APROXIMÁCIE ROZDELENIA CELKOVEJ ŠKODY A ICH APLIKÁCIA V INTERNÝCH AKTUÁRSKYCH MODELOCH

APPROXIMATION OF TOTAL CLAIM DISTRIBUTION AND INTERNAL ACTUARIAL MODELS

Michal Páleš

Abstract: *Based on quality actuarial analysis of specific data, an effective method to estimate the distribution of total claim is chosen. Approximate, recurrent procedures and simulation techniques can be used, for example. This paper presents approximate the effect normal distribution compared with standard procedure. The entire sample is presented for calculating the risk premium for explicit examples including the use of computer technology.*

Keywords: *Risk Theory, Individual Risk Model, Normal Approximation, Lyapun Characteristic, Berry-Esseen Theorem, Risk Premium, Central Limit Theorems.*

JEL Classification: *C69, G22.*

1 Úvod

Na vyjadrenie funkčných hodnôt distribučnej funkcie rozdelenia celkovej škody existujú postupy exaktné, aproximatívne, rekurentné a simulácie. Akékoľvek vyjadrenie rozdelenia celkovej škody zo skúmaného portfólia nám umožňuje následne odpovedať na otázky týkajúce sa schopnosti poisťovateľa plniť svoje záväzky. Príspevok sa zaoberá špecifickým okruhom týchto analýz – aproximatívnym efektom normálneho rozdelenia v súvislosti s modelovaním potrebného počtu zmlúv, vzhľadom na konkrétnu úroveň rizikovej prirážky a obsahuje názornú ukážku na modelových dátach.

2 Predpoklady modelu rizika

Pre náhodnú premennú celkovej škody z heterogénneho portfólio n nezávislých poistných zmlúv, ktoré je charakteristické tým, že na každú poistnú zmluvu, môže nastať najviac jedno poistné plnenie a počet zmlúv sa počas sledovaného obdobia (najčastejšie jedného roka) nemení, platí [1]

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} N_i \cdot Y_i \tag{1}$$

kde S je celková škoda z daného portfólia, X_i - škoda z i-tej poistnej zmluvy, $i = 1, 2, \ldots, n$. Náhodná premenná Y_i predstavuje výšku poistného plnenia z i-teho rizika, ak poistné plnenie nastalo a náhodná premenná N_i opisuje počet škôd z tohto rizika, $i = 1, 2, \ldots, n$. Podľa predpokladu má N_i alternatívne rozdelenie, teda $N_i \sim A(q_i)$

a pre výšky škôd Y_i v individuálnom modely rizika platí, že nemusia byť opísané identickým zákonom rozdelenia.

2.1 Heuristický prístup normálnej aproximácie

Ak uvažujeme model (1), potom každú náhodnú premennú S definovanú týmto vzťahom môžeme normovať, ak existuje stredná hodnota $E(S)$ a disperzia $D(S) \neq 0$, vzťahom

$$\bar{S} = \frac{S - E(S)}{\sqrt{D(S)}} \tag{2}$$

Teda pre normovanú náhodnú premennú $\bar{S}$ následne platí, že $E(\bar{S}) = 0, D(\bar{S}) = 1$.

Moderná teória pravdepodobnosti využíva široké spektrum podmienok, pri ktorých má rozdelenie celkovej škody asymptoticky normálne rozdelenie, ktoré môžeme charakterizovať podľa centrálnych limitných viet [3]

$$P(\bar{S} \leq x) \to \Phi(x), \; n \to \infty \tag{3}$$

kde $\Phi(x)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia.

Cieľom aktuárskych rizikových modelov je predovšetkým minimalizovať stratu poisťovne, ktorá môže vzniknúť so zvýšeným rozsahom poistných udalostí resp. poistných plnení. Z tohto dôvodu sa poisťovňa snaží minimalizovať pravdepodobnosť krachu 1 − p, teda

$$P(S \leq (1+\Theta)E(S)) = p \tag{4}$$

kde $(1+\Theta)E(S)$ je rizikové poistné (*risk premium*) vyjadrené vzhľadom na princíp strednej hodnoty v podmienkach individuálneho modelu rizika. Toto poistné, podľa [2], môžeme označiť

$$RP_{(\Theta)}(S) = E(S) + \Theta E(S) \tag{5}$$

kde Θ je riziková prirážka (*relative security loading*) a $\Theta E(S)$ je bezpečnostné plnenie (*security loading*). V nasledujúcich modeloch abstrahujeme od voľných rezerv na začiatku obdobia U, inak platí

$$F_S(U + RP_{(\Theta)}(S)) = p \tag{6}$$

Potom podľa vzťahu (4) platí

$$F_S(E(S) + \Theta E(S)) = p \tag{7}$$

$$P(S \leq E(S) + \Theta E(S)) = p \tag{8}$$

Následne z rovnice (7) môžeme odhadnúť rizikovú prirážku Θ. Túto odhadneme pomocou Lindenberg – Fellerovej vety

$$P(S - E(S) \leq \Theta E(S)) = P\left(\frac{S - E(S)}{\sqrt{D(S)}} \leq \frac{\Theta E(S)}{\sqrt{D(S)}}\right) = p \tag{9}$$

z čoho vyplýva, že

$$p \approx \Phi\left(\frac{\Theta E(S)}{\sqrt{D(S)}}\right) \tag{10}$$

Potom pre odhad rizikovej prirážky Θ platí

$$\Theta \approx \frac{u_p \sigma(S)}{E(S)} \tag{11}$$

kde u_p je príslušný kvantil normovaného normálneho rozdelenia. Vzťah (11) v tomto prípade platí, ak je splnená podmienka regularity, t.j. pre takú malú hodnotu $\varepsilon > 0$ a $i = 1, 2, ..., n$

$$\frac{\sigma(X_i)}{\sigma(S)} < \varepsilon \tag{12}$$

Našim cieľom je túto hodnotu rizikovej prirážky Θ odhadnúť čo najpresnejšie, a to pomocou rigoróznych odhadov. Treba však konštatovať, že rizikové poistné možno stanoviť podľa typu poistenia rôznymi spôsobmi, pričom ďalším v praxi zaužívaným spôsobom, je najmä princíp smerodajnej odchýlky [1], [4].

2.2 Metódy rigoróznych odhadov

Cieľom rigoróznych odhadov je spresniť aproximáciu, v našom prípade spresniť odhad parametra Θ. Na tento účel by sme mali poznať presnosť normálnej aproximácie, alebo, inými slovami mieru konvergencie vzťahu (3).

Jeden z možných postupov je spôsob výpočtu založený na centrálnych momentoch tretieho rádu $\mu_3(S)$ a tzv. Lyapunovej charakteristike L_S, ktorá je definovaná vzťahom

$$L_S = \frac{\mu_3(S)}{\sigma^3(S)} \tag{13}$$

kde ale náhodná premenná S je už opísaná identickým zákonom rozdelenia.

Hodnota L_S je veľmi dôležitá veličina v teórii aproximácie normálnym rozdelením. Jej podstatná vlastnosť je, že je bezrozmernou a absolútnou veličinou. Na tomto vzťahu je založená aj tzv. Berry-Esseen teoréma (metóda) [4].

Ak existuje konštanta C_1, v zmysle [4]

$$C_1 \leq 0{,}792 \tag{14}$$

tak pre všetky x platí

$$\left|F_{\bar{S}}(x) - \Phi(x)\right| \leq C_1 \frac{L_S}{\sqrt{n}} \tag{15}$$

kde $F_{\bar{S}}(x)$ je distribučná funkcia normovanej náhodnej premennej, ktorá vyjadruje celkovú škodu, L_S je Lyapunova charakteristika podľa vyjadrená vzťahom (13).

Podľa vzťahu (15) platí $\overline{F}_S(x) \to \Phi(x)$, ak platí, že $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot L_S \to 0$. Uvedený predpoklad je postačujúcou podmienkou pre normálnu konvergenciu pre prípad ľubovoľného rozdelenia. Pre lepšiu aproximáciu rizikového poistného $RP_{(\Theta)}$ definovaného vzťahom (5), použijeme Berry-Esseenovu teorému pre odhad rizikovej prirážky Θ.

Označme symbolom Δ_S absolútnu diferenciu zo vzťahu (15). Hľadáme takú pravdepodobnosť $P(S \leq RP_{(\Theta)}(S))$, ktorá nebude menšia ako pravdepodobnosť p. Opätovne podľa (9) a (15) môžeme písať

$$P(S \leq RP_{(\Theta)}(S)) = P\left(\bar{S} \leq \frac{\Theta E(S)}{\sqrt{D(S)}}\right) = F_{\bar{S}}\left(\frac{\Theta E(S)}{\sqrt{D(S)}}\right) \geq \Phi\left(\frac{\Theta E(S)}{\sqrt{D(S)}}\right) - \Delta_S \tag{16}$$

$$\Phi\left(\frac{\Theta E(S)}{\sqrt{D(S)}}\right) \geq p + \Delta_S \tag{17}$$

Potom zo vzťahu (16) vyplýva, že

$$P(S \leq RP_{(\Theta)}(S)) \geq p + \Delta_S - \Delta_S \Rightarrow P(S \leq RP_{(\Theta)}(S)) \geq p \tag{18}$$

Teda pre rizikovú prirážku Θ zo vzťahu (16) platí, že $P(S \leq RP_{(\Theta)}(S)) \geq p$, a teda

$$\frac{\Theta E(S)}{\sqrt{D(S)}} \geq u_{p+\Delta_S} \tag{19}$$

z čoho

$$\Theta \geq \frac{u_{p+\Delta_S}\sigma(S)}{E(S)} \tag{20}$$

Porovnaním vzťahov (20) a (11) vidíme, že rozdiel spočíva v nahradení kvantilu u_p za kvantil $u_{p+\Delta_S}$. Vo všeobecnosti, odhad vyjadrený vzťahom (20) je väčší ako heuristický odhad (11). Je prirodzené, že v prípade heuristických metód eliminujeme možnú chybu aproximácie zvýšením rizikového poistného.

Aby sme mohli použiť vzťah (20) na vzťah (1), modifikujme ho. Označme celkovú škodu S_1, ktorá vznikne ako súčet nezávislých, ale identicky rozdelených náhodných premenných, teda $X_1 = X_2 = X_n = \overline{X}$. Potom môžeme vyjadriť S_1 ako

$$S_1 = n \cdot \left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right) = n \cdot \overline{X} \tag{21}$$

pričom platí

$$E(S_1) = n \cdot E(\overline{X}), \text{ kde } E(\overline{X}) = \frac{E(X_1) + ... + E(X_n)}{n} \tag{22}$$

$$D(S_1) = n \cdot D(\overline{X}), \text{ kde } D(\overline{X}) = \frac{D(X_1) + ... + D(X_n)}{n} \tag{23}$$

Z uvedeného vyplýva, že vzťah na výpočet rizikovej prirážky v prípade, že celková škoda je súčtom nezávislých a identicky rozdelených náhodných premenných, vyhovujúca podmienkam kolektívneho modelu rizika, má tvar

$$\Theta \approx \frac{u_p \sigma(S_1)}{E(S_1)} \tag{24}$$

Čo zodpovedá vzťahu (11), bez overovania podmienky regularity, ktorá je splnená. Výpočet rizikovej prirážky daný vzťahom (24) je však pre poistnú prax „skreslený", tzn. nevýhodný. A práve jej spresnenie získame na základe odvodeného vzťahu (20). Uvedieme postup výpočtu potrebných charakteristík v prípade špecifikácie náhodnej premennej X.

1. Uvažujme model S_2 homogénneho portfólia poistných zmlúv, kde S_2 je náhodná premenná súčtu už identicky rozdelených náhodných premenných, pričom náhodná premenná X má zložené alternatívne rozdelenie, $X \sim CoA(q;\ F_Y(x) = x/b,\ x \in \langle 0; b \rangle)$. Tzn. náhodná premenná $N \sim A(q)$ a náhodná premenná Y má rovnomerné rozdelenie, teda $Y \sim Ro(0;b)$, a S_2 môžeme vyjadriť vzťahom

$$S_2 = n \cdot X \tag{25}$$

Charakteristiky náhodnej premennej S_2 vyjadríme pomocou strednej hodnoty a rozptylu náhodnej premennej N, Y a X. Platí

$$E(N) = q \tag{26}$$

$$D(N) = p \cdot q \tag{27}$$

$$E(Y) = \frac{b}{2} = \mu \tag{28}$$

$$D(Y) = \frac{b}{12} \tag{29}$$

$$E(X) = E(N) \cdot E(Y) \tag{30}$$

$$D(X) = E(N) \cdot D(Y) + D(N) \cdot E^2(Y) \tag{31}$$

Naviac k-ty centrálny moment pre potreby výpočtu Lyapunovej charakteristiky, vzhľadom na skutočnosť, že náhodná premenná X má zložené alternatívne rozdelenie, vypočítame v tomto prípade podľa vzťahu platného v individuálnom modely

$$\mu_k(X) = E\left(\left[X - E(X)\right]^k\right) = \left|X - E(X)\right|^k (1-q) + q\int_0^b \left|x - E(X)\right|^k dx \tag{32}$$

2. Uvažujeme ešte jednu modifikáciu modelu S1 a to model S3, pričom X je opäť identicky rozdelená náhodná premenná, ale na rozdiel od prechádzajúceho prípadu S2 náhodná premenná Y je konštanta, tzn. $Y_1 = Y_2 = Y_n = Y$. Teda individuálna výška škody je $X \sim CoA(q;F_Y(x))$ a preto S_3 môžeme vyjadriť vzťahom

$$S_3 = n \cdot X \tag{33}$$

Následne na základe charakteristík počtu N a výšky škody Y dostávame postupnými úpravami charakteristiky na výpočet celkovej škody

$$E(Y) = Y = \mu \tag{34}$$

$$D(Y) = 0 \tag{35}$$

$$E(X) = q \cdot Yo = q \cdot \mu \tag{36}$$

$$D(X) = p \cdot q \cdot Y^2 + q \cdot 0 = p \cdot q \cdot \mu^2 \tag{37}$$

$$E(S_3) = n \cdot q \cdot \mu \tag{38}$$

$$D(S_3) = n \cdot p \cdot q \cdot \mu^2 \tag{39}$$

3 Praktická aplikácia

V nadväznosti na časť 2. uvedieme výpočet rizikovej prirážky Θ podľa vzťahu (24) a (20) vzhľadom na všetky uvedené predpoklady. Uvažujeme homogénne portfólio poistných zmlúv istého druhu životného poistenia v určitej komerčnej poisťovni. Jednotlivé parametre rozdelení opisujúcich danú situáciu sú uvedené v tab. č. 1.

Tab. 3: Vstupné hodnoty riešenia modelovej situácie

pravdepodobnosť vzniku škody	$q = 0{,}1$
počet poistných zmlúv	$n = 3\,500$
rozdelenie počtu škôd	$N \sim A(0{,}1)$
rozdelenie individuálnej škody, ak škoda nastala	$Y \sim Ro(0;1)$
rozdelenie individuálnej výšky škody z 1 rizika	$X \sim CoA(0{,}1;\ F_Y(x) = x,\ x \in \langle 0;1 \rangle)$
pravdepodobnosť krachu	$\varepsilon = 0{,}05$

Zdroj: Vlastný

Na základe vyššie uvedených predpokladov použijeme vyjadrenie pre S_2, t.j. homogénneho portfólia poistných zmlúv, a podľa vzťahov (30) a (31) dostávame

$$E(X) = E(N) \cdot E(Y) = q \cdot \frac{b}{2} = 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}05$$

$$D(X) = E(N) \cdot D(Y) + D(N) \cdot E^2(Y) = 0{,}1 \cdot \frac{1}{12} + (0{,}9 \cdot 0{,}1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}03083$$

Potom podľa vzťahu (26) vzťah na výpočet rizikovej prirážky Θ je

$$\Theta \approx \frac{u_p \sigma(S_2)}{E(S_2)} \approx \frac{u_p \cdot \sqrt{n \cdot D(X)}}{n \cdot E(X)} \approx \frac{u_p \cdot \sqrt{D(X)}}{\sqrt{n} \cdot E(X)} \approx \frac{u_{0,95} \cdot \sqrt{0{,}03083}}{\sqrt{3500} \cdot 0{,}05} \approx 0{,}0973$$

Hodnota 0,0973 predstavuje aproximatívne vyjadrenú rizikovú prirážku Θ prostredníctvom heuristického prístupu. Rizikové poistné na jednu poistnú zmluvu určíme ako $(1+\Theta) \cdot E(X) = (1+0{,}0973) \cdot 0{,}05 = 0{,}0549$.

Uveďme teraz rigorózny odhad rizikovej prirážky, pričom uvažujeme rovnaké vstupy uvedené v tab. 1.

Najskôr Δ_{S_2} určíme pre túto situáciu podľa vzťahu (15), teda

$$\Delta_{S_2} = C_1 \frac{L_{S_2}}{\sqrt{n}} = 0{,}792 \cdot \frac{3{,}7}{\sqrt{3500}} = 0{,}0495$$

pričom hodnotu Lyapunovej charakteristiky sme vypočítali podľa vzťahu (13) a (32) ako

$$L_{S_2} = \frac{\mu_3(S_2)}{\sigma^3(S_2)} = \frac{E\left([0-0{,}05]^3\right) = |0-0{,}05|^3 \cdot (1-q) + q \cdot \int_0^1 |x-0{,}05|^3 \, dx}{\left(E\left([0-0{,}05]^2\right) = |0-0{,}05|^2 \cdot (1-q) + q \cdot \int_0^1 |x-0{,}05|^2 \, dx\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{0{,}02}{(0{,}0308)^{\frac{3}{2}}} = 3{,}7$$

Riziková prirážka potom podľa vzťahu (20) je

$$\Theta \geq \frac{u_{p+\Delta_{S_2}} \sigma(S_2)}{E(S_2)} = \frac{u_{0,9995}\sqrt{0{,}0308}}{0{,}05 \cdot \sqrt{3500}} \cong 0{,}1947$$

Teraz postupujme obdobne, ale v súlade s modelom S_3. Podľa vzťahu (13) potrebujeme vypočítať L_{S_3}. Vzťah pre výpočet L_{S_3}, pre náš prípad homogénneho portfólia, môžeme zjednodušiť použitím vzťahu (13) a vzťahu na výpočet centrálnych momentov pomocou vzťahu (36) získame

$$L_{S_3} = \frac{\mu_3(S_3)}{\sigma^3(S_3)} = \frac{(1-2q+2q^2)}{\sqrt{q(1-q)}} = \frac{0{,}82}{0{,}3} \cong 2{,}7333$$

Dosadením tejto hodnoty L_{S_3} do vzťahu (14) dostaneme

$$\Delta_{S_3} = C_1 \frac{L_{S_3}}{\sqrt{n}} = 0{,}792 \cdot \frac{2{,}734}{\sqrt{3500}} = 0{,}0366$$

Vyššie vypočítanou hodnotou môžeme spresniť kvantil u_p normovaného normálneho rozdelenia kvantilom $u_{p+\Delta_{S_3}} \cong 2{,}2144$.

Za predpokladu homogénneho portfólia a podmienok modelu S_3, dostávame rizikovú prirážku Θ podľa vzťahu (20)

$$\Theta \geq \frac{u_{p+\Delta_{S_3}} \sigma(S_3)}{E(S_3)} = \frac{u_{p+\Delta_{S_3}} \sqrt{n \cdot p \cdot q \cdot \mu^2}}{n \cdot q \cdot \mu} = \frac{u_{p+\Delta_{S_3}} \sqrt{p}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{q}} \cong \frac{2{,}2144\sqrt{0{,}9}}{\sqrt{3500} \cdot \sqrt{0{,}1}} \cong 0{,}1123$$

Ak je jednoduchšie pre výpočet použiť heuristický prístup, je zrejmé, že $u_p \leq u_{p+\Delta_{S_3}}$, potom tabelovaná hodnota $u_{0,95} = 1{,}6448$ a riziková prirážka je $\Theta \approx 0{,}0834$.

V poistnej praxi, sa následne odporúča porovnať rôzne úrovne rizikovej prirážky v závislosti od rôznych parametrov modelu a tak vyhodnotiť vhodné nastavenie rizikovej prirážky Θ pre konkrétne portfólio poistných zmlúv poisťovne.

Modeling n		n	3500
Parameters		C_1	0,792
		p	0,95
		q	0,1
		b	1
Charakteristics		$\mu_3(X)$	0,02
		$E(X)$	0,05
		$D(X)$	0,0308
		$\sigma(X)$	0,175
Berry-Esseen theorem		L	3,7318
		Δ	0,0495
Estimation Θ	heuristic	Θ_h	0,0973
	rigorous	Θ_r	0,1947

Obr. 5: Stanovenie rizikovej prirážky Θ podľa modelu S_2

Zdroj: Vlastný

Obrázok č. 1 zobrazuje výpočtovú procedúru opísanú v časti 4. pre model S_2, realizovanú prostredníctvom programového systému MS Office Excel 2007, kde na základe zadaných parametrov program určí charakteristiky pre daný model a stanoví rizikovú prirážku Θ heuristickým aj rigoróznym odhadom.

4 Záver

Článok sa zaoberá Berry-Essenovou aproximáciou s aplikáciou pre aktuárstvo a to pre špecifickú oblasť teórie rizika v poisťovniach – stanovenia optimálnej rizikovej prirážky. Systematicky a v krokoch vysvetľuje jednotlivé postupy a predpoklady a je doplnený praktickou aplikáciou s využitím softvéru MS Excel. Cieľom príspevku bolo najmä priblíženie jednej z menej používaných aproximačných metód a jej praktické využitie v aktuárstve.

Poďakovanie

Príspevok bol vypracovaný v rámci vedeckého seminára s medzinárodnou účasťou *Modelování, simulace a řízení pojistných rizik jako součást řešení projektu GAČR 402/09/1866 a projektu VEGA 1/0724/08* dňa 17 – 19. októbra 2010 vo Sv. Jure, Slovenská republika.

Použité zdroje

[1] HORÁKOVÁ, G. – MUCHA, V.: *Teória rizika v poistení (I. časť)*. Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava, 2006. ISBN 978-80-225-2549-7

[2] PÁLEŠ, M.: *Rekurentné vzťahy pre aktuárov a ich aplikácia v oblasti zaistenia*. Diplomová práca. Ekonomická univerzita v Bratislave, FHI, Bratislava, 2009.

[3] RÉNIY, A.: *Teorie pravděpodobnosti*. ACADEMIA Praha, Praha, 1972. ISBN

[4] ROTAR, V. I.: *Actuarial models.* Chapman & Hall/CRC, New York, 2007. 978-1-58488-586-3

Kontaktná adresa

Ing. Michal Páleš
Ekonomická univerzita v Bratislave
Katedra matematiky, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, SK
Email: pales.euba@gmail.com
Tel. č.: + 421 2 672 95 838

Doručeno redakci: 28. 04. 2011
Recenzováno: 20. 07. 2011
Schváleno k publikaci: 09. 08. 2011