)$$

kde  $\hat{\sigma}_{k,l}^2$  je odhadnutý rozptyl bílého šumu procesu ARMA( $k, l$ ) a  $n$  je délka časové řady. Kritérium BIC sice poskytuje konzistentní odhad řádu modelu, ale s velkým rozptylem.

### 3.3.2. Odhad parametrů

V současné době se používá mnoho různých odhadových procedur. Jejich komplikovaný popis zde ale nebude uvádět, protože pro tyto výpočty je v každém případě nutné použít výpočetní techniku, kde jsou tyto výpočty součástí programových funkcí. Existuje celá řada programů, které požadovaný odhad parametrů včetně dalších operací provedou. Uživatel těchto programů by měl ale znát základní myšlenky těchto odhadových procedur a proto jejich stručný popis bude uveden v následujícím textu.

Klasický přístup k praktickému odhadování parametrů v modelech časových řad představují podmíněné a nepodmíněné odhadové metody nejmenších nelineárních čtverců. Tyto metody jsou stále aktuální díky tomu, že značná část současných odhadových procedur v této oblasti vznikla modifikací této metody. Při normálním bílém šumu lze tuto metodu považovat za aproximaci metody maximální věrohodnosti, která se dnes běžně používá pro konstrukci statistických odhadů. Při použití metody nejmenších nelineárních čtverců se hledají odhady identifikovaného modelu ARMA( $p, q$ )

$$(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) = (\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_p, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p), \quad (3.40)$$

tak, že se minimalizuje součet čtverců 3.41

$$S(\varphi, \theta) = \sum \varepsilon_t^2(\varphi, \theta), \quad (3.41)$$

kde

$$\varepsilon_t(\varphi, \theta) = \theta^{-1}(B)\varphi(B)y_t \quad (3.42)$$

je odhadnutá hodnota bílého šumu při příslušných hodnotách parametrů  $\varphi$  a  $\theta$ . Necht' je tedy třeba odhadnout parametry modelu ARMA( $p, q$ ) z naměřených hodnot  $y_1, \dots, y_n$ . Pro výpočet odhadnuté hodnoty bílého šumu se místo obecného vzorce 3.42 používá rekurentní vztah 3.43

$$\varepsilon_t(\varphi, \theta) = y_t - \varphi_t y_{t-1} - \dots - \varphi_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1}(\varphi, \theta) - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}(\varphi, \theta). \quad (3.43)$$

Aby bylo možné tento výpočet zahájit v čase  $t = 1$ , je potřeba znát výchozí hodnoty. Pro získání těchto hodnot lze použít jednu z následujících strategií:

- **Podmíněná metoda nejmenších čtverců** – Tato metoda je označena jako *podmíněná*, protože odhadnuté hodnoty bílého šumu jsou počítány podmíněně v závislosti na počátečních hodnotách uvažované řady a bílého šumu. Při tomto přístupu jsou všechny výchozí hodnoty položeny rovno nule. Tento postup se ale doporučuje modifikovat tak, že se vzorec 3.43 začne používat až v čase  $t = p + 1$ .
- **Nepodmíněná metoda nejmenších nelineárních čtverců** – Tato metoda se oproti té předchozí snaží závislost na počátečních hodnotách eliminovat, takže by měla poskytovat spolehlivější odhady parametrů. Tento postup navrhnul Boxem a Jenkinsem spočívá v minimalizaci součtu čtverců

$$S(\varphi, \theta) = \sum_{t=-\infty}^n [\varepsilon_t(\varphi, \theta)]^2, \quad (3.44)$$

kde symbol  $[\varepsilon_t(\varphi, \theta)]$  značí podmíněnou střední hodnotu veličiny  $\varepsilon_t$  počítanou při pevných hodnotách časové řady, jsou-li  $\varphi$  a  $\theta$  hodnoty parametrů v uvažovaném modelu. Odhady parametrů jsou tedy zkonstruované tak, aby se minimalizovala odhadnutá reziduální složka, přičemž je maximálně využita informace, která je o modelu k dispozici.

Vzhledem k výpočetní složitosti tohoto přístupu se preferuje podmíněný přístup, avšak v sezónních modelech se doporučuje používat přístup nepodmíněný.

Vlastní minimalizace výrazu  $S(\varphi, \theta)$  se provádí výhradně pomocí počítače, ať byly hodnoty získány podmíněnou nebo nepodmíněnou metodou. Pro nelineární optimalizace se používá například Gaussův-Newtonův iterační algoritmus. Více o této problematice například v [5].

### 3.3.3. Diagnostika modelu

Diagnostika neboli ověřování modelu spočívá v tom, že pomocí různých nástrojů se ověřuje adekvátnost zkonstruovaného modelu. Velmi důležitým diagnostickým nástrojem je vypočtený bílý šum  $\{\varepsilon_t\}$  z odhadnutého modelu. Grafický záznam bílého šumu, jeho odhadnutý korelogram a histogram mohou indikovat případné chyby v modelu. V případě správně odhadnutého modelu se totiž očekává, že vypočtený bílý šum má nulovou střední hodnotu, konstantní rozptyl, nekorelovanost a normalitu.

Autokorelaci nesystematické složky modelu lze posoudit pomocí výběrové autokorelační funkce

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_t \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-k}}{\sum_t \hat{\varepsilon}_t^2}, \quad (3.45)$$

kdy nesystematická složka není autokorelovaná, pokud hodnoty této funkce leží uvnitř intervalu  $\pm 2\sqrt{n}$ , tedy 95% intervalu spolehlivosti.

Další možností je použít tzv. *portmanteau test*. Tímto testem se testuje hypotéza  $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_K = 0$  proti hypotéze  $H_1: \text{non } H_0$ , kde  $\rho_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , jsou autokorelace nesystematické složky modelu pro zpoždění  $k$ .  $K$  je číslo srovnatelné s číslem  $\sqrt{n}$ , kde  $n$  je délka analyzované časové řady. Jestliže je model ARIMA správně zkonstruovaný, potom má statistika 3.46

$$Q = n \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k^2 \quad (3.46)$$

pro vysoké  $n$  a  $K$  přibližně rozdělení  $\chi^2$  s  $(K - p - q)$  stupni volnosti. Porovnáním hodnoty testového kritéria 3.46 s příslušnými kvantily rozdělení lze testovat hypotézu o neautokorelovanosti hodnot nesystematické složky.

V praxi se také často používá testově silnější *Box-Ljungova* statistika 3.47

$$Q^* = n(n+2) \sum_{k=1}^K (n-k)^{-1} \hat{\rho}_k^2, \quad (3.47)$$

kdy se při testování její hodnota porovnává rovněž s příslušnými kvantily rozdělení  $\chi^2$  ( $K - p - q$ ).<sup>5</sup>

Dalším diagnostickým nástrojem je zkoumání normality nesystematické složky. Histogram standardizovaných reziduí se porovnává s normálním rozdělením. Dále se může použít například test založen na testování šikmosti a špičatosti.

### Ověření řádu diferencování

V předchozím textu v odstavci 3.2.2 bylo zmíněno, jak určit řád diferencování. Vedle těchto subjektivních metod, které spočívají v posouzení grafu časové řady a poměrem rozptylů existují i statistické testy. Testy na jednotkový kořen ověří, zda je přítomen jednotkový kořen v autoregresním operátoru příslušného modelu na dané hladině významnosti. Mezi tyto testy patří Dickeyovy-Fullerovy testy, Phillipsovy-Perronovy testy a KPSS testy viz. např. [1] nebo [6].

<sup>5</sup> Statistiky 3.46 a 3.47 lze samozřejmě použít i k testování korelovanosti původní časové řady.

### 3.4. Konstrukce předpovědí na základě odhadnutého modelu

Tvorba předpovědí je jedním ze základních úkolů analýzy ekonomických a finančních časových řad. Při uvažování modelu  $ARIMA(p,d,q)$  ve tvaru 3.34 je úkolem předpovědět budoucí hodnotu  $y_{T+h}$ , kde  $T$  je práh predikce a  $h$  se označuje jako horizont predikce. Předpověď hodnoty  $y_{T+h}$  pro  $h \geq 1$  je konstruován v čase  $T$ , tedy jsou známy hodnoty  $y_T, y_{T-1}, \dots$ . Předpověď budoucí hodnoty tedy bude jejich lineární kombinací. Předpověď s minimální střední čtvercovou chybou konstruovanou v čase  $T$  na horizont  $h$  je zapsána ve formě

$$y_T(h) = \psi_h^* \varepsilon_T + \psi_{h+1}^* \varepsilon_{T-1} + \psi_{h+2}^* \varepsilon_{T-2} \dots \quad (3.48)$$

Střední čtvercová chyba (*mean square error*) předpovědi má tvar

$$E[y_{T+h} - y_T(h)]^2 \quad (3.49)$$

a požaduje se, aby byla minimální. Je minimální tehdy, jestliže  $\psi_{h+j}^* = \psi_{h+j}, j = 0, 1, \dots$

Po úpravách vypadá výsledný tvar takto

$$y_T(h) = E(y_{T+h} | X_T, X_{T-1}, \dots), \quad (3.50)$$

tj. předpověď hodnoty v čase  $(T + h)$  s minimální střední čtvercovou chybou je podmíněná střední hodnota náhodné veličiny  $y_{T+h}$ . Předpovědní chyba má tvar

$$e_T(h) = y_{T+h} - y_T(h). \quad (3.51)$$

Předpovědi se rovněž jako odhady parametrů provádí pomocí statistického softwaru, který rychle a přesně počítá požadované předpovědi pro zvolený horizont  $h$ .

## 4. MODELY VOLATILITY

Volatilita je velice důležitým pojmem v oblasti financí, zvláště pak v pojišťovnictví a bankovníctví. Obvykle pro volatilitu platí, že je totožná s rozptylem. Toto však neplatí pro finanční data, protože finanční časové řady jsou heteroskedastické. Volatilita je v čase proměnlivá a vyjadřuje nestálost či kolísání. Volatilita se používá k měření rizika, kde udává míru variability sledované veličiny, a je spojena s podmíněným rozptylem. Zde je nutné zdůraznit, že riziko je v pojišťovnictví spojeno s pravděpodobností vzniku nežádoucí události, kdežto volatilita udává míru variability i v pozitivním smyslu.

Volatilita není pozorovatelná veličina, a proto je velmi obtížné vyhodnotit a porovnat modely, které s ní pracují. Existuje mnoho modelů volatility a každý z nich se snaží zachytit její odlišné rysy. Jako první se používaly modely historické volatility, po nich se dostaly na řadu ARMA procesy, které nebyly dlouho používány, neboť vznikly modely ARCH. Se zrodem modelu ARCH nastal velký rozvoj v této oblasti a vzniklo mnoho modifikací tohoto modelu. V současnosti se velice často používají např. modely GARCH, EGARCH a GJR GARCH.

Důležité v této části je si uvědomit rozdíl mezi nepodmíněným a podmíněným rozptylem. Nepodmíněný rozptyl nemá explicitní závislosti na minulosti a jeví se jako dlouhodobý vzor chování časové řady. Naopak podmíněný rozptyl v sobě zahrnuje závislosti rozptylu na minulých pozorováních. Právě podmíněný rozptyl se ztotožňuje s volatilitou a je předmětem zkoumání finanční ekonometrie.

### 4.1. Obecné schéma

Nyní je třeba pracovat s podmíněnou střední hodnotou  $\mu_t$  a podmíněným rozptylem  $\sigma_t^2$  ve tvaru funkcí informace  $\Omega_{t-1}$

$$\mu_t = E(y_t | \Omega_{t-1}) = g(\Omega_{t-1}), \quad \sigma_t^2 = h_t = \text{var}(y_t | \Omega_{t-1}) = h(\Omega_{t-1}), \quad (4.1)$$

kde  $g, h$  jsou vhodné funkce a  $\Omega_{t-1}$  je veškerá informace známá od času  $t - 1$ <sup>6</sup>.

Všechny moderní modely fungují na stejném principu a lze je znázornit pomocí obecného schématu 4.2

$$y_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t = \mu_t + \sqrt{h_t} \varepsilon_t = g(\Omega_{t-1}) + \sqrt{h(\Omega_{t-1})} \varepsilon_t, \quad (4.2)$$

kde  $\varepsilon_t$  jsou náhodné veličiny, pro které platí  $\varepsilon_t \sim iid(0, 1)$  a dále

---

<sup>6</sup> Tuto minulou informaci generují všechny minulé hodnoty  $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}, \{e_{t-1}, e_{t-2}, \dots\}$  a vhodné funkce těchto hodnot.

$$e_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (4.3)$$

kde  $e_t$  jsou nekorelované náhodné veličiny, ale nejsou nezávislé. Model je tedy určován rovnicí střední hodnoty a rovnicí volatility. Různé modely se liší jinou parametrizací závislosti podmíněného rozdělení  $e_t$  na předchozích hodnotách a např. modely Boxovy-Jenkinsovy metodologie z kapitoly 3 jsou speciálním případem 4.2 pro lineární funkci  $g$  a konstantní funkci  $h$ .

Pro modelování finanční volatility nejsou ARMA modely ideální, neboť předpokládají konstantní volatilitu a nejsou schopny zachytit její skutečnou proměnlivost. Při aplikaci ARMA modelů se navíc pracuje za předpokladu normality, avšak finanční časové řady mají rozdělení leptokurtické. Výhodou je, že ARMA modely vykazují podobnost s modely ARCH, které jsou ve finančnictví velmi významné.

## 4.2. Autoregresní modely volatility

Tyto modely byly původně zavedeny jako přímá aplikace Boxovy-Jenkinsovy metodologie pro volatilitu. Ve finanční praxi se podle [6] často používají pro časové řady denních logaritmických měr zisku  $r_t$ . Vzhledem k průměrné nulové úrovni takových řad se za vstup do autoregresního modelu volatility 4.4 obvykle bere přímo řada čtvercových logaritmických měr zisku  $r_t^2$ . Tyto modely se mohou použít i pro časové řady denních cen finančních aktiv, kdy se jako vstup do autoregresního modelu volatility 4.4 používá řada zlogaritmovaných poměrů nejvyšší a nejnižší ceny uvažovaného aktiva během každého obchodního dne. Pro oba případy se nakonec odhadne autoregresní model AR( $s$ ) tvaru 4.4

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \varepsilon_t, \quad (4.4)$$

kde  $\varepsilon_t$  je klasický bílý šum.

## 4.3. Modely ARCH

Modely volatility ARCH (autoregressive conditional heteroscedascity) popsal v roce 1982 Robert F. Engle [14]. Tyto modely a především zobecněné modely GARCH v dnešní době představují nejúspěšnější nástroj pro modelování finančních časových řad. Tyto modely vycházejí z toho, že finanční časové řady jsou heteroskedastické a že volatilita proměnná v čase je jednoduchou kvadratickou funkcí minulých předpovědních chyb  $e_t$ . To znamená, že odchylky od podmíněné střední hodnoty  $e_t$  lze považovat za autokorelované. To je dáno tím, že větší výkyvy v dané finanční řadě jsou očekávány spíše po větších předchozích výkyvech a menší výkyvy lze očekávat s větší pravděpodobností po menších výkyvech volatility. Tento

jev se nazývá **shlukování volatility** (viz odstavec 2.3.6). Proto pro modelování finančních řad je vhodné zvolit autoregresní model. Navíc platí, že  $E(e_t) = 0$  a podmíněný rozptyl má tvar

$$\sigma_t^2 = \text{var}(e_t | \Omega_{t-1}) = E(e_t | \Omega_{t-1}) = e_t^2, \quad (4.5)$$

Pro finanční časové řady se tím pádem stává vhodným vztah

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m e_{t-m}^2, \quad (4.6)$$

kteří při vhodně zvoleném  $m$  představuje volatilitu jako jednoduchou kvadratickou funkci zpožděných hodnot  $e_t$ . Na základě těchto poznatků a obecného zápisu 4.2 lze formulovat model ARCH( $m$ ) řádu  $m$  ve tvaru 4.7

$$y_t = \mu_t + e_t, \quad e_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m e_{t-m}^2, \quad (4.7)$$

kde  $\varepsilon_t$  jsou *iid* náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem a podmíněná střední hodnota  $\mu_t$  je modelována pomocí vhodné rovnice střední hodnoty (viz 4.1), která je většinou lineární. Často se jedná o podmíněnou střední hodnotu odpovídající lineárnímu regresnímu modelu nebo ARMA procesu. Konkrétně tvar s podmíněnou střední hodnotou  $\mu_t$  odpovídající procesu AR( $p$ ) vypadá následovně

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + e_t, \quad e_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m e_{t-m}^2 \quad (4.8)$$

Vlastnosti ARCH modelu jsou dále ukázány na příkladě ARCH(1) procesu tvaru 4.9

$$y_t = \mu_t + e_t, \quad e_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 \quad (\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0). \quad (4.9)$$

1. Střední hodnota odchylek  $e_t$  je nulová

$$E(e_t) = E(E(e_t | \Omega_{t-1})) = E(\sigma_t E(\varepsilon_t)) = 0. \quad (4.10)$$

2. Pro rozptyl odchylek  $e_t$  platí 4.11

$$\text{var}(e_t) = E(e_t^2) = E(E(e_t^2 | \Omega_{t-1})) = E(\sigma_t^2) = E(\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \text{var}(e_{t-1}) \quad (4.11)$$

a odtud pak

$$\text{var}(e_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}, \quad 0 \leq \alpha_1 < 1. \quad (4.12)$$

3. Pro špičatost odchylek  $e_t$  platí 4.13

$$\gamma_2 = \frac{E(e_t^4)}{(\text{var}(e_t))^2} - 3 \geq 0, \quad (4.13)$$

což je ve shodě s požadavkem modelovat leptokurtické rozdělení.

Volba řádu modelu je pro aplikaci ARCH kritická. V případě volby řádu modelu  $p = 1$  rozptyl závisí pouze na variabilitě předchozího pozorování a nevýhodou je to, že vlivy šoků

z minulosti zaniknou po jednom období, což je ve srovnání s realitou nepřípustné. Při použití tohoto modelu je třeba zvolit vysoký řád  $p$ , aby bylo dosaženo požadované setrvačnosti volatility. S tímto faktem souvisí nutnost odhadovat velký počet parametrů, což může být v praxi problém a navíc může dojít k porušení podmínky nezápornosti u některého z odhadovaných parametrů. Dalším problémem u tohoto modelu je to, že není zohledněn pákový efekt či asymetrie, kdy kladné a záporné odchylky  $e_t$  mohou mít odlišný vliv na volatilitu. Tyto nedostatky odstraňuje model GARCH.

#### 4.4. Modely GARCH

V modelech GARCH (generalized ARCH,), které navrhl Bollerssev (1986), a v jeho dalších modifikacích může volatilita záviset nejen na předchozím šoku, ale také na svých předchozích hodnotách volatility. „Zvlášť model GARCH(1,1), který je nejjednodušším představitelem této třídy modelů, je dnes jedním z nejpoužívanějších modelů finančních časových řad, neboť je schopen již pomocí tří parametrů zvládnout velmi obecné volatilit struktury (modely GARCH vyšších řádů se v praxi využívají jen sporadicky)“ [6] str. 391. Model GARCH(1,1) je relativně jednoduché odhadnout a přes svou jednoduchou stavbu je schopen lépe zachytit setrvačnost volatility. Model GARCH( $m,s$ ) má tvar 4.14

$$y_t = \mu_t + e_t, e_t = \sigma_t \varepsilon_t, \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (4.14)$$

kde  $\varepsilon_t$  jsou iid náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem a parametry modelu splňují

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0, \sum_{i=1}^{\max\{m,s\}} (\alpha_i + \beta_i) < 1. \quad (4.15)$$

Speciálně model GARCH(1,1) má tvar 4.16

$$y_t = \mu_t + e_t, e_t = \sigma_t \varepsilon_t, \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \text{ kde } \alpha_0 > 0, \alpha_1, \beta_1 \geq 0, \alpha_1 + \beta_1 < 1. \quad (4.16)$$

V těchto modelech vystupuje známý proces ARMA( $m,s$ ), kde GARCH modely ve výše uvedené podobě v podstatě využívají ARMA rovnici pro čtverce inovací  $e_t^2$ . To velmi usnadňuje ekonometrické výpočty, jako je odhad parametrů a testy homoskedasticity. Uvádí se, že pro většinu empirických aplikací postačují pro vhodný model volatility nízké hodnoty  $m \leq 2, s \leq 2$ .

GARCH modely nejlépe fungují za relativně stabilních tržních podmínek, neboť nejsou schopny modelovat vysoce nepravidelné jevy a další neočekávané události, které vedou k významným strukturálním změnám.



## 4.5. Modifikace modelu GARCH

### 4.5.1. Model IGARCH

Model s jednotkovým kořenem autoregresního polynomu v rovnici volatilitě značený jako IGARCH( $m,s$ ) (integrated GARCH) je analogie modelu ARIMA. Na rozdíl od modelu GARCH, který je stacionární ve volatilitě a předpovědi volatilitě konvergují pro rostoucí horizont k rozptylu procesu, v modelu IGARCH přetrvává současná informace jako významná pro předpovědi volatilitě ve všech horizontech. Tato vlastnost je velice užitečná pro modelování volatilitě na finančních datech pořizovaných s vysokou frekvencí a je lepší pro dlouhodobé předpovědi.

Dalším rozšířením tohoto modelu je model FIGARCH (*fractionally* IGARCH), ve kterém je struktura zachycena frakcionálně integrovanými modely, resp. modely s dlouhou pamětí. Šoky se v tomto případě do podmíněného rozptylu zmenšují pomalu a hyperbolicky.

### 4.5.2. Model EGARCH

Exponenciální GARCH navržený Nelsonem (1991) byl prvním modelem volatilitě, který byl schopen zachytit asymetrický efekt. Model EGARCH popisuje vztah mezi logaritmem podmíněného rozptylu a minulými šoky. Zápis pomocí logaritmických volatilit má výhodu v tom, že podmínky nezápornosti parametrů jsou nyní irelevantní a pákový efekt je exponenciální nikoli kvadratický. Navíc absence podmínek nezápornosti parametru usnadňuje jejich odhad.

### 4.5.3. Model GJR GARCH

Další úspěšnou modifikaci GARCH navrhli Glosten, Jagannathan a Runkle (1993), podle nichž je model označen. Někdy se také používá označení prahový GARCH model (*threshold* GARCH či TGARCH). Rozdíl mezi GARCH a GJR GARCH modelem je v tom, že GARCH pracuje pouze v jednom režimu a všechna pozorování mají vliv na parametry modelu. Prahové modely pracují ve dvou a více režimech, které rozlišují různé podmínky při vzniku volatilitě. Data ze strukturálně podobných režimů pak ovlivňují parametry jen z příslušného režimu, přičemž přepínání mezi jednotlivými režimy pak probíhá na základě nějaké známé veličiny  $y_t$ . Tato specifikace dává možnost zakomponovat do modelu asymetrii dat a model dovoluje volatilitě reagovat odlišně na minulé šoky v závislosti na jejich znaménku.

V porovnání s modelem EGARCH, který také umí zachytit asymetrii volatilitě, výhoda modelu GJR spočívá v tom, že poměr dopadu pozitivního šoku a dopadu negativního šoku se v průběhu času může měnit, je flexibilnější.

#### 4.5.4. Další modifikace

Vedle výše uvedených modelů lze v literatuře nalézt velké množství dalších modelů podmíněné heteroskedasticity, které byly vyvinuty pro zachycení různých typů asymetrických efektů. Některé z nich také vznikají vhodnou kombinací jmenovaných modelů. Tyto modely a jejich popis viz např. [1]. Pro představu uvedu alespoň jejich výčet: IEGARCH (*integrated EGARCH*), GARCH-M (*GARCH in mean*), STGARCH (*smooth transition GARCH*), VS-GARCH (*volatility switching GARCH*), ANST-GARCH (*asymmetric nonlinear smooth transition GARCH*), QGARCH (*quadratic GARCH*), MSW-GARCH (*markov-switching GARCH*).

#### 4.6. Výstavba modelů volatility GARCH

Pro proces výstavby modelů volatility lze doporučit následující postup v těchto krocích:

1. Pro časovou řadu se určí vhodný úrovnový model. Například vhodným ARMA modelem se z dané časové řady odstraní případné lineární závislosti a dále se pracuje s rezidui tohoto modelu. Tento krok je popsán v kapitole 3.
2. Otestuje se, zda je v řadě reziduí přítomná podmíněná heteroskedasticita. Testuje se nulová hypotéza podmíněné homoskedasticity proti alternativní hypotéze podmíněné heteroskedasticity.
3. V případě podmíněné heteroskedasticity je třeba určit řád modelu GARCH a odhadnout parametry tohoto modelu.
4. Ověření vhodnosti daného modelu diagnostickými testy.
5. Použití modelu pro predikční účely.

##### 4.6.1. Testování podmíněné heteroskedasticity

Test podmíněné heteroskedasticity založený na principu Lagrangeových multiplikátorů navrhl Engle (1982) [14]. Test vychází z formulace modelu ARCH, kdy podmíněný rozptyl  $\sigma_t^2$  modelu ARCH( $m$ ) ve tvaru 4.7 je konstantní, jestliže jsou parametry odpovídající veličinám  $e_{t-1}^2 + \dots + e_{t-m}^2$  rovny nule. Nulová hypotéza je  $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$  a alternativní hypotézou je, že alespoň jeden parametr je různý od nuly, tj.  $H_1: non H_0$ . Aby bylo možné provést tento test, je nutné nejprve zkonstruovat lineární regresní model, kde jako vysvětlující proměnné vystupuje  $m$  zpožděných hodnot  $e_{t-1}^2, \dots, e_{t-m}^2$ . Po odhadu parametrů tohoto modelu a výpočtu koeficientu determinace  $R^2$ , lze přistoupit k testování nulové

hypotézy. Za platnosti nulové hypotézy má statistika  $ARCH = T \times R^2$  asymptoticky  $\chi^2$  rozdělení s  $m$  stupni volnosti

#### **4.6.2. Volba řádu modelu a odhad parametrů**

Řád modelu lze přibližně odhadnout na základě průběhu ACF popřípadě PACF řady reziduí. Nicméně žádný statistický test, který by testoval příslušnou hypotézu, není k dispozici. Obvykle se nejprve odhadne model nízkého řádu a poté se podle výsledků statistické významnosti parametrů tento řád upraví. Vzhledem k tomu, že postačují modely nízkých řádů GARCH(1,1), GARCH(2,1) nebo GARCH(1,2) by neměl vznikat žádný problém. Parametry se potom odhadují metodou maximální věrohodnosti. Je zřejmé, že odhady parametrů se nepočítají ručně, ale využívá se počítačového vybavení, proto zde nebudu uvádět podrobné tvary vzorců a výpočty, které lze najít v odborné literatuře, např. [1]. Software, který pracuje s modely GARCH, odhady jejich parametrů a tvorbou předpovědí, jsou například MATLAB nebo EViews.

#### **4.6.3. Diagnostická kontrola**

Modely volatility vycházejí ze základního tvaru 4.2, kde se předpokládá, že  $\varepsilon_t$  podle vztahu 4.3 jsou nezávislé s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Je-li tento model správně určen, potom by standardizovaná rezidua tyto vlastnosti nesystematické složky měla indikovat. Pro diagnostickou kontrolu je tedy možné použít testy diagnostické kontroly úrovně lineárního modelu a to testy autokorelace a normality nesystematické složky zmíněné v části 3.3.3. Dále je možné použít Box-Ljungovu statistiku nebo test podmíněné heteroskedasticity reziduí modelu uvedené v části 4.6.1.

## 5. METODICKÁ VÝCHODISKA ŘEŠENÍ A SOFTWARE

Termín analýza finančních časových řad se vedle pojmů ekonometrie finančních trhů, ekonometrická analýza finančních dat a finanční ekonometrie používá pro jakoukoli kvantitativní analýzu finančních dat. Přitom kvantitativní analýzou se rozumí především statistické zpracování finančních dat, kam patří klasická popisná statistická analýza, statistická identifikace, odhad a verifikace příslušného modelu, statistické testování různých finančních hypotéz a konstrukce předpovědí v rámci zkonstruovaného modelu. Toto zpracování se provádí s využitím dostupných informací ve zvoleném softwaru. Poté následuje vyhodnocení získaných výsledků z hlediska jejich kompatibility s praxí a dopad v rámci dané finanční reality.

Jádrem práce je pro specifikovaný finanční problém najít vhodný teoretický model a ten aplikovat na konkrétní data. Dále je třeba ověřit, zda příslušné metody a techniky jsou použity adekvátně, tj. zda byla testována platnost předpokladů, které jsou nezbytnou součástí aplikovaných modelů. V konečné fázi je nezbytné interpretovat získané výsledky a ověřit, zda odpovídají finanční praxi.

Zdrojem dat pro finanční ekonometrii jsou profesionální finanční agentury, nadnárodní finanční instituce, statistické úřady, centrální banky, finanční databáze spravované různými investičními společnostmi, banky, pojišťovny, zajišťovny, penzijní fondy, obchodníci s cennými papíry, poradenské firmy a mnoho dalších.

Analýza finančních časových řad se soustřeďuje na dynamiku finančních jevů a v jejím rámci je nutné počítat s vysokou hustotou záznamu, tedy specifikem finančních dat nazývaným vysokofrekvenční data. Praktické výpočty v rámci finanční ekonometrie se ve většině případů provádí s využitím softwaru.

### 5.1. Specifikace řešeného problému

Před započítím finanční analýzy je nutné specifikovat problém, který bude touto analýzou řešen. V rámci této diplomové práce se zaměřuji na modelování vývoje ceny investičního fondu, do kterého může klient investovat své prostředky v rámci uzavřeného životního pojištění. První fází je sběr dat a jejich příprava pro účely finanční analýzy. Poté následuje samotná statistická analýza těchto dat, na základě které vyberu vhodný model. Na základě tohoto modelu je možné porozumět mechanismu, na jehož základě jsou generovány sledované údaje a umožní předpovědět budoucí vývoj řady. Předposlední fází je verifikace odhadnutého

modelu. Pokud se správnost modelu statisticky potvrdí, mohu přistoupit k predikci budoucích hodnot fondu. Na závěr zhodnotím výsledky a zvážím použití ve finanční praxi.

## **5.2. Volba softwaru**

Jak již bylo řečeno, výpočty ve finanční ekonometrii nelze provádět bez počítačového vybavení. Pro statistické zpracování finančních dat existuje velké množství softwaru, je ale nutné počítat s tím, že tyto produkty jsou finančně nákladné. Proto co se týče této práce, budu pracovat se softwarovými produkty, ke kterým mám jako studentka FES přístup.

### **5.2.1. STATISTICA**

STATISTICA je výkonný analytický nástroj vyvinutý společností StatSoft. Použitá verze 10 nabízí komplexní systém obsahující prostředky pro správu dat, jejich analýzu, vizualizaci a vývoj uživatelských aplikací. Obsahuje obecné statistické a grafické procedury, které lze ovládat pomocí nabídek příjemného uživatelského prostředí a navíc je možné propojit vstupy i výstupy s produkty Microsoft Office. Já budu využívat zejména nabídku Časové řady/predikce. Při zvolení této položky se vyvolá okno, kde je možné provádět analýzu časových řad. V nabízených položkách lze najít transformace jako je logaritmování, diferencování a vyhlazování původní řady, dále je možné jednoduše zobrazovat data do grafů, provádět autokorelace a parciální autokorelace, zobrazovat korelogramy podle vlastního nastavení, provádět odhady parametrů ARIMA, zkoumat rezidua ale také provádět předpovědi podle vlastního nastavení a zobrazit je do grafu s intervaly spolehlivosti. Tento program toho umí samozřejmě mnohem více, zde jsem vyjmenovala pouze nejdůležitější funkce, které souvisí s tématem této práce.

### **5.2.2. MATLAB a Toolbox GARCH**

MATLAB (*matrix laboratory*) je programové prostředí vyvíjené společností MathWorks pro vývoj algoritmů, analýzu dat, vizualizaci a matematické výpočty. Výkonnost MATLABu je rozšiřována toolboxy, což jsou specializované knihovny funkcí orientované zpravidla na daný problém nebo příslušný vědní či technický obor.

Toolbox GARCH je knihovna funkcí, která používá obecný ARMA model pro modelování podmíněné střední hodnoty v kombinaci s podmíněným rozptylem modelovaným GARCH, GJR GARCH nebo EGARCH modely pro provádění simulací, předpovědí a odhadu parametrů pro časové řady s podmíněnou heteroskedasticitou. Poskytuje funkce k provádění úloh jako je analýza před odhadem, diagnostika modelu, testování hypotéz o reziduích, funkce podporující výběr modelu a transformace časových řad.

## 6. APLIKACE MODELŮ NA DATECH

### 6.1. Výběr a popis dat

Většina lidí nemá odborné znalosti, které by jim umožnily pohybovat se samostatně na finančních trzích. Jednoduchým řešením pro širokou veřejnost jsou tedy fondy, které využívají toho, že více lidí se stejnými investičními záměry a cíli sdružují své peníze dohromady a svěří jejich správu profesionálům podle předem známých pravidel. Díky tomu se může investorem stát téměř kdokoliv a to i díky tomu, že si založí investiční životní pojištění. Je to tedy velice rozšířený způsob investování, a proto bude zajímavé vybrat data právě z této oblasti.

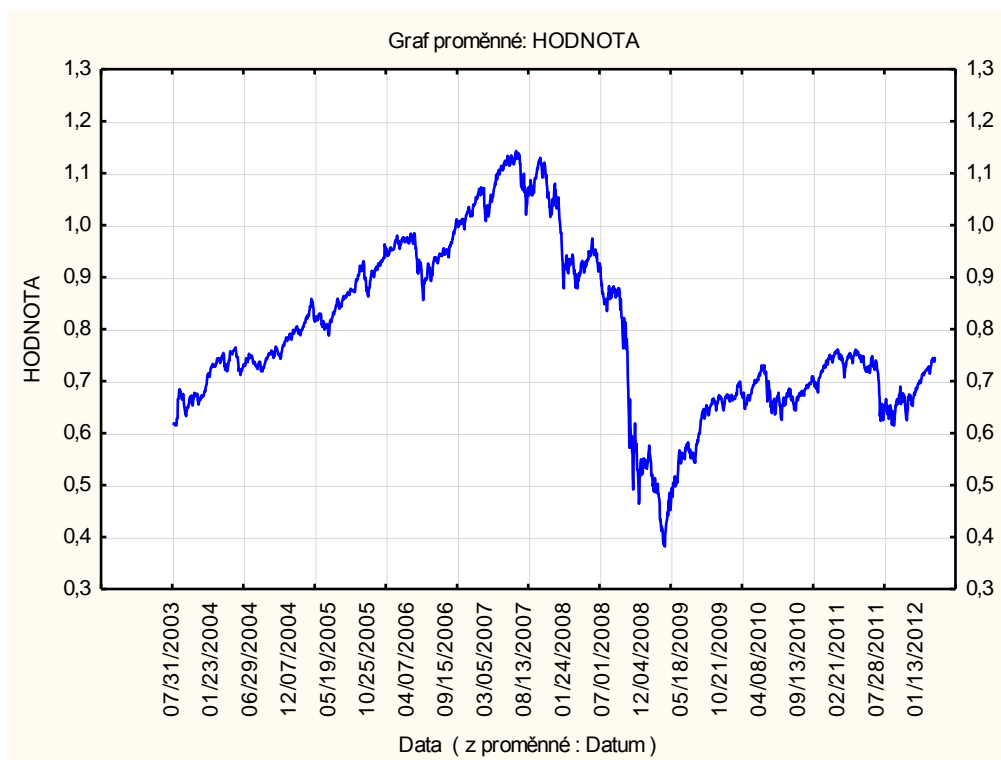
Protože investiční společnosti mají povinnost informovat občany o cenách podílových jednotek ze zákona, je poměrně snadné se dostat k těmto datům například prostřednictvím webových stránek konkrétních společností. Já jsem si vybrala investiční fond spravovaný *Investiční společností ČSOB*, protože velice podrobně reportují o vývoji cen investičních fondů a navíc lze data z webových stránek přímo exportovat do tabulky formátu *.csv*.

#### 6.1.1. Základní informace o fondu

Předmětem zkoumání je akciový fond pod registrovaným názvem **ČSOB Akciový mix**. Do tohoto fondu je možné investovat od 500 Kč měsíčně a poplatek za obhospodařování činí 2%. „*Fond investuje do světových akcií bez ohledu na oborové hranice. Zaměřuje se především na akcie obsažené v indexech S&P500, PX, EuroStoxx 50, Nikkei 225 a FTSE 100. Je určen pro investory, kteří vyhledávají možnost vysokého zhodnocení a jsou obeznámeni s riziky akciových trhů. Fond je zajištěn proti měnovému riziku a díky tomu se v případě nepříznivého vývoje na devizovém trhu eliminuje kurzový rozdíl, který by se jinak negativně promítl do výkonnosti fondu.*“ [10].

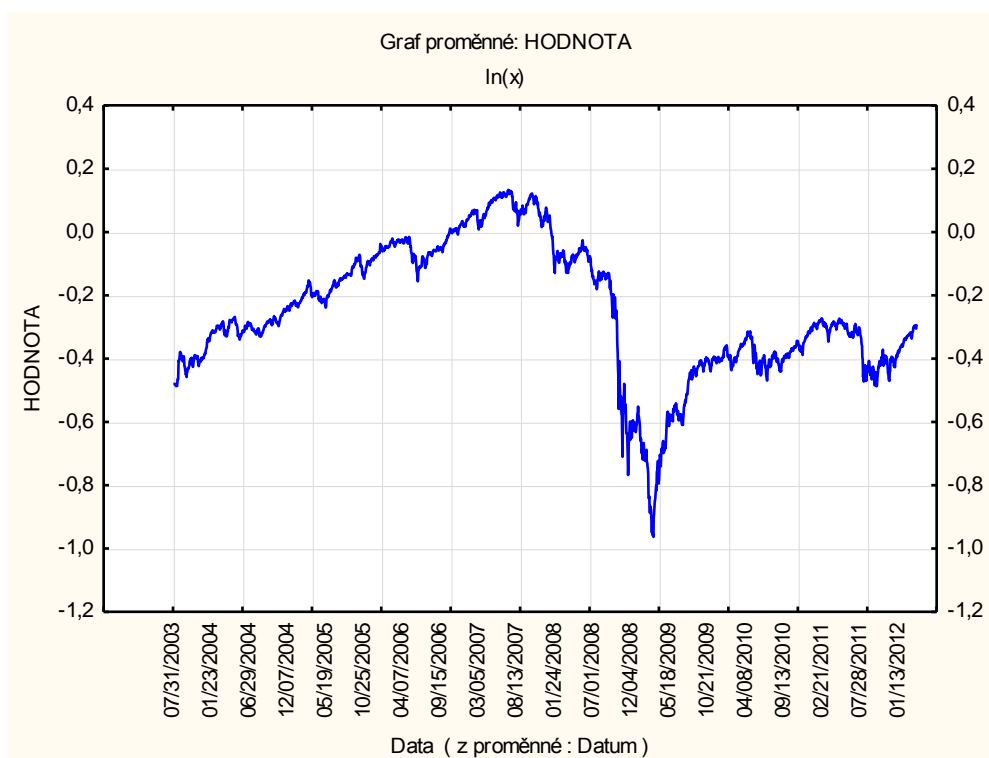
### 6.2. Analýza dat

Analyzovanou časovou řadu nejprve transformuji logaritmickou transformací (přirozený logaritmus) z důvodů vysvětlených ve druhé kapitole. Původní časová řada je zobrazena na obrázku 8 a tvar logaritmované časové řady *ČSOB Akciový mix* za období od 31. 7. 2003 do 27. 3. 2012 ukazuje obrázek 9.



**Obrázek 8:** Původní časová řada cen fondu Akciový mix

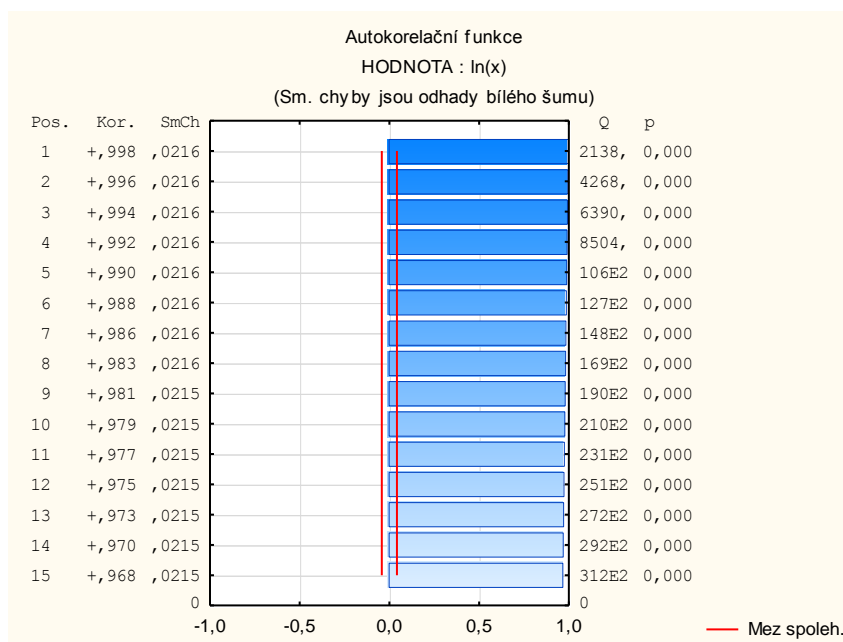
*Zdroj: vlastní zpracování v program STATISTICA na základě dat z [10]*



**Obrázek 9:** Ceny fondu ČSOB akciový mix v logaritmském vyjádření

*Zdroj: vlastní zpracování v program STATISTICA na základě dat z [10]*

Z tvaru analyzované časové řady je na první pohled zřejmá nestacionarita procesu, kterou ověřím ještě autokorelační funkcí.

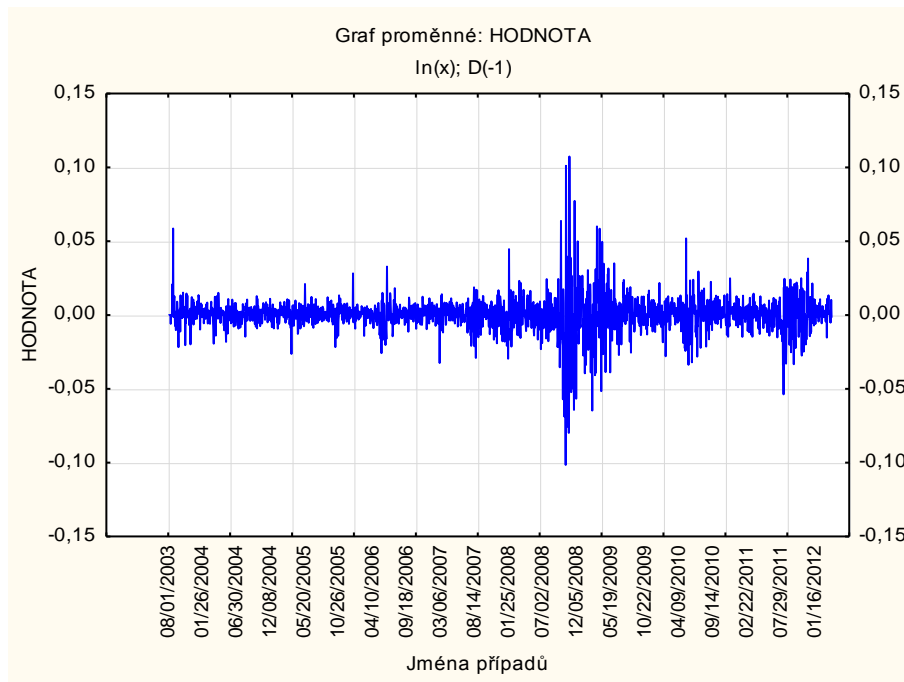


**Obrázek 10:** ACF logaritmované časové řady

*Zdroj: vlastní zpracování v program STATISTICA na základě dat z [10]*

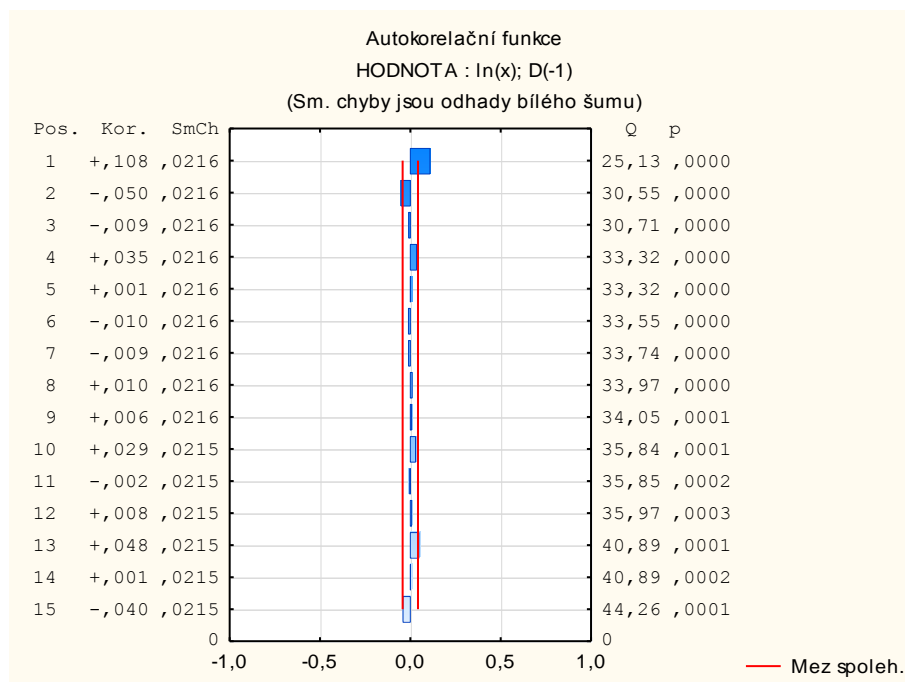
Tvar této funkce je vidět na obrázku 10, kde je zobrazena ACF časové řady v logaritmickém vyjádření a je zřejmé, že hodnoty ACF klesají pomalu (lineárním tempem) a to je příznak toho, že alespoň jeden kořen autoregresního operátoru je velice blízký jedné a je tedy třeba časovou řadu transformovat první diferencí. Takto transformovaná řada, tj. časová řada logaritmu výnosů, je zachycena na obrázku 11. Její ACF a PACF obsahuje obrázek 12 a obrázek 13. Z těchto obrázků je patrné, že se jedná o stacionární časovou řadu. Na obrázku 12 je vidět, že autokorelační koeficienty překračující danou hladinu významnosti ( $p = 0,05$ ) nejsou sice vysoké, ale je možné je pokládat za nenulové. To znamená, že tato časová řada obsahuje systematickou složku. Přítomnost systematické složky indikuje rovněž Box-Ljungova statistika, která je ve sloupci pod písmenem Q vpravo od grafu ACF.





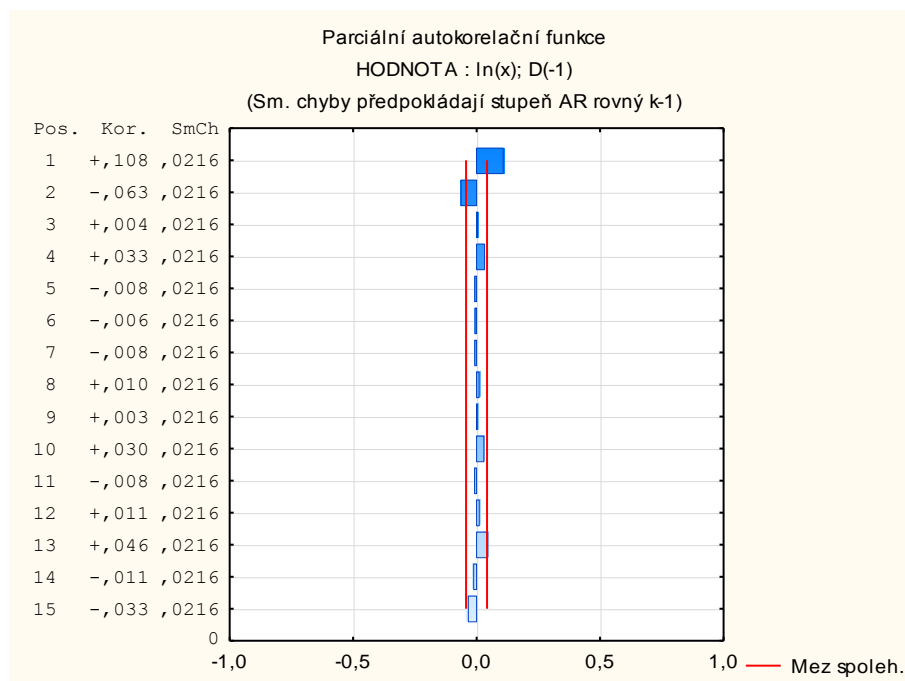
**Obrázek 11:** Logaritmy výnosů řady ČSOB Akcioivý mix

*Zdroj: vlastní zpracování v programu STATISTICA na základě dat z [10]*



**Obrázek 12:** ACF logaritmů výnosů

*Zdroj: vlastní zpracování v program STATISTICA na základě dat z [10]*



**Obrázek 13:** PACF logaritmů výnosů

*Zdroj: vlastní zpracování v program STATISTICA na základě dat z [10]*

## 6.1. Odhad parametrů modelu a ověření modelu ve STATISTICA

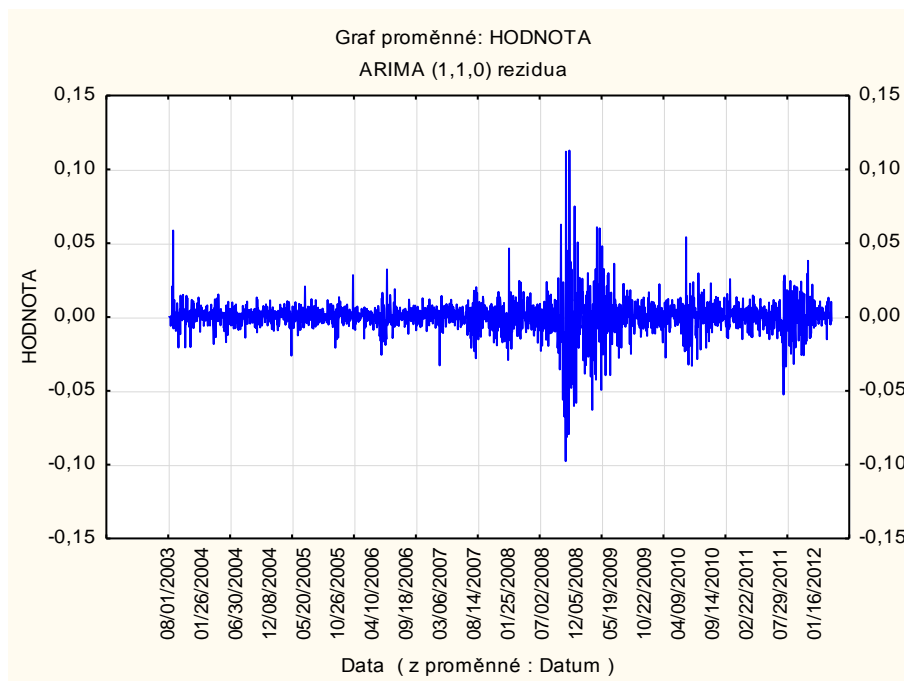
Pro modelování časové řady je možné vyjít z modelu ARIMA(1,1,0). Odhady parametrů tohoto modelu jsou provedeny v programu STATISTICA a jsou obsaženy v tabulce 4.

**Tabulka 4:** Odhady pro model ARIMA (1,1,0)

Parametr	Param.	Asympt. SmCh	Asympt. t( 2141)	p	Dolní 95% spol	Horní 95% spol
p(1)	<b>0,108288</b>	<b>0,02149</b>	<b>5,03904</b>	<b>0,000001</b>	<b>0,066145</b>	<b>0,150431</b>

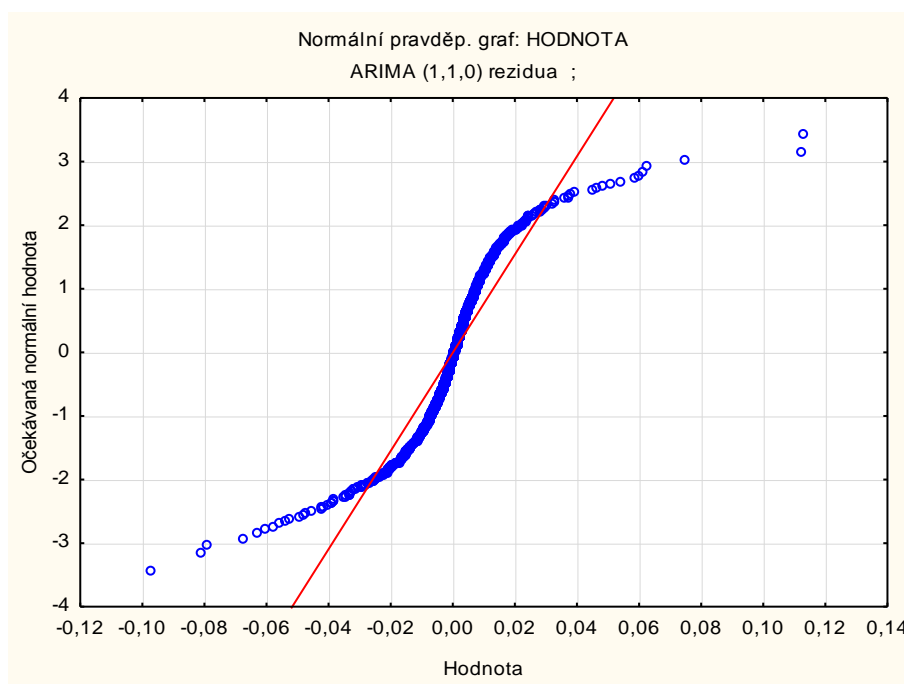
*Zdroj: vlastní zpracování v program STATISTICA na základě dat z [10]*

Odhad parametru  $p$  je poměrně blízký nule, přesto je na 5% hladině významnosti různý od nuly. Na obrázku 14 jsou zobrazena rezidua tohoto modelu. Z tohoto obrázku je zřejmé, že nesystematická složka modelu vykazuje přítomnost podmíněné heteroskedasticity. Pokud zobrazím histogram a normální pravděpodobnostní graf nesystematické složky (viz obrázek 15), rovněž je vidět nenormalita reziduí. Vzhledem k tomu, co bylo uvedeno ve druhé a čtvrté kapitole v souvislosti s charakteristikami finančních časových řad to není překvapivé zjištění. Musím tedy konstatovat, že lineární model uvedeného typu není schopen zachytit nepodmíněné rozdělení časové řady, které je ve srovnání s normálním rozdělením špičatější a má tlustší konce.



**Obrázek 14:** Rezidua modelu ARIMA (1,1,0)

*Zdroj: vlastní zpracování v program STATISTICA na základě dat z [10]*

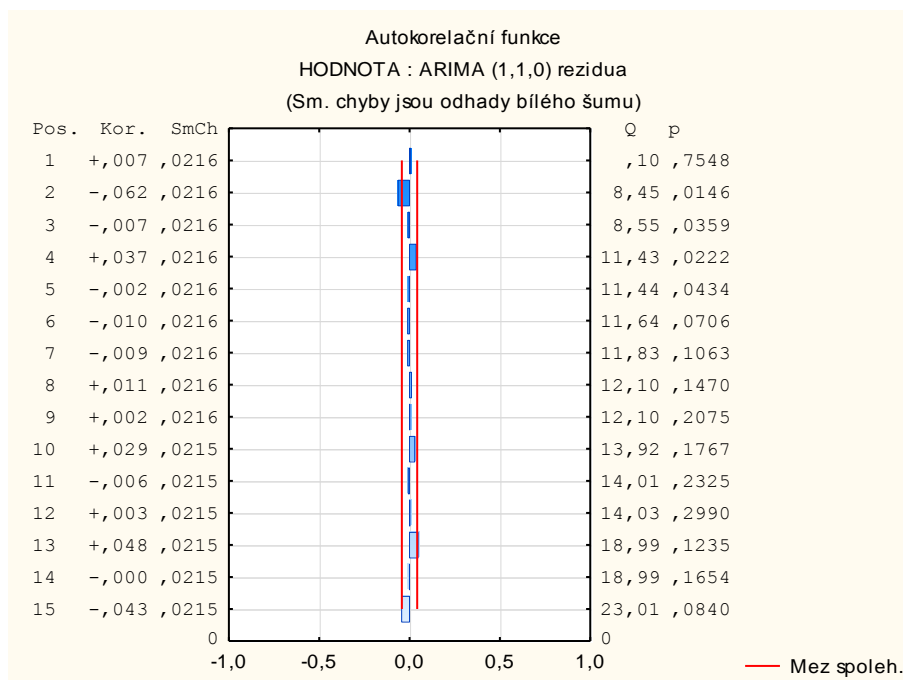


**Obrázek 15:** Rozdělení reziduí modelu ARIMA (1,1,0)

*Zdroj: vlastní zpracování dat v programu STATISTICA*

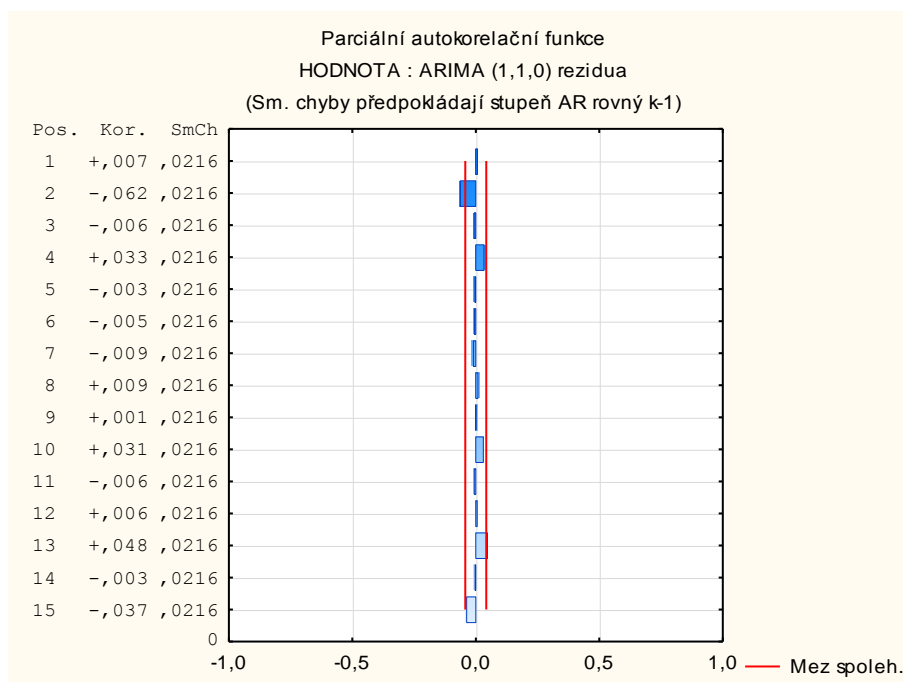
Při zobrazení ACF a PACF reziduí modelu na obrázku 16 a 17 je opět vidět přítomnost autokorelace nesystematické složky, kterou model není schopen zachytit. Pro úplnost provedu ještě odhady modelů ARIMA(0,1,1) a ARIMA(1,1,1). Výsledky nejsou o nic lepší, co se týče ověřování modelu na základě analýzy reziduí, výsledky u modelu ARIMA(0,1,1) jsou

obdobné jako u modelu ARIMA(1,1,0). Při odhadu modelu ARIMA(1,1,1) mohu konstatovat, že na zvolené hladině významnosti 5% je významný pouze parametr  $q$  pro model MA( $q$ ). Odhady parametrů těchto modelů jsou uvedeny v tabulce 5 a 6.



**Obrázek 16:** ACF reziduí modelu ARIMA (1,1,0)

*Zdroj: vlastní zpracování dat v programu STATISTICA*



**Obrázek 17:** PACF reziduí modelu ARIMA (1,1,0)

*Zdroj: vlastní zpracování dat v programu STATISTICA*

**Tabulka 5:** Odhady parametru modelu ARIMA(0,1,1)

Parametr	Param.	Asympt. SmCh	Asympt. t( 2141)	p	Dolní 95% spol	Horní 95% spol
q(1)	<b>-0,121466</b>	<b>0,022485</b>	<b>-5,40200</b>	<b>0,000000</b>	<b>-0,165562</b>	<b>-0,077371</b>

*Zdroj: vlastní zpracování dat v programu STATISTICA*

**Tabulka 6:** Odhady parametrů modelu ARIMA(1,1,1)

Parametr	Param.	Asympt.	Asympt.	p	Dolní	Horní
		SmCh	t( 2141)		95% spol	95% spol
p(1)	-0,23483	0,125815	-1,86643	0,062118	-0,48156	0,011907
q(1)	<b>-0,35322</b>	<b>0,120396</b>	<b>-2,93385</b>	<b>0,003384</b>	<b>-0,58933</b>	<b>-0,11712</b>

*Zdroj: vlastní zpracování dat v programu STATISTICA*

Protože samotné modely ARMA na finanční časové řady nestačí, což je patrné z předešlého textu, obrázků a tabulek, zařadím nyní do analýzy také modely volatility. Konkrétně jde o modely GARCH, EGARCH a GJR-GARCH, s kterými lze pracovat v programu MATLAB. Další analýzy tedy provádím ve výkonném pracovním prostředí MATLAB a řídím se podle postupů uvedených v příručce [15].

## 6.2. Odhad modelu a jeho parametrů v programu MATLAB

V MATLABu lze taktéž provést analýzu dat před odhadem, samozřejmě se stejnými výsledky, jaké dává STATISTICA. Po načtení původních dat aplikuji funkci *price2ret*, která původní hodnoty transformuje na logaritmy výnosů. Dále pracuji s touto řadou. Jako první provedu test podmíněné heteroskedasticity, tedy ověřím přítomnost ARCH efektů testem, který sestavil Engle a je zmíněn v kapitole 4.6.1. Pomocí funkce *archtest* dostávám následující výsledek uvedený v Tabulka 7.

**Tabulka 7:** ARCH test

Krok	Přijatá H	pValue	Statistika	Kritická hodnota
5	1	0	564,3349	11,0705
10	1	0	670,2244	18,3070
15	1	0	801,8240	24,9958
20	1	0	846,5251	31,4104

*Zdroj: vlastní zpracování na základě výstupu z MATLABu a dat z [10]*

Za platnosti nulové hypotézy pochází testová statistika asymptoticky z  $\chi^2$  rozdělení a tedy není přítomna heteroskedasticita. Z výsledků vidíme, že nulová hypotéza byla na hladině významnosti 5% zamítnuta a tedy výnosy jsou zatíženy ARCH efekty.

Můžu tedy přistoupit k samotnému odhadu parametrů. Pro jejich odhad použiji funkci *garchfit*, jejíž vstupními parametry jsou: specifikace modelu a řada výnosů fondu *ČSOB Akciový mix*. Specifikaci modelu provádím pomocí funkce *garchset*, kde volím jeden z modelů GARCH, EGARCH a GJR GARCH pro modelování volatilita a nastavuji jejich řády, popř. řády ARMA modelu. Odhadnuté parametry lze zobrazit funkcí *garchdisp* a následně je vhodné provést ověření modelu. Můžu zde zobrazit rezidua modelu, jejich ACF, PACF, Ljung-Boxovu statistiku pomocí funkce *lbqtest* a dále aplikovat *archtest* na rezidua vypočítaného modelu.

Pro každý model je dobré provést Akaikeho a Bayesovo informační kritérium, které může pomoci s výběrem nejvhodnějšího typu modelu. Pro AIC a BIC slouží v MATLABu funkce *aicbic*, která jako parametry používá vektor optimalizační log-věrohodnostrní funkce hodnot spojených s odhady parametrů modelu, dále počet parametrů modelu a počet pozorování.

**Tabulka 8:** Hodnoty AIC a BIC jednotlivých modelů

Model	AIC 1.0e+004 *	BIC 1.0e+004 *
ARMA(0,0) GARCH(1,1)	-1,440036815654942	-1,437769017554539
ARMA(1,0) GARCH(1,1)	-1,441225866724532	-1,438391119099028
ARMA(0,1) GARCH(1,1)	-1,441234975552912	-1,438400227927408
ARMA(1,1) GARCH(1,1)	-1,441035987407314	-1,437634290256710
ARMA(0,0) GARCH(1,2)	-1,441360680084937	-1,438525932459433
ARMA(0,0) GARCH(2,1)	-1,439836753384278	-1,437002005758775
ARMA(0,0) GARCH(2,2)	-1,441171187627935	-1,437769490477331
ARMA(0,1) GARCH(1,2)	-1,443144450206085	-1,439742753055481
ARMA(0,1) GARCH(2,1)	-1,441034937007539	-1,437633239856934
ARMA(0,1) GARCH(2,2)	-1,442948246334862	-1,438979599659156
ARMA(1,0) GARCH(1,2)	-1,443113889611736	-1,439712192461131
ARMA(0,0) EGARCH(1,1)	-1,444544544157903	-1,441709796532399
ARMA(0,0) EGARCH(1,2)	-1,444381243097457	-1,440979545946852
ARMA(0,0) EGARCH(2,1)	-1,444381243097457	-1,440979545946852
ARMA(1,0) EGARCH(1,1)	-1,446200454365679	-1,442798757215074
ARMA(0,1) EARCH(1,1)	-1,446101089485363	-1,442699392334758
ARMA(1,1) EARCH(1,1)	-1,446068393195349	-1,442099746519644
ARMA(0,0) GJR (1,1)	-1,446720396493694	-1,443885648868190
ARMA(1,1) GJR(1,1)	-1,448342299941173	-1,444373653265467
<b>ARMA(1,0) GJR(1,1)</b>	<b>-1,448540406247810</b>	<b>-1,445138709097206</b>
ARMA(0,1) GJR(1,1)	-1,448502183374376	-1,445100486223772
ARMA(0,1) GJR(1,2)	-1,448329654178709	-1,443794057977903
ARMA(1,0) GJR(1,2)	-1,448349376010601	-1,443813779809795

Zdroj: vlastní zpracování na základě výstupů z MATLABu a dat z [10]

Provedla jsem 23 odhadů parametrů modelů. U všech jsem zobrazila jejich informační kritéria, abych posoudila, který model může nejlépe modelovat analyzovanou řadu. Tyto hodnoty<sup>7</sup> jsou uspořádány v tabulce 8 a jako nejlepší z modelů se jeví model ARMA(1,0) GJR GARCH(1,1). Pro tento model zde uvedu odhady parametrů, diagnostiku modelu, předpověď budoucích hodnot a všechny výpočty, které s tím souvisejí.

### 6.2.1. Odhady parametrů pro model ARMA(1,0) GJR GARCH(1,1)

MATLAB provádí odhad parametrů pomocí optimalizačního procesu, kdy funkce *garchfit* používá metodu maximální věrohodnosti, která hledá takové parametry modelu, které maximalizují log-věrohodnostní optimalizační funkci (LLF). Pro spuštění této metody je třeba znát počáteční odhady parametrů. Ty lze zadat ručně pomocí funkce *garchset*, nebo je funkce *garchfit* generuje automaticky, což je výchozí nastavení, které v této práci používám. Proces optimalizace je ukončen jednou z ukončovacích podmínek. Může buď dojít ke konvergenci k řešení, kdy hodnoty LLF vykazují malé změny, změny parametrů jsou velmi malé nebo bylo porušeno některé omezení kladených na parametry. Druhá možnost je, že nelze dojít k řešení a to když optimalizace trvá příliš dlouho. Optimalizační proces počítaný pro model ARMA(1,0) GJR GARCH(1,1) hlásí konvergenci k řešení po 26 iteracích s hodnotou LLF 7,2487e+003 a odhady parametrů uvedenými v tabulce 9.

**Tabulka 9:** Odhady parametrů modelu ARCH(1,0) GJR GARCH(1,1)

	$\mu_t$	$\varphi_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$
Hodnota parametru	0,0002867	0,10233	1,3834e-006	0,001655	0,91373	0,12668
Sm. odchylka	0,00015902	0,022627	1,2393e-007	0,0068325	0,0052402	0,0098169
t-statistika	1,8029	4,5223	11,1631	0,2422	174,3678	12,9047

*Zdroj: vlastní zpracování na základě výstupu z MATLABu a dat z [10]*

Pro srovnání ještě uvedu odhady parametrů základních modelů ARMA(1,0) GARCH(1,1), ARMA(0,1) GARCH(1,1). Výsledky jsou v tabulce 10.

**Tabulka 10:** Odhady parametrů dalších modelů

	$\mu_t$	$\varphi_1$	$\theta_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\beta_1$
ARMA(1,0) GARCH(1,1)	0,0006442	0,0878080		1,62E-06	0,10405	0,8790
ARMA(0,1) GARCH(1,1)	0,0007067		0,0888	1,63E-06	0,10471	0,8783

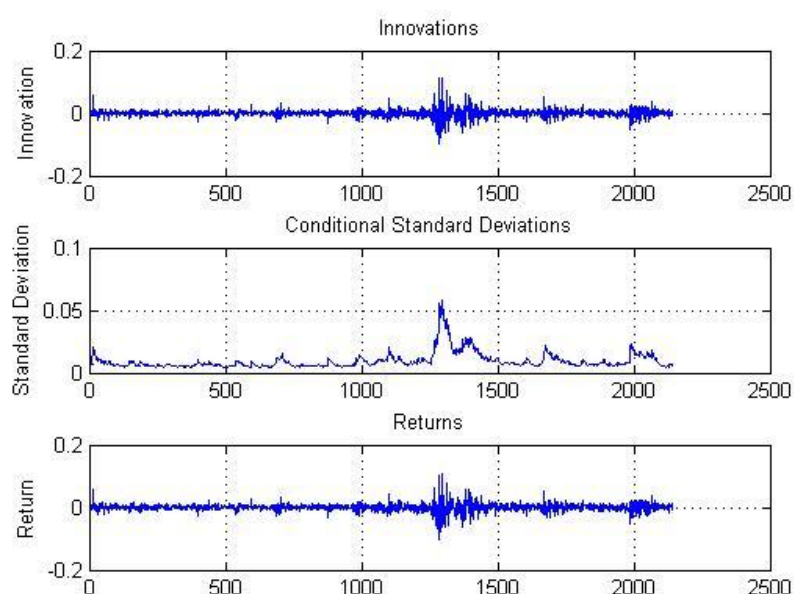
*Zdroj: vlastní zpracování na základě výstupů z MATLABu a dat z [10]*

<sup>7</sup> Všechny výsledky jsou uvedeny ve zkráceném tvaru, pro skutečnou hodnotu AIC a BIC je třeba násobit hodnotou 1.0e+004, která je rovněž uvedena v záhlaví.

### 6.3. Diagnostika modelu

Je-li model ARMA(1,0) GJR GARCH(1,1) určený správně, standardizovaná rezidua nesystematické složky by měla vykazovat nulovou střední hodnotu, jednotkový rozptyl a měla by být nezávislá.

K ověření použiji Box-Ljungův test, ACF a ARCH testem otestuji podmíněnou heteroskedasticitu reziduí modelu. Rezidua (inovace), směrodatná odchylka a výnosy jsou vidět na obrázku 18. Na tomto obrázku je vidět, že vliv finanční krize v letech 2009 a 2010 se promítá i do reziduí modelu (hodnoty časové osy pozorování asi 1200-1400). Je jasné, že žádný model není schopen zachytit tyto velké a předvídané výkyvy.



**Obrázek 18:** Rezidua, směrodatná odchylka a výnosy

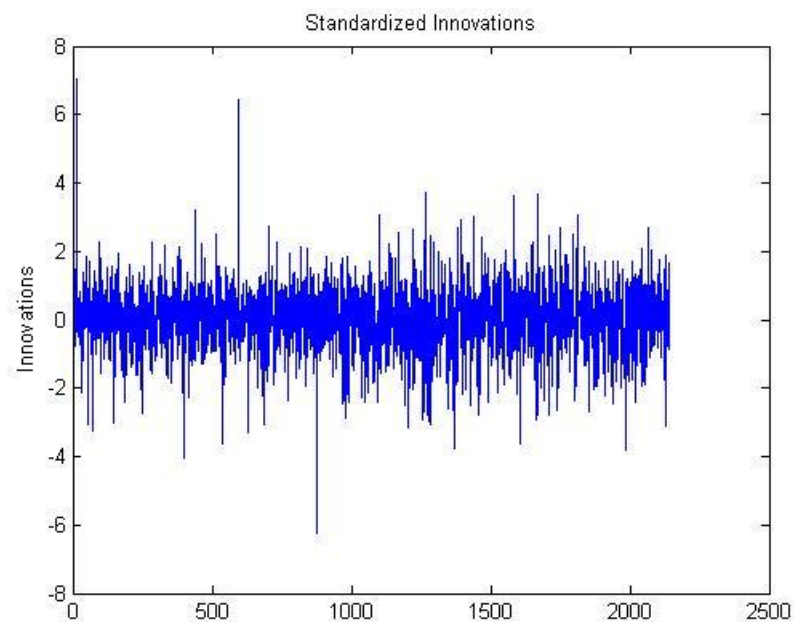
*Zdroj: výstup z MATLABu na základě vlastní analýzy dat z [10]*

Pokud zobrazím graf standardizovaných reziduí<sup>8</sup>, vidím, že shlukování vymizelo (obrázek 19) a graf čtvercových standardizovaných reziduí ukazuje, že nejsou patrné žádné autokorelace (obrázek 20).

---

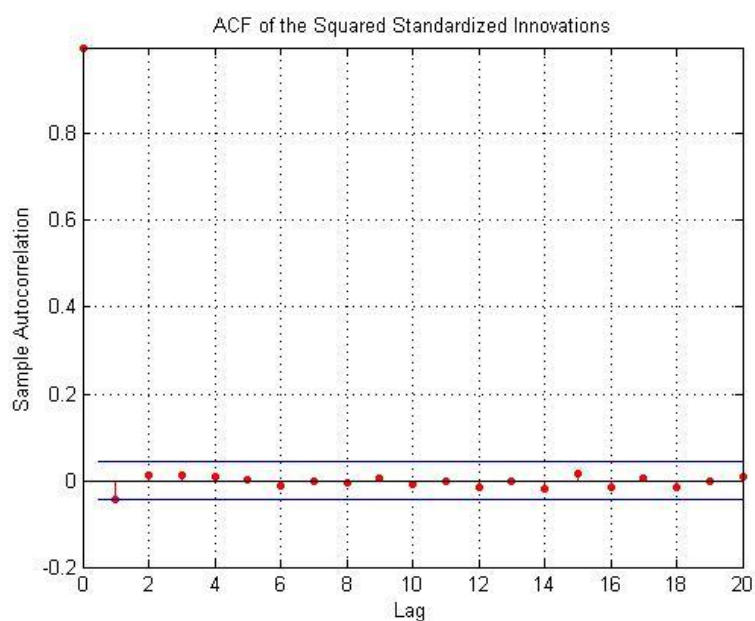
<sup>8</sup>Rezidua dělená jejich podmíněnou směrodatnou odchylkou





**Obrázek 19:** Standardizovaná rezidua modelu ARMA(1,0) GJR GARCH(1,1)

*Zdroj: výstup z MATLABu na základě vlastní analýzy dat z [10]*



**Obrázek 20:** Autokorelační funkce čtverců standard. reziduí modelu

*Zdroj: výstup z MATLABu na základě vlastní analýzy dat z [10]*

Nyní provedu Box-Ljungův test a ARCH test na rezidua modelu a porovnáám je se stejnými testy provedenými na logaritmech výnosů před odhadem. V analýze provedené před odhadem obě statistiky indikovaly zamítnutí nulové hypotézy s  $p$  hodnotou rovnou nule. Značilo to přítomnost systematické složky a heteroskedasticity v datech. Z Tabulka 11 je zřejmé,

že na hladině významnosti 5% je přijata nulová hypotéza. Můžu konstatovat, že nesystematická složka je nekorelovaná a vykazuje normalitu.

**Tabulka 11: Výsledek Box-Ljungova testu**

Krok	Přijatá H	pValue	Statistika	Kritická hodnota
5	0	0,7341	2,7782	11,0705
10	0	0,9629	3,6203	18,307
15	0	0,994	4,7538	24,9958
20	0	0,9956	7,2936	31,4104

*Zdroj: vlastní zpracování na základě vlastní analýzy v MATLABu a dat z [10]*

**Tabulka 12: Výsledcích ARCH testu**

Krok	Přijatá H	pValue	Statistika	Kritická hodnota
5	0	0,7213	2,862	11,0705
10	0	0,963	3,6174	18,307
15	0	0,9413	1,7,5269	24,9958
20	0	0,8679	13,2155	31,4104

*Zdroj: vlastní zpracování na základě vlastní analýzy v MATLABu a dat z [10]*

Z tabulky 12 je zřejmé, že zmizely i ARCH efekty, tedy nesystematická složka je náhodná posloupnost Gausovských inovací a testová statistika pochází asymptoticky z  $\chi^2$  rozdělení.

Tato diagnostika prokázala vhodnost modelu na analyzovaná data. Nyní můžu konstatovat, že model ARCH(1,0) GJR GARCH(1,1) je vhodný pro aplikaci na investiční fond ČSOB *Akciový mix*.

## 6.4. Interpretace dosažených výsledků

Nyní odhadnuté parametry dosadím do rovnice GJR GARCH, která má při řádu parametrů (1,1) obecný tvar 6.1

$$y_t = \mu_t + e_t, e_t = \sigma_t \varepsilon_t, \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_t e_{t-1}^2 I_{t-1}, I_t = \begin{cases} 1 & \text{pro } e_t < 0 \\ 0 & \text{pro } e_t \geq 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

Po dosazení má konkrétní model následující tvar

$$y_t = 0,0002867 + 0,10233y_{t-1} + e_t, e_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad (6.2)$$

$$\sigma_t^2 = 0,0000013834 + 0,001655e_{t-1}^2 + 0,91373\sigma_{t-1}^2 + 0,16301 e_{t-1}^2 I_{t-1}, \quad (6.3)$$

kde  $\varepsilon_t$  jsou iid náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem jak bylo ověřeno v části 6.3. Rovnice 6.2 zachycuje podmíněnou střední hodnotu procesem AR(1) s parametrem  $\varphi_1 = 0,10233$  a nepodmíněnou střední hodnotou  $\mu_t = 0,0002867$ . Můžu porovnat odhad parametru  $\varphi_1$  s odhadem provedeným pomocí programu STATISTICA, kdy hodnota parametru byla 0,108288. Podmíněný rozptyl je zachycený rovnicí 6.3.

Podmíněný rozptyl modelovaný GJR GARCH představuje proces zpožděných rozptylů a čtverců chyb stejně jako v modelu GARCH, navíc je zde zapojena indikátorová funkce, která přepíná mezi jednotlivými režimy. Jeden režim pro kladnou inovaci a druhý režim pro zápornou inovaci. Přidáním této funkce se vliv kladného šoku  $e_t \geq 0$  zachytí pouze v parametru  $\alpha_1$  a negativní vliv, kdy  $e_t < 0$ , který má větší vliv, se projeví navíc i v parametru  $\gamma_t$ . Z toho plyne, že tento model dobře modeluje asymetrické chování, kdy špatné zprávy způsobují růst volatility, takže tento model dobře zachycuje pákový efekt popsáný v kapitole 2.3.5. Parametr  $\beta_1$  zachycuje závislost volatility na svých předchozích hodnotách.

## 6.5. Predikce budoucích hodnot

Tabulka 13: Předpověď budoucích hodnot

h	Podmíněná směrodatná odchylka	Podmíněná střední hodnota
1	0,005701815	0,000094175
2	0,005762158	0,000296337
3	0,005820612	0,000317024
4	0,005877259	0,000319141
5	0,005932178	0,000319357
6	0,00598544	0,000319379
7	0,006037114	0,000319382
8	0,006087263	0,000319382
9	0,006135949	0,000319382
10	0,006183228	0,000319382
11	0,006229154	0,000319382
12	0,006273777	0,000319382
13	0,006317146	0,000319382
14	0,006359305	0,000319382
15	0,006400299	0,000319382

Zdroj: vlastní zpracování na základě analýzy v MATLABu a dat z [10]

Odhadnutý model nyní použijí pro předpověď budoucích hodnot. Využijí funkci *garchpred*, která počítá iterativně každou hodnotu až do stanoveného horizontu a výpočet provádí s minimální střední kvadratickou chybou. Parametry funkce tvoří odhady parametrů modelu provedených funkcí *garchfit*, časová řada logaritmů výnosů a požadovaný počet period k předpovědi - horizont. Výsledek v tabulce 13 obsahuje předpovědi podmíněných středních odchylek a podmíněné střední hodnoty logaritmů výnosů investičního fondu ČSOB *Akciový mix* pro horizont  $h = 15$  tj. predikce na 15 dní.

## ZÁVĚR

Cílem této diplomové práce byla analýza finanční časové řady zachycující cenu investičního podílového fondu. Nejdříve bylo nutné zmapovat, jaké přístupy k analýze finančních časových řad existují a vybrat vhodné modely pro konkrétní příklad. Bylo zjištěno, že finanční časové řady jsou velmi specifické ve srovnání s ostatními typy ekonomických časových řad. Jejich určité rysy vyžadují netradiční přístupy k jejich analýze. Základní odlišnost od jiných ekonomických řad spočívá v časové frekvenci sledování jejich hodnot. Z toho vyplývá, že je k dispozici velké množství dat a to vytváří prostor pro různé metody, které umožňují velmi dobře odkrýt vlastnosti generujících procesů. Dále byly objasněny další charakteristické vlastnosti finančních časových řad, které je třeba při volbě modelů zohlednit.

V práci byly uvedeny základní aspekty modelování finančních časových řad. Zabývala jsem se zde lineárními modely typu ARMA, které jsou v literatuře velmi dobře popsány a dají se aplikovat i v ostatních oborech na různé časové řady. Snažila jsem se pochopit základní logickou myšlenkovou cestu tvorby těchto modelů a následně získané poznatky aplikovat na konkrétní data. Vzhledem k povaze vybraných dat jsem musela přistoupit k aplikaci modelů volatility typu GARCH. Výhodou při studiu této problematiky bylo to, že tyto modely vycházejí ze stejných principů jako modely v rámci Box-Jenkinsovy metodologie. Nelineární modely volatility se tedy dají chápat jako nadstavba modelů lineárních a nejsou-li lineární modely schopny zachytit určitou vlastnost stochastického procesu, jsou transformovány nebo rozšířeny na modely nelineární. Třída modelů typu GARCH je velice významná pro praktické aplikace v oblasti finančních trhů, kdy jejich význam spočívá především v tom, že umožňují zachytit měnící se podmínky nejistoty na trhu.

Na základě studia této teorie jsem přistoupila k modelování vybraných dat. Za použití programu STATISTICA a MATLAB jsem otestovala platnost předpokladů pro aplikaci těchto modelů na datech. Bylo ověřeno, že na danou časovou řadu je možné aplikovat modely typu ARMA a GARCH. Dále jsem provedla odhady parametrů 23 modelů a pomocí funkce v MATLABU spočítala kritéria, pomocí kterých jsem vybrala vhodný model. Vhodnost vybraného modelu byla ověřena statistickými testy. Provedená diagnostika prokázala vhodnost modelu a odhadnuté parametry byly dosazeny do obecného tvaru vzorce a dosažený výsledek byl interpretován. Z výsledků je zřejmé, že střední hodnotu ceny investičního podílového fondu *ČSOB Akciový mix* zachycuje proces AR(1) s vypočítanými odhady parametrů  $\varphi_1$  a  $\mu_t$ , a jeho podmíněný rozptyl je zachycený procesem GJR GARCH s parametry  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_t$ . Jedná se tedy o finanční časovou řadu, kde jsou hodnoty závislé na hodnotách

předchozích, je přítomna podmíněná heteroskedasticita a navíc je zde zřejmá přítomnost pákového efektu, který zachycuje indikátorová funkce modelu GJR GARCH. Tyto výsledky jsou v souladu s finanční praxí, proto můžu konstatovat, že výsledky jsou adekvátní a model dobře vystihuje mechanismus, na jehož základě jsou sledované údaje generovány. Tento model může být použitý pro predikční účely a takováto predikce byla provedena na období 15 dní.

Možným rozšířením analýzy této časové řady by bylo rozložení řady na jednotlivé složky. Investiční fond *ČSOB Akciový mix* totiž investuje do světových akcií bez ohledu na oborové akcie a zaměřuje se na některé světové indexy. Bylo by velice zajímavé zkoumat, zda jsou jednotlivé akcie nebo dokonce trhy na sobě nějak závislé a například na základě korelační analýzy tuto závislost zakomponovat do modelu. Dá se předpokládat, že takováto korelační vazba mezi některými složkami existuje a součástí takovéto analýzy by pak mohlo být vyšetřování příčinnosti mezi různými bloky modelovaných proměnných. Při skutečném vývoji volatility totiž dochází k tzv. rozlívání volatility mezi různými finančními trhy nebo různými aktivy na témže trhu. Zjišťování a modelování takovýchto vztahů by pak hrálo velkou roli při konstrukci a správě různých investičních diverzifikovaných portfolií. Tato problematika překračuje rámec této práce, ale bylo by to zajisté velmi zajímavé téma pro práci jinou.

Tato diplomová práce měla objasnit, jakým způsobem se přistupuje k analýze finančních časových řad. Oblast finanční ekonometrie, jak se také analýze finančních časových řad říká, je poměrně nová disciplína a aplikace jejích metod vede k informacím, které jsou v současnosti velmi žádané. Klíčové jsou například pro různé finanční analýzy a metodiky v rámci řízení rizika v bankách, pojišťovnách a jiných finančních institucích. Pro investiční společnosti a obchodníky s cennými papíry jsou důležité předpovědi budoucích cen aktiv, ke kterým se tyto metody rovněž využívají.

## POUŽITÁ LITERATURA

- [1] ARLT, Josef; ARLTOVÁ, Markéta. *Finanční časové řady*. 1. vyd. Praha: Grada, 2003. 220 s. ISBN 80-247-0330-0.
- [2] ARTL, Josef; ARTLOVÁ, Markéta; RUBLÍKOVÁ, Eva. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. 2. vyd. Skripta VŠE Praha, 148 str., 2004. ISBN 80-245-0777-3.
- [3] BABULA, Kamil. *Modelování volatility na finančních trzích*. Brno, 2011. Dostupné z WWW: <[http://is.muni.cz/th/172001/esf\\_m/diplomova\\_prace.pdf](http://is.muni.cz/th/172001/esf_m/diplomova_prace.pdf)>. Diplomová práce. Masarykova Univerzita.
- [4] BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M.: *Time Series Analysis: Forecasting and Control, Revised Edition*. HOLDEN-DAY, 1976.
- [5] CIPRA, Tomáš. *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1986. 248 s.
- [6] CIPRA, Tomáš. *Finanční ekonometrie*. 1. vyd. Praha: Ekopress, 2008. 538 s. ISBN 978-80-86929-43.
- [7] ČAP. *Výroční zpráva ČAP 2010*. , [cit. 2012-04-04]. Dostupné z WWW: <[http://cap.cz/FileFromWSS.ashx?file=http://capsrv02/DOKUMENTY\\_01%2fCZ\\_vyrocn\\_zprava\\_2010.pdf](http://cap.cz/FileFromWSS.ashx?file=http://capsrv02/DOKUMENTY_01%2fCZ_vyrocn_zprava_2010.pdf)>.
- [8] ČNB. *Slovník pojmů*. [online]. 2012 [cit. 2012-04-04]. Dostupné z WWW: <<http://www.cnb.cz/cs/obecne/slovník/t.html>>.
- [9] DAVIDOVÁ, Petra a Jiří JIRKA. *Bankopojištění v ČR nepatří jen do oblasti teorie*. [online]. Publikováno: 17.6.2004, [cit. 2012-04-04]. Dostupné z WWW: <[http://www.cnb.cz/cs/verejnost/pro\\_media/clanky\\_rozhovory/media\\_2004/cl\\_04\\_040617a.html](http://www.cnb.cz/cs/verejnost/pro_media/clanky_rozhovory/media_2004/cl_04_040617a.html)>.
- [10] ČSOB: ČSOB Akciový mix. ČSOB [online]. 2012 [cit. 2012-04-04]. Dostupné z WWW: <<http://www.csob.cz/cz/fondy/Akciove-fondy/Stranky/770000001170.aspx>>.
- [11] DAŇHEL, J. a kol. *Pojistná teorie*. 2. vyd. Praha: Professional Publishing, 2006. 338 s. ISBN 80-86946-00-2.
- [12] DUCHÁČKOVÁ, Eva. *Principy pojištění a pojišťovnictví*. 2. aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, 2005. 178 s. ISBN 80-86119-92-0.

- [13] DUCHÁČKOVÁ, Eva., DAŇHEL, Jaroslav. *Teorie pojistných trhů*. 1. vyd. Praha: Professional Publishing, 2010. 216 s. 978-80-7431-015-7
- [14] ENGLE, Robert F. *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. In *Econometrica*. 1982, roč. 50, č. 4, str. 987-1008. Dostupné z WWW: <<http://finance.martinsewell.com/arch-garch/Engle1982.pdf>>.
- [15] MATHWORKS. *GARCH Toolbox For Use with MATLAB: User's Guide*. 2. vydání. Natick: The MathWorks Inc., 1999-2002. Dostupné z WWW: <[http://www.mathworks.com/help/releases/R13sp2/pdf\\_doc/garch/garch.pdf](http://www.mathworks.com/help/releases/R13sp2/pdf_doc/garch/garch.pdf)>.
- [16] Vyhláška 434/2009 Sb. ze dne 24. listopadu 2009, kterou se provádějí některá ustanovení zákona o pojišťovnictví. In: *Sbírka zákonů České republiky*. 2009. Dostupné z WWW: <[http://www.cnb.cz/miranda2/export/sites/www.cnb.cz/cs/legislativa/vyhlasiky/vyhl\\_434\\_2009.pdf](http://www.cnb.cz/miranda2/export/sites/www.cnb.cz/cs/legislativa/vyhlasiky/vyhl_434_2009.pdf)>
- [17] PRÁŠEK, Jakub. *Komparace produktů životního pojištění u vybraných komerčních pojišťoven*. Brno, 2011. Dostupné z WWW: [http://is.muni.cz/th/251627/esf\\_b/Bakalarska\\_prace\\_final.pdf](http://is.muni.cz/th/251627/esf_b/Bakalarska_prace_final.pdf). Bakalářská práce. Masarykova univerzita.
- [18] Zákon č. 586/1992 Sb., o dani z příjmů ve znění pozdějších předpisů. In: *Sbírka zákonů české republiky*. 1992.