

UNIVERZITA PARDUBICE
FAKULTA EKONOMICKO-SPRÁVNÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2010

Bc. Martina Vitková

UNIVERZITA PARDUBICE
FAKULTA EKONOMICKO-SPRÁVNÍ

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MODELY VÝŠE ŠKOD
V NEŽIVOTNÍM POJIŠTĚNÍ

Bc. Martina Vitková

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2010

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Martina VITKOVÁ**
Studijní program: **N6209 Systémové inženýrství a informatika**
Studijní obor: **Pojistné inženýrství**
Název tématu: **Pravděpodobnostní modely výšky škod v neživotním pojištění**
Zadávající katedra: **Ústav systémového inženýrství a informatiky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

- 1) Význam pravděpodobnostního modelování výšky škod v neživotním pojištění.
- 2) Pravděpodobnostní rozdělení vhodné pro modelování pojistných plnění. Jejich základní charakteristiky, přednosti a nedostatky.
- 3) Metody odhadů parametrů rozdělení škod.
- 4) Testy dobré shody při hledání vhodného pravděpodobnostního modelu.
- 5) Modely škod při zajištění.
- 6) Praktická ukázka aplikace popsaných postupů pomocí systémů Statgraphics Centurion XV a Excel.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

BOLAND, P. J. Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science. London: Chapman&Hall/CRC, 2007.

CIPRA, T. Finanční a pojistné vzorce. 1. vyd. Praha: Grada, 2006. 374 s. ISBN 80-247-1633.

CIPRA, T. Pojistná matematika: teorie a praxe. 2. aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, 2006. 411 s. ISBN 80-86929-11-6.

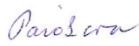
CIPRA, T. Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví. 1. vyd. Praha: Grada Publishing, 2004. 260 s. ISBN 80-247-0838-8.

CURRIE, I. D. Loss Distributions, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, London and Edinburgh 1993.

KUBANOVÁ, J. Statistické metody pro ekonomickou a technickou praxi. 2. vyd. STATIS Bratislava, 2004. 249 s. ISBN 80-85659-37-9.

PACÁKOVÁ, V. Aplikovaná poistná štatistika. 3. prepracované a doplnené vydanie. Bratislava: IURA EDITION, 2004. 261 s. ISBN 80-8078-004-8.

Vedoucí diplomové práce:


prof. RNDr. Viera Pacáková, Ph.D.
Ústav matematiky

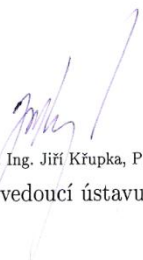
Datum zadání diplomové práce: **5. října 2009**

Termín odevzdání diplomové práce: **30. dubna 2010**


doc. Ing. Renáta Myšková, Ph.D.

děkanka

L.S.


doc. Ing. Jiří Křupka, Ph.D.

vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 5. října 2009

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 12. 4. 2010

Bc. Martina Vitková

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí práce prof. RNDr. Vieri Pacákové, Ph.D. za vedení mé diplomové práce.

SOUHRN

Tato diplomová práce „Pravděpodobnostní modely výše škod v neživotním pojištění“ je zaměřena na problematiku modelování individuálních škod v neživotním pojištění. Hlavní částí této diplomové práce je praktická aplikace metod teorie rizika na reálných údajích s využitím programu Microsoft Office Excel 2007 a statistického programového balíku STATGRAPHICS Centurion XV.

KLÍČOVÁ SLOVA

neživotní pojištění, rozdělení pravděpodobnosti, odhady parametrů, testy dobré shody, zajištění

TITLE

Loss Distributions in Non-life Insurance

ABSTRACT

This Thesis “Loss Distributions in Non-life Insurance“ is focused on the problems of modelling individual losses in non-life insurance. The main part of this Thesis is practical application of the Risk Theory on real data using Microsoft Office Excel 2007 and statistical program package STATGRAPHICS Centurion XV.

KEYWORDS

non-life insurance, probability distributions, estimation of parametres, goodness-of-fit tests, reinsurance

OBSAH

SEZNAM OBRÁZKŮ	10
SEZNAM TABULEK.....	11
ÚVOD.....	12
1 VÝZNAM PRAVDĚPODOBNOSTNÍHO MODELOVÁNÍ VÝŠE ŠKOD V NEŽIVOTNÍM POJIŠTĚNÍ	14
1.1 CHARAKTERISTIKA NEŽIVOTNÍHO POJIŠTĚNÍ	14
1.2 KLASIFIKACE NEŽIVOTNÍHO POJIŠTĚNÍ	14
1.2.1 Neživotní pojištění osob	14
1.2.2 Pojištění majetková.....	15
1.2.3 Pojištění průmyslových a podnikatelských rizik	16
1.2.4 Pojištění zemědělských rizik	16
1.2.5 Pojištění odpovědnosti za škody.....	17
1.2.6 Pojištění právní ochrany	18
1.2.7 Cestovní pojištění	18
1.3 VÝZNAM PRAVDĚPODOBNOSTNÍHO MODELOVÁNÍ VÝŠE ŠKOD.....	19
2 PRAVDĚPODOBNOSTNÍ ROZDĚLENÍ PRO MODELOVÁNÍ POJISTNÝCH PLNĚNÍ.....	21
2.1 EXPONENCIÁLNÍ ROZDĚLENÍ.....	23
Základní charakteristiky	24
Výhody a nevýhody exponenciálního rozdělení.....	24
2.2 PARETOVO ROZDĚLENÍ	25
Základní charakteristiky	26
Výhody a nevýhody Paretova rozdělení	27
2.3 WEIBULLOVO ROZDĚLENÍ.....	28
Základní charakteristiky	29
Výhody a nevýhody Weibullova rozdělení	29
2.4 GAMA ROZDĚLENÍ	29
Výhody a nevýhody Gama rozdělení	31
2.5 LOGNORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ.....	31

Základní charakteristiky	32
Výhody a nevýhody lognormálního rozdělení	33
3 METODY ODHADŮ PARAMETRŮ ROZDĚLENÍ ŠKOD	34
3.1 METODA MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI.....	34
3.1.1 Vlastnosti maximálně věrohodného odhadu.....	35
3.2 METODA MOMENTŮ.....	38
3.3 METODA KVANTILŮ.....	39
3.4 PRAKTICKÁ UKÁZKA ODHADU PARAMETRŮ.....	40
4 TESTY DOBRÉ SHODY PŘI HLEDÁNÍ VHODNÉHO	
 PRAVDĚPODOBNOSTNÍHO MODELU.....	47
4.1 PEARSONŮV χ^2 TEST DOBRÉ SHODY	47
4.2 KOLMOGOROVŮV – SMIRNOVŮV TEST.....	51
4.3 ANDERSONŮV – DARLINGŮV TEST	53
4.4 KUIPERŮV V-TEST	53
4.5 CRAMERŮV – VON MISESŮV W^2 TEST	53
4.6 WATSONŮV U^2 TEST.....	54
4.7 SHRUTÍ TESTŮ DOBRÉ SHODY	54
5 MODEL Y ŠKOD PŘI ZAJIŠTĚNÍ.....	55
5.1 ZÁKLADNÍ TYPY ZAJIŠTĚNÍ	55
5.1.1 Proporcionální zajištění	56
5.1.2 Neproporcionální zajištění.....	57
5.2 TARIFOVÁNÍ.....	59
5.2.1 Model založený na Paretově rozdělení škod překračujících prioritu.....	59
5.2.2 Postup stanovení nettozajistného při WXL/R zajištění	60
5.2.3 Grafické stanovení nettozajistného při WXL/R zajištění	62
5.3 MODELOVÁNÍ ŠKOD V PROGRAMU STATGRAPHICS CENTURION XV.....	64
6 PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MODELOVÁNÍ ŠKOD POMOCÍ SYSTÉMU	
 STATGRAPHICS CENTURION XV	67
6.1 ZÁKLADNÍ CHARAKTERISTIKY NÁHODNÉHO VÝBĚRU	68
6.2 ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI	71

6.2.1	Gama rozdělení pravděpodobnosti	71
6.2.2	Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti.....	72
6.2.3	Lognormální rozdělení pravděpodobnosti	73
6.2.4	Výběr rozdělení pravděpodobnosti.....	74
6.3	TESTOVÁNÍ DOBRÉ SHODY EMPIRICKÉHO A TEORETICKÝCH ROZDĚLENÍ.....	75
6.3.1	Pearsonův χ^2 test dobré shody.....	75
6.3.2	Kolmogorovův-Smirnovův test dobré shody.....	76
ZÁVĚR	80
7	LITERATURA	81
8	POUŽITÉ PROGRAMY	83

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1 - Pravděpodobnost intervalu hodnot spojité proměnné	22
Obrázek 2 - Vzájemný vztah hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce	22
Obrázek 3 - Hustota exponenciálního rozdělení	23
Obrázek 4 - Hustota pravděpodobnosti Paretova rozdělení	26
Obrázek 5 - Hustota Weibullova rozdělení	28
Obrázek 6 - Hustoty gama rozdělení	30
Obrázek 7 - Hustota lognormálního rozdělení	32
Obrázek 8 - Pravděpodobnostní rozdělení v programu Statgraphics Centurion XV	33
Obrázek 9 - Distribuční funkce Paretova rozdělení pravděpodobnosti.....	61
Obrázek 10 - Očekávaný škodový nadměrek pro různé parametry b.....	62
Obrázek 11 - Charakteristiky výše škod nad 100 000.....	64
Obrázek 12 - Q-Q graf porovnání shody s 2 - parametrickým Paretovým rozdělením	65
Obrázek 13 - Histogram porovnání shody s 2 - parametrickým Paretovým rozdělením	65
Obrázek 15 - Kolmogorovův-Smirnovův test dobré shody.....	66
Obrázek 14 - Paretovo rozdělení výše škod	66
Obrázek 16 - Základní charakteristiky	68
Obrázek 17 - Bodový graf výše škod	69
Obrázek 18 - Histogram výše škod.....	69
Obrázek 19 - Krabicový graf výše škod	70
Obrázek 20 - Q-Q graf porovnání shody s gama rozdělením.....	71
Obrázek 21 - Histogram porovnání shody s gama rozdělením	72
Obrázek 22 - Q-Q graf porovnání shody s exponenciálním rozdělením.....	72
Obrázek 23 - Histogram porovnání shody s exponenciálním rozdělením.....	73
Obrázek 24 - Q-Q graf porovnání shody s lognormálním rozdělením.....	73

Obrázek 25 - Histogram porovnání shody s lognormálním rozdělením	74
Obrázek 26 - Q-Q graf pro vybraná rozdělení.....	74
Obrázek 27 - Histogram pro vybraná rozdělení	75
Obrázek 28 - Pearsonův χ^2 test dobré shody.....	76
Obrázek 29 - Kolmogorovův-Smirnovův test	76
Obrázek 30 - Odhad parametrů lognormálního rozdělení	77
Obrázek 31 - Výstup procedury Goodness-of-Fit Tests.....	77
Obrázek 32 - Hodnoty distribuční funkce a k ní opačné pravděpodobnosti	78
Obrázek 33 - Kvantily rozdělení výše škod.....	78

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1 - Výše individuálních škod při neživotním pojištění v Kč.....	40
Tabulka 2 - Maximálně věrohodný odhad Paretova rozdělení pravděpodobnosti	44
Tabulka 3 - Počet nahlášených pojistných událostí	48
Tabulka 4 - Pearsonův χ^2 test.....	49
Tabulka 5 - Pearsonův χ^2 test, seskupení tříd	50
Tabulka 6 - Výše pojistných plnění.....	51
Tabulka 7 - Kolmogorovův – Smirnovův test.....	52
Tabulka 8 - Výše individuálních škod při neživotním pojištění v Kč.....	64
Tabulka 9 - Výše individuálních škod při neživotním pojištění v Kč.....	67
Tabulka 10 - Frequency tabulation.....	70

ÚVOD

Pojišťovnictví je jednou z klíčových oblastí národního hospodářství a to oblastí velmi stabilní a prosperující. S každou činností jsou spojena určitá rizika, proto existuje možná ochrana proti těmto rizikům – pojištění. Pojištění je přenosem rizika, negativních dopadů nahodilosti z pojištěného na specializovanou instituci, pojišťovnu. Pojištění zaručuje pojištěnému právo na výplatu pojistného plnění, pokud v průběhu pojištění nastane přesně vymezená pojistná událost, za předpokladu placení pojistného. Znakem pojistné události je její nahodilost, velmi malá pravděpodobnost vzniku, ale velký dopad na pojištěného v případě vzniku pojistné události.

Protože pojistné události mají náhodný charakter, základem pojistných věd je teorie pravděpodobnosti a metody statistické indukce. Moderní pojišťovnictví je založeno na metodách pojistné matematiky. Pojistná matematika se ze začátku zabývala především jednoduchými deterministickými modely. Teorii rizika lze v dnešní době považovat za moderní přístup k pojistné matematice, zejména proto, že spojuje metody teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky, operačního výzkumu a teorie rozhodování. Teorie rizika se zabývá statistickými a matematickými metodami v oblasti neživotního pojištění (od 30. let 20. století). Tato diplomová práce se týká hlavně oblasti neživotního pojištění a v celé práci budou použity postupy založené na teorii rizika.

Klíčový problém pro pojišťovnu klíčové znát zákony rozdělení pravděpodobnosti počtu pojistných plnění a výšky individuálních pojistných plnění. Tato práce se věnuje nalezení vhodného pravděpodobnostního modelu individuální výše škod. Budou zde popsány výhody a nevýhody jednotlivých rozdělení pravděpodobnosti, vhodných a užitečných pro pojistnou praxi. Práce se také věnuje metodám odhadů parametru rozdělení škod. Metoda momentů a metoda maximální věrohodnosti se aplikují na reálné údaje.

Další oblastí diplomové práce jsou testy dobré shody. Pomocí testů dobré shody se hledá vhodný pravděpodobnostní model výše škod. Podrobně budou popsány χ^2 test a Kolmogorovův-Smirnovův test dobré shody.

Diplomová práce se také zaměří na modely škod při zajištění. Budou zde popsány základní typy a formy a zajištění. Hlavní důraz bude kladen na tarifování a to zvláště

na model založený na Paretově rozdělení škod. Bude zde ukázán grafický postup využití tohoto modelu při stanovení netto pojistného u neproporcionálního zajištění WXL/R.

Cílem této diplomové práce je ukázka možností praktické aplikace metod teorie rizika při pravděpodobnostním modelování výše individuálních škod na základě znalosti reálných výběrových dat, s využitím programů Microsoft Excel a statistického programového systému STATGRAPHICS Centurion XV.

Splnění cíle diplomové práce lze shrnout do těchto základních problémových okruhů:

- teoretický výklad zvolených metod,
- odhad parametrů zvolených pravděpodobnostních modelů,
- testování shody zvolených pravděpodobnostních modelů a empirických rozdělení pomocí testů dobré shody,
- využití programů STATGRAPHICS Centurion XV a Microsoft Office Excel.

1 VÝZNAM PRAVDĚPODOBNOSTNÍHO MODELOVÁNÍ VÝŠE ŠKOD V NEŽIVOTNÍM POJIŠTĚNÍ

1.1 Charakteristika neživotního pojištění¹

Neživotní pojištění kryje velké množství rizik neživotního charakteru a to zejména rizika ohrožující zdraví a životy osob, rizika vyvolávající přímé věcné škody a rizika vyvolávající finanční ztráty. Oblast neživotního pojištění upravuje Zákon o pojišťovnictví č. 363/1999 Sb., který prošel novelizací a od 1. 1. 2010 je účinný Zákon o pojišťovnictví č. 277/2009 Sb. Dále tuto oblast upravuje Zákon č. 37/2004 Sb., o pojistné smlouvě a o změně souvisejících zákonů, vyhláška č. 303/2004 Sb., kterou se provádí některá ustanovení zákona o pojišťovnictví a novela, která byla provedena vyhláškou č. 96/2006 Sb.

1.2 Klasifikace neživotního pojištění

Neživotní pojištění má velkou variabilitu a lze ho členit podle různých hledisek, například na pojištění osob, majetku a odpovědnosti. Současným trendem je kombinace jednotlivých typů pojistných produktů s cílem komplexní nabídky pojistné ochrany.

1.2.1 Neživotní pojištění osob

➤ Úrazové pojištění

Úrazy se nevyhýbají nikomu a mnohdy jim lze jen stěží zabránit. Úraz, zejména vážný s trvalými následky, znamená podstatný zásah do života jedince i jeho rodiny. Pro stanovení výše pojistného je rozhodující zařazení osob do rizikových skupin, které jsou rozlišeny podle povolání, vykonávaného sportu a dále podle volby pojistné částky za jednotlivá rizika. Finanční odškodnění spojené s úrazem pomocí úrazového pojištění nepříjemné následky neodstraní, ale pomůže je zmírnit.

¹ Kapitola 1 podle [Ducháčková, 2005], [Cipra, 2006], Zákon č. 277/2009 Sb., o pojišťovnictví

Úrazové pojištění pokrývá celou řadu rizik, která lze libovolně kombinovat: např. dobu nezbytného léčení úrazu, dobu hospitalizace následkem úrazu, trvalé následky úrazu včetně progresivního plnění, smrt úrazem.

➤ **Nemocenské pojištění**

Nemocenské pojištění se využívá hlavně jako doplněk či nadstandard k povinnému všeobecnému zdravotnímu pojištění a k povinnému sociálnímu nemocenskému pojištění. Pojistné produkty nemocenského pojištění lze rozdělit na produkty, které kryjí rizika zdravotní a produkty zaměřené na krytí důsledků nemoci, které se projeví ve ztrátě nebo snížení příjmů v souvislosti s pracovní neschopností.

1.2.2 Pojištění majetková

Pojištění majetku patří mezi základní a nezbytné produkty pojistné ochrany a to jak pro občany, tak i pro podnikatelské subjekty. Toto pojištění zahrnuje krytí rizik, na základě kterých dochází ke škodám na majetku. Pojištění majetková lze rozdělit na několik skupin podle pojistných produktů:

- Pojištění majetku obyvatelstva
- Pojištění průmyslových a podnikatelských rizik
- Pojištění zemědělských rizik

➤ **Pojištění majetku obyvatelstva**

Do této skupiny pojištění patří pojištění domácností, pojištění budov a havarijní pojištění.

Pojištění domácností

Tento typ pojištění chrání soubor zařízení domácnosti, sloužící členům domácnosti. Do pojištění domácnosti je zahrnováno krytí celé řady rizik, např. rizika živelní, rizika vodovodní, riziko odcizení, riziko vandalismu. Současná nabídka pojištění domácností je velmi pestrá, existuje v mnoha variantách a to v základní, standardní a nadstandardní variantě podle vybavení domácnosti, úrovně jejího zabezpečení a také podle úrovně rizik v příslušné lokalitě. Podmínkou sjednání nadstandardních variant je ve většině případů investice do zabezpečení domu či bytu (bezpečnostní dveře, zámky...).

Pojištění budov

Předmětem tohoto pojištění jsou budovy. Jde především o pojištění rodinných domů, bytových domů a příslušenství, družstevních domů, nebytových prostor, rekreačních objektů, příslušenství staveb, movitých věcí sloužících k výstavbám či rekonstrukcím, hospodářských budov, drobných staveb. Pojištění budov obvykle kryje rizika živelní, vodovodní, odcizení, vandalismus či důsledky lidské neopatrnosti (např. náraz dopravního prostředku).

Havarijní pojištění

Havarijní pojištění kryje škody na motorových vozidlech, které řidič buď neovlivnil nebo zcela či částečně ovlivnil. Toto pojištění kryje riziko havárie, ale může být rozšířeno o krytí dalších rizik (živelních, odcizení, vandalství atd.). V rámci havarijního pojištění se velmi často uplatňuje pojištění asistenčních služeb.

1.2.3 Pojištění průmyslových a podnikatelských rizik

V rámci této skupiny majetkových pojištění je rozlišováno velké množství různých pojistných produktů. Pojištění průmyslových a podnikatelských rizik umožňuje vhodnou kombinaci jednotlivých druhů pojištění a zajišťuje komplexní pojistnou ochranu podnikatelských aktivit. Mezi nejvýznamnější druhy pojištění této skupiny patří:

- Živelní pojištění
- Pojištění technická
- Pojištění pro případ přerušování provozu (šomázní pojištění)
- Pojištění dopravní
- Pojištění úvěru
- Pojištění proti odcizení
- Pojištění specializovaných činností atd.

1.2.4 Pojištění zemědělských rizik

Vzhledem k tomu, že rostlinná a živočišná výroba představuje velmi specifickou oblast podnikání, toto pojištění kryje rizika, která mají specifický charakter. Pro tato rizika byly vytvořeny pojistné produkty, které poskytují kvalitní a komplexní pojistnou ochranu. V zásadě lze pojištění zemědělských rizik rozdělit na:

Pojištění plodin

Nejčastěji používanou formou je krupobitní pojištění, pojištění proti vybraným rizikům, pojištění úrody plodin.

Pojištění hospodářských zvířat

Toto pojištění zahrnuje zejména ochranu proti nákazám a pro případ uhynutí, utracení či nutné porážky z důvodu nebezpečné nákazy. Dále jsou zde zahrnuta rizika živelních událostí, zasažení elektrickým proudem či akutní otravy.

Pojištění lesů

Lesy se pojišťují zejména proti riziku požáru.

Jiná pojištění

1.2.5 Pojištění odpovědnosti za škody

Odpovědnostní pojištění lze sjednat v celé řadě pojistných produktů. Pojistné produkty můžeme rozdělit do několika oblastí:

- Odpovědnostní pojištění vozidel
- Odpovědnostní pojištění při pracovních úrazech a nemocech z povolání
- Profesionální odpovědnostní pojištění
- Obecné odpovědnostní pojištění

Škoda se definuje jako újma, kterou lze objektivně vyjádřit penězi. Škoda může být:

- a) věcná škoda
 - skutečná škoda
 - ušlý zisk
- b) škoda na zdraví (životě)

Principem pojištění odpovědnosti za škodu je úhrada škody, vzniklé poškozenému, tj. třetí osobě. Výši odškodnění lze stanovit:

- podle skutečně vzniklé věcné škody
- podle doloženého ušlého zisku
- podle příslušných právních předpisů
- rozhodnutím soudu nebo jiného orgánu

- mimosoudní dohodou

1.2.6 Pojištění právní ochrany

Toto pojištění zahrnuje krytí nákladů pojištěného v souvislosti s právními úkony. Náklady na právní zastoupení a další související náklady s vedením různých sporů mohou představovat velmi vysoké částky, proto lze proti takovýmto předem neočekávaným nákladům uzavřít pojištění právní ochrany. V rámci pojistného plnění jsou kryty zejména:

- soudní výdaje a náklady
- odměny a náklady zvoleného právního zástupce
- náklady na svědky a soudní znalce povolane soudem
- výdaje a náklady protistrany
- náklady na provedení výkonu rozhodnutí
- výdaje pojištěného za cesty k soudnímu řízení

Další součástí pojištění právní ochrany je poskytování právních rad a právní asistence. Toto pojištění se uplatňuje v těchto základních podobách:

- Pojištění právní ochrany vodiče motorového vozidla
- Pojištění právní ochrany držitele motorového vozidla
- Pojištění právní ochrany rodiny
- Pojištění právní ochrany podniků

1.2.7 Cestovní pojištění

Dochází zde ke kombinaci různých pojistných produktů. Ze základního cestovního pojištění vyplývá úhrada nezbytných nákladů pojištěného na lékařské a nemocniční ošetření, kterému se během pojistné doby byl nucen podrobit v důsledku úrazu či nemoci.

V příloze 1 jsou uvedeny odvětví a skupiny neživotního pojištění, jak je udává Zákon č. 277/2009 Sb., o pojišťovnictví.

1.3 Význam pravděpodobnostního modelování výše škod

Při hledání významu pravděpodobnostního modelování je nutné zmínit disciplíny jako je pojistná matematika a teorie rizika.

Pojistná matematika je aplikovaná matematika v pojišťovnictví, která popisuje pojistné procesy pomocí matematických modelů z oblasti teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Pojistná matematika je jednou z významných oblastí aplikované matematiky a má důležité praktické uplatnění v pojišťovnictví. Velmi dlouho se zaměřovala pouze na jednoduché modelování, které je dnes součástí finanční matematiky. Až s rozvojem komerčního pojišťovnictví a v souvislosti se zvýšeným zájmem o oblast neživotního pojištění zhruba na počátku 20. století se začínají používat pokročilé metody z teorie pravděpodobnosti, teorie rozhodování a teorie užitku.

V průběhu dalšího vývoje se vyčlenila disciplína *teorie rizika*. Přispěl k tomu vznik mezinárodní organizace pojistných matematiků ASTIN (Actuarial Studies in Non-Life Insurance), která vznikla v roce 1957 jako jedna ze sekcí Mezinárodní pojistné asociace IAA. Za hlavní cíle organizace ASTIN lze považovat podporu výzkumu v oblasti pojistné matematiky, obecného pojištění a udržování kontaktů mezi pojistnými matematiky. Teorie rizika se zabývá moderními statistickými a matematickými metodami v oblasti neživotního pojištění (zhruba od 30. let 20. století).

Pravděpodobnostní matematické modelování je tedy součástí matematické disciplíny teorie rizika a zahrnuje také finanční riziko. Každá pojistná událost má charakter náhodné události, většinou málo pravděpodobné, ale s vážnými důsledky pro pojištěného v případě vzniku. Hlavní význam pravděpodobnostního modelování tedy lze spatřit ve vytváření modelů pojistných jevů, na základě kterých lze odhadovat, predikovat či modelovat různé náhodné události v pojišťovnictví. Pojištění je tedy nástroj finanční eliminace negativních důsledků nahodilých událostí.

Z existence pojistně technického rizika vyplývá další významný důvod pro pravděpodobnostní modelování. Pojistně technické riziko vzniká ze skutečnosti, že pojišťovna pracuje s nahodilostí a že rozsah pojistných plnění nelze přesně určit, je nutné použít odhadů. Může tedy dojít k odchylce (záporné či kladné) mezi skutečnou a odhadnutou výší škod.

Pojišťovny mají možnost řešit existenci pojistně technického rizika různými způsoby: podle [Ducháčková, 2005]

- Využití dokonalejších pojistně matematických modelů a využívání některých pojistně technických nástrojů v kalkulaci pojistného (např. využití určitých forem pojištění – pojištění na první riziko, franšízy apod.).
- Vyrovnávání rizik rozložením, pojišťovna se snaží krýt rizika na co nejširším území.
- Diverzifikace rizik, snaha nesespecializovat se jen na určitý druh rizika, ale krýt co nejširší strukturu rizik.
- Tvorba výkyvových rezerv, kdy pojišťovna vytváří rezervy pro případy, kdy dojde k výkyvům v pojistných plněních (rozložení rizika z časového pohledu).
- Přenesení rizik na další pojišťovací instituci, kdy se pojišťovna snaží hodnoty převzatých rizik snižovat na hodnoty, které může sama unést. Rozkládání rizik se zde uskutečňuje zejména prostřednictvím zajištění, využití pojišťovacích poolů a soupojištění.

Mezi hlavní důvody, které motivují snahu o matematické modelování pojistných jevů, patří následující: podle [Cipra, 2006]

- Model může nahradit nedostatečný počet dat (u začínajících pojišťoven, v případě špatné předchozí evidence dat apod.).
- Často pomocí jednoduchých matematických vztahů s malým počtem parametrů či jiných matematických atributů lze popsat chování rozsáhlých pojistných kmenů.
- Lze statisticky testovat vlastnosti pojistných kmenů aj.

Při modelování výše škod používáme modely, které vycházejí z pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny X , což je označení výše škody obvykle na jednu pojistnou událost. Většinou platí, že $x \geq 0$ a rozdělení náhodné veličiny X je popsáno její hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

2 PRAVDĚPODOBNOSTNÍ ROZDĚLENÍ PRO MODELOVÁNÍ POJISTNÝCH PLNĚNÍ

Individuální pojistná plnění mají několik vlastností, které jsou společné určitým typům pojistných plnění v neživotním pojištění. Většina z nich má nižší hodnotu než je průměrné pojistné plnění, ale jsou dosti pravděpodobné i extrémně vysoká pojistná plnění, z čehož vyplývá velký rozptyl a pravostranná asymetrie jejich rozdělení. Tyto vlastnosti vedou k předpokladu, že pro rozdělení pravděpodobnosti individuálních pojistných plnění jsou vhodná některá z pravostranných zešikmených spojitých rozdělení. Nejvhodnější jsou rozdělení exponenciální, Paretovo, Weibullovo, gama a lognormální rozdělení.²

V další části budou uvedena nejznámější rozdělení pravděpodobnosti, vhodná pro modelování pojistných plnění.

- **Exponenciální rozdělení**
- **Paretovo rozdělení**
- **Weibullovo rozdělení**
- **Gama rozdělení**
- **Lognormální rozdělení**

Dále budou ke každému typu pravděpodobnostního rozdělení uvedeny základní informace, tedy hustota pravděpodobnosti $f(x)$, distribuční funkce $F(x)$, momentová vytvářející funkce $M_x(z)$, také základní charakteristiky a z nich vyplývající nejdůležitější vlastnosti, funkční vyjádření pravděpodobnosti $P(X < x)$ intervalu nejvyšších hodnot individuálních pojistných plnění X .

Symbol X označuje náhodnou proměnnou s distribuční funkcí $F(x)$ a hustotou pravděpodobnosti $f(x)$. Přitom

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{2.1}$$

² Kapitola 2 podle [Pacáková, 2004], [Kubanová, 2004]

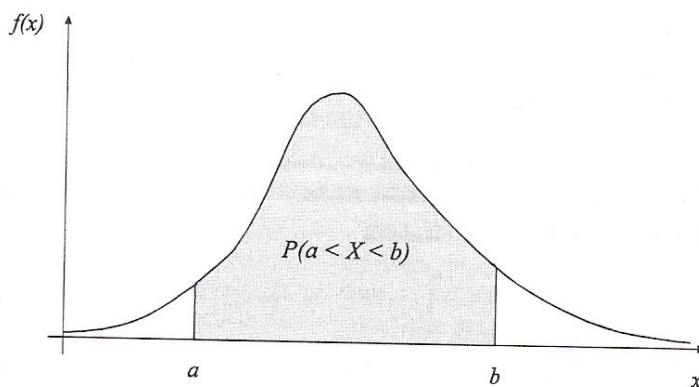
Základní vlastnosti hustoty pravděpodobnosti $f(x)$: [Pacáková, 2004]

$$F(x) \geq 0 \quad (2.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad (2.3)$$

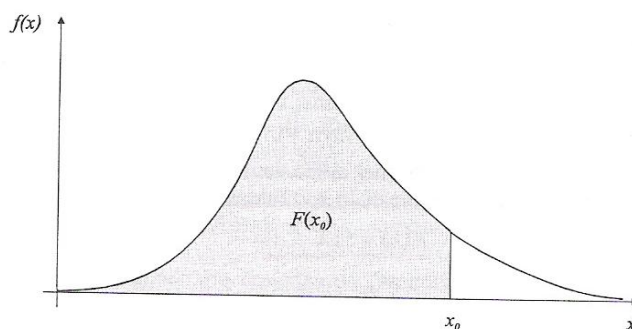
$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx \quad \text{pro } a < b \quad (2.4)$$

Vlastnost (2.4) je vyjádřena graficky na obrázku 1.



Obrázek 1 - Pravděpodobnost intervalu hodnot spojité proměnné [Pacáková, 2004]

Distribuční funkce $F(x)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodná proměnná X má hodnoty menší nanejvýš rovné hodnotě reálného čísla x . $F(x) = P(X \leq x)$.



Obrázek 2 - Vzájemný vztah hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce [Pacáková, 2004]

2.1 Exponenciální rozdělení – Exp (λ)

Exponenciální rozdělení má výhodný průběh a jednoduché funkční vyjádření hustoty pravděpodobnosti (viz obrázek 3), distribuční funkce a základních charakteristik.

Definice exponenciálního rozdělení [Pacáková, 2004]

Náhodná proměnná X má exponenciální rozdělení s parametrem λ právě tehdy, když její hustotu pravděpodobnosti vyjadřuje funkce $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pro $x > 0, \lambda > 0$.

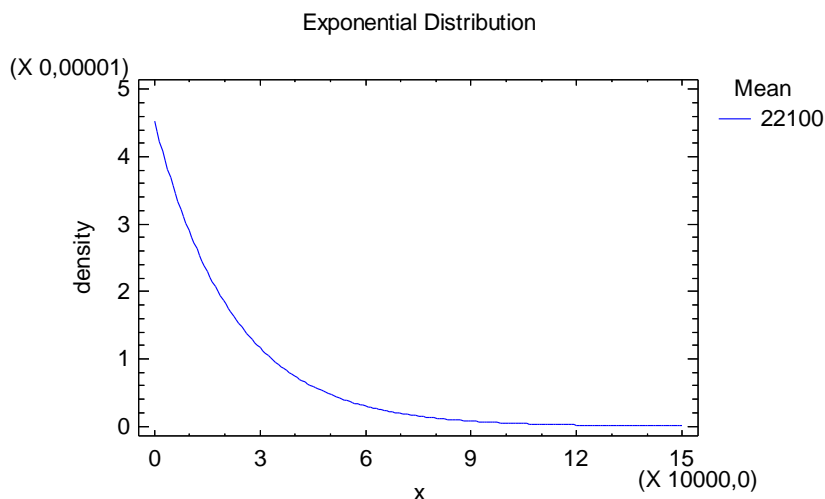
Distribuční funkce má funkční vyjádření:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Z předchozího vztahu vyplývá pravděpodobnost intervalu nejvyšších hodnot.

$$P(X > x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x} = \exp(-\lambda x)$$

Hustota exponenciálního rozdělení škod pro $E(X) = 22\,100$, tedy $\lambda = 4,52489E-05$ je znázorněna na obrázku 3, který je výstupem posloupnosti kroků *Plot-Probability Distribution-Exponential* systému STATGRAPHIC Centurion XV.



Obrázek 3 - Hustota exponenciálního rozdělení

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

Základní charakteristiky

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (2.6)$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.7)$$

$$\gamma_1 = 2 \quad (2.8)$$

$$M_x(z) = \frac{\lambda}{\lambda - z} \quad \text{pro } z > 0 \quad (2.9)$$

Výhody a nevýhody exponenciálního rozdělení

Mezi hlavní výhody tohoto rozdělení patří jeho výhodný průběh a jednoduché funkční vyjádření hustoty pravděpodobnosti. Na základě těchto vlastností je toto rozdělení vhodné pro modelování výše pojistných plnění X .

Nevýhodou exponenciálního rozdělení je jeho použití na modelování výše pojistných plnění pouze jako hrubou aproximaci. Velmi špatně modeluje dva důležité intervaly hodnot pojistných plnění: interval nejnižších hodnot (kde nejnižší hodnota může být např. hladina spoluúčasti) a interval nejvyšších hodnot (kde zvolená nejvyšší možná hodnota může být např. priorita pojišťovny při zajištění). Pravděpodobnost pravého konce rozdělení $\text{Exp}(\lambda)$ konverguje velmi rychle k ose x , z tohoto důvodu je tedy prakticky nemožné pomocí exponenciálního modelu odhadnout pravděpodobnost velmi vysokých pojistných plnění, jejichž znalost má pro pojišťovnu mimořádný význam. Další nevýhodou je malá flexibilita při modelování pojistných plnění, která je způsobena tím, že tvar hustoty pravděpodobnosti závisí na jediném parametru λ .

➤ Praktická ukázka: Příklad exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti

Při pojištění domácností mají pojistná plnění X exponenciální rozdělení. Střední hodnota je 22 100 Kč. Zjistíme pravděpodobnosti těchto intervalů výše pojistných plnění:

a) $P(X < 4\,000)$

$$P(X < 4000) = F(4000) = 1 - e^{\frac{-4000}{22100}} = 0,1656$$

Pravděpodobnost, že pojistná plnění budou nižší, než 4 000 Kč je 0,1656. Lze je najít také v programu Microsoft Excel pomocí funkce *Expndist*.

b) $P(12\ 000 < X < 45\ 000)$

$$P(12\ 000 < X < 45\ 000) = F(45\ 000) - F(12\ 000) = e^{\frac{-12000}{22100}} - e^{\frac{-45000}{22100}} = 0,58102 - 0,13052 = 0,4505$$

Pravděpodobnost, že pojistná plnění budou vyšší než 12 000 Kč a zároveň nižší než 45 000 Kč je 0,4505.

c) $P(X > 39\ 000)$

$$P(X > 39\ 000) = e^{\frac{-39000}{22100}} = 0,1712$$

Pravděpodobnost, že pojistné plnění přesáhne 39 000 Kč je 0,1712.

2.2 Paretovo rozdělení – Pa (α, λ)

Paretovo rozdělení se používá zejména jako rozdělení pojistných plnění, při kterých je možnost výskytu extrémních hodnot (v nemocenském pojištění, pojištění proti požáru). Paretovo rozdělení je pro modelování rozdělení pojistných plnění velmi vhodné, protože pravděpodobnost nejvyšších hodnot pojistných plnění konverguje k nule velmi pomalu. V tomto případě je použit americký způsob vyjádření Paretova rozdělení.

Definice Paretova rozdělení [Pacáková, 2004]

Náhodná proměnná X má Paretovo rozdělení Pa (α, λ) právě tehdy, když její funkční vyjádření hustoty pravděpodobnosti má tvar:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}, & x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

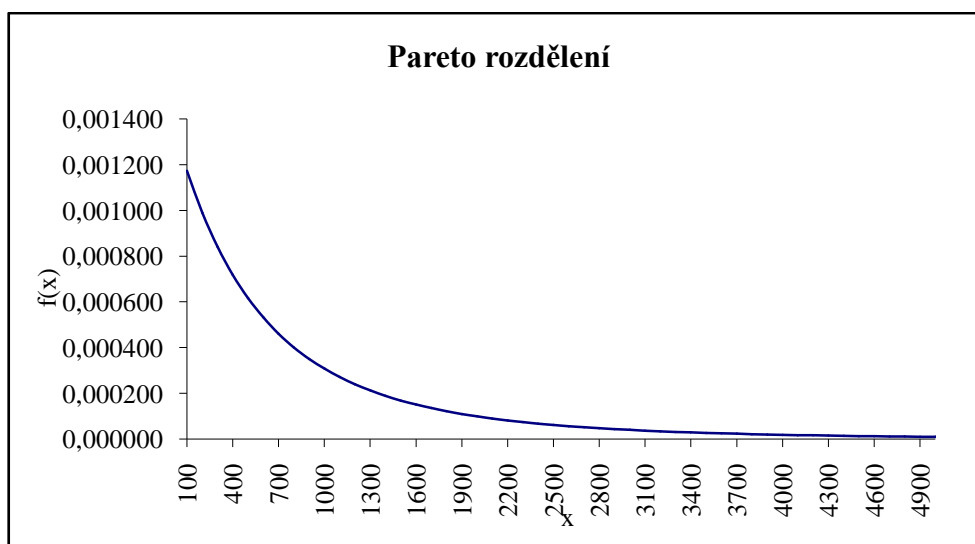
Distribuční funkce má funkční vyjádření:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^\alpha \quad (2.11)$$

Hustota Paretova rozdělení má tvar:

$$f(x) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{\lambda + x}^{\alpha+1} \quad (2.12)$$

Obrázek 4 znázorňuje hustotu pravděpodobnosti Paretova rozdělení s parametry $\alpha = 3,5$ a $\lambda = 2\,500$, nakreslenou v programu Excel podle vztahu (2.12).



Obrázek 4 - Hustota pravděpodobnosti Paretova rozdělení [zdroj vlastní]

Základní charakteristiky

$$E(X) = \frac{\lambda}{\alpha - 1} \quad \text{pro } \alpha > 1 \quad (2.13)$$

$$D(X) = \frac{\alpha \lambda^2}{\alpha - 1}^2 - \alpha - 2 \quad \text{pro } \alpha > 2 \quad (2.14)$$

$$\gamma_3(X) = \frac{2\sqrt{\alpha - 2}}{\sqrt{\alpha}} \frac{\alpha + 1}{\alpha - 3} \quad \text{pro } \alpha > 3 \quad (2.15)$$

Výhody a nevýhody Paretova rozdělení

Výhodou je, že odstraňuje nedostatky exponenciálního rozdělení. Při Paretově rozdělení pravděpodobnost nejvyšších hodnot pojistných plnění konverguje k nule pomaleji, což nám umožňuje vytvoření lepšího modelu extrémních škod.

Naopak nevýhodou je to, že v některých případech není možné určit střední hodnotu a rozptyl tohoto rozdělení.

➤ *Praktická ukázka: Příklad Paretova rozdělení pravděpodobnosti*

Výše pojistných plnění ve 100 peněžních jednotkách (p. j.) při pojištění proti požáru má Paretovo rozdělení pravděpodobnosti $P(\alpha, \lambda)$, přičemž $\alpha=3,6$ a $\lambda=2000$. Chceme zjistit pravděpodobnost intervalů pojistných plnění ve 100 peněžních jednotkách.

a) $P(X < 6\,000)$

$$P(X < 6\,000) = F(6\,000) = 1 - \left(\frac{2000}{2000 + 6000} \right)^{3,6} = 0,9932$$

Pravděpodobnost, že pojistné plnění při pojištění proti požáru bude nižší než 600 000 p. j. je 0,9932.

b) $P(1\,500 < X < 4\,000)$

$$P(1\,500 < X < 4\,000) = F(4\,000) - F(1\,500) = 0,9808 - 0,8666 = 0,1142$$

Pravděpodobnost, že pojistné plnění bude vyšší než 150 000 p. j. a zároveň nižší než 400 000 p. j. je 0,1142.

c) $P(X > 16\,000)$

$$P(X > 16\,000) = 1 - F(16\,000) = \left(\frac{2000}{2000 + 16000} \right)^{3,6} = 0,000367$$

Pravděpodobnost, že pojistné plnění bude vyšší než 16 000 000 p. j. je 0,000367.

2.3 Weibullovo rozdělení – $W(\gamma, c)$

Toto rozdělení má také mírnější pokles hustoty pravděpodobnosti na intervalu nejvyšších pojistných plnění X ve srovnání s exponenciálním rozdělením.

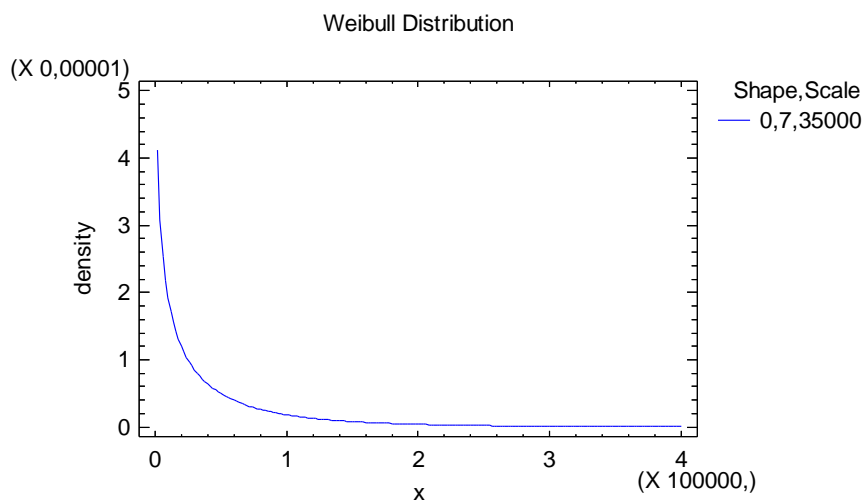
Definice Weibullova rozdělení [Pacáková, 2004]

Náhodná proměnná X má Weibullovo rozdělení $W(\gamma, c)$ s parametry $\gamma > 0, c > 0$ právě tehdy, když distribuční funkce má funkční vyjádření $F(x) = 1 - e^{-cx^\gamma}$ pro $x > 0$.

Hustota pravděpodobnosti má potom funkční vyjádření:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = c^\gamma x^{\gamma-1} e^{-cx^\gamma} \quad (2.16)$$

Hustota Weibullova rozdělení s parametry $c = 0,7$ a $\gamma = 35\,000$ je na obrázku 5 jako výstup ze systému STATGRAPHICS Centurion XV.



Obrázek 5 - Hustota Weibullova rozdělení

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

Základní charakteristiky

$$E(X) = c^{-\frac{2}{\gamma}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \quad (2.17)$$

$$D(X) = c^{-\frac{2}{\gamma}} \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \right]^2 \right\} \quad (2.18)$$

$$E(X^n) = \frac{\Gamma(1+n/\gamma)}{c^{n/\gamma}} \quad (2.19)$$

Výhody a nevýhody Weibullova rozdělení

Výhodou Weibullova rozdělení je velká flexibilita. Můžeme ho často použít pro modelování pojistných plnění místo Paretova rozdělení. Weibullovo rozdělení je pružné a přizpůsobivé pro data v širokém rozsahu.

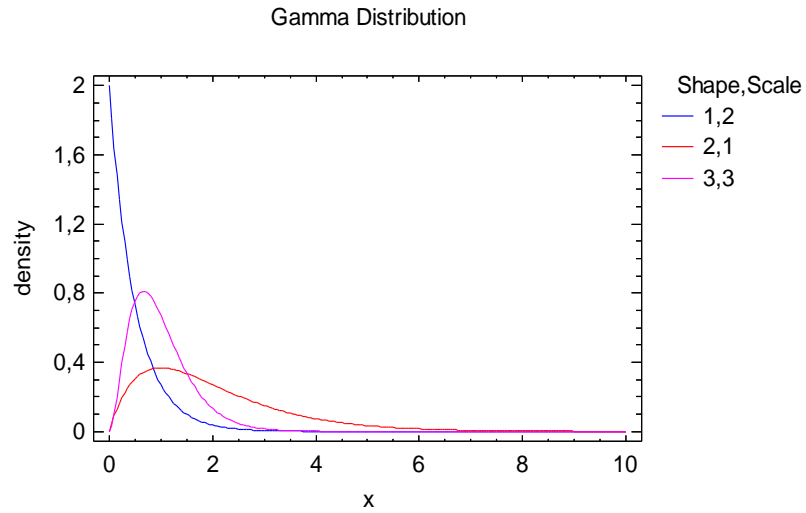
Nevýhodou tohoto rozdělení je to, že v porovnání s Paretovým rozdělením hůř vystihuje pravděpodobnost velmi vysokých pojistných plnění.

2.4 Gama rozdělení – G(α , β)

Toto rozdělení lze použít pro zkoumání proměnných, které mohou mít asymetrické rozdělení. Gama rozdělení je velmi flexibilní parametrický model rozdělení pojistných plnění. Jeho hustota $f(x)$ se mění v závislosti na dvou parametrech α , β .

Definice gama rozdělení [Pacáková, 2004]

Náhodná proměnná X má gama rozdělení s parametry α , β právě tehdy, když hustota pravděpodobnosti má funkční vyjádření $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$, $x > 0$.



Obrázek 6 - Hustoty gama rozdělení

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

Když položíme $\alpha = 1$, dostaneme hustotu exponenciálního rozdělení $\text{Exp}(\beta)$. Tedy rozdělení $G(1,\beta)$ je stejné s rozdělením $\text{Exp}(\beta)$.

Na obrázku 6 jsou znázorněny hustoty gama rozdělení $G(1;2)$, $G(2;1)$, $G(3;3)$ jako výstup procedury *Distribution Plotting* systému STATGRAPHICS Centurion XV.

Základní charakteristiky

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \tag{2.20}$$

$$D(X) = \frac{\alpha}{\beta^2} \tag{2.21}$$

$$\nu_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \tag{2.22}$$

$$M_x(z) = \left(\frac{\beta}{\beta-z}\right)^\alpha, \quad z < \beta \tag{2.23}$$

Výhody a nevýhody Gama rozdělení

Toto rozdělení je v porovnání s exponenciálním rozdělením flexibilnější. Je vhodné např. pro modelování výše pojistných plnění při pojištění motorových vozidel. Toto rozdělení se často používá jako rozdělení výše pojistných nároků v neživotním pojištění.

Naopak naprosto nevhodné je pro modelování výše pojistných plnění v majetkovém pojištění. Další nevýhodou jsou nepřesné odhady pravděpodobnosti příliš vysokých pojistných plnění.

2.5 Lognormální rozdělení – LN (μ, σ^2)

Lognormální rozdělení je kladně zešikmené rozdělení, které má široké využití v ekonomické oblasti. Lze ho využít zejména v pojištění havarijním, úrazovém a v pojištění proti požáru.

Definice lognormálního rozdělení [Pacáková, 2004]

Spojité proměnná veličina X má lognormální rozdělení LN (μ, σ^2), když $\ln(X)$ má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

Hustota lognormálního rozdělení má funkční vyjádření

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, x > 0 \quad (2.24)$$

Distribuční funkce má vyjádření:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^{\ln x} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy, & x > 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Základní charakteristiky

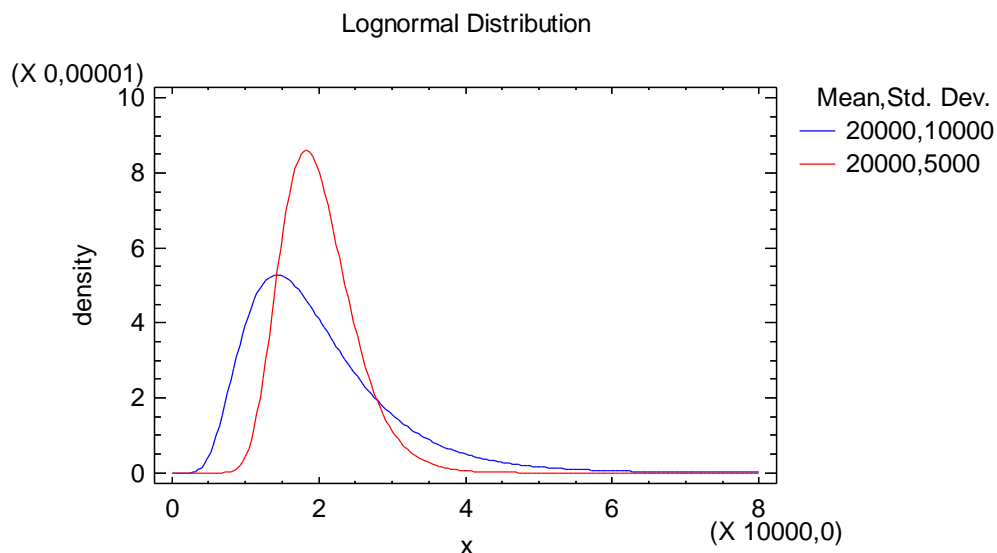
$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (2.27)$$

$$D(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \quad (2.28)$$

$$\nu_1 = (e^{\sigma^2} + 2) \sqrt{e^{\sigma^2} - 1} \quad (2.29)$$

$$M_x(z) = e^{k\mu + \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \quad (2.30)$$

$$(X^k) = E(e^{kY}) = M_Y(z=k) = e^{k\mu + \frac{\sigma^2 k^2}{2}} \quad (2.31)$$



Obrázek 7 - Hustota lognormálního rozdělení

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

Obrázek 7 znázorňuje hustoty pravděpodobnosti lognormálního rozdělení pravděpodobnosti pro $E(X) = 20\,000$ a $D(X) = 10\,000^2$ a také pro $E(X) = 20\,000$ a $D(X) = 5\,000^2$, sestavené v systému STATGRAPHICS Centurion XV.

Výhody a nevýhody lognormálního rozdělení

Výhodou tohoto rozdělení pravděpodobnosti je fakt, že ze vztahu $E(X^k)$ lze vyjádřit všechny uvedené charakteristiky rozdělení $LN(\mu, \sigma^2)$.

Jako jediné lognormální rozdělení nemá žádné nevýhody, proto se často používá.

Existují i další rozdělení pravděpodobnosti, vhodné pro modelování pojistných plnění. Většinou se jedná o rozdělení, která mají více než dva parametry, nejčastěji tři. Na následujícím obrázku jsou uvedena další rozdělení pravděpodobnosti, které nabízí program STATGRAPHICS Centurion XV.



Obrázek 8 - Pravděpodobnostní rozdělení v programu Statgraphics Centurion XV

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

3 METODY ODHADŮ PARAMETRŮ ROZDĚLENÍ ŠKOD

Mezi hlavní úkoly matematické statistiky patří určení charakteristik a parametrů rozdělení pravděpodobnosti zkoumaného souboru. Všechny v předchozí kapitole uvedené rozdělení pravděpodobnosti závisí na jednom či více parametrech. Parametry nejsou předem známe, jsou tedy určované na základě neúplných informací o konkrétních pojistných případech. Při určování parametrů se využívá statistická indukce, odhady parametrů rozdělení pomocí výběrových údajů a teorie odhadů. Mezi nejpoužívanější metody odhadů patří metoda maximální věrohodnosti, metoda momentů a metoda kvantilů.³

3.1 Metoda maximální věrohodnosti

Je to pravděpodobně nejpoužívanější metoda určování bodových odhadů parametrů. Nejpoužívanější je zřejmě hlavně proto, že ji lze použít k odhadu parametrů v mnoha situacích. Odhady získané touto metodou se vyznačují dobrými vlastnostmi. Tato metoda dává konzistentní odhady, nejlepší v případě velkých výběrů.

Princip této metody je založen na předpokladu, že do náhodného výběru se nejčastěji dostávají ty hodnoty statistického znaku, které mají v základním souboru největší pravděpodobnosti, resp. hustoty pravděpodobnosti. Za odhad neznámého parametru Θ se zvolí taková hodnota $\hat{\Theta}$, která při daných realizovaných hodnotách náhodného výběru maximalizuje funkci věrohodnosti. [Kubanová, 2004]

Definice funkce věrohodnosti [Pacáková, 2004]

Nechť je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor n nezávislých výběrových pozorování ze základního souboru s rozdělením $f(\mathbf{x}, \Theta)$, kde $\Theta' = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p)$ je vektor p neznámých parametrů.

³ Kapitola 3 podle [Pacáková, 2004], [Kubanová, 2004]

Funkce věrohodnosti

$$L(\Theta; x) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \Theta) \quad (3.1)$$

Přirozený logaritmus funkce věrohodnosti

$$l(\Theta; x) = \ln L(\Theta; x) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \Theta) \quad (3.2)$$

Maximálně věrohodný odhad [Pacáková, 2004]

Maximálně věrohodný odhad $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(x)$ je takový vektor Θ , který maximalizuje $L(\Theta, x)$, resp. $l(\Theta, x)$.

3.1.1 Vlastnosti maximálně věrohodného odhadu

Mezi hlavní důvody, proč je maximální věrohodný odhad často používán, patří tyto vlastnosti: [Pacáková, 2004]

- $\hat{\Theta}$ má asymptotický normální rozdělení
- $\hat{\Theta}$ je asymptoticky nezkreslen
- $\hat{\Theta}$ je konzistentní
- $\hat{\Theta}$ je asymptoticky vydatný
- $\hat{\Theta}$ je konzistentní
- $\hat{\Theta}$ je invariantní

➤ **Praktická ukázka: Odhad parametru λ exponenciálního rozdělení pomocí metody maximální věrohodnosti** [Pacáková, 2004]

Určení výběrové charakteristiky, která je maximálním věrohodným odhadem parametru λ . Necht' x_1, x_2, \dots, x_n je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení $\text{Exp}(\lambda)$ s hustotou pravděpodobnosti $f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, pro $x > 0, \lambda > 0$.

1. Nejprve dosadíme do funkce věrohodnosti

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}$$

2. Potom funkci maximální věrohodnosti zlogaritmuje

$$l(\lambda) = \ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda * \sum_{i=1}^n x_i$$

3. Dále pro určení λ , které maximalizuje $l(\lambda)$, vypočítáme derivaci $\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda}$ a položíme ji rovnu 0

$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

4. Z předchozího vyplývá vztah pro maximálně věrohodný odhad $\hat{\lambda}$ parametru λ

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}} \quad (3.3)$$

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \bar{x} \quad (3.4)$$

Maximálně věrohodný odhad parametru λ exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti je roven převrácené hodnotě aritmetického průměru.

➤ **Praktická ukázka: Odhad parametrů α , λ Paretova rozdělení pomocí metody maximální věrohodnosti** [Pacáková, 2004]

Nechť x_1, x_2, \dots, x_n je náhodný výběr z Paretova rozdělení $P(\alpha, \lambda)$. Provedeme určení maximálně věrohodných odhadů $\hat{\alpha}, \hat{\lambda}$ pomocí x_1, x_2, \dots, x_n .

1. Nejprve dosadíme do funkce věrohodnosti

$$L(\alpha, \lambda, x) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + x_i)^{\alpha+1}}$$

2. Potom funkci maximální věrohodnosti zlogaritmuje

$$l(\alpha, \lambda; x) = \sum_{i=1}^n [\ln \alpha + \alpha \ln \lambda - (\alpha + 1) \ln(\lambda + x_i)] = n \ln \alpha + n \alpha \ln \lambda - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \ln(\lambda + x_i)$$

3. Určíme parciální derivaci $l(\alpha, \lambda; x)$ podle α :

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n * \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln(\lambda + x_i)$$

4. Položíme tuto rovnici rovnu nule a dostaneme maximálně věrohodný odhad $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right)} = A \quad (3.5)$$

5. Analogicky určíme derivaci podle λ

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{n\alpha}{\lambda} - (\alpha + 1) * \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda + x_i}$$

6. Položíme tuto rovnici rovnu nule a dostaneme další maximálně věrohodný odhad $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda + x_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\lambda(\lambda + x_i)}} = B \quad (3.6)$$

7. Máme dvě různá vyjádření pro maximálně věrohodný odhad $\hat{\alpha}$, z jejich rovnosti dostaneme funkci daného parametru λ .

$$f \lambda = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda + x_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\lambda(\lambda + x_i)}} - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right)} \quad (3.7)$$

Určení maximálně věrohodných odhadů parametrů α , λ Paretova rozdělení je numericky značně náročné. Ovšem tyto odhady jsou při všech rozděleních pravděpodobnosti mnohem lepší a přesnější než určení odhadů následujícími metodami. Podstatně jednodušší je určení těchto parametrů metodou momentů.

3.2 Metoda momentů

Metoda momentů patří mezi nejstarší a často používané metody bodových odhadů. Podstata této metody spočívá v nahrazení charakteristik základního souboru odpovídajícími výběrovými charakteristikami. Ovšem velká nevýhoda této metody je, že výsledky nemají vlastnosti dobrých odhadů.

➤ *Praktická ukázka: Odhady parametrů Paretova a Gama rozdělení*

Paretovo rozdělení:

$$\bar{x} = \frac{\lambda}{\alpha-1} \quad s^2 = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \quad (3.8)$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{2s^2}{s^2 - \bar{x}^2} \quad \tilde{\lambda} = (\tilde{\alpha} - 1)\bar{x} \quad (3.9)$$

Gama rozdělení:

$$\bar{x} = \frac{\alpha}{\beta} \quad s^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (3.10)$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\bar{x}^2}{s^2} \quad \tilde{\beta} = \frac{\bar{x}}{s^2} \quad (3.11)$$

3.3 Metoda kvantilů

Metoda kvantilů je další z metod bodových odhadů. Používá se v případě, že je výpočetně obtížné použití předchozích dvou metod. Při této metodě se většinou využívá medián (při odhadu jednoho neznámého parametru), nebo dolní a horní kvantil (při odhadu více parametrů).

➤ *Praktická ukázka: Odhad parametrů c, γ Weibullova rozdělení metodou kvantilů* [Pacáková, 2004]

Nechť q_{25} je dolní a q_{75} horní kvantil rozdělení $W(c, \gamma)$ s distribuční funkcí $F(x) = 1 - e^{-cx^\gamma}$. Potom podle vztahu $F(q_k) = \frac{k}{100}$ pro $k=25$ a 75 dostaneme soustavu dvou rovnic s dvěma neznámými parametry c, γ :

$$1 - e^{-cq_{25}^\gamma} = 0,25 \qquad 1 - e^{-cq_{75}^\gamma} = 0,75$$

Rovnice je vhodné zlogaritmovat

$$cq_{25}^\gamma = -\ln 0,25 \qquad cq_{75}^\gamma = -\ln 0,75$$

Řešením těchto rovnic získáme odhady $\hat{c}, \hat{\gamma}$ parametrů c, γ

$$\hat{c} = \frac{0,287682}{q_{25}^{\hat{\gamma}}} \tag{3.12}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{1,5725336}{\ln q_{75} - \ln q_{25}} \tag{3.13}$$

Pomocí údajů o výši individuálních pojistných plnění s Weibullovým rozdělením s neznámými parametry zjistíme hodnoty dolního a horního kvantilu, dosadíme je do vztahů (3.12) a (3.13) a dostaneme odhady neznámých parametrů \hat{c} a $\hat{\gamma}$.

3.4 Praktická ukázka odhadu parametrů

Při havarijním pojištění motorových vozidel je známo 91 posledních individuálních škod, které jsou uvedeny v následující tabulce. Vše je uvedeno v Kč.

Tabulka 1 - Výše individuálních škod při neživotním pojištění v Kč [Pacáková, 3/2007]

501	1887	3618	6122	9253	12456	15189	20987	27201	39617	49763	76147	123075
687	2115	4000	6950	9324	12657	16525	22853	27344	39854	54977	82348	135804
935	2251	4217	7168	10217	13334	17450	23754	28606	40867	57487	84714	165259
1012	2796	4559	7254	10478	13789	18900	25730	30950	41155	59145	93375	189872
1147	2916	4720	7543	11248	14014	19384	25748	31196	43237	61038	94310	285750
1557	3173	5185	8450	12028	14533	19543	26606	32536	46759	64874	104030	578486
1758	3464	5674	9123	12421	14657	20414	26621	36171	46879	67488	117160	648748

Nejdříve je nutno určit *základní charakteristiky* výše uvedených škod, a to výběrový průměr, výběrový rozptyl, směrodatnou odchylku a variační koeficient. (výpočet v programu Microsoft Excel)

Výběrový průměr $\bar{x} = 47111,17582$

Výběrový rozptyl $s^2 = 9417548306$

Výběrová směrodatná odchylka $s = 97044,05343$

Variační koeficient $V_k = 2,059894531$

a) Předpoklad, že individuální škody mají exponenciální rozdělení pravděpodobnosti. Metodou momentů určit odhad parametru λ .

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{47111,17852} = 2,12264E-05$$

Odhad parametru λ exponenciálního rozdělení je 2,12264E-05.

b) Předpoklad, že individuální škody mají gama rozdělení pravděpodobnosti. Metodou momentů určit odhad parametrů α , β .

$$\tilde{\beta} = \frac{x}{s^2}$$

$$\tilde{\beta} = \frac{47111,17582}{9417548306} = 5,00249E-06$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{x^2}{s^2}$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{47111,17582^2}{9417548306} = 0,235673109$$

Odhad parametru α gama rozdělení je 0,235673109 a parametru β je 5,00249E-06.

c) Předpoklad, že individuální škody mají lognormální rozdělení pravděpodobnosti. Metodou momentů určit parametry μ a σ^2 .

$$\tilde{\mu} = 2 \ln(m_1) - \frac{\ln m_2}{2} \tag{3.14}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \ln(m_2) - 2 \ln(m_1) \tag{3.15}$$

$$m_1 = \bar{x}$$

$$m_1 = 47111,17582$$

$$m_2 = \bar{x}^2$$

$$m_2 = 11533521652$$

$$\tilde{\mu} = 2\ln(47111,17582) - \frac{\ln(11533521652)}{2} = 9,936269282$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \ln(11533521652) - 2\ln(47111,17582) = 1,647992497$$

Odhad parametru μ lognormálního rozdělení je 9,936269282 a parametru σ^2 je 1,647992497.

d) Předpoklad, že individuální škody mají lognormální rozdělení pravděpodobnosti. Použití metody maximální věrohodnosti pro odhad parametrů μ a σ^2 :

$$\hat{\mu} = \bar{y} = \ln \bar{x} \tag{3.16}$$

$$\hat{\mu} = 9,740694217$$

$$\hat{\sigma}^2 = S_y^2 = S_{\ln x}^2 \tag{3.17}$$

$$\hat{\sigma}^2 = 2,165005696$$

Odhad parametru μ lognormálního rozdělení je 9,740694217 a parametru σ^2 je 2,165005696.

e) Předpoklad, že individuální škody mají Paretovo rozdělení pravděpodobnosti. Metodou momentů určit odhad parametrů α , λ .

$$\tilde{\alpha} = \frac{2s^2}{s^2 - \bar{x}^2}$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{2 \times 9417548306}{9417548306 - 47111,17585^2} = 2,616681453$$

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{\alpha} - 1)\bar{x}$$

$$\tilde{\lambda} = (2,616681453 - 1) * 47111,17585 = 76163,76419$$

Odhad parametru α Paretova rozdělení je 2,616681453 a parametru λ je 76163,76419.

f) Předpoklad, že individuální škody mají Paretovo rozdělení pravděpodobnosti. Metodou maximální věrohodnosti určit odhad parametrů α , λ . Za předpokladu, že momentový odhad $\tilde{\alpha} = 2,616681453$ a momentový odhad $\tilde{\lambda} = 76163,76419$ (viz předchozí případ e).

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right)} = A \quad (3.18)$$

$$A = 2,81289$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda + x_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\lambda(\lambda + x_i)}} = B \quad (3.19)$$

$$B = 2,96302$$

$$B - A = 0,15013$$

Je nutné, aby platilo $A - B = 0$. Tedy využijeme v programu Excel na kartě data, analýza hypotéz, hledání řešení. Tedy hledáme takové $\hat{\lambda}$, aby platila podmínka $A - B = 0$. Řešitel nalezne toto řešení: $\hat{\lambda} = 37277,81$. Poté znovu dosadíme do vztahů (3.18) a (3.19) a dostaneme maximálně věrohodný odhad parametru $\hat{\alpha} = 1,739399593$.

Tabulka 2 - Maximálně věrohodný odhad Paretova rozdělení pravděpodobnosti [zdroj vlastní]

Pojistné plnění x_i	$\frac{1}{\lambda + x_i}$	$\frac{x_i}{\lambda}$	$\frac{x_i}{\lambda(\lambda + x_i)}$	$\ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right)$
501	2,64699E-05	0,013439629	3,55745E-07	0,013350119
687	2,63402E-05	0,018429192	4,85428E-07	0,018261433
935	2,61692E-05	0,025081943	6,56375E-07	0,024772554
1012	2,61166E-05	0,027147515	7,09001E-07	0,026785557
1147	2,60248E-05	0,030768972	8,00758E-07	0,030305098
1557	2,57501E-05	0,041767471	1,07552E-06	0,040918762
1758	2,56175E-05	0,047159418	1,20811E-06	0,046081182
1887	2,55331E-05	0,050619921	1,29248E-06	0,049380391
2115	2,53853E-05	0,05673616	1,44027E-06	0,055185063
2251	2,5298E-05	0,060384442	1,52761E-06	0,058631524
2796	2,4954E-05	0,075004399	1,87166E-06	0,072324753
2916	2,48795E-05	0,078223471	1,94616E-06	0,075314753
3173	2,47214E-05	0,085117653	2,10423E-06	0,081688417
3464	2,45448E-05	0,092923904	2,2808E-06	0,088856586
3618	2,44524E-05	0,097055048	2,37323E-06	0,09262936
4000	2,42261E-05	0,10730243	2,59952E-06	0,101926814
4217	2,40994E-05	0,113123587	2,72621E-06	0,107170105
4559	2,39024E-05	0,122297945	2,92321E-06	0,11537832
4720	2,38108E-05	0,126616867	3,01484E-06	0,119219219
5185	2,355E-05	0,139090775	3,27559E-06	0,130230378
5674	2,32819E-05	0,152208497	3,5437E-06	0,141680533
6122	2,30416E-05	0,164226369	3,78403E-06	0,152056806
6950	2,26102E-05	0,186437972	4,2154E-06	0,170955517
7168	2,24993E-05	0,192285955	4,3263E-06	0,175872435
7254	2,24559E-05	0,194592957	4,36975E-06	0,177805505
7543	2,23111E-05	0,202345557	4,51454E-06	0,18427428
8450	2,18685E-05	0,226676383	4,95708E-06	0,204308385
9123	2,15513E-05	0,244730017	5,27426E-06	0,218918653
9253	2,14911E-05	0,248217346	5,33447E-06	0,22171641

Pojistné plnění x_i	$\frac{1}{\lambda + x_i}$	$\frac{x_i}{\lambda}$	$\frac{x_i}{\lambda(\lambda + x_i)}$	$\ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right)$
9324	2,14584E-05	0,250121964	5,36722E-06	0,223241118
10217	2,10549E-05	0,274077232	5,77068E-06	0,242222177
10478	2,09399E-05	0,281078715	5,88575E-06	0,247702469
11248	2,06076E-05	0,301734433	6,21802E-06	0,263697555
12028	2,02816E-05	0,322658407	6,54402E-06	0,279643656
12421	2,01212E-05	0,333200871	6,7044E-06	0,287582721
12456	2,0107E-05	0,334139767	6,71856E-06	0,288286715
12657	2,00261E-05	0,339531714	6,7995E-06	0,292320086
13334	1,97582E-05	0,35769265	7,06737E-06	0,305786678
13789	1,95822E-05	0,369898302	7,24342E-06	0,314736505
14014	1,94963E-05	0,375934063	7,32932E-06	0,319132819
14533	1,9301E-05	0,389856554	7,52462E-06	0,329200543
14657	1,92549E-05	0,393182929	7,5707E-06	0,331591006
15189	1,90597E-05	0,407454152	7,76594E-06	0,341782507
16525	1,85864E-05	0,443293164	8,23922E-06	0,366927422
17450	1,82722E-05	0,468106851	8,55336E-06	0,383973714
18900	1,78006E-05	0,507003982	9,02499E-06	0,410123562
19384	1,76486E-05	0,519987576	9,17704E-06	0,418702161
19543	1,75992E-05	0,524252847	9,22642E-06	0,421504354
20414	1,73335E-05	0,547617951	9,49213E-06	0,436716943
20987	1,7163E-05	0,562989024	9,66259E-06	0,446600029
22853	1,66304E-05	0,613045608	1,01952E-05	0,478124074
23754	1,63849E-05	0,63721548	1,04407E-05	0,492996921
25730	1,5871E-05	0,690222881	1,09546E-05	0,524860402
25748	1,58665E-05	0,690705742	1,09591E-05	0,52514604
26606	1,56534E-05	0,713722113	1,11722E-05	0,538667679
26621	1,56497E-05	0,714124497	1,11759E-05	0,538902453
27201	1,5509E-05	0,729683349	1,13166E-05	0,547938357
27344	1,54747E-05	0,733519411	1,1351E-05	0,550153684
28606	1,51782E-05	0,767373328	1,16474E-05	0,569494449
30950	1,46568E-05	0,830252552	1,21688E-05	0,604453964

Pojistné plnění x_i	$\frac{1}{\lambda + x_i}$	$\frac{x_i}{\lambda}$	$\frac{x_i}{\lambda(\lambda + x_i)}$	$\ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right)$
31196	1,46041E-05	0,836851651	1,22215E-05	0,608053047
32536	1,43238E-05	0,872797965	1,25018E-05	0,627433551
36171	1,36149E-05	0,970309049	1,32107E-05	0,678190408
39617	1,30048E-05	1,062750092	1,38208E-05	0,724040089
39854	1,29648E-05	1,069107761	1,38608E-05	0,727117481
40867	1,27968E-05	1,096282101	1,40289E-05	0,740165348
41155	1,27498E-05	1,104007876	1,40758E-05	0,743844038
43237	1,24201E-05	1,159858791	1,44055E-05	0,770042845
46759	1,18995E-05	1,254338581	1,49261E-05	0,812856618
46879	1,18826E-05	1,257557654	1,4943E-05	0,814283545
49763	1,14889E-05	1,334922706	1,53367E-05	0,847978788
54977	1,08395E-05	1,474791423	1,59861E-05	0,906156119
57487	1,05524E-05	1,542123698	1,62732E-05	0,932999833
59145	1,0371E-05	1,586600555	1,64546E-05	0,950344487
61038	1,01713E-05	1,63738143	1,66543E-05	0,969786542
64874	9,78935E-06	1,740284461	1,70363E-05	1,008061733
67488	9,5451E-06	1,810406599	1,72805E-05	1,03332917
76147	8,81641E-06	2,042689534	1,80092E-05	1,112741839
82348	8,3594E-06	2,209035126	1,84662E-05	1,165970308
84714	8,19727E-06	2,272504513	1,86283E-05	1,185555598
93375	7,65387E-06	2,5048411	1,91717E-05	1,254145184
94310	7,59949E-06	2,529923043	1,92261E-05	1,26127607
104030	7,07675E-06	2,790667948	1,97489E-05	1,332542243
117160	6,4751E-06	3,142888174	2,03505E-05	1,421393171
123075	6,23625E-06	3,301561642	2,05894E-05	1,458978129
135804	5,77761E-06	3,6430248	2,1048E-05	1,53536605
165259	4,93737E-06	4,433173069	2,18882E-05	1,692523322
189872	4,40238E-06	5,093431746	2,24232E-05	1,807211428
285750	3,09571E-06	7,665417341	2,37299E-05	2,159340086
578486	1,624E-06	15,51823838	2,52016E-05	2,804465127
648748	1,45767E-06	17,40305921	2,53679E-05	2,912516912
Suma	0,001550012		0,000891119	52,31692078

4 TESTY DOBRÉ SHODY PŘI HLEDÁNÍ VHODNÉHO PRAVDĚPODOBNOSTNÍHO MODELU

Testy dobré shody jsou jednou z metod matematické statistiky. U těchto testů je testována shoda skutečného rozdělení pravděpodobnosti základního souboru s předpokládaným (teoretickým) rozdělením pravděpodobnosti. Je vhodné sestavení histogramu či polygonu četností náhodného výběru, na jeho základě lze lépe odhadnout typ rozdělení pravděpodobnosti základního souboru.⁴

Postup při výběru nejvhodnějšího rozdělení pravděpodobnosti:

- Z náhodného výběru navrhne předpokládaný typ rozdělení pravděpodobnosti.
- Pomocí metod odhadu parametrů odhadneme parametry předpokládaného rozdělení pravděpodobnosti.
- Pomocí testu dobré shody ověříme vhodnost předpokládaného rozdělení pravděpodobnosti.

Mezi nejpoužívanější testy dobré shody patří **Pearsonův χ^2 test** a **Kolmogorovův – Smirnovův test**. Další testy např. Andersonův – Darlingův test, Kuiperův V-test, Cramerův – Von Misesův W^2 test a Watsonův U^2 test.

4.1 Pearsonův χ^2 test dobré shody

Pomocí χ^2 testu je testována shoda skutečného rozdělení pravděpodobnosti s předpokládaným teoretickým rozdělením s hustotou pravděpodobnosti $f(x; \Theta)$, kde Θ je vektor parametrů, které jsou většinou odhadnuté z výběrového souboru. Na hladině významnosti α se rozhoduje o přijetí či zamítnutí nulové hypotézy.

H_0 : náhodná proměnná X má rozdělení s hustotou $f(x; \Theta)$

Nechť jsou empirické údaje x_1, x_2, \dots, x_n náhodné proměnné X zjištěné z výběrového souboru a roztržiděné do k skupin s četnostmi O_1, O_2, \dots, O_k .

⁴ Kapitola 4 podle [Pacáková, 2004], [Kubanová, 2004], [Yiu-Kun Tse, 2009]

Pro test se využívá testovací kritérium: [Pacáková, 2004]

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{O_i - E_i}{E_i}^2 \quad (4.1)$$

Testovací kritérium (4.1) má χ^2 rozdělení se stupni volnosti $k-1-p$, kde p je počet odhadnutých parametrů předpokládaného teoretického rozdělení s hustotou $f(x; \Theta)$, O_i jsou skutečně zjištěné četnosti hodnot a E_i jsou teoretické četnosti. Nulovou hypotézu H_0 přijmeme na hladině významnosti α , když platí:

$$\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2 \quad (4.2)$$

➤ *Praktická ukázka: Pearsonův χ^2 test dobré shody*

Pojišťovna předpokládá, že počet pojistných událostí při úrazovém pojištění má Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti. Testujeme hypotézu **H₀**: počet pojistných událostí má Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti proti alternativní hypotéze **H₁**: počet pojistných událostí nemá Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti na hladině významnosti $\alpha=0,05$. Data k praktické ukázce jsou v tabulce 3.

Tabulka 3 - Počet nahlášených pojistných událostí [zdroj vlastní]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x _i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 a více
O _i	98	185	260	185	165	65	28	7	4	3	0

Nejdříve jsme formulovali hypotézu H_0 a k ní alternativní hypotézu H_1 . Dále je nutné odhadnout parametr λ a to pomocí maximálně věrohodného odhadu $\hat{\lambda}$, tedy pomocí aritmetického váženého průměru \bar{x} .

$$\bar{x} = \frac{1}{O_i} \sum_{i=1}^k x_i \cdot O_i = \frac{1}{1000} \cdot 0 \cdot 98 + 1 \cdot 185 + \dots + 0 \cdot 10$$

Při hodnotě parametru $\lambda=2,511$ vypočítáme pravděpodobnosti p_i , které vidíme v tabulce 4.

Tabulka 4 - Pearsonův χ^2 test [zdroj vlastní]

Kategorie i	Počet pojistných událostí x_i	Empirické četnosti O_i	Četnost $x_i \cdot O_i$	Pravděpodobnost p_i	Očekávané četnosti E_i
1	0	98	0	0,081187012	81,1870116
2	1	185	185	0,203860586	203,860586
3	2	260	520	0,255946966	255,946966
4	3	185	555	0,214227611	214,227611
5	4	165	660	0,134481382	134,481382
6	5	65	325	0,06753655	67,5365503
7	6	28	168	0,028264046	28,2640463
8	7	7	49	0,010138717	10,1387172
9	8	4	32	0,00318229	3,18228985
10	9	3	27	0,000887859	0,88785887
11	10 a více	0	0	0	0
Celkem		1000	2521	1	1000

Dále je nutné spojit okrajové třídy, tedy třídy, kde empirické četnosti O_i jsou menší než 5, postup vidíme v tabulce 5. Spojili se kategorie 9, 10 a 11 s kategorií 8.

Tabulka 5 - Pearsonův χ^2 test, seskupení tříd [zdroj vlastní]

Kategorie i	Počet pojistných událostí x_i	Empirické četnosti O_i	Četnost $x_i \cdot O_i$	Pravděpodobnost P_i	Očekávané četnosti E_i	χ^2
1	0	98	0	0,081187012	81,1870116	3,481796
2	1	185	185	0,203860586	203,860586	1,744926
3	2	260	520	0,255946966	255,946966	0,064182
4	3	185	555	0,214227611	214,227611	3,987596
5	4	165	660	0,134481382	134,481382	6,925762
6	5	65	325	0,06753655	67,5365503	0,095268
7	6	28	168	0,028264046	28,2640463	0,002467
8	7 a více	14	98	0,014495847	14,4958467	0,016961
Celkem		1000	2511	1	1000	16,31896

Dále dle vzorce (4.1) vypočteme hodnotu testovacího kritéria, která je 16,31896. Testovací kritérium (4.1) má χ^2 rozdělení s $k-1-p$ stupni volnosti, tedy pomocí funkce CHIINV v programu Excel (či příloha 2) vypočteme kritickou hodnotu, v tomto případě na hladině významnosti 0,05 a se 6 stupni volnosti. Kritická hodnota je 12,59159.

Závěrem rozhodněme o platnosti hypotézy H_0 . Protože neplatí $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$, v tomto případě $16,31896 > 12,59159$, Hypotézu H_0 na hladině významnosti 0,05 **zamítáme**, proto nemůžeme předpokládat, že počet pojistných událostí má Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti.

4.2 Kolmogorovův – Smirnovův test

Při tomto testu je testována statistická hypotéza, že náhodný výběr pochází ze základního souboru s předpokládaným rozdělením pravděpodobnosti. Test je založen na porovnání rozdílů mezi distribuční funkcí ověřovaného a výběrového rozdělení pravděpodobnosti. [Kubanová, 2004]

Tento test je vhodný zejména pro výběry malých rozsahů. Další výhodou tohoto testu je to, že vychází z původních netříděných dat a má větší sílu testu než χ^2 test.

Test vychází z netříděných, vzestupně uspořádaných údajů.

Testujeme hypotézu H_0 : Náhodná proměnná X má rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$ oproti alternativní hypotéze H_1 : Náhodná proměnná X nemá rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$.

Testovací kritérium má tvar:

$$d_n = \max |F_n(x) - F(x)| \quad (4.3)$$

Nulovou hypotézu H_0 přijmeme na hladině významnosti α , když platí:

$$d_n < d_{n;1-\alpha} \quad (4.4)$$

➤ Praktická ukázka: Kolmogorovův – Smirnovův test

Známe 10 posledních pojistných plnění při nějakém typu neživotního pojištění (ve 100 Kč).

Tabulka 6 - Výše pojistných plnění [zdroj vlastní]

56	258	406	912	1559
2460	8350	10231	12365	14562

Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ ověříme hypotézu, že výše pojistných plnění mají gama rozdělení pravděpodobnosti.

Formulujeme H_0 : pojistná plnění mají gama rozdělení pravděpodobnosti. H_1 : pojistná plnění nemají gama rozdělení pravděpodobnosti.

Odhadneme parametry gama rozdělení α a β pomocí metody momentů, tedy $\tilde{\alpha}$ a $\tilde{\beta}$.
 V našem případě se $\tilde{\alpha} = 0,8202668$ a $\tilde{\beta} = 0,0001603$.

Další postup je znázorněn v tabulce 7.

Tabulka 7 - Kolmogorovův – Smirnovův test [zdroj vlastní]

j	$x_{(j)}$	$F_{10} \lfloor x_{(j)} \rfloor$	$F_{10} \lfloor x_{(j+1)} \rfloor$	$F \lfloor x_{(j)} \rfloor$	$ F_{10}(x_{(j)}) - F(x_{(j)}) $	$ F_{10}(x_{(j+1)}) - F(x_{(j)}) $
0	56	0	0,1	0,02227	0,022265732	0,077734268
1	258	0,1	0,2	0,07683	0,023171827	0,123171827
2	406	0,2	0,3	0,11027	0,089734349	0,189734349
3	912	0,3	0,4	0,20663	0,09337326	0,19337326
4	1559	0,4	0,5	0,30666	0,09333564	0,19333564
5	2460	0,5	0,6	0,4194	0,080595755	0,180595755
6	8350	0,6	0,7	0,80004	0,200041831	0,100041831
7	10231	0,7	0,8	0,85574	0,155739794	0,055739794
8	12365	0,8	0,9	0,9	0,100004702	4,70194E-06
9	14562	0,9	1	0,93121	0,031212363	0,068787637

Použijeme testovací kritérium (4.3). Hledáme maximum z posledních dvou řádků tabulky 7 a poté kritickou hodnotu (určíme ze statistických tabulek, příloha 3).

$$d_{10} = 0,200$$

$$d_{10;0,95} = 0,409$$

Při podmínce (4.4) tedy platí, že hypotézu H_0 **přijímáme** na hladině významnosti $\alpha = 0,05$. Můžeme přijat předpoklad, že pojistná plnění mají gama rozdělení pravděpodobnosti.

4.3 Andersonův – Darlingův test

Tento test vychází z předpokladů Kolmogorova – Smirnova testu. Testovací charakteristikou je vážená míra oblasti mezi empirickou a teoretickou distribuční funkcí.

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \ln z_i + 2n+1 - 2i \ln 1-z_i \quad (4.5)$$

Známe realizaci náhodného výběru x_1, x_2, \dots, x_n ; $z_i = F(x_i)$; $i = 1, 2, \dots, n$. Pro hodnoty x a z , když $z = F(x)$ platí, že vertikální vzdálenost teoretické a empirické distribuční funkce náhodných veličin X a Z je shodná.

Použití tento test je vhodné zejména v případě, kdy se empirická distribuční funkce odchyluje od teoretické distribuční funkce na konci rozdělení.

4.4 Kuiperův V-test

Také tento test vychází z Kolmogorova – Smirnova testu. Používá se při testování shody teoretického rozdělení při specifickém tvaru distribuční funkce. Testovací charakteristika je odvozena z Kolmogorova – Smirnova testu.

$$V = D^+ + D^-$$
$$D^+ = \sup_x F_n(x) - F(x) \quad (4.6)$$
$$D^- = \sup_x F(x) - F_n(x)$$

4.5 Cramerův – Von Misesův W^2 test

Testovací W^2 charakteristika se zabývá oblastí mezi empirickou a teoretickou distribuční funkcí.

$$W^2 = \sum_{i=1}^n \left\{ z_i - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2 + \frac{1}{12n} \quad (4.7)$$

4.6 Watsonův U^2 test

Tento test vychází z Cramerova W^2 testu a modifikuje ho pro rozdělení se specifickým tvarem distribuční funkce.

$$U^2 = W^2 - n \bar{z} - 0,5^2 \quad (4.8)$$

4.7 Shrnutí testů dobré shody

Testy dobré shody jsou velice náročné na čas, bez použití počítače a vhodného statistického programu je výpočet velmi zdlouhavý.

Při použití statistického programu STATGRAPHICS Centurion XV je jejich výstupem tzv. p-hodnota (p-value), na základě které rozhodujeme o zamítnutí či nezamítnutí nulové hypotézy.

5 MODELÝ ŠKOD PŘI ZAJIŠTĚNÍ

Zajištění⁵ je v dnešní době často využívaný nástroj moderního pojišťovnictví, jehož význam narůstá. Mezi hlavní důvody růstu významu zajištění patří zvláště klimatické, sociální a technologické změny v posledních desetiletích.

Zajištění (reinsurance) je převod části rizika, jež převzal pojistitel od pojištěných, na jiného organizátora pojištění označovaného jako zajistitel, která nemá k pojištěným žádný smluvní vztah. Tedy pojišťovna postoupí část rizika převzatého od pojištěných na zajišťovnu.[Cipra, 2006]

Mezi hlavní přínosy zajištění patří zvýšení kapacity pojistitele, homogenizace pojistného kmene, stabilizace výsledků pojistitele a růst rizikově očištěných výnosů, rozproštění a diverzifikace pojistných rizik, dosažení finančních výhod, získání profesionálních služeb zajistitele, lze zavádět netypické či v daném prostředí nevyzkoušené pojistné produkty. Sjednání zajištění může být také z důvodů daňových, licenčních či strategických.

Dále budou stručně charakterizovány formy a typy zajištění. Bude znázorněn význam znalosti rozdělení výše individuálních škod při řešení zásadních otázek spojených se zajištěním.

5.1 Základní typy zajištění

Rozlišujeme dvě formy zajištění:

- Fakultativní
- Obligatorní

Fakultativní zajištění je historicky starší forma, sjednává se individuálně pro jednotlivé pojistné smlouvy. Pojistitel a zajistitel tedy zvažují situaci případ od případu, prvopojistitel není smluvně povinen danou pojistnou smlouvu k zajištění nabídnout a zajistitel ji není povinen k zajištění přijmout.

⁵ Kapitola 5 podle [Cipra, 2006], [Cipra, 2004], [Pacáková, 7/2009]

Obligatorní zajištění se dnes využívá častěji než zajištění fakultativní. Sjednává se pro celé portfolio pojistných smluv. Když jsou splněny podmínky rámcové zajištné smlouvy, má zajištitel právo a zároveň povinnost převzít příslušné části rizika do zajištění.

Při fakultativním a obligatorním zajištění rozlišujeme dva základní typy zajištění:

- Proporcionální
- Neproporcionální

5.1.1 Proporcionální zajištění

Proporcionální zajištění je historicky starší typ zajištění. Pojistná částka, pojistné plnění a pojistné se dělí mezi prvopojistitele a zajištitel ve smluvně sjednaném poměru a limitu zajišťovatele. V praxi se nejčastěji využívají dva typy proporcionálního zajištění:

a) **Kvótové zajištění** (quota share reinsurance QS)

Ve kvótovém zajištění se pojistná částka S , pojistné plnění X a pojistné P u libovolné zajišťované pojistné smlouvy dělí mezi prvopojistitele a zajištitel ve stále stejném poměru daném smluvně sjednanou kvótou zajištitel q $0 < q < 1$. Odpovídající pojistná částka S_Z , pojistné plnění X_Z a zajištné P_Z na vrub zajištitel tak jsou: [Cipra, 2006]

$$S_Z = q * S \quad X_Z = q * X \quad P_Z = q * P \quad (5.1)$$

Hlavní výhodou kvótového zajištění je jeho administrativní jednoduchost a nevýhodou je, že zajištění se týká i pojistných smluv s malými pojistnými částkami.

b) **Surplus zajištění** (excedentní zajištění, surplus reinsurance)

Prvopojistitel ceduje v každé pojistné smlouvě jen tu část rizika, která přesahuje pevně sjednanou hodnotu s , stejnou pro všechny pojistné smlouvy. Tedy zajištitel se účastní a každé pojistné smlouvě procentní sazbou, která odpovídá poměru, v jakém

překračuje původní pojistná částka pevně sjednanou částku s , nazývanou jako *vlastní vrub*. [Cipra, 2006]

$$S_z = \begin{cases} 0 & \text{pro } S \leq s \\ S - s & \text{pro } S > s \end{cases} \quad (5.2)$$

$$X_z = \begin{cases} 0 & \text{pro } S \leq s \\ \left(1 - \frac{s}{S}\right)X & \text{pro } S > s \end{cases} \quad (5.3)$$

$$P_z = \begin{cases} 0 & \text{pro } S \leq s \\ \left(1 - \frac{s}{S}\right)P & \text{pro } S > s \end{cases} \quad (5.4)$$

5.1.2 Neproporcionální zajištění

U tohoto typu zajištění je podstatná jenom výše skutečně vzniklých škod. Účast zajistitele tedy začíná až od dopředu dohodnuté úrovně skutečně vzniklých škod. Prvopojistitel nese škody do určité výše, označované jako a a nazývané *priorita*. Škody přesahující prioritu hradí zajistitel. Zajistné je určeno nezávisle na pojistném a to většinou na základě pravděpodobnosti, že skutečná výše škody přesáhne prioritu.

a) **XL zajištění** (zajištění škodního nadměrku)

Zajištění škodního nadměrku můžeme dále rozdělit na dva typy.

1) *Zajištění škodního nadměrku jednotlivých rizik WXL/R* (working excess of loss per risk) chrání prvopojistitele před dopadem jednotlivých velkých škod, aplikuje se na každou pojistnou smlouvu zvlášť. Označíme prioritu jako a ($a > 0$), z pojistného plnění X v rámci pojistné smlouvy se na zajistitele ceduje X_z .

$$X_z = \begin{cases} 0 & \text{pro } X \leq a \\ X - a & \text{pro } X > a \end{cases} \quad (5.5)$$

2) *Zajištění škodního nadměrku jednotlivých událostí WXL/E* (working excess of loss cover per event) zajišťuje prvopojistitele proti kumulaci škod vzniklých v důsledku jedné škodní události.

3) *Zajištění škodního nadměrku katastrofické události CatXL* (catastrophe excess of loss) chrání prvopojistitele před kumulací většího počtu škod v důsledku jedné katastrofické události. CatXL se shoduje s WXL/E až na katastrofický charakter události. Na zajistitele se ceduje X_Z .

$$X_Z = \begin{cases} 0 & \text{pro } \sum_{i=1}^n X_i \leq a \\ \sum_{i=1}^n X_i - a & \text{pro } \sum_{i=1}^n X_i > a \end{cases} \quad (5.6)$$

b) **SL zajištění** (*zajištění ročního nadměrku*)

Tento typ zajištění není příliš častý, je specifický a uplatňuje se zejména v zemědělském pojištění. Priorita prvopojistitele se uplatňuje v rámci celoročního objemu škod, nad ní zajistitel plní do sjednaného limitu. Priorita může být vyjádřena absolutní částkou, nebo má tvar mezní hranice pro škodní průběh.

c) *Další typy neproporcionálního zajištění*

Mezi další typy neproporcionálního zajištění patří Umbrella cover, zajištění druhého rizika, zajištění nejvyšších škod a ECOMOR zajištění.

5.2 Tarifování

Zajistné neproporcionálního zajištění se skládá z nettozajistného, bezpečnostní přírážky, správních nákladů, ziskové přírážky a z nákladů spojených s retrocesí. Základem stanovení zajistného je určení nettozajistného, tzv. tarifování. Při tarifování se používají různé postupy: [Cipra, 2004]

- *Burning Cost* – vychází se z minulé škodní zkušenosti
- *Model založený na Paretově rozdělení* – vychází z minulé škodní zkušenosti v kombinaci s pojistně-matematickými modely pro výši zajištěných škod
- *Exposure Rating* – vychází ze struktury zajišťovaného portfolia
- *Metoda scénářů* – vychází z frekvence opakování příslušných pojistných událostí

5.2.1 Model založený na Paretově rozdělení škod překračujících prioritu

Tento model je založen na metodách pojistně-matematického charakteru a na minulých škodních zkušenostech a většinou konstruuje nettozajistné pro vyšší prioritu pomocí extrapolace založené na pravděpodobnostním modelu, který byl odhadnut pro nějakou nižší prioritu; vyšší priorita, která nás zajímá, trpí nedostatkem dat. Je také nutné zohlednit předpokládaný budoucí vývoj portfolia. Název modelu se odvíjí od Paretova pravděpodobnostního rozdělení, pomocí něhož se modelují výše škod.

Paretovo rozdělení, závisující pouze na jednom parametru, patří v praxi k nejpoužívanějším. Navíc se tato metoda často aplikuje v grafické podobě pomocí tabelovaných křivek. [Cipra, 2004]

Paretovo rozdělení škod X_a , které jsou vyšší jako priorita a , je vyjádřeno distribuční funkcí (zde vyjádřeno evropským způsobem)

$$F_a(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^b, \quad x \geq a \quad (5.7)$$

a hustotou pravděpodobnosti

$$f_a(x) = \frac{b \cdot a^b}{x^{b+1}}, \quad x \geq a \quad (5.8)$$

Parametr b je nutné odhadnout na základě známých škod během určitého časového intervalu (např. kalendářního roku). Hodnotu tzv. observation point OP zvolíme nižší než je priorita a , protože je škod, překračujících vysokou prioritu málo. Škody překračující OP označíme $X_{OP,1}, X_{OP,2}, \dots, X_{OP,n}$. Jejich rozdělení je Paretovo rozdělení s distribuční funkcí

$$F_{OP}(x) = 1 - \left(\frac{OP}{x}\right)^b, \quad x \geq OP \quad (5.9)$$

a maximálně věrohodný odhad parametru b je daný vztahem

$$\hat{b} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{X_{OP,i}}{OP}\right)} \quad (5.10)$$

5.2.2 Postup stanovení nettozajistného při WXL/R zajištění

Použije se model založený na Paretově rozdělení a nettozajistné se rovná součinu průměrného počtu škod (překračujících prioritu a) a průměrné výše škod X_a (překračujících prioritu a). [Pacáková, 7/2009]

Z minulých údajů lze odhadnout pouze průměrný počet škod $LF(OP)$ nad hodnotou OP , pro vyšší prioritu a se musí použít extrapolace.

$$LF(a) = LF(OP) \cdot P(X_{OP} > a) = LF(OP) \cdot (1 - F_{OP}(a)) = LF(OP) \cdot \left(\frac{OP}{a}\right)^b =$$

$$= \begin{cases} LF(OP) \cdot OP^b \cdot \frac{a^{1-b}}{1-b} \cdot (RL^{1-b} - 1) & \text{pro } b \neq 1 \\ LF(OP) \cdot OP \cdot \ln RL & \text{pro } b = 1 \end{cases}$$

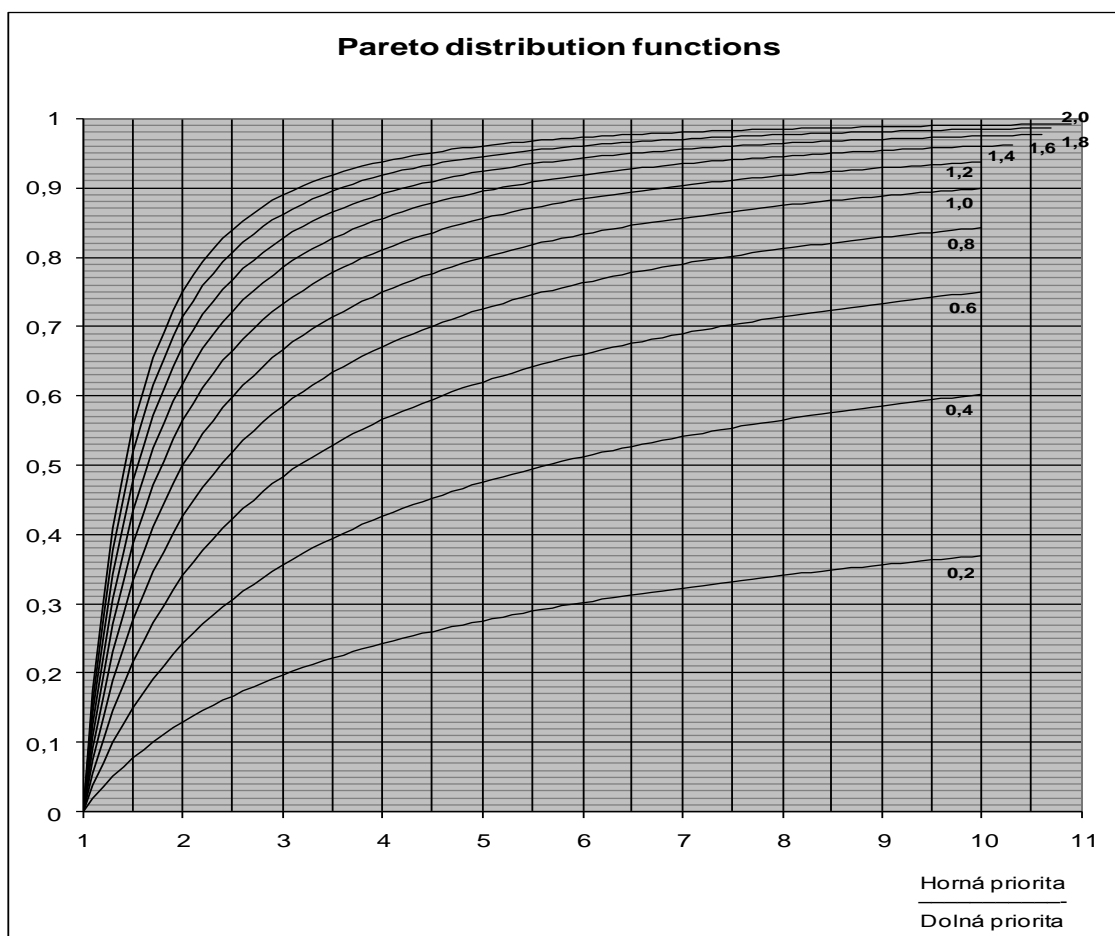
Dále je nutné určit střední hodnotu pojistných plnění zajišťovatele, který v daném roce platí škodu nad prioritou a do výše limitu L :

$$EXL = \int_a^{a+L} (x-a) \cdot f_a(x) dx + \int_{a+L}^{+\infty} L \cdot f_a(x) dx =$$

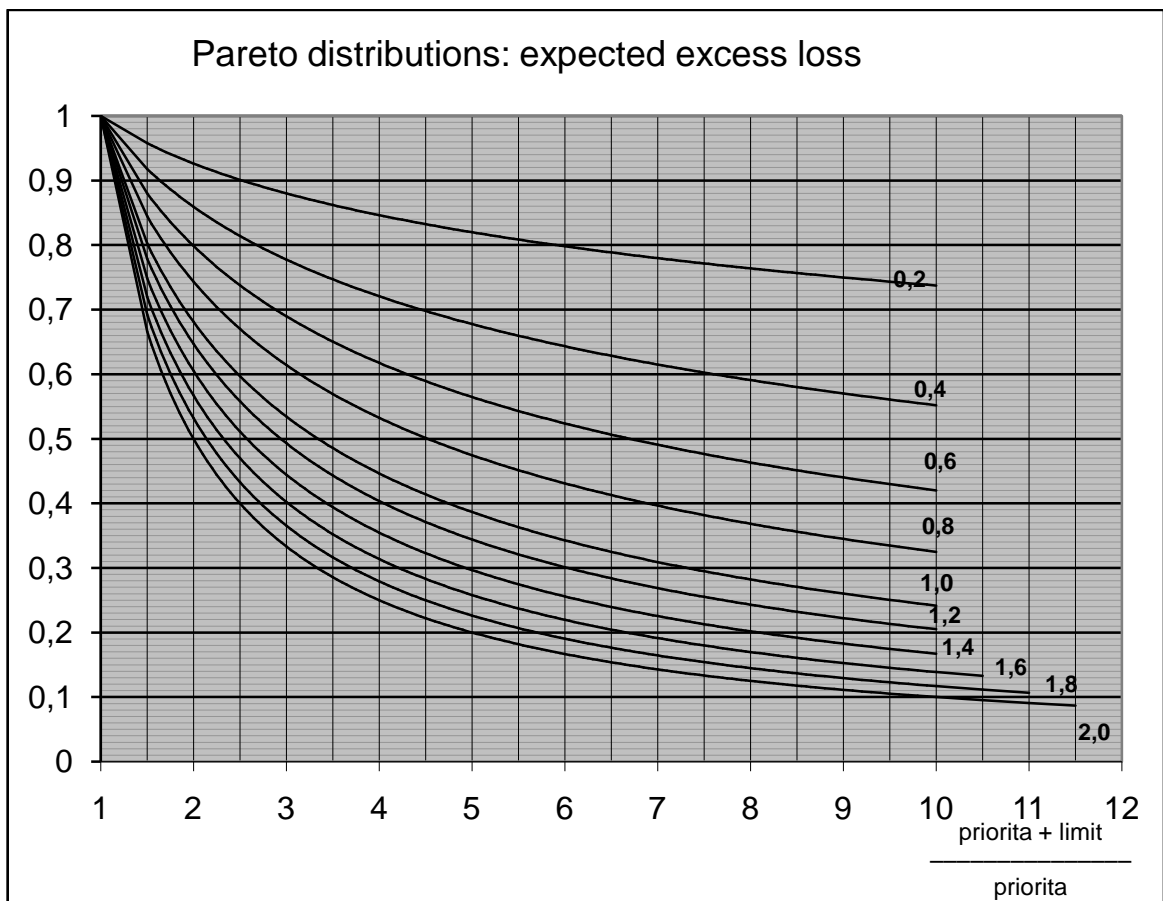
$$= \begin{cases} \frac{a}{1-b} (RL^{1-b} - 1) & \text{pro } b \neq 1 \\ a \cdot \ln RL & \text{pro } b = 1 \end{cases}$$

kde $RL = \frac{a+L}{a}$ je relativní délka vrstvy (relative layer). Potom pro výpočet nettozajistného dostaneme vztah

$$RP = LF \cdot a \cdot EXL = \begin{cases} LF(OP) \cdot OP^b \cdot \frac{a^{1-b}}{1-b} \cdot (RL^{1-b} - 1) & \text{pro } b \neq 1 \\ LF(OP) \cdot OP \cdot \ln RL & \text{pro } b = 1 \end{cases}$$



Obrázek 9 - Distribuční funkce Paretova rozdělení pravděpodobnosti [Pacáková, 7/2009]



Obrázek 10 - Očekávaný škodový nadměrek pro různé parametry b [Pacáková, 7/2009]

5.2.3 Grafické stanovení nettozajistného při WXL/R zajištění

Nettozajistné lze graficky stanovit na základě křivek z obrázku 9 a obrázku 10. Je nutné znát parametr b Paretova rozdělení, limit zajišťovatele L a prioritu a . Z těchto údajů lze určit průměrnou škodovou frekvenci a průměrnou škodu nad prioritou a .

Odhad parametru b lze určit dvěma způsoby. Podle [Cípra, 2004] se aplikuje ad hoc hodnota ověřená praktickými zkušenostmi s podobnými zajišťovanými portfolii. Např. WXL/R zajištění požárních včetně živelních rizik mívá b v rozmezí od 1,0 do 2,5 (speciálně pro pojištění průmyslových rizik kolem 1,2 a pro pojištění majetku obyvatelstva od 1,8 do 2,5), CatXL zajištění mívá b kolem 1,0 (speciálně pro riziko zemětřesení kolem 0,8 a pro riziko vichřic v Evropě 1,3). Druhým způsobem určení parametru b je použití hodnoty parametru odhadnuté z minulých dat prvopojistitele podle vztahu (5.10).

➤ **Praktická ukázka: stanovení nettozajistného při WXL/R zajištění**

Úkolem je najít nettozajistné v Kč pro příští rok pro zajistné smlouvy WXL/R s parametry $a = 300\,000$ a $L = 500\,000$. Odhadem parametru b Paretova rozdělení je hodnota 1,2 (jedná se o pojištění průmyslových rizik). Známe průměrnou škodovou frekvenci škod, které překračují hodnotu $OP=100\,000$, která je $LF(100\,000) = 2,5$.

Nejdříve se určí škodová frekvence pro škody přesahující prioritu $a = 300\,000$.

Pomocí křivek na obrázku 2 se určí pro poměr $\frac{a}{OP} = \frac{300000}{100000} = 3$ pravděpodobnost

$$P(X_a \leq 300000) = 0,73$$

$$LF(300000) = P(X_a > 300000) \cdot 2,5 = (1 - 0,73) \cdot 2,5 = 0,675$$

Dále se určí střední hodnota škod, které přesahují prioritu a . Pomocí křivek na obrázku 3 pro hodnotu relativní vrstvy $\frac{a+L}{a} = \frac{300000+500000}{300000} = 2,67$ najdeme hodnotu 0,53. Potom tuto hodnotu vynásobíme limitem zajišťovatele L , tedy $0,53 \cdot L = 0,53 \cdot 500000 = 265000$ a dále se vypočte nettozajistné.

$$NZ = LF(300000) \cdot 265000 = 0,675 \cdot 265000 = 178875$$

Nettozajistné je v tomto případě 178 875 Kč.

5.3 Modelování škod v programu STATGRAPHICS Centurion XV

Z reálných údajů výše individuálních škod při havarijním pojištění pojišťovna postoupí škody vyšší jako 100 000 Kč do zajištění. Jedná se tedy o 9 nejvyšších škod z tabulky 8 (zvýrazněny tučně).

Tabulka 8 - Výše individuálních škod při neživotním pojištění v Kč [Pacáková, 3/2007]

501	1887	3618	6122	9253	12456	15189	20987	27201	39617	49763	76147	123075
687	2115	4000	6950	9324	12657	16525	22853	27344	39854	54977	82348	135804
935	2251	4217	7168	10217	13334	17450	23754	28606	40867	57487	84714	165259
1012	2796	4559	7254	10478	13789	18900	25730	30950	41155	59145	93375	189872
1147	2916	4720	7543	11248	14014	19384	25748	31196	43237	61038	94310	285750
1557	3173	5185	8450	12028	14533	19543	26606	32536	46759	64874	104030	578486
1758	3464	5674	9123	12421	14657	20414	26621	36171	46879	67488	117160	648748

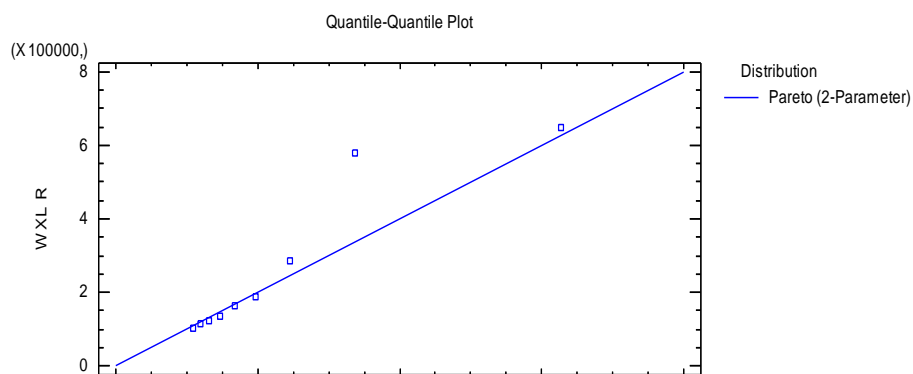
Zjistíme jednotlivé charakteristiky pro soubor škod nad 100 000 (obrázek 11).

Count	9
Average	260909,
Standard deviation	207970,
Coeff. of variation	79,7095%
Minimum	104030,
Maximum	648748,
5/6 sextile	578486,
Skewness	1,38901
Kurtosis	0,375071

Obrázek 11 - Charakteristiky výše škod nad 100 000

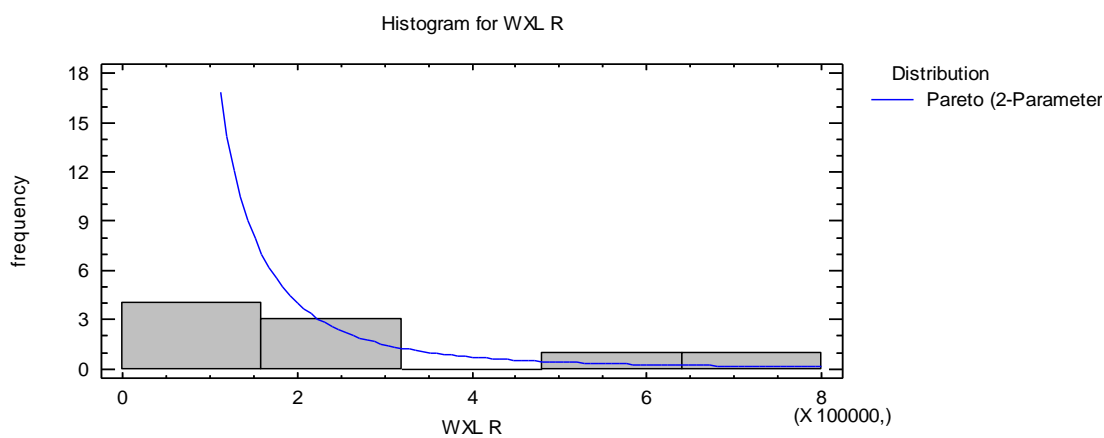
[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

Pro modelování použijeme Paretoovo rozdělení se dvěma parametry. Ze zkušeností je známe, že toto rozdělení výborně modeluje i vysoké škody. Podle obrázku 12 většina z 9 nejvyšších škod kopíruje přímku Q-Q grafu Paretova 2- parametrického rozdělení.



Obrázek 12 - Q-Q graf porovnání shody s 2 – parametrickým Paretoovým rozdělením

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

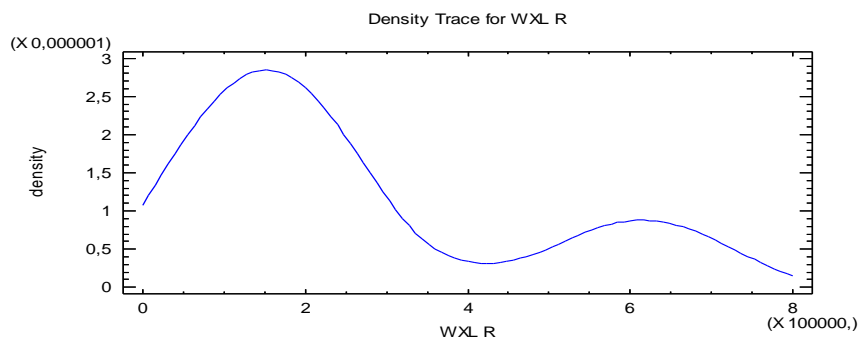


Obrázek 13 - Histogram porovnání shody s 2 - parametrovým Paretoovým rozdělením

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

Na obrázku 13 je histogram pro zmíněných 9 škod, opět je vidět, že Paretoovo rozdělení je vhodným pravděpodobnostním modelem. Dále bude ověřeno K–S testem dobré shody.

Na obrázku 14 je vidět, že Paretovo rozdělení výše škod nad 100 000 Kč z tabulky 8 je dvouvrcholové.



Obrázek 14 - Paretovo rozdělení výše škod

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

Výstup ze systému STATGRAPHICS Centurion XV na obrázku 15 prezentuje výsledek K-S testu. Pokud hodnota P-Value překročí stanovenou hladinu významnosti 0,05, přijmeme hypotézu, že předpokládané rozdělení pravděpodobnosti je rozdělením souboru škod nad 100 000 Kč. V tomto případě je hodnota P-Value rovna 0,988383. Můžeme tedy s vysokou pravděpodobností konstatovat, že škody přesahující hodnotu 100 000 Kč mají Paretovo rozdělení pravděpodobnosti.

Goodness-of-Fit Tests for x_100000
Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Pareto (2-Parameter)</i>
DPLUS	0,141291
DMINUS	0,131977
DN	0,141291
P-Value	0,988383

Obrázek 15 - Kolmogorovův-Smirnovův test dobré shody

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

6 PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MODELOVÁNÍ ŠKOD POMOCÍ SYSTÉMU STATGRAPHICS CENTURION XV

V této kapitole je prezentován postup modelování výše škod pomocí statistického programového systému STATGRAPHICS Centurion XV. Modelování výše škod v programu Microsoft Excel je uvedeno v kapitole 3.4.

Při havarijním pojištění motorových vozidel je známo 91 posledních individuálních škod, které jsou uvedeny v tabulce 9. Pomocí statistického programu Statgraphics Centurion XV určíme základní vlastnosti statistického souboru.

Tabulka 9 - Výše individuálních škod při neživotním pojištění v Kč [Pacáková, 3/2007]

501	1887	3618	6122	9253	12456	15189	20987	27201	39617	49763	76147	123075
687	2115	4000	6950	9324	12657	16525	22853	27344	39854	54977	82348	135804
935	2251	4217	7168	10217	13334	17450	23754	28606	40867	57487	84714	165259
1012	2796	4559	7254	10478	13789	18900	25730	30950	41155	59145	93375	189872
1147	2916	4720	7543	11248	14014	19384	25748	31196	43237	61038	94310	285750
1557	3173	5185	8450	12028	14533	19543	26606	32536	46759	64874	104030	578486
1758	3464	5674	9123	12421	14657	20414	26621	36171	46879	67488	117160	648748

6.1 Základní charakteristiky náhodného výběru

Před další analýzou je nutné nejprve určit základní charakteristiky individuálních škod. Souhrn charakteristik vidíme na obrázku 16.

Count	91
Average	47111,2
Standard deviation	97044,1
Coeff. of variation	205,989%
Minimum	501,0
Maximum	648748,
Range	648247,
Skewness	4,78349
Kurtosis	25,6725

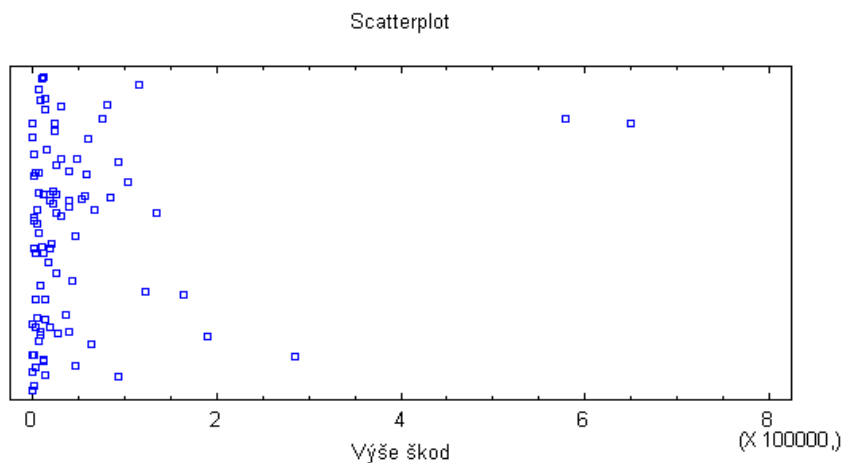
Obrázek 16 - Základní charakteristiky

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

- Počet individuálních škod je 91
- Průměrná výše škody je 47111,2 Kč
- Směrodatná odchylka je 97044,1 Kč
- Variační koeficient je 205,989%
- Minimální výše škody je 501 Kč a maximální výše škody je 648748 Kč
- Koeficient šikmosti je 4,78 a koeficient špičatosti je 25,67

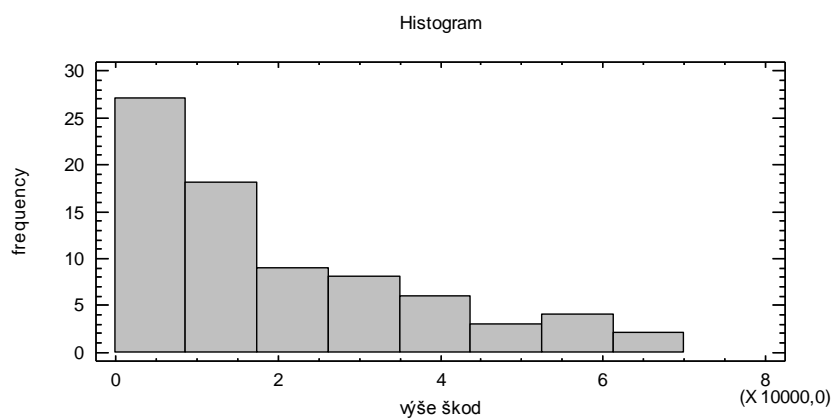
Pomocí těchto výběrových charakteristik můžeme usuzovat, že rozdělení škod je pravostranné, s vysokou variabilitou, což signalizuje výskyt extrémních hodnot.

Na obrázku 17 a 18 jsou pomocí bodového grafu a histogramu znázorněny výše škod. Nejvíce škod je v intervalu $\langle 0, 100\ 000 \rangle$. Na obrázku 17 jsou viditelné dvě odlehle škody, které jsou z intervalu $\langle 500\ 000, 700\ 000 \rangle$.



Obrázek 17 - Bodový graf výše škod

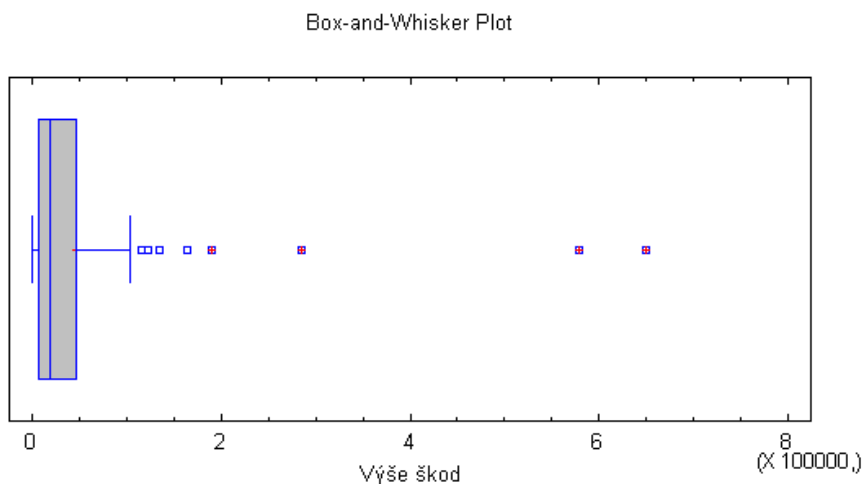
[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]



Obrázek 18 - Histogram výše škod

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

Na obrázku 19 z tvaru krabicového grafu vyplývá značná asymetrie výše škod a je zřejmý i výskyt extrémních škod.



Obrázek 19 - Krabicový graf výše škod

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

V tabulce 10 je rozdělení 91 škod do 8 intervalů. Nejvíce škod má hodnotu v modálním intervalu mezi 0 Kč a 8 750 Kč (27 škod) a další početný interval je od 8 750 do 17 500 Kč (18 škod). Jsou to intervaly nejnižších škod, co znovu potvrzuje hypotézu o pravostranném zešikmění rozdělení.

Tabulka 10 - Frequency tabulation [výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

	Lower	Upper			Relative	Cumulative	Cum. Rel.
Class	Limit	Limit	Midpoint	Frequency	Frequency	Frequency	Frequency
	at or below	0,0		0	0,0000	0	0,0000
1	0,0	8750,0	4375,0	27	0,2967	27	0,2967
2	8750,0	17500,0	13125,0	18	0,1978	45	0,4945
3	17500,0	26250,0	21875,0	9	0,0989	54	0,5934
4	26250,0	35000,0	30625,0	8	0,0879	62	0,6813
5	35000,0	43750,0	39375,0	6	0,0659	68	0,7473
6	43750,0	52500,0	48125,0	3	0,0330	71	0,7802
7	52500,0	61250,0	56875,0	4	0,0440	75	0,8242
8	61250,0	70000,0	65625,0	2	0,0220	77	0,8462
	above	70000,0		14	0,1538	91	1,0000

6.2 Rozdělení pravděpodobnosti

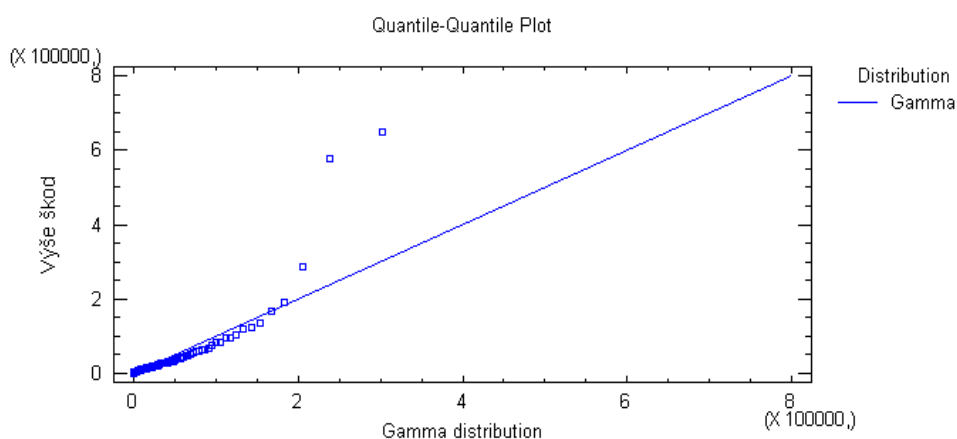
Ve statistickém programovém balíku STATGRAPHICS Centurion XV můžeme najít širokou nabídku rozdělení pravděpodobnosti, které můžeme použít při hledání rozdělení s dobrou shodou s našimi empirickými daty. Tuto shodu můžeme ověřovat pomocí testů dobré shody s libovolným rozdělením ze 45 rozdělení pravděpodobnosti v této nabídce.

Dále ukážeme postup testů dobré shody při hledání rozdělení výše individuálních škod při havarijním pojištění na základě údajů v tabulce 9. Podle výsledků podkapitoly 6.1 budeme ověřovat shodu s pravostrannými rozděleními, popsány v kapitole 2. Využijeme při tom testovací kritéria, které jsme popsali v kapitole 4.

Pro výběr vhodného pravděpodobnostního modelu využijeme nejdřív grafické výstupy systému STATGRAPHICS Centurion XV.

6.2.1 Gama rozdělení pravděpodobnosti

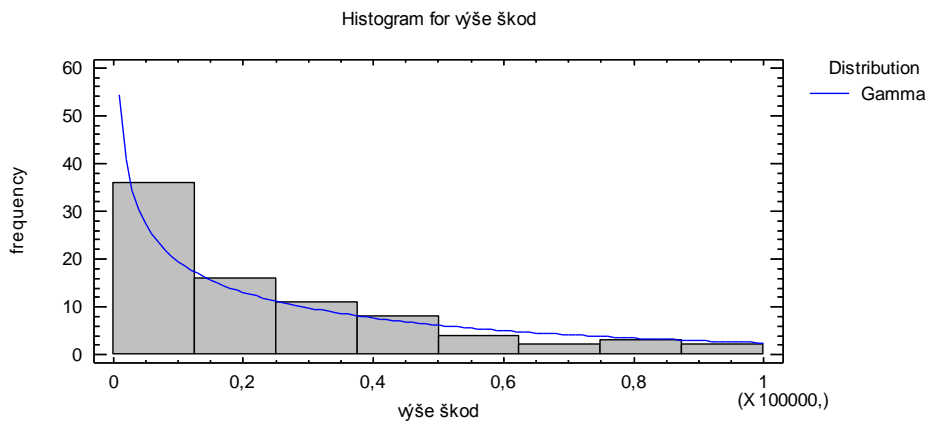
Pravostranné rozdělení pravděpodobnosti, které by mohlo být vhodné pro modelování škod, je gama rozdělení. Na obrázku 20 je vidět, že škody dobře kopírují přímku v Q-Q grafu.



Obrázek 20 - Q-Q graf porovnání shody s gama rozdělením

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

Také na obrázku 21 pomocí histogramu můžeme usuzovat na dobrou shodu rozdělení škod s rozdělením gama.

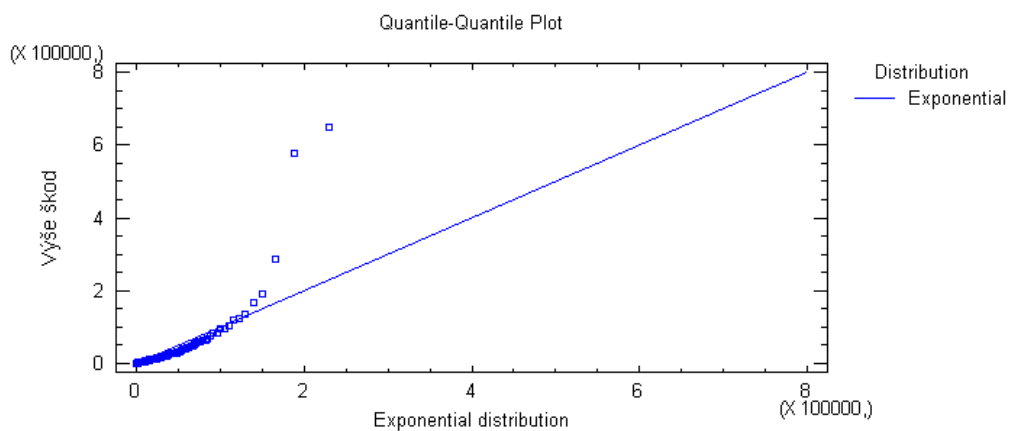


Obrázek 21 - Histogram porovnání shody s gama rozdělením

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

6.2.2 Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti

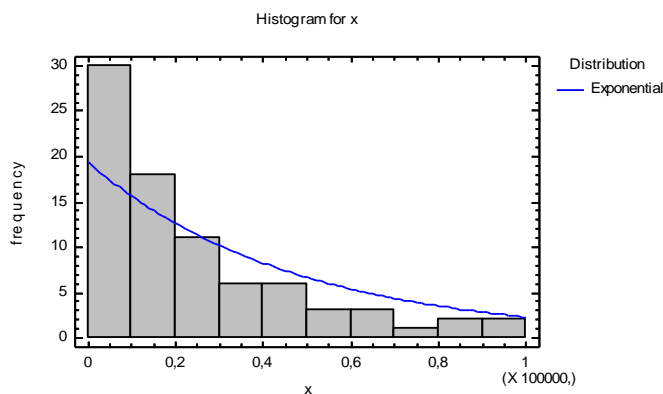
Na obrázku 22 je vidět, jak jednotlivé škody v Q-Q grafu kopírují přímku exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti. Malé škody leží na přímce, ovšem velké škody se od přímky odchylují směrem nahoru, což signalizuje, že exponenciální rozdělení má krátký pravý konec a nemodeluje dobře nejvyšší škody.



Obrázek 22 - Q-Q graf porovnání shody s exponenciálním rozdělením

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

Jak je vidět na obrázku 23, je prakticky nemožné pomocí exponenciálního modelu odhadnout pravděpodobnosti pro velmi vysoká pojistná plnění, jejichž znalost má pro pojišťovnu velký význam. Kromě toho shoda s empirickým rozdělením není dobrá ani na intervalech nejnižších škod. Proto exponenciální rozdělení zřejmě nebude vhodné pro tento soubor škod.

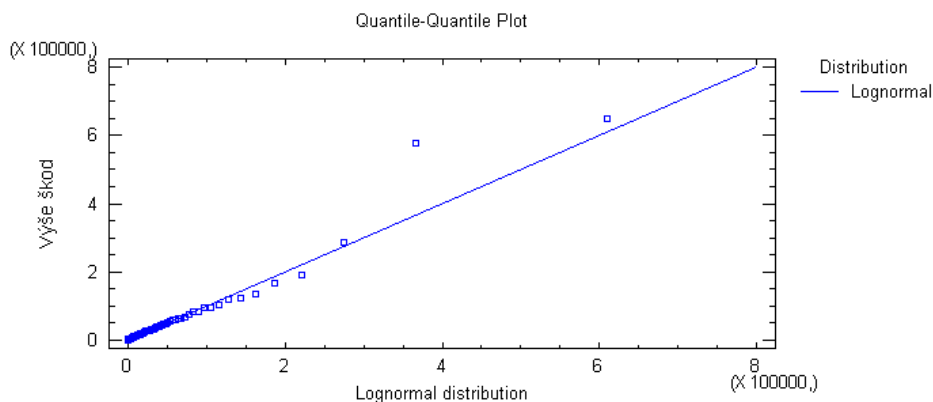


Obrázek 23 - Histogram porovnání shody s exponenciálním rozdělením

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

6.2.3 Lognormální rozdělení pravděpodobnosti

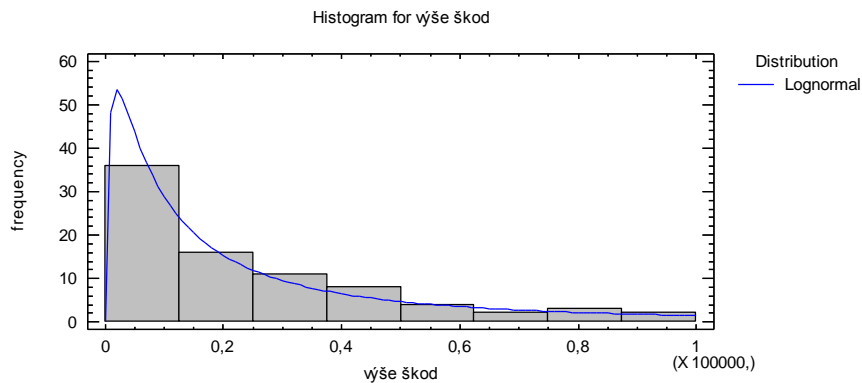
Podle obrázku 24 můžeme předpokládat, že soubor škod má lognormální rozdělení pravděpodobnosti. Jednotlivé škody velmi dobře kopírují přímkou lognormálního rozdělení.



Obrázek 24 - Q-Q graf porovnání shody s lognormálním rozdělením

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

Také obrázek 25 potvrzuje až na interval nejnižších škod dobrou shodu empirických dat s lognormálním rozdělením pravděpodobnosti.

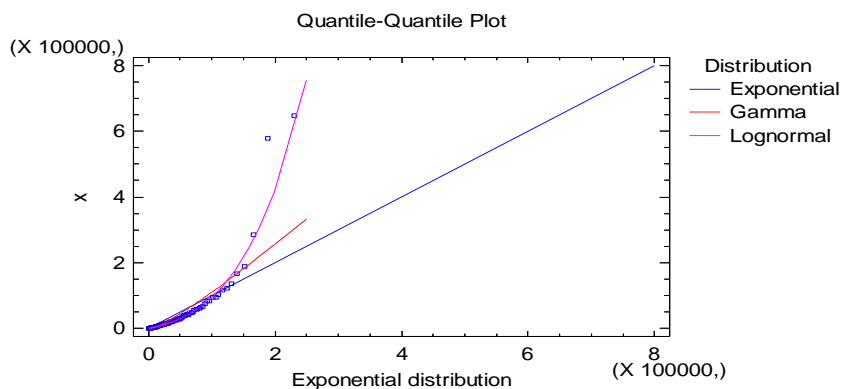


Obrázek 25 - Histogram porovnání shody s lognormálním rozdělením

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

6.2.4 Výběr rozdělení pravděpodobnosti

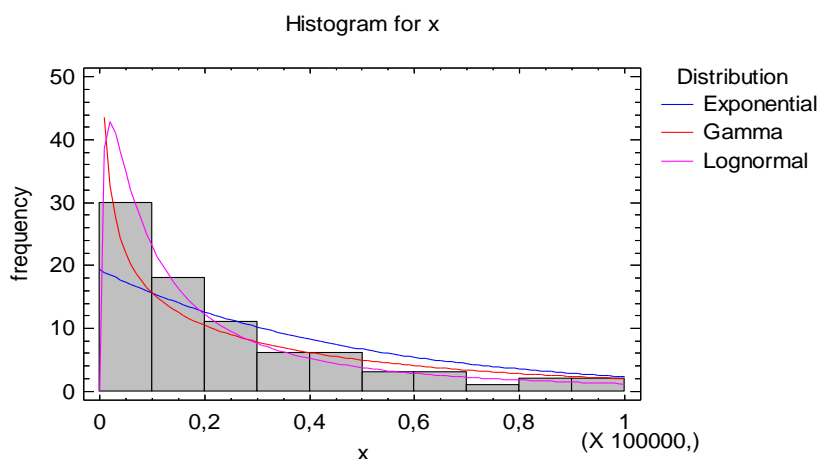
Statistický programový systém STATGRAPHICS Centurion XV umožňuje i vizuální porovnání vhodnosti zvolených pravděpodobnostních modelů. Podle obrázku 26 můžeme považovat za nejvhodnější pro soubor škod lognormální rozdělení. Naopak nejhorší rozdělení pro soubor škod je rozdělení exponenciální.



Obrázek 26 - Q-Q graf pro vybraná rozdělení

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

Stejný závěr vyplývá z obrázku 27 a lze tedy konstatovat, že pro modelování škod při havarijním pojištění motorových vozidel je nejvhodnější lognormální rozdělení pravděpodobnosti. V další části bude ověřeno testy dobré shody, zda je tato hypotéza správná.



Obrázek 27 - Histogram pro vybraná rozdělení

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

6.3 Testování dobré shody empirického a teoretických rozdělení

Dále pomocí testů dobré shody (Goodness-of-Fit Tests) ověříme, zda zvolené rozdělení pravděpodobnosti dobře modeluje empirický soubor škod. STATGRAPHICS Centurion XV nabízí 7 testů dobré shody, které jsou podrobně popsány v kapitole 4.

6.3.1 Pearsonův χ^2 test dobré shody

Pomocí χ^2 testu je testována shoda empirického rozdělení pravděpodobnosti s předpokládaným teoretickým rozdělením pravděpodobnosti. Na obrázku 28 jsou výsledky χ^2 testu pro tři typy rozdělení pravděpodobnosti. Pokud hodnota P-Value nepřekročí stanovenou hodnotu 0,05, zamítáme předpoklad, že dané rozdělení pravděpodobnosti je rozdělením základního souboru škod. Čím více se hodnota P-Value blíží k hodnotě 1, tím lépe se toto rozdělení blíží skutečnému rozdělení základního souboru škod.

Proto lze dle výsledků χ^2 testu potvrdit, že lognormální rozdělení je nejlepším rozdělením pravděpodobnosti výše škod při havarijním pojištění, nebo má nejvyšší hodnotou P-Value = 0,962407.

Goodness-of-Fit Tests for x
Chi-Squared Test

	<i>Exponential</i>	<i>Gamma</i>	<i>Lognormal</i>
Chi-Squared	16,9477	6,24702	1,45532
D.f.	9	8	6
P-Value	0,0495408	0,619584	0,962407

Obrázek 28 - Pearsonův χ^2 test dobré shody

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

6.3.2 Kolmogorovův-Smirnovův test dobré shody

Pro ověření dobré shody použijeme také K-S test, který by měl potvrdit výsledek předešlého testu. Dle výstupu na obrázku 29 i v tomto případě je hodnota P-Value nejvyšší u lognormálního rozdělení a to 0,993747. Můžeme proto předpokládat, výše škod při havarijním pojištění motorových vozidel se řídí lognormálním rozdělením pravděpodobnosti s parametry podle výstupu na obrázku 30. Pro odhad parametrů testovaných rozdělení STATGRAPHICS Centurion XV využívá metodu maximální věrohodnosti.

Goodness-of-Fit Tests for x
Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Exponential</i>	<i>Gamma</i>	<i>Lognormal</i>
DPLUS	0,197029	0,114392	0,0251554
DMINUS	0,0306453	0,0546427	0,044485
DN	0,197029	0,114392	0,044485
P-Value	0,00170844	0,184887	0,993747

Obrázek 29 - Kolmogorovův-Smirnovův test

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

91 values ranging from 501,0 to 648748,

Fitted Distributions	
<i>Lognormal</i>	
mean = 50171,2	
standard deviation = 139352,	
Log scale: mean = 9,74069	
Log scale: std. dev. = 1,4714	

Obrázek 30 - Odhad parametrů lognormálního rozdělení

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

Na obrázku 31 je výstup dvou testů dobré shody s lognormálním rozdělením pravděpodobnosti s maximálně věrohodnými odhady parametrů, uváděnými v tabulce na obrázku 31. Oba testy na základě hodnot P-Value potvrzují dobrou shodu empirických dat s tímto rozdělením.

Goodness-of-Fit Tests for x
Chi-Squared Test

	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>	<i>Observed</i>	<i>Expected</i>	
	<i>Limit</i>	<i>Limit</i>	<i>Frequency</i>	<i>Frequency</i>	<i>Chi-Squared</i>
at or below		10000,0	30	32,69	0,22
	10000,0	20000,0	18	16,82	0,08
	20000,0	30000,0	11	9,67	0,18
	30000,0	40000,0	6	6,31	0,01
	40000,0	50000,0	6	4,43	0,55
	50000,0	60000,0	3	3,28	0,02
	60000,0	70000,0	3	2,51	0,09
	70000,0	90000,0	3	3,58	0,09
above	90000,0		9	10,39	0,19

Chi-Squared = 1,45532 with 6 d.f. P-Value = 0,962407

Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Lognormal</i>
DPLUS	0,0251554
DMINUS	0,044485
DN	0,044485
P-Value	0,993747

Obrázek 31 - Výstup procedury Goodness-of-Fit Tests

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

Znalost rozdělení pravděpodobnosti individuálních škod je pro pojišťovnu velmi užitečná, protože umožňuje zjištění pravděpodobnosti libovolného intervalu možných škod a určení percentilů škod. Statistický balík STATGRAPHICS Centurion XV má k tomuto cíli v nabídce dvě procedury, a to *Tail Areas* pro určení hodnot distribuční funkce a *Critical Values* pro určení kvantilů.

Tail Areas for x
Lognormal distribution

<i>X</i>	<i>Lower Tail Area (<)</i>	<i>Upper Tail Area (>)</i>
10000,0	0,359256	0,640744
20000,0	0,544051	0,455949
50000,0	0,768336	0,231664
100000,	0,885794	0,114206
150000,	0,930566	0,0694336

Obrázek 32 - Hodnoty distribuční funkce a k ní opačné pravděpodobnosti

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

Ve výstupu na obrázku 32 jako *Lower Tail Areas* jsou uvedeny hodnoty distribuční funkce $F(x)$ pro zvolené výše škod x a také pravděpodobnosti opačné, tedy $1-F(x)$ pro každou zvolenou hodnotu x . Např. s pravděpodobností 0,885794 bude škoda při havarijním pojištění nižší jako 100 000 Kč a s pravděpodobností 0,114206 vyšší. Pravděpodobnost libovolného intervalu možných škod dostaneme jako rozdíl hodnoty distribuční funkce v horní a dolní hranici. Například pravděpodobnost, že výše škody bude z intervalu od 50 000 Kč do 100 000 Kč je $0,885794 - 0,768336$, tedy 0,044772.

Critical Values for x

<i>Lower Tail Area (<=)</i>	<i>Lognormal</i>
0,05	1510,9
0,25	6299,65
0,5	16995,3
0,75	45850,4
0,99	521091,

Obrázek 33 - Kvantily rozdělení výše škod

[výstup z programu Statgraphics Centurion XV]

Pro pojišťovnu je stejně užitečná znalost kvantilů, např. percentilů rozdělení výše škod. Některé obsahuje výstup na obrázku 33. Např. s pravděpodobností 0,05 výše škody nepřesáhne hodnotu 1 510,9 Kč, s pravděpodobností 0,75 škody nebudou vyšší než 45 850,4 Kč, s pravděpodobností 0,99 individuální škoda nebude vyšší jako 521 091 Kč. Takové informace jsou pro pojišťovnu nutné např. při rozhodování o možných formách spoluúčasti a způsobu zajištění.

Znalost rozdělení pravděpodobnosti výše individuálních škod je nutná při modelování výše celkových pojistných plnění pojišťovny za rok, tzv. kolektivního rizika, kde tvoří jednu ze základních složek. Znalost kolektivního modelu rizika je základem ke stanovení pojistného a výše rezerv neživotní pojišťovny.

ZÁVĚR

V předkládané diplomové práci jsou uvedena základní teoretická a aplikační východiska pravděpodobnostního modelování výše individuálních škod. Diplomová práce vychází z metod moderní pojistné matematiky, statistiky a teorie rizika v rámci neživotního pojištění.

Obsah diplomové práce je v souladu se stanoveným cílem v úvodu práce. Cílem této diplomové práce je hlavně ukázka možností praktické aplikace metod teorie rizika při pravděpodobnostním modelování výše individuálních škod na základě znalosti reálných výběrových dat, s využitím programů Microsoft Excel a statistického programového systému STATGRAPHICS Centurion XV.

Práce obsahuje stručný přehled, definice a základní vlastnosti rozdělení pravděpodobnosti, které se v současné době nejčastěji používají pro modelování výše individuálních škod. V práci jsou vysvětleny a provedeny odhady parametrů zvolených pravděpodobnostních modelů metodou maximální věrohodnosti a metodou momentů. Dále byla testována shoda zvolených pravděpodobnostních modelů a empirických rozdělení pomocí testů dobré shody.

Pro reálné údaje výše škod při havarijním pojištění motorových vozidel byly zjištěny základní charakteristiky, bylo nalezeno rozdělení pravděpodobnosti, odhadnuty parametry, provedeny testy dobré shody, byly zjištěny pravděpodobnosti libovolných intervalů možných škod a byly určeny percentily škod.

Na základě výsledků ze statistického programového systému STATGRAPHICS Centurion XV lze konstatovat, že pro modelování individuální výše škod při havarijním pojištění motorových vozidel je nejvhodnější lognormální rozdělení pravděpodobnosti s parametry, odhadnutými metodou maximální věrohodnosti. Toto rozdělení bylo potvrzeno i Pearsonovým χ^2 testem a Kolmogorovovým – Smirnovovým testem. Dále bylo zjištěno, že škody, které jsou vyšší než 100 000 Kč a pojišťovna uvažuje o jejich vhodném zajištění, nejlépe modeluje Paretovo dvou parametrické rozdělení pravděpodobnosti.

Diplomová práce je názornou ukázkou možností využití statistického programového systému STATGRAPHICS Centurion XV v rámci neživotního pojištění.

7 LITERATURA

BÖHM, A. *Ekonomika a řízení pojišťoven v podmínkách po vstupu České republiky do Evropské unie*. Praha : Aspi Publishing, 2004. 259 s. ISBN 80-7357-020-3.

BOLAND, P. J. *Statistical and probabilistic methods in actuarial science*. Boca Raton : Chapman&Hall/CRC, 2007. 351 s. ISBN 978-1-58488-695-2.

BUSINESS CENTER. *Zákon č. 363/1999 Sb., o pojišťovnictví* [online]. [cit. 2010-03-15] Dostupné na:

<<http://business.center.cz/business/pravo/zakony/pojistovnictvi/priloha1.aspx#a>>.

CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY. *Actuarial studies in non-life insurance* [online]. [cit. 2010-01-20] Dostupné na: <<http://www.casact.org/about/index.cfm?fa=astin>>.

CIPRA, T. *Finanční a pojistné vzorce*. 1. vyd. Praha : Grada, 2006. 374 s. ISBN 80-247-1633.

CIPRA, T. *Pojistná matematika: teorie a praxe*. 2. aktualiz. vyd. Praha : Ekopress, 2006. 411 s. ISBN 80-86929-11-6.

CIPRA, T. *Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví*. 1. vyd. Praha : Grada Publishing, 2004. 260 s. ISBN 80-247-0838-8.

CURRIE, I. D. *Loss Distributions*. Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, London and Edinburgh, 1993.

ČEJKOVÁ, V. aj. *Pojišťovnictví*. 1. vyd. Masarykova univerzita v Brně, 1999. 189 s. ISBN 80-210-1637-X.

ČESKÁ NÁRODNÍ BANKA. *Platné předpisy v oblasti dohledu v pojišťovnictví* [online]. [cit. 2009-11-11] Dostupné na: <http://www.cnb.cz/cs/legislative/leg_pojistovny/>.

DAŇHEL, J. *Kapitoly z pojistné teorie*. 1. vyd. Praha : Oeconomica, 2002. 139 s. ISBN 80-245-0306-9.

DUCHÁČKOVÁ, E. *Principy pojištění a pojišťovnictví*. 2. aktualiz. vyd. Praha : Ekopress, 2005. 178 s. ISBN 80-86119-92-0.

HENDL, J. *Přehled statistických metod zpracování dat : analýza a metaanalýza dat*. 2. vyd. Praha : Portál, 2006. 583 s. ISBN 80-7367-123-9.

- HOGG, R. V., KLUGMAN, S. A. *Loss Distributions*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 1984.
- HRADEC, M. aj. *Pojištění a pojišťovnictví*. 1. vyd. Vysoká škola finanční a správní, o.p.s. v edici EUPRESS, 2007. 215 s. ISBN 80-86754-48-0.
- KAAS, R. *Modern actuarial risk theory*. Dordrecht : Kluwer Academic, 2001. 306 s. ISBN 1-4020-2952-7.
- KAHOUN, V., VURM, V., KUČEROVÁ, B. *Vybrané kapitoly z pojišťovnictví*. Praha : Triton, 2008. 87 stran. ISBN 978-80-7387-130-7.
- KUBANOVÁ, J., LINDA, B. *Kritické hodnoty a kvantily vybraných rozdělení pravděpodobností*. 1. vyd. Pardubice : Univerzita Pardubice, 2007. 53 s. ISBN 80-7194-852-7.
- KUBANOVÁ, J. *Statistické metody pro ekonomickou a technickou praxi*. 2. vyd. STATIS Bratislava, 2004. 249 s. ISBN 80-85659-37-9.
- MAJTÁNOVÁ, A. aj. *Poist'ovnictvo – Teória a prax*. 1. vyd. Praha : Ekopress, 2006. 288 s. ISBN 80-86929-19-1.
- McCLAVE, J. T., BENSON, P. G. *STATISTICS for business and economics*. San Francisco : Dellen, 1988. 1267 s. ISBN 0-02-379020-2.
- PACÁKOVÁ, V. *Aplikovaná poistná statistika*. 3. aktualiz. vyd. IURA EDITION, spol. s r.o., 2004. 261 s. ISBN 80-8078-004-8.
- PACÁKOVÁ, V. Modelovanie a simulácia rizík v neživotnom pojištění. *Ekonomika a management*. roč. 10, Technická univerzita v Liberci, 3/2007, ISSN 1212-3609.
- PACÁKOVÁ, V. *Využitie Paretovho rozdelenia v neproporciálnom zaistení*. Forum Statisticum Slovacum, 7/2009. 125 s. ISSN 1336-7420.
- ŘEZANKOVÁ, H., ARLTOVÁ, M. *STATGRAPHICS (zadávání úloh)*. Praha : Vysoká škola ekonomická, 1995. 57 s. ISBN 80-7079-306-6.
- UNITED FINANCE. *Pojištění* [online]. [cit. 2010-03-18] Dostupné na: <<http://www.financnicentrum.eu/pojisteni/>>.
- Vyhláška č. 96/2006 Sb., kterou se provádí některá ustanovení zákona o pojišťovnictví.

YIU-KUN TSE. *Nonlife actuarial models, theory, methods and evaluation*. Cambridge University Press, 2009. 524 s. ISBN 978-0-521-76465-0.

Zákon č. 37/2004 Sb., o pojistné smlouvě a o změně souvisejících zákonů.

ZLATÁ KORUNA. *Co byste měli vědět o neživotním pojištění* [online]. [cit. 2010-01-12]
Dostupné na: <<http://www.penizevip.cz/clanky/498-492-nezivotni-pojisteni/14565-co-byste-meli-vedet-o-nezivotnim-pojisteni>>.

8 POUŽITÉ PROGRAMY

Microsoft Office Excel 2007

STAGRAPHS CENTURION XV

PŘÍLOHY

Část A

Odvětví životních pojištění

I. Pojištění

a) pro případ smrti, pro případ dožití, pro případ dožití se stanoveného věku nebo dřívější smrti, spojených životů, s výplatou zaplaceného pojistného,

b) důchodu,

c) pojištění úrazu nebo nemoci jako doplňkové pojištění k pojištění podle této části.

II. Svatební pojištění nebo pojištění prostředků na výživu dětí.

III. Pojištění uvedená v bodě I písm. a) a b) a bodě II, která jsou spojena s investičním fondem.

IV. Trvalé zdravotní pojištění podle čl. 2 odst. 1 písm. d) směrnice Evropského parlamentu a Rady 2002/83/ES upravující životní pojištění¹⁾.

V. Kapitalizace příspěvků hrazených skupinou přispěvatelů a následné rozdělování akumulovaných aktiv mezi přeživší přispěvatele nebo mezi osoby oprávněné po zemřelých přispěvatelích.

VI. Umořování kapitálu založené na pojistně matematickém výpočtu, jimiž jsou proti jednorázovým nebo periodickým platbám dohodnutým předem přijaty závazky se stanovenou dobou trvání a ve stanovené výši.

VII. Správa skupinových penzijních fondů, případně včetně pojištění zabezpečujícího zachování kapitálu nebo platbu minimálního úrokového výnosu.

VIII. Činnosti podle čl. 2 odst. 2 písm. e) směrnice Evropského parlamentu a Rady 2002/83/ES upravující životní pojištění¹⁾.

IX. Pojištění týkající se délky lidského života, které je upraveno právními předpisy z oblasti sociálního pojištění, pokud zákon umožňuje jeho provádění pojišťovnou na její vlastní účet.

⁶ Příloha 1 podle Zákona č. 277/2009 Sb., o pojišťovnictví

Část B

Odvětví neživotních pojištění

1. Úrazové pojištění

- a) s jednorázovým plněním,
- b) s plněním povahy náhrady škody,
- c) s kombinovaným plněním,
- d) cestujících.

2. Pojištění nemoci

- a) s jednorázovým plněním,
- b) s plněním povahy náhrady škody,
- c) s kombinovaným plněním,
- d) soukromé zdravotní pojištění.

3. Pojištění škod na pozemních dopravních prostředcích jiných než drážních vozidlech

- a) motorových,
- b) nemotorových.

4. Pojištění škod na drážních vozidlech.

5. Pojištění škod na leteckých dopravních prostředcích.

6. Pojištění škod na plavidlech

- a) říčních a průplavových,
- b) jezerních,
- c) námořních.

7. Pojištění přepravovaných věcí včetně zavazadel a jiného majetku bez ohledu na použitý dopravní prostředek.

8. Pojištění škod na majetku jiném než uvedeném v bodech 3 až 7 způsobených

- a) požárem,

- b) výbuchem,
- c) vichřicí,
- d) přírodními živly jinými než vichřicí (např. blesk, povodeň, záplava),
- e) jadernou energií,
- f) sesuvem nebo poklesem půdy.

9. Pojištění jiných škod na majetku jiném než uvedeném v bodech 3 až 7 vzniklých krupobitím nebo mrazem, anebo jinými pojistnými nebezpečími (např. loupeží, krádeží nebo škody způsobené lesní zvěří), nejsou-li tato zahrnuta v bodě 8, včetně pojištění škod na hospodářských zvířatech způsobených nákazou nebo jinými pojistnými nebezpečími.

10. Pojištění odpovědnosti za škodu vyplývající

- a) z provozu pozemního motorového a jeho přípojného vozidla,
- b) z činnosti dopravce,
- c) z provozu drážního vozidla.

11. Pojištění odpovědnosti za škodu vyplývající z vlastnictví nebo užití leteckého dopravního prostředku, včetně odpovědnosti dopravce.

12. Pojištění odpovědnosti za škodu vyplývající z vlastnictví nebo užití říčního, průplavového, jezerního nebo námořního plavidla, včetně odpovědnosti dopravce.

13. Všeobecné pojištění odpovědnosti za škodu jinou než uvedenou v odvětvích č. 10 až 12

- a) odpovědnost za škodu na životním prostředí,
- b) odpovědnost za škodu způsobenou jaderným zařízením,
- c) odpovědnost za škodu způsobenou vadou výrobku,
- d) ostatní.

14. Pojištění úvěru

- a) obecná platební neschopnost,
- b) vývozní úvěr,
- c) splátkový úvěr,

- d) hypoteční úvěr,
- e) zemědělský úvěr.

15. Pojištění záruky (kauce)

- a) přímé záruky,
- b) nepřímé záruky.

16. Pojištění různých finančních ztrát vyplývajících

- a) z výkonu povolání,
- b) z nedostatečného příjmu,
- c) ze špatných povětrnostních podmínek,
- d) ze ztráty zisku,
- e) ze stálých nákladů,
- f) z nepředvídaných obchodních výdajů,
- g) ze ztráty tržní hodnoty,
- h) ze ztráty pravidelného zdroje příjmu,
- i) z jiné nepřímé obchodní finanční ztráty,
- j) z ostatních finančních ztrát.

17. Pojištění právní ochrany.

18. Pojištění pomoci osobám v nouzi během cestování nebo pobytu mimo místa svého bydliště, včetně pojištění finančních ztrát bezprostředně souvisejících s cestováním.

Část C

Skupiny neživotních pojištění

- a) „Pojištění úrazu a nemoci“ pro odvětví uvedená v části B bodech 1 a 2,
- b) „Pojištění motorových vozidel“ pro odvětví uvedená v části B bodu 1 písm. d), bodech 3, 7 a 10,
- c) „Námořní a dopravní pojištění“ pro odvětví uvedená v části B bodu 1 písm. d), bodech 4, 6, 7 a 12,
- d) „Letecké pojištění“ pro odvětví uvedená v části B bodu 1 písm. d), bodech 5, 7 a 11,
- e) „Pojištění proti požáru a jiným majetkovým škodám“ pro odvětví uvedená v části B bodech 8 a 9,
- f) „Pojištění odpovědnosti za škody“ pro odvětví uvedená v části B bodech 10, 11, 12 a 13,
- g) „Pojištění úvěru a záruky“ pro odvětví uvedená v části B bodech 14 a 15,
- h) „Souhrnné neživotní pojištění“ pro všechna odvětví uvedená v části B bodech 1 až 18.

Příloha 2 – Kritické hodnoty χ^2 - rozdělení⁷

DEGREES OF FREEDOM	χ^2_{100}	χ^2_{050}	χ^2_{025}	χ^2_{010}	χ^2_{005}
1	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966
3	6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381
4	7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602
5	9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550
9	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893
10	15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882
11	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569
12	18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194
14	21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193
15	22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564
19	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822
20	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010
22	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956
23	32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813
24	33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585
25	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278
26	35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899
27	36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449
28	37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933
29	39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356
30	40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720
40	51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659
50	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517
70	85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215
80	96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321
90	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

⁷ Příloha 2 podle [McClave, 1988]

Příloha 3 – Kvantily pro Kolmogorovův-Smirnovův test⁸

<i>n</i>	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
1	0,950	0,975	0,995
2	0,776	0,842	0,929
3	0,636	0,708	0,829
4	0,565	0,624	0,734
5	0,509	0,563	0,669
6	0,468	0,519	0,617
7	0,436	0,483	0,576
8	0,410	0,454	0,542
9	0,387	0,43	0,513
10	0,369	0,409	0,489
11	0,352	0,391	0,468
12	0,338	0,375	0,449
13	0,325	0,361	0,432
14	0,314	0,349	0,418
15	0,304	0,338	0,404
16	0,295	0,327	0,392
17	0,286	0,318	0,381
18	0,279	0,309	0,371
19	0,271	0,301	0,361
20	0,265	0,294	0,352
21	0,259	0,287	0,344
22	0,253	0,281	0,337
23	0,247	0,275	0,330
24	0,242	0,269	0,323
25	0,238	0,264	0,317

<i>n</i>	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
26	0,233	0,259	0,311
27	0,229	0,254	0,305
28	0,225	0,250	0,300
29	0,221	0,246	0,295
30	0,218	0,242	0,290
31	0,214	0,238	0,285
32	0,211	0,234	0,281
33	0,208	0,231	0,277
34	0,205	0,227	0,273
35	0,202	0,224	0,269
36	0,199	0,221	0,265
37	0,196	0,218	0,262
38	0,194	0,215	0,258
39	0,191	0,213	0,255
40	0,189	0,210	0,252
41	0,187	0,208	0,249
42	0,185	0,205	0,246
43	0,183	0,203	0,243
44	0,181	0,201	0,241
45	0,179	0,198	0,238
46	0,177	0,196	0,235
47	0,175	0,194	0,233
48	0,173	0,192	0,231
49	0,171	0,190	0,228
50	0,170	0,188	0,226

⁸ Příloha 3 podle [Kubanová, 2007]