

Univerzita Pardubice  
Fakulta ekonomicko-správní

**Možnosti aproximace kolektivního modelu rizika**

**Balcárková Veronika**

Diplomová práce

2010

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Veronika BALCÁRKOVÁ**  
Studijní program: **N6209 Systémové inženýrství a informatika**  
Studijní obor: **Pojistné inženýrství**  
Název tématu: **Možnosti aproximace kolektivního modelu rizika**  
Zadávací katedra: **Ústav systémového inženýrství a informatiky**

### Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Definice a význam kolektivního modelu rizika v neživotním pojištění.
2. Charakteristiky kolektivního modelu rizika.
3. Speciální typy kolektivního modelu rizika.
4. Možnosti pravděpodobnostního modelování kolektivního rizika.
5. Aproximace kolektivního rizika normálním rozdělením.
6. Aproximace kolektivního rizika posunutým gama rozdělením.
7. Praktická ukázka aplikace popsaných postupů pomocí systémů Statgraphics Centurion XV a Excel.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

- [1] BOLAND, P. J. Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science. London: Chapman&Hall/CRC, 2007. ISBN: 978-1-58488-695-2.
- [2] BOOTH, P., CHADBURN, R., COOPER, D., HABERMAN, S., JAMES, D. Modern Actuarial Theory and Practice. Chapman&Hall/CRC, 1999. ISBN: 0-8493-0388-5.
- [3] CIPRA, T. Pojistná matematika - teorie a praxe. Praha: EKOPRESS, 1999. ISBN: 80-86119-17-3.
- [4] CIPRA, T. Finanční a pojistné vzorce. Praha: GRADA Publishing, 2006. ISBN: 80-247-1633-X.
- [5] PACÁKOVÁ, V. Aplikovaná poistná štatistika - 3. prepracované a doplnené vydanie. Bratislava: IURA EDITION, 2004. ISBN:80-8078-004-8.

Vedoucí diplomové práce:

*Pacáková*  
prof. RNDr. Viera Pacáková, Ph.D.  
Ústav matematiky

Datum zadání diplomové práce: 5. října 2009

Termín odevzdání diplomové práce: 30. dubna 2010

*Myšková*  
doc. Ing. Renáta Myšková, Ph.D.

děkanka

L.S.

*Křupka*  
doc. Ing. Jří Křupka, Ph.D.

vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 5. října 2009

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 12. 4. 2010

Bc. Veronika Balcárková

## **Poděkování**

Ráda bych touto cestou poděkovala vedoucí práce prof. RNDr. Vieri Pacákové, Ph.D. za vedení mé diplomové práce a odbornou pomoc.

## **SOUHRN**

Tato diplomová práce se zabývá možnostmi aproximace kolektivního modelu rizika v neživotním pojištění a jejich bližší analýzou. Hlavní pozornost je zde věnována aproximaci kolektivního modelu rizika normálním rozdělením a posunutým gama rozdělením v neživotní pojišťovně. Výpočty byly prováděny s využitím statistického programu STATGRAPHICS Centurion XV a programu Excel

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

riziko, kolektivní model rizika, aproximace normálním rozdělením, aproximace posunutým gama rozdělením

## **TITLE**

The Possibilities of Approximation of Collective Risk Model

## **ABSTRACT**

This Thesis is concerned with the possibilities of approximation of collective risk model with a view to non-life insurance and their closer analysis. Main attention is paid to the approximation of collective risk by the help normal distribution and shifted gamma distribution in the non-life insurance company. Calculations were performed with use of statistical computer software STATGRAPHICS Centurion XV and program Excel.

## **KEYWORDS**

risk, collective risk model, approximation by normal distribution, approximation by shifted gamma distribution

## OBSAH

1. ÚVOD.....	10
2. RIZIKO V POJIŠTĚNÍ .....	12
2.1 Pojem riziko .....	12
2.2 Pojistné riziko.....	12
2.2.1 Klasifikace pojistných rizik .....	13
3. NEŽIVOTNÍ POJIŠTĚNÍ .....	16
3.1 Úrazové pojištění.....	16
3.2 Nemocenské pojištění .....	17
3.3 Pojištění majetku .....	18
3.4 Pojištění odpovědnosti za škody .....	18
3.5 Pojištění právní ochrany.....	18
3.6 Cestovní pojištění.....	19
4. MODEL Y KOLEKTIVNÍHO RIZIKA .....	20
4.1 Definice kolektivního rizika.....	22
4.2 Rozdělení kolektivního rizika .....	23
4.2.1 Rozdělení $S$ bez specifikace $N$ .....	23
4.3 Základní charakteristiky kolektivního rizika $S$ .....	24
4.4 Základní typy složených rozdělení.....	25
4.4.1 Složené Poissonovo rozdělení.....	25
4.4.2 Složené binomické rozdělení .....	26

4.4.3	Složené negativní binomické rozdělení .....	27
5.	APROXIMACE KOLEKTIVNÍHO MODELU RIZIKA.....	28
5.1	Aproximace normálním rozdělením.....	28
5.2	Aproximace posunutým gama rozdělením.....	29
5.3	Další možnosti aproximace kolektivního rizika.....	30
5.3.1	Panjerova rekurentní formule.....	30
5.3.2	Aproximace logaritmicko-normálním rozdělením.....	30
5.3.3	Gramova-Charlierova aproximace.....	31
5.3.4	Aproximace NP2.....	31
6.	Aplikace metod aproximace kolektivního modelu rizika.....	32
6.1	Odhady parametrů rozdělení .....	32
6.1.1	Metoda maximální věrohodnosti .....	32
6.1.2	Metoda momentů .....	33
6.2	Ověření vhodnosti vybraného rozdělení s odhadnutými parametry.....	34
6.2.1	Pearsonův $\chi^2$ -test dobré shody .....	34
6.2.2	Kolmogorov-Smirnovův test .....	36
6.3	Praktická ukázka odhadu parametrů a ověření vhodnosti rozdělení v programu Excel	38
6.3.1	Odhady parametrů.....	38
6.3.2	Testy dobré shody .....	46
6.4	Ukázka odhadu parametrů a ověření vhodnosti rozdělení v systému STATGRAPHICS Centurion XV .....	50



6.4.1	Lognormální rozdělení .....	52
6.4.2	Gama rozdělení .....	55
6.4.3	Paretovo rozdělení .....	58
6.4.4	Srovnání výsledků získaných v systému Statgraphics Centurion XV .....	61
6.5	Porovnání výsledků získaných pomocí programu Excel a systému Statgraphics Centurion XV .....	62
7.	Praktická ukázka aproximace kolektivního modelu rizika v programu Excel .....	64
8.	ZÁVĚR.....	69
	SEZNAM LITERATURY .....	71
	POUŽITÉ PROGRAMY .....	72
	PŘÍLOHY .....	73

## **SEZNAM OBRÁZKŮ**

Obrázek 1:	Odhad parametrů lognormálního rozdělení (Zdroj: vlastní).....	39
Obrázek 2:	Postup odhadu parametrů Paretova rozdělení metodou momentů (Zdroj: vlastní).....	42
Obrázek 3:	Výpočtová tabulka – začátek (Zdroj: vlastní).....	44
Obrázek 4:	Výpočtová tabulka – konec (Zdroj: vlastní) .....	44
Obrázek 5:	Kolmogorov-Smirnovov test pro lognormální rozdělení (Zdroj: vlastní).....	47
Obrázek 6:	Kolmogorov-Smirnovov test pro gama rozdělení (Zdroj: vlastní).....	48
Obrázek 7:	Kolmogorov-Smirnovov test pro Paretovo rozdělení (Zdroj: vlastní) .....	49
Obrázek 8:	Histogram rozdělení četnosti výšky pojistných plnění (Zdroj: vlastní) .....	50
Obrázek 9:	Box-and-Whisker Plot (Zdroj: vlastní).....	50
Obrázek 10:	Základní charakteristiky výšky pojistných plnění (Zdroj: vlastní).....	51
Obrázek 11:	Histogram četností a hustota lognormálního rozdělení výšky škod (Zdroj:výstup STATGRAPHICS).....	53
Obrázek 12:	Quantile-Quantile Plot (Zdroj:výstup STATGRAPHICS).....	53

Obrázek 13: Ukázka výpočtu v systému Statgraphics pro lognormální rozdělení (Zdroj: vlastní).....	55
Obrázek 14: Ukázka výpočtu v systému Statgraphics pro gama rozdělení (Zdroj: vlastní) ...	56
Obrázek 15:Histogram (Zdroj:výstup STATGRAPHICS) .....	57
Obrázek 16:Quantile-Quantile Plot (Zdroj:výstup STATGRAPHICS).....	57
Obrázek 17: Ukázka výpočtu v systému Statgraphics pro Paretovo rozdělení (Zdroj: vlastní) .....	59
Obrázek 18: Histogram (Zdroj: vlastní) .....	59

## SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Pojistné plnění z portfolia pojistek v 1000 PJ [1] .....	38
Tabulka 2: Odhad parametrů lognormálního rozdělení metodou maximální věrohodnosti ....	40
Tabulka 3: Hodnoty odhadů $E(X)$ a $E(X^2)$ (Zdroj: vlastní).....	40
Tabulka 4: Odhad parametrů lognormálního rozdělení metodou momentů (Zdroj: vlastní) ...	40
Tabulka 5: Porovnání odhadu parametrů lognormálního rozdělení obou metod (Zdroj: vlastní) .....	41
Tabulka 6: Hodnoty $s^2$ a $\bar{x}$ (Zdroj: vlastní).....	41
Tabulka 7: Odhad parametrů gama rozdělení (Zdroj: vlastní).....	42
Tabulka 8: Odhad parametrů Paretova rozdělení (Zdroj: vlastní).....	45
Tabulka 9: Odhady parametrů Paretova rozdělení metodou momentů.....	46
Tabulka 10: Výsledky Kolmogorova-Smirnovova testu (Zdroj: vlastní) .....	49
Tabulka 11: Základní charakteristiky výšky pojistných plnění (Zdroj: vlastní) .....	51
Tabulka 12: Odhady parametrů pro lognormální rozdělení (Zdroj:výstup STATGRAPHICS)	52
Tabulka 13: Kolmogorov-Smirnov Testu (Zdroj:výstup STATGRAPHICS).....	54
Tabulka 14: Výsledky Chi-Squared test (Zdroj:výstup STATGRAPHICS) .....	54

Tabulka 15: Odhad parametrů gama rozdělení (Zdroj:výstup STATGRAPHICS) .....	56
Tabulka 16: Kolmogorov-Smirnov test (Zdroj:výstup STATGRAPHICS) .....	58
Tabulka 17: Chi-Squared test (Zdroj:výstup STATGRAPHICS).....	58
Tabulka 18: Odhad parametrů (Zdroj:výstup STATGRAPHICS).....	59
Tabulka 19: Kolmogorov-Smirnov test (Zdroj:výstup STATGRAPHICS) .....	60
Tabulka 20: Chi-Squared test (Zdroj:výstup STATGRAPHICS).....	60
Tabulka 21: Hodnoty P-Value (Zdroj: vlastní) .....	61
Tabulka 22: Porovnání výsledků programu Excel a systému Statgraphics (Zdroj: vlastní) ....	62
Tabulka 23: začáteční momenty (Zdroj: vlastní) .....	65
Tabulka 24: Základní charakteristiky $S$ (Zdroj: vlastní) .....	65
Tabulka 25: aproximace normálním rozdělením a určení rizikové přírážky (Zdroj: vlastní) ..	66
Tabulka 26: Hodnoty parametrů $\alpha$ , $\beta$ , $k$ (Zdroj: vlastní) .....	66
Tabulka 27: Aproximace posunutým gama rozdělení a určení rizikové přírážky (Zdroj: vlastní).....	66
Tabulka 28: Srovnání rizikových přírážek jednotlivých rozdělení (Zdroj: vlastní).....	67
Tabulka 29: Základní charakteristiky $S$ .....	68

# 1. ÚVOD

Pojišťovnictví a pojistný trh tvoří neoddělitelnou a silnou součást finančního trhu. Důvodem je to, že v tomto odvětví se shromažďuje velké množství reálných finančních zdrojů a instituce, které je spravují, jsou silným účastníkem tohoto trhu. Na jedné straně pojišťovny přebírají riziko a provozují pojistné produkty, na druhé straně však čelí konkurenčnímu boji o zákazníka, sledování trhu, inovacím a dalším obchodním činnostem.

Pojišťovnictví prochází ve světě neustálým vývojem. Všichni účastníci trhu se musí neustále přizpůsobovat měnícím se požadavkům doby, legislativy, konkurence a celkové změně vývoje podmínek podnikání. Vývoj v České republice je ovlivňován globálními trendy rozvoje pojišťovnictví, jako jsou integrace a uvolňování trhu, potřeba zvyšování odbornosti atd. Z těchto důvodů se pojišťovací trh stále více zaměřuje na analýzy vlastních dat, jejich zpracování a hlavně využití v praxi. Důraz je kladen na lepší odhad míry rizika, kterou na sebe pojišťovny přebírají a dále pak na podpoře obchodu.

Výraznou změnou regulatorního konceptu v pojišťovnictví je Solvency II. Tento koncept vyžaduje systematický a komplexní přístup k řízení rizik. Předpokládá integrovaný přístup ke všem druhům identifikovatelných rizik, stanovuje vysoké nároky na vnitřní kontrolní systém pojišťoven, povzbuzuje tvorbu vnitřních modelů atd. Ústředním principem Solvency II je zaměření na systém řízení rizik. Důležitou součástí konceptu je nutná identifikace a klasifikace jednotlivých typů rizik, kterým je pojišťovna vystavena. Efektivní řízení společnosti je čím dál víc spjata s jasným vymezením jednotlivých kategorií rizik. Mezi základní rizika, které na sebe pojišťovna přebírá, patří tržní riziko, úvěrové riziko, riziko likvidity, pojistné riziko a operační riziko. Solvency II je zásadní změnou oproti dosavadnímu způsobu regulace a dozoru v pojišťovnictví. Výkon dozoru se přesouvá k posuzování funkčnosti vnitřního kontrolního systému a schopnosti pojišťovny identifikovat, měřit a řídit svá rizika (a to podle svých interních postupů).

Moderní přístup k teorii rizika je představován zejména modely kolektivního rizika. Tyto modely jsou založeny na rozdělení počtu a výšky individuálních pojistných plnění. Hlavní význam modelů kolektivního rizika v neživotním pojištění je při krátkodobých pojistných smlouvách.

Cílem této diplomové práce je ukázat možnosti aproximace kolektivního modelu rizika, přičemž je pozornost zaměřena hlavně na aproximaci kolektivního modelu rizika pomocí normálního rozdělení a posunutého gama rozdělení. V práci jsou představeny i další metody aproximace, kterými jsou Panterova rekurentní formule, aproximace logaritnicko-normálním rozdělením, Gramova-Charlierova aproximace a aproximace NP2. K tomu bylo nejdříve zapotřebí vysvětlit základní pojmy, kterými jsou riziko a kolektivní riziko.

Dále je součástí diplomové práce aplikace již zmíněných postupů v praktických ukázkách pomocí statistického programového balíku STATGRAPHICS Centurion XV a programu Microsoft Excel. Na závěr jsou zhodnoceny dosažené výsledky.

## 2. RIZIKO V POJIŠTĚNÍ

### 2.1 Pojem riziko

Metodologicky je podstata pojištění těsně spjata s dialektickými filosofickými kategoriemi nutnosti a nahodilosti, neboť pojištění představuje jednu z forem ochrany lidské společnosti před důsledky nepředvídatelných nahodilých událostí, které způsobují ztráty na životech a zdraví lidí a na vytvořených materiálních hodnotách.

Projevem nutnosti, zákonitosti, příčinnosti je pravděpodobnost jevu. Naproti tomu nahodilost není pojmem či kategorií matematiky, na rozdíl od pravděpodobnosti nepojednává o kvantitativních stránkách, nahodilost je kvalitativní (filosofická) interpretace předpokládající pohled, zahrnující veškeré jevové bohatství světa. Mezi nutností a nahodilostí není protiklad, tyto kategorie přecházejí navzájem jedna v druhou, změna pozorovací úrovně probíhá v souladu s dialektickým zákonem přechodu kvantitativních změn v kvalitativní [5].

Vztah protikladných stránek kvalitativní a kvantitativní interpretace je obsahem na nahodilost navazujících pojmů, jakými jsou *riziko*, *nejistota* a *neurčitost*. Základním matematickým přístupem, opírajícím se o pravděpodobnostní metody, je rozlišování mezi rizikem a nejistotou v tom smyslu, že rizikem je rozuměn stav, v němž je budoucí situace dopředu jednoznačně pravděpodobnostně charakterizována, tedy je předem známo objektivní rozdělení pravděpodobností výskytu jednotlivých hodnot náhodných veličin, na druhé straně nejistotou je rozuměn stav, kdy je toto objektivní rozdělení pravděpodobnosti nspecifikovatelné. Nejistotu je možné dělit na částečnou (nejsou k dispozici úplné informace o pravděpodobnostním rozdělení, jsou však známy některé jeho parametry) nebo úplnou (možné nejvýše specifikovat množinu úvah připadajících stavů, nelze zjistit ani odhadnout pravděpodobnosti jejich výskytu). Neurčitost se pak od nejistoty liší tím, že jsou definovány všechny veličiny, ale nejsou známy jejich hodnoty[5].

### 2.2 Pojistné riziko

Pro svět, ve kterém žijeme, je příznačná nepřeborná řada nejistot a nahodilostí. V souvislosti s pojištěním je pojem riziko používán pragmaticky – pojištění se považuje za nástroj finanční eliminace negativních důsledků nahodilosti. Tato stručná charakteristika v sobě mimo jiné skrývá skutečnosti, že [4]:

- pojištění se zabývá pouze jevy náhodného charakteru, jejichž potenciálním důsledkem je vznik nějaké škody (i když o škodu se často jedná v přeneseném významu: např. dožití se dalšího roku života v rámci důchodového pojištění má „škodní charakter sociální nedostatečnosti“). Takové jevy se v této souvislosti označují jako pojistná rizika, při níž pojišťovna opravdu dojde k jejich realizaci, mluví se většinou o pojistné události, při níž pojišťovna podle sjednané pojistné smlouvy vyplácí pojistné plnění,
- jedná se vždy o finanční náhrady: jiné krytí než finanční nelze od pojišťovny nebo penzijního fondu očekávat,
- motiv existence takového nástroje finanční eliminace negativních důsledků nahodilosti je přirozený: např. podnikatel bude raději platit poměrně vysoké pojistné za živelní pojištění, než aby se nechal zlikvidovat nějakou živelní katastrofou (to ale platí pro každého z nás např. v cestovním pojištění), na druhé straně pojišťovny nebo penzijní fondy, provozující dané pojištění, očekávají zisk plynoucí především z pojistného od klientů.

Na pojištění tedy lze pohlížet jako na ochranu proti pojistným rizikům: pojištěný přenese svá rizika, jejichž potenciální škodní důsledky jsou z jeho individuálního hlediska neúnosné, na pojistitele (pojišťovnu, penzijní fond, stát), který při dostatečně velkém souboru rizik podobného charakteru (soubor pojistných smluv podobného typu se označuje jako pojistný kmen) je schopen celkově převzít rizika s využitím inkasovaného pojistného nejen zvládat, ale případně je učinit předmětem výnosné komerční činnosti.

### 2.2.1 Klasifikace pojistných rizik

Pojistná rizika mohou být klasifikována podle různých hledisek[4]:

- *čisté riziko* – prokazatelně náhodného charakteru (např. doba života, úraz, požár, dopravní havárie) na rozdíl od uměle vytvářeného spekulativního rizika (např. sázková činnost a hazardní hry). Předmětem pojištění jsou důsledně pouze čistá rizika a pojišťovny ve svém zájmu přispívají k jejich „čistotě“ bojem proti pojistným podvodům, navíc nahodilost pojistného rizika může být absolutní (např. požár) nebo relativní (např. úmrtí určitě někdy nastane, ale náhodný je jeho okamžik),

- *objektivní riziko* – dáno objektivními faktory (např. věk, pohlaví, zdravotní stav, profese, charakteristiky pojištěného předmětu a jeho prostředí apod.) na rozdíl od subjektivního rizika daného subjektivními faktory (např. snaha pojištěného zachovat své zdraví a život, vyhnout se střetu se zákonem, zachovat pojištěný předmět ve funkčním stavu apod. Z legislativního pohledu se mluví o pojistném zájmu, který patří k základním pojmům pojistného práva),
- *morální riziko* – v situaci, kdy pojištěný nepreferuje jednoznačně zábrannou činnost před vznikem škody (nemusí se přitom jednat o pojistný podvod). V této souvislosti se také uvází tzv. antiselekce rizik, kdy snahou pojištěných je zabezpečit se formou pojištění především proti takovým rizikům, která jsou v jejich případě nejaktuálnější, např. proti riziku smrti při zhoršeném zdravotním stavu, nebo naopak proti riziku dožití v podmínkách sociální nedostatečnosti při tendenci k dlouhověkosti. Často se v pojišťovnictví rovněž mluví o morálním hazardu jako o tendenci pojištěných osob ke změně jejich chování ve směru, který vede k získání co nejvyššího pojistného plnění z již uzavřené pojistné smlouvy,
- *osobní riziko* – např. riziko předčasné smrti, tělesného poškození, sociální nedostatečnosti při dožití určitého věku apod.,
- *živelní riziko* – riziko přímých škod na majetku v důsledku živelních událostí (např. požáru, povodně, vichřice apod.),
- *vodovodní riziko* – riziko škod způsobených vodou vytékající z vodovodních zařízení, kanalizace, topení apod.,
- *dopravní riziko* – riziko škod vzniklých v souvislosti s dopravním prostředkem (tzv. kaskopojištění, jako je např. havarijní pojištění, kasko letadel, kasko lodí apod.), nebo v souvislosti s přepravovaným zbožím (tzv. dopravní či kargopojištění),
- *riziko odcizení a vandalství*, kterého smysl je zřejmý,
- *šomážní riziko* – riziko přerušení provozu nebo výroby v důsledku havárie, výpadku v dodávce energie apod. (např. zkažení zmrazených potravin, ušlý zisk či sankce při nedodržení kontraktu),
- *strojní riziko* – riziko havárie či poruchy strojního zařízení v důsledku neodborného zacházení, vady materiálu, chybné technologie apod.,
- *zemědělské riziko* – riziko ztráty v rostlinné a živočišné výrobě (např. v důsledku živelních událostí, jarních mrazů, nemoci či úrazu zvířat apod.),
- *odpovědnostní riziko* – riziko škod způsobených v důsledku jednání pojištěného na zdraví a životě jiné osoby nebo na cizím majetku (např. pojištění odpovědnosti za



škodu způsobenou provozem vozidla, výkonem povolání daňového poradce, havárií v domácnosti, prodejem léčebného přípravku apod.),

- *sociálně-politické riziko* – zahrnuje válečné operace, etnické konflikty, embarga, stávky apod.
- *obchodně-finanční riziko* – vyplývá ze změn ekonomických podmínek a dodavatelsko-odběratelských vztahů na domácím a zahraničním trhu (např. změny cenových relací a kurzů, platební neschopnost či nevěle obchodního partnera). Speciálně sem spadá úvěrové riziko spočívající v nebezpečí nesplacení dluhů a devizového riziko s devizovým dopadem,
- *moderní rizika* - např. atomové riziko, ekologické riziko, riziko spojené s provozem kosmických těles, riziko AIDS aj.

Z hlediska pojistitele se rizika převzatá od klientů transformují na tzv. pojistně-technická rizika pojistitele, která spočívají v potenciálním nebezpečí, že ve skutečnosti nedojde k vyrovnání mezi přijatým pojistným a vyplaceným pojistným plněním. Toto riziko se měří výší variability (nejčastěji směrodatnou odchylkou) mezi očekávaným stavem, z něhož vychází výpočet pojistného, a skutečným stavem, který se projeví ve vyplaceném pojistném plnění. Podstata pojišťovací činnosti je přitom založena na tom, že růstem velikosti aktuálního počtu uzavřených pojistných smluv se pojistně-technické riziko zmenšuje[4].

V pojišťovací praxi se oceňováním rizika zabývají vyškolení pracovníci (manažeři rizika), kteří se obvykle specializují na určitou oblast pojištění (např. požáry, vloupání nebo podle odvětví - chemický průmysl, elektrárny apod.). Výsledkem jejich inspekce bývá tzv. riziková zpráva, na jejímž základě se jednak navrhuje možná nápravná opatření a pak se sestavuje příslušný pojistný plán. Přitom takovým oceňováním rizika se vedle pojišťoven a zajišťoven také zabývají specializované makléřské společnosti [4].

### 3. NEŽIVOTNÍ POJIŠTĚNÍ

Podstata neživotního pojištění je krytí celé škály rizik neživotního charakteru. V rámci tohoto pojištění jsou kryta rizika různého charakteru, jedná se o:

- rizika ohrožující zdraví a životy osob (úraz, invalidita, nemoc apod.),
- rizika vyvolávající finanční ztráty (přerušování provozu, úvěrová rizika, odpovědnostní rizika, rizika finančních ztrát apod.),
- rizika vyvolávající přímé věcné škody (živelní rizika, odcizení, vandalství apod.).

Neživotního pojištění lze členit podle různých hledisek, například pojištění osob, majetku, odpovědnosti. Jednotlivé typy pojistných produktů jsou však v praxi vzájemně kombinovány (a to i s produkty životního pojištění), aby nabídka pojistné ochrany byla komplexní.

Dělení neživotního pojištění [7]:

- neživotní pojištění osob (úrazové pojištění, nemocenské pojištění),
- pojištění majetková,
- pojištění odpovědnostní,
- pojištění právní ochrany,
- cestovní pojištění.

Jak v životním, tak i v neživotním pojištění je důležitá otázka stanovení ekvivalentní výšky pojistného, která odpovídá převzatému riziku. Výšky pojistného závisí od systému ručení pojišťovny, rozsahu škod a škodové četnosti. Intenzita pojistné ochrany představuje poměr pojistného plnění ke škodě, přičemž je zřejmé, že intenzita pojistné ochrany  $i$  má hodnotu z intervalu  $0 < i < 1$  (v situaci, že je intenzita  $> 1$ , představuje to obohacení pojištěného, což se kvalifikuje jako pojistný podvod).

#### 3.1 Úrazové pojištění

Při tomto typu pojištění se nejčastěji poskytuje pojistná ochrana v případě, že v důsledku úrazu dojde k přechodnému nebo trvalému tělesnému poškození nebo smrti pojištěného.

Úraz bývá v pojistných podmínkách charakterizován jako náhlé a neočekávané působení zevních sil nebo vlastní síly, neočekávané a nepřetržité působení vysokých teplot, par, plynů, záření a jedů, které by měly za následek tělesné poškození nebo smrt pojištěného. Existují

výluky z pojistného plnění, především pro úrazy v souvislosti se sebevraždou nebo sebevražedným pokusem, s trestnými činy, pod vlivem alkoholu, následkem poruchy apod.)

Základem úrazového pojištění je krytí:

- trvalých následků úrazu,
- smrti následkem úrazu.

V rámci úrazového pojištění může být sjednáno pojistné plnění pro řadu dalších případů (např. plnění za dobu nezbytného léčení, denní odškodné za dobu pracovní neschopnosti, denní odškodné při pobytu v nemocnici, úhrada nákladů spojených s úrazem, pojištění drobných úrazů). Dále toto pojištění může být sjednáno jako samostatný druh pojištění nebo v rámci sdružených pojištění spolu s především životními riziky, v rámci cestovního pojištění, ale také jako doplněk např. v rámci motorových vozidel.

Pojistné plnění se vyplácí buď jednorázově nebo jako důchod, který je buď časově omezený nebo jako doživotní důchod[7].

### **3.2 Nemocenské pojištění**

Nemocenské pojištění provozované komerčními pojišťovkami se uplatňuje jako doplněk povinného všeobecného zdravotního pojištění a povinného sociálního nemocenského pojištění, a to pro případy[7]:

- kdy nejsou dané potřeby povinným pojištěním kryty,
- kdy jednotlivec má zájem vyššího rozsahu pokrytí potřeb než se uplatňuje v rámci povinného pojištění,
- kdy osoby nejsou zahrnuty do povinného pojištění.

Do této oblasti lze zařadit pojistné produkty, které kryjí zdravotní rizika jako je pojištění léčebných výloh, pojištění nadstandardního vybavení při pobytu v nemocnici, pojištění vážných onemocnění nebo pojištění stomatologických výkonů nehrazených nebo částečně hrazených veřejným zdravotním pojištěním. Dále pak pojistně produkty kryjící důsledky nemoci, které se projevují ve ztrátě nebo snížení příjmů v souvislosti s pracovní neschopností. Jde především o pojištění na denní dávku při pracovní neschopnosti, pojištění denní podpory při pobytu v nemocnici a další druhy pojištění (např. pojištění leasingových splátek).

### **3.3 Pojištění majetku**

Zahrnuje krytí rizik , jejichž realizací dochází ke škodám na majetku. Zahrnuje krytí celé řady rizik, která lze rozdělit podle jejich důsledků na[7]:

- a) Rizika, při jejichž realizaci dochází ke vzniku přímých věcných škod. Do této oblasti patří živelní rizika, vodovodní rizika, rizika havarijní, rizika odcizení a vandalství a strojní rizika.
- b) Rizika, při jejichž realizaci dochází ke vzniku finančních ztrát. Řadí se sem rizika přerušení provozu či rizika úvěrová.

Pojištění majetku lze dále členit na:

- pojištění majetku obyvatelstva (mezi nejvýznamnější patří pojištění domácností, pojištění budov, havarijní pojištění)
- pojištění průmyslových a podnikatelských rizik (živelní pojištění, pojištění technická, pojištění pro případ přerušení provozu, pojištění dopravní, pojištění havarijní, pojištění proti odcizení, pojištění skel, úvěrové pojištění, pojištění specializovaných činností, atd.),
- pojištění zemědělských rizik (pojištění plodin a pojištění hospodářských zvířat).

### **3.4 Pojištění odpovědnosti za škody**

Toto pojištění kryje rizika související se skutečností, že pojištěný subjekt může způsobit svou činností škody jinému subjektu, a to škody na majetku, na zdraví a na životě nebo finanční škody, za které poškozenému zodpovídá. Předmětem pojištění odpovědnosti je tedy právní vztah – odpovědnost za škodu.

### **3.5 Pojištění právní ochrany**

Pojištění právní ochrany kryje náklady pojištěného v souvislosti s právními úkony, a náklady spojené s prosazením požadavků na náhradu škod pojištěného.

Součástí tohoto pojištění je poskytování právních rad a právní asistence.

Uplatňuje se ve třech podobách[7]:

- pojištění právní ochrany motorového vozidla (lze uplatnit jako pojištění právní ochrany motorového vozidla či jako pojištění právní ochrany řidiče motorového vozidla),

- pojištění právní ochrany rodiny (do krytí zahrnuje pojištěnou osobu, manžela/manželku, druha/družku, nezletilé děti, další osoby žijící v domácnosti),
- pojištění právní ochrany podniků (pojistné krytí v případě odpovědnosti za škody, trestního práva, pracovního práva a sociálně správního práva).

### **3.6 Cestovní pojištění**

Cestovní pojištění kryje rizika při zahraničních cestách mimo trvalé bydliště. Představuje takovou oblast pojištění, kde dochází ke kombinování pojistných produktů různého typu. Zařazují se sem pojistné produkty jako například pojištění zdravotní, pojištění úrazové, pojištění storna zájezdu, pojištění zavazadel, pojištění odpovědnosti za škodu nebo pojištění právní ochrany.

## 4. MODELY KOLEKTIVNÍHO RIZIKA

Základním pojmem v pojišťovnictví je pojem riziko, které představuje možnost vzniku pojistné události. Pojistitel, který profesionálně přebírá na sebe velké množství rizik různého charakteru, musí k ohodnocení rizika zaujmout velmi zodpovědný postoj. Riziko pojistitele spočívá v nebezpečí, zda přijaté pojistné bude postačující na vyplacení všech oprávněných pojistných plnění.

Teorie rizika je první oblast v pojistných vědách, ve které se vzhledem na praktický rozvoj zejména neživotního pojištění začali používat pokročilé metody teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky.

Modely kolektivního a individuálního rizika, pokud bychom vůbec nebrali v úvahu jejich mimořádný praktický význam pro krátkodobé pojistné smlouvy, zejména při neživotním, ale i životním pojištění, může sloužit jako ukázka široké aplikace pravděpodobnostně-statistických metod. Jejich základem jsou rozdělení počtu a výšky individuálních pojistných plnění.

V této části se uplatňuje[12]:

- **Centrální limitní věta** – Necht'  $X_1, X_2, \dots, X_n$  jsou nezávislé a identicky rozdělené

náhodné proměnné. Předpokládejme, že  $E(X_i) = \mu$  a  $D(X_i) = \sigma^2$ . Necht'  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ,

potom limitním rozdělením náhodné proměnné  $\bar{X}$  pro  $n \rightarrow \infty$  je normální rozdělení s parametry  $\mu$  a  $\sigma^2/n$ . Symbolicky zapsané

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ pro } n \rightarrow \infty$$

- **Momentová vytvářející funkce** - vlastnosti momentové vytvářející funkce a odvození začátečních a centrálních momentů pomocí této funkce:

- momentová vytvářející funkce náhodné proměnné  $X$ , která má v pojistných vědách mimořádný význam a časté využití, je definována vztahem

$$M_X(z) = E(e^{zX})$$

- vlastnosti momentové vytvářející funkce:

1. Nech  $X$  je libovolná náhodná proměnná s momentovou vytvářející funkcí  $M_X(z)$ . Potom pro libovolné celé kladné číslo  $k$  platí

$$\frac{d^k}{dz^k} M_X(z) = E(X^k) = m_k$$

Pro  $k = 2$  a  $k = 3$  platí vztah

$$\frac{d^k}{dz^k} \ln M_X(z) = E\{[X - E(X)]^k\} = \mu_k$$

2. Pro daný zákon rozdělení pravděpodobnosti existuje jediná momentová vytvářející funkce  $M_X(z)$ , která je tímto zákonem jednoznačně určena.
3. Nech náhodná proměnná  $X$  má momentovou vytvářející funkci  $M_X(z)$ , potom pro momentovou vytvářející funkci náhodné proměnné  $Y$ , která je funkcí náhodné proměnné  $X$ ,  $Y = y(X)$ , platí

$$M_Y(z) = E[e^{zy(X)}]$$

4. Nech  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , jsou nezávislé náhodné proměnné, potom momentová vytvářející funkce jejich součtu se rovná součinu jejich momentových vytvářejících funkcí:

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(z) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(z)$$

- **Konvoluce distribučních funkcí** – předpokládejme, že  $\{X_i\}_{i=1}^n$  jsou nezávislé a identicky rozdělené náhodné proměnné se společnou distribuční funkcí  $F(x)$ , distribuční funkce  $F^{*n}(x)$  jejich součtu  $\sum_{i=1}^n X_i$  nazýváme  $n$ -násobnou konvolucí distribučních funkcí. Teda

$$F^{*n}(x) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x)$$

- **Vlastnosti podmíněných středních hodnot** – následující vztahy, které platí pro libovolné náhodně proměnné  $X, Y$ :

$$E(X) = E[E(X|Y)]$$

$$D(X) = E[D(X|Y)] + D[E(X|Y)]$$

Základem řešení rozhodujících otázek pro pojistitele, související se zajištěním, spoluúčastí, výškou rezerv, pravděpodobnost krachu apod. je znalost základních charakteristik a rozdělení pravděpodobností celkového pojistného plnění  $S$ , tzv. kolektivní model rizika.

Náhodná proměnná  $S$  je definována jako celkové, souhrnné anebo i agregátní pojistné plnění přímého pojistitele za všechny pojistné události za rok. Cílem je nalézt rozdělení pravděpodobnosti a základní charakteristiky náhodné proměnné  $S$ .

#### 4.1 Definice kolektivního rizika

Nechť označíme písmenem  $N$  počet pojistných plnění za celé portfolio pojišťovny v daném období, písmenem  $X_i$  výšku  $i$ -tého pojistného plnění pro  $i = 1, 2, \dots, N$ . Pak

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

představuje celkovou (agregovanou) sumu pojistných plnění, tzv. *kolektivní riziko* pojišťovny po uvažované období, nejčastěji kalendářní rok. Přitom platí:

- $X_1, X_2, \dots, X_N$  jsou nezávislé a identicky rozdělené náhodné proměnné,
- náhodně proměnné  $N, X_1, X_2, \dots, X_N$  jsou vzájemně nezávislé,
- pokud  $N = 0$ , tak i  $S = 0$ .

Prvním krokem při určování rozdělení  $S$  je vyjádření náhodné proměnné  $S$  pomocí náhodné proměnné  $N$  – počtu pojistných plnění za rok a náhodných proměnných  $X_i$  – výšky pojistného plnění při  $i$ -té pojistné události.

Celkový počet pojistných plnění přitom nezávisí od výšky individuálních plnění a výška individuálního plnění není ovlivněna ani počtem, ani výškou ostatních pojistných náhrad. Přitom rozdělení výšky individuálních pojistných plnění se v sledovaném období nemění [12].



## Označení vztahů kolektivního rizika

*Distribuční funkce* náhodné proměnné  $S$  pod označením  $G(x)$ , tj.

$G(x) = P(S \leq x) = F_S(x)$	pro $x \geq 0$
$G(x) = 0$	pro $x < 0$ .

*Společná distribuční funkce* náhodné proměnné  $X_i$  pod označením  $F(x)$ , tj.

$F(x) = P(X_i \leq x)$	pro $i = 1, 2, \dots, N, x \geq 0$
$F(x) = 0$	pro $i = 1, 2, \dots, N, x < 0$

Ve většině případech je splněn předpoklad, že existuje derivace funkce  $F(x)$ , tj. hustota pravděpodobnosti náhodných proměnných  $X_i$ , která se označuje  $f(x)$ . Pro momentové vytvářející funkce proměnných  $S$ ,  $N$  a  $X_i$  se v příslušném pořadí používá označení  $M_S(z)$ ,  $M_N(z)$  a  $M_X(z)$ .

Symbol  $m_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  označuje  $k$ -tý začáteční moment identicky rozdělených individuálních pojistných plnění  $X_i$ , tj.  $m_k = E(X_i^k)$ .

## 4.2 Rozdělení kolektivního rizika

### 4.2.1 Rozdělení $S$ bez specifikace $N$

Nechť  $S$  je celkové pojistné plnění. Cílem je nalézt vyjádření pro distribuční funkci  $G(x)$  celkového plnění  $S$  a nalézt střední hodnotu, rozptyl a momentovou vytvářející funkci rozdělení  $S$ , nejdříve bez specifikace rozdělení počtu pojistných plnění  $N$ .

Distribuční funkce  $G(x)$  se vyjádří jako pravděpodobnost náhodné události  $\{S \leq x\}$ . Je přitom využita skutečnost, že událost  $\{S \leq x\}$  nastává tehdy a jen tehdy, když nastane právě jedna z následujících náhodných událostí [12]:

- $\{S \leq x \wedge N = 0\}$  nenastane žádná pojistná událost.
- $\{S \leq x \wedge N = 1\}$  nastane právě jedna pojistná událost, při které výška pojistných plnění nepřesáhne hodnotu  $x$ .

- $\{S \leq x \wedge N = 2\}$  nastanou právě dvě pojistné události s celkovým pojistným plněním menším nebo rovnajícím se  $x$ .
- $\{S \leq x \wedge N = n\}$  nastane právě  $n$  pojistných událostí, při kterých celkové pojistné plnění nepřesáhne hodnotu  $x$ .

Specifikované události tvoří systém vzájemně se vylučujících náhodných událostí, jejichž sjednocením je právě událost  $\{S \leq x\}$ , tj.

$$\{S \leq x\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S \leq x \wedge N = n\}.$$

Po úpravách vzniká všeobecné vyjádření distribuční funkce  $G(x)$  celkového plnění  $S$  pro libovolné rozdělení počtu pojistných plnění  $N$  a výšky pojistných plnění  $X_i$ :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) F^{*n}(x),$$

kde  $F^{*n}(x)$  je  $n$ -násobná konvolute distribuční funkce  $F(x)$ .

### 4.3 Základní charakteristiky kolektivního rizika $S$

Při aproximaci distribuční funkce  $G(x)$  rozdělní  $S$  je potřeba znát základní momenty kolektivního rizika  $S$  [12].

- a) *Střední hodnota*  $E(S)$  – je součinem průměrného počtu pojistných plnění  $E(N)$  a průměrné výšky individuálního pojistného plnění  $m_1$ .

$$E(S) = E(E(S/N)) = E(m_1) = E(N) m_1$$

- b) *Rozptyl*  $D(S)$  – je zde vyjádřený pomocí známých středních hodnot a rozptylů proměnné  $N$  a proměnných  $X_i$ .

$$D(S) = E(N)(m_2 - m_1^2) + D(N)m_1^2$$

- c) *Momentová vytvářející funkce*  $M_S(z)$

$$M_S(z) = M_N(\ln M_X(z))$$

Tyto tři vztahy jsou mimořádně užitečné v případě, kdy je předpoklad, že proměnné  $N$  a  $X_i$  mají konkrétní rozdělení pravděpodobností.

Rozdělení pravděpodobnosti kolektivního rizika  $S$  je příkladem složeného rozdělení. V další kapitole jsou popsány základní typy složených rozdělení.

## 4.4 Základní typy složených rozdělení

Speciální případy složeného rozdělení v závislosti od rozdělení počtu pojistných plnění  $N$ . Pro praktické použití je nejdůležitější případ, kde  $N$  má Poissonovo rozdělení. V této kapitole však budou rozebrány i případy binomického a negativního binomického rozdělení proměnné  $N$ .

### 4.4.1 Složené Poissonovo rozdělení

Nech  $S$  je celkové pojistné plnění, přičemž  $N$  má Poissonovo rozdělení s parametrem  $\lambda$ , symbolicky  $N \sim \text{Po}(\lambda)$ , a  $F(x)$ , je společná distribuční funkce identicky rozdělených individuálních pojistných plnění  $X_i$ . Pak  $S$  má *složené Poissonovo rozdělení* s parametry  $\lambda$  a  $F(x)$  a označuje se **CoPo**( $\lambda$ ,  $F(x)$ ) (v souladu s označením v anglické literatuře).

V tomto případě platí [12]:

$$E(N) = D(N) = \lambda$$

$$M_N(z) = e^{\lambda(e^z - 1)}$$

Po úpravách těchto vztahů se získají základní charakteristiky složeného rozdělení **CoPo**( $\lambda$ ,  $F(x)$ ) ve tvaru [12]:

$$E(S) = \lambda m_1$$

$$D(S) = \lambda(m_2 - m_1^2) + \lambda m_1^2 = \lambda m_2$$

$$M_S(z) = e^{\lambda[M_x(z) - 1]}$$

Poslední vztah se využije na vyjádření třetího centrálního momentu proměnné  $S$ . Platí [12]:

$$\mu_3(S) = E[(S - E(S))^3] = E[(S - \lambda m_1)^3] = \frac{\partial^3}{\partial z^3} \ln M_S(z) = \frac{\partial^3}{\partial z^3} (\lambda M_X(z) - 1) =$$

$$\lambda \frac{\partial^3}{\partial z^3} M_X(z) = \lambda m_3$$

Dále je vyjádřen koeficient šikmosti  $\gamma_1$  rozdělení  $CoPo(\lambda, F(x))$ :

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3(S)}{[D(S)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda m_3}{(\lambda m_2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Protože  $\lambda > 0$  a  $X_i \geq 0$ , platí i  $\gamma_1 > 0$ . Složené Poissonovo rozdělení je tedy vždy pozitivně zešikmené, dokonce i tehdy, jak je individuální pojistné plnění negativně zešikmené. Pro velké hodnoty parametru  $\lambda$  se rozdělení  $CoPo(\lambda, F(x))$  stává symetričtějším, protože platí, že  $\gamma_1 \rightarrow 0$ , když  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**Základní charakteristiky rozdělení  $CoPo(\lambda, F(x))$  mají velmi jednoduché vyjádření [12]:**

$$E(S) = \lambda m_1$$

$$D(S) = \lambda m_2$$

$$\mu_3(S) = \lambda m_3$$

$$\gamma_1 = \frac{\lambda m_3}{(\lambda m_2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

#### 4.4.2 Složené binomické rozdělení

Toto rozdělení může být vhodným pravděpodobnostním modelem počtu pojistných plnění při některých typech pojištění.

Pokud počet pojistných plnění  $N$  má binomické rozdělení  $Bi(n; \pi)$ , pak celkové pojistné plnění  $S$  má složené binomické rozdělení.

Za předpokladu, že  $N \sim Bi(n; \pi)$  platí tyto vztahy pro základní charakteristiky náhodné proměnné  $N$  [12]:

$$E(N) = n\pi$$

$$D(N) = n\pi(1 - \pi)$$

$$M_N(z) = (\pi e^z + 1 - \pi)^n$$

Tyto vzorce jsou použity na vyjádření základních charakteristik složeného binomického rozdělení[12]:

$$E(S) = n\pi m_1$$

$$D(S) = n\pi(m_2 - m_1^2) + n\pi(1 - \pi)m_1^2 = n\pi m_2 - n\pi^2 m_1^2$$

$$M_S(z) = M_N(\ln M_X(z)) = [\pi M_X(z) + 1 - \pi]^n$$

#### 4.4.3 Složené negativní binomické rozdělení

Reálné situaci v pojišťovnictví často odpovídá to, že rozptyl negativního binomického rozdělení je větší než střední hodnota, proto je rozdělení NB(k;π) při více typech pojištění lepším modelem počtu pojistných plnění  $N$  jako rozdělení Poissonovo.

Pokud počet pojistných plnění  $N$  má negativní binomické rozdělení, pak celkové pojistné plnění  $S$  má složené negativní binomické rozdělení.

Základní charakteristiky tohoto rozdělení jsou[12]:

$$E(S) = \frac{k(1 - \pi)}{\pi} m_1$$

$$D(S) = \frac{k(1 - \pi)}{\pi} (m_2 - m_1^2) + \frac{k(1 - \pi)}{\pi^2} = \frac{k(1 - \pi)}{\pi} m_2 + \frac{k(1 - \pi)^2}{\pi^2} m_1^2$$

$$M_S(z) = \frac{\pi^k}{[1 - (1 - \pi)M_X(z)]^k}$$

## 5. APROXIMACE KOLEKTIVNÍHO MODELU RIZIKA

V následující kapitole jsou vysvětleny numerické metody pro výpočet rozdělení celkové výše škod. V praxi se používají místo analytických vzorců, protože ty by byly pro výpočet neúnosně složité. Pozornost je nejvíce zaměřena na aproximaci pomocí normálního rozdělení a posunutým gama rozdělením, ale zmíněny jsou i další metody, např. Panterova rekurentní formule, aproximace logaritnicko-normálním rozdělením, Gramova-Charlierova aproximace a aproximace NP2.

### 5.1 Aproximace normálním rozdělením

Vše co se ví anebo se může spolehlivě odhadnout o kolektivním riziku  $S$  jsou základní charakteristiky:

- střední hodnota  $E(S) = \mu$
- rozptyl  $D(S) = \sigma^2$

Protože  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  je součtem nezávislých a identicky rozdělených náhodných proměnných, nabízí se podle centrální limitní věty normální aproximace rozdělení  $S$ . Pro libovolné reálné  $s$  tedy platí[12]:

$$G(s) = P(S \leq s) = P\left(\frac{S - \mu}{\sigma} \leq \frac{s - \mu}{\sigma}\right) \sim \Phi\left(\frac{s - \mu}{\sigma}\right)$$

Aproximace  $G(s)$  pomocí distribuční funkce normovaného normálního rozdělení je tím lepší, čím větší je počet  $N$  pojistných plnění.

Výhodou této metody tkví v její jednoduchosti použití. Nevýhodami jsou:

- Bez ohledu na hodnoty  $\mu$  a  $\sigma^2$  při normální aproximaci platí, že  $P(S < 0) > 0$ , na rozdíl od podmínky, že všechna pojistná plnění jsou nezáporná, je zřejmé, že ve skutečnosti  $P(S < 0) = 0$ .
- Hustota normálního rozdělení je symetrická, což znamená, že pravý konec konverguje velmi rychle k nule. Při mnohých typech pojištění je však rozdělení  $S$  pravostranně zešikmené, s pomalým klesáním pravé strany hustoty k ose hodnot  $x$ , tedy s dost vysokou pravděpodobností i extrémních pojistných plnění. Pro tyto

typy pojištění má normální aproximace  $G(s)$  tendenci podhodnocovat hodnoty  $P(S > s)$  pro velké hodnoty  $s$ . Z pohledu pojišťovatele je to velmi nežádoucí skutečností, protože vysoké pojistné plnění má pro něho závažný finanční dosah.

## 5.2 Aproximace posunutým gama rozdělením

Nechť jsou známe či spolehlivě odhadnutelné první tři začáteční momenty celkového pojistného plnění  $S$ , potom v takovém případě můžeme použít posunuté gama rozdělení na aproximaci rozdělení  $S$ . Tímto částečně odstraníme či snížíme podhodnocení pravděpodobností vysokých pojistných plnění (v porovnání s normální aproximací  $S$ ).

Aproximace posunutým gama rozdělením dává lepší výsledky na rozdíl od aproximace normálním rozdělením  $S$ , je to způsobeno koeficientem šikmosti  $\gamma = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} > 0$ .

Nechť  $S$  má přibližně stejné rozdělení pravděpodobnosti jako náhodná proměnná  $k + Y$ , kde  $k$  je konstanta a  $Y$  má gama rozdělení s parametry  $\alpha, \beta$ :

$$Y \sim G(\alpha; \beta)$$

Dané parametry  $k, \alpha$  a  $\beta$  se určí za předpokladu, že náhodná proměnná  $k + Y$  má první tři momenty shodné s adekvátními momenty  $S$ , které jsou známe. Získává se tím systém tří rovnic s neznámými  $k, \alpha$  a  $\beta$  [12]:

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

$$\mu = k + \frac{\alpha}{\beta}$$

Protože hodnoty  $\mu, \sigma^2$  a  $\gamma$  jsou podle předpokladu známe, postupně se vypočítají neznámé parametry [12]:

$$\alpha = \frac{4}{\gamma^2}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha}{\sigma^2}}$$

$$k = E(S) - \frac{\alpha}{\beta}$$

Výhodou je jednodušší určení pravděpodobnosti  $P(a < k+Y < b)$  oproti pravděpodobnosti  $P(a < S < b)$ .

### 5.3 Další možnosti aproximace kolektivního rizika

#### 5.3.1 Panjerova rekurentní formule

Použitelná v případě, kdy náhodná veličina  $X$ , která označuje výši škod, nabývá pouze přirozených hodnot [5]:

Označení:

$$P(X = k) = x(k), \quad k \in N$$

$$P(S = j) = s(j), \quad j \in N_0$$

$$s(j+1) = \frac{\lambda}{j+1} * \sum_{i=0}^j s(j-i) * x(i+1) * (i+1), \quad j \in N_0; \quad z(0) = e^{-\lambda}$$

Rozdělení  $S$  při  $N \sim P(\lambda)$ .

$$s(j+1) = \frac{1}{j+1} * \sum_{i=0}^j z(j-i) * x(i+1) * (1-p) * ((j-i) + r * (i+1)), \quad j \in N_0; \quad Z(0) = p^r$$

Rozdělení  $S$  při  $N \sim NB(r,p)$ .

#### 5.3.2 Aproximace logaritmicko-normálním rozdělením

Tato aproximace vzhledem ke své asymetrii bere v úvahu šikmosti pravděpodobnostního rozdělení  $S$  (používá se logaritmicko-normální rozdělení posunuté o vhodnou konstantu)[5]:

$$P\left(\frac{S - \mu}{\sigma} \leq x\right) \approx \Phi\left(\frac{b}{2} + \frac{1}{b} \ln\left(x * \sqrt{\exp(b^2) - 1} + 1\right)\right),$$

$$\text{kde } b = \sqrt{\ln q}; \quad q = \sqrt[3]{d + \sqrt{d^{2-1}}} + \sqrt[3]{d - \sqrt{-1}} - 1; \quad d = 1 + \frac{\gamma^2}{2}$$



### 5.3.3 Gramova-Charlierova aproximace

Tato aproximace je založena na rozvoji hustoty pravděpodobnosti pro  $\underline{S}$  pomocí ortogonálních polynomů [5]:

$$P\left(\frac{S - \mu}{\sigma} \leq x\right) \approx \Phi(x) - \frac{\gamma_1}{6} \Phi^{(3)}(x) + \frac{\gamma_2 - 3}{24} \Phi^{(4)}(x).$$

### 5.3.4 Aproximace NP2

Mocninná aproximace normálním rozdělením, která zohledňuje šikmost pravděpodobnostního rozdělení  $S$ , v praxi patří k nejpoužívanějším [5]:

$$P\left(\frac{S - \mu}{\sigma} \leq x + \frac{\gamma_1}{6}(x^2 - 1)\right) \approx \Phi(x).$$

## 6. Aplikace metod aproximace kolektivního modelu rizika

V předchozích kapitolách byly uvedeny možnosti aproximace kolektivního modelu rizika  $S$ . Prvním krokem při této aproximaci je výběr nejvhodnějšího rozdělení počtu a výšky pojistných plnění. Všeobecný postup lze zahrnout do třech kroků:

1. Navrhnutí předpokládaného typu rozdělení pravděpodobnosti, např. na základě grafického zobrazení rozdělení početností dostupných empirických údajů.
2. Odhadnutí parametrů předpokládaného rozdělení pomocí metody maximální věrohodnosti a metody momentů.
3. Ověření vhodnosti vybraného rozdělení s odhadnutými parametry na základě výběrových údajů.

Odhady parametrů rozdělení a ověření vhodnosti vybraného rozdělení s odhadnutými parametry byla aplikována v programu Microsoft Excel a systému STATGRAPHICS Centurion XV. Postup a výsledky jsou popsány v této kapitole.

V programu Excel byla následně na základě těchto odhadů a ověření vhodnosti rozdělení  $N$  a  $X$  aplikována aproximace rozdělení kolektivního rizika  $S$  normálním rozdělením a posunutým gama rozdělením. Postup a získané výsledky jsou obsaženy v kapitole 7.

### 6.1 Odhady parametrů rozdělení

Pro odhad parametrů se využívá metoda maximální věrohodnosti a metoda momentů.

#### 6.1.1 Metoda maximální věrohodnosti

Tuto metodu je možné aplikovat ve velmi rozmanitých situacích. Odhady, které se získají pomocí této metody, mají velmi dobré vlastnosti v porovnání s jinými metodami.

Nechť  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  je vektor  $n$  nezávislých výběrových pozorování ze základního souboru s rozdělením  $f(x; \Theta)$ , přičemž  $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p)$  je vektor  $p$  neznámých parametrů.

*Funkce věrohodnosti*  $L(\Theta, x)$  je definována vztahem [12]:

$$L(\Theta; x) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \Theta).$$

Pro jeho přirozený logaritmus platí:

$$l(\Theta; x) = \ln L(\Theta; x) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \Theta).$$

Maximálně věrohodný odhad  $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(x)$  je takový vektor  $\Theta$ , který maximalizuje  $L(\Theta; x)$ , resp.  $l(\Theta; x)$ . Má tyto vlastnosti:

- $\hat{\Theta}$  má asymptoticky normální rozdělení,
- $\hat{\Theta}$  je asymptoticky nekreslený,
- $\hat{\Theta}$  je asymptoticky vydatný,
- $\hat{\Theta}$  je konzistentní,
- $\hat{\Theta}$  je invariantní, tj.  $\hat{\gamma}(\hat{\Theta}) = \gamma(\hat{\Theta})$ , přičemž  $\gamma(\Theta)$  je libovolná funkce odhadovaných parametrů.

Vlastnost invariantnosti znamená, že pokud je  $\hat{\Theta}$  maximálně věrohodný odhad vektoru parametru  $\Theta$ , potom  $\hat{\gamma}(\hat{\Theta})$  je maximálně věrohodný odhad libovolné funkce  $\gamma(\Theta)$  [12].

### 6.1.2 Metoda momentů

Tato metoda patří mezi nejstarší a nejčastěji používané metody bodových odhadů. Používá se v případech, kdy jsou jiné metody odhadu numericky náročnější. Získané výsledky nemají všeobecně vlastnosti dobrých odhadů, což je nevýhodou této metody.

Princip metody momentů spočívá v tom, že momenty základního souboru odhadujeme odpovídajícími výběrovými momenty. To znamená například, že střední hodnota  $E(X)$  náhodné veličiny  $X$  je její první počáteční moment, který bude odhadován odpovídajícím prvním výběrovým počátečním momentem  $m_1$ . Tento první výběrový počáteční moment se nazývá aritmetický průměr a označuje se  $\bar{X}$ . Střední hodnotu  $E(X)$  základního souboru odhadujeme tedy aritmetickým průměrem  $\bar{X}$ .

Dá se jednoduše dokázat, že aritmetický průměr  $\bar{X}$  je konzistentním, nevychýleným a efektivním odhadem střední hodnoty základního souboru.

Podobně disperzi  $D(X)$ , která je druhým centrálním momentem rozdělení  $X$ , odhadujeme druhým centrálním výběrovým momentem  $M_2$ , který výběrová disperze (rozptyl). Dá se dokázat, že  $M_2$  je konzistentním a efektivním odhadem  $D(X)$ , není však nevychýleným odhadem, to znamená, že neplatí rovnost  $E(M_2) = D(X)$ . Platí, že  $E(M_2) = \frac{n-1}{n} D(X)$ , tj. střední hodnota výběrové disperze se nerovná disperzi základního souboru.

Aby byl nalezen nevychýlený odhad  $D(X)$ , musí se výraz pro střední hodnotu  $E(M_2)$  vynásobit  $\frac{n}{n-1}$ . Po úpravách se získá  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ . Tento vztah nazýváme výběrový rozptyl (disperze) a je to nevychýlený odhad disperze, který je též konzistentní, ale ne efektivním odhadem  $D(X)$ . [11].

## 6.2 Ověření vhodnosti vybraného rozdělení s odhadnutými parametry

Tento krok se realizuje pomocí testů dobré shody. Používá se Pearsonův  $\chi^2$ -test dobré shody, který vyžaduje dostatečně velký rozsah výběrového souboru a Kolmogorov-Smirnov test, který má vyšší sílu testu (tj. vyšší pravděpodobnost zamítnutí hypotézy o předpokládaném typu rozdělení, pokud vybraný typ rozdělení skutečně není dobrý), než  $\chi^2$ -test.

### 6.2.1 Pearsonův $\chi^2$ -test dobré shody

$\chi^2$ -test dobré shody slouží k ověření shody empirického rozdělení, tj. rozdělení početností výběrových údajů, s předpokládaným teoretickým rozdělením s hustotou pravděpodobnosti  $f(x; \Theta)$ , kde  $\Theta$  je vektor parametrů nejčastěji odhadnutých z výběrového souboru. Jde o přijetí, resp. zamítnutí tzv. nulové hypotézy na hladině významnosti  $\alpha$ :

**$H_0$ : náhodná proměnná  $X$  má rozdělení s hustotou  $f(x; \Theta)$ .**

Východiskem pro test hypotézy  $H_0$  jsou empirické údaje  $x_1, x_2, \dots, x_n$  náhodné proměnné  $X$ , zjištěné ve výběrovém souboru a roztríděné do  $k$  skupin s četnostmi  $O_1, O_2, \dots, O_k$ . Pro test se využívá testovací charakteristika  $\chi^2$  vyjádřená vztahem:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

- Přitom  $\chi^2$ -rozdělení má počet stupňů volnosti  $k - 1 - p$ , přičemž  $p$  je počet odhadnutých parametrů předpokládaného teoretického rozdělení s hustotou  $f(x; \Theta)$ ,  $O_i$  jsou empirické, skutečně zjištěné četnosti hodnot  $x_i$  diskrétní proměnné anebo intervalu  $(x_{i-1}, x_i)$  hodnot  $x$  spojité proměnné  $X$  a  $E$  jsou příslušné teoretické, očekávané četnosti, vyjádřené vztahem:

$$E_i = np_i.$$

- $n$  je rozsah výběrového souboru a  $p_i$  je pravděpodobnost hodnoty  $x_i$  diskrétní proměnné s předpokládaným rozdělením, tedy:

$$p_i = P(x_i) = P(X = x_i),$$

resp. pravděpodobnost intervalu hodnot  $x \in (x_{i-1}; x_i)$  spojité proměnné, tj.

$$p_i = P(x_{i-1} < X \leq x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}),$$

kde  $F(x)$  je distribuční funkce předpokládaného teoretického rozdělení.

Pokud charakteristika  $\chi^2$  nabývá hodnoty blízké nule, naznačuje to platnost nulové hypotézy, protože hodnoty  $O_i$  a  $E_i$  se od sebe málo liší. Vysoké hodnoty naopak signalizují platnost alternativní hypotézy.

Nulová hypotéza  $H_0$  se přijímá na hladině významnosti  $\alpha$  tehdy, když vypočítaná hodnota testovací charakteristiky  $\chi^2$  nepřekročí hodnotu percentilu  $\chi^2_{1-\alpha}$  rozdělení  $\chi^2$  s  $k - 1 - p$  stupni volnosti. Nulová hypotéza se přijímá pokud platí:

$$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$$

Nejčastěji se při testu užívá hladina významnosti  $1 - \alpha = 0,95$ , pak  $\chi^2_{1-\alpha} = \chi^2_{0,95}$  je 95. percentil  $\chi^2$ -rozdělení s  $k - 1 - p$  stupni volnosti [12].

## 6.2.2 Kolmogorov-Smirnovův test

V případě, kdy náhodný výběr  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pochází ze spojitého rozdělení, specifikovaného distribuční funkcí  $F(x)$  a rozsah  $n$  výběrového souboru není postačující na použití  $\chi^2$ -testu, potom pro test hypotézy

**$H_0$ : náhodná proměnná  $X$  má rozdělení s distribuční funkcí  $F(x)$**

můžeme použít Kolmogorov-Smirnovův test dobré shody. Tento test na rozdíl od  $\chi^2$ -testu vychází z netříděných, vzestupně uspořádaných výběrových údajů  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ .

Tomuto uspořádanému náhodnému výběru přísluší výběrová (empirická) distribuční funkce, která je definovaná vztahem:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_{(1)} \\ \frac{j}{n} & x_{(j)} < x \leq x_{(j+1)} \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1 & x > x_{(n)} \end{cases}$$

Hodnota empirické distribuční funkce  $F_n(x)$  je pro dané  $x$  náhodnou proměnnou, která může mít hodnoty  $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$ , přičemž hodnotu  $\frac{j}{n}$  má právě tehdy, když  $j$  výběrových údajů je menší než hodnota  $x$  a současně  $n - j$  výběrových údajů se aspoň rovná hodnotě  $x$ .

Kolmogorov-Smirnovova testovací charakteristika je definována vztahem:

$$d_n = \sup |F_n(x) - F(x)|,$$

kde  $d_n$  je maximální absolutní odchylka výběrové (empirické) distribuční funkce  $F_n(x)$  od spojitě distribuční funkce  $F(x)$ , kterou předpokládá nulová hypotéza. Empirická distribuční funkce  $F_n(x)$  je nespojitá a její grafickým obrazem je schodovitá funkce s body nespojitosti  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ . Znamená to, že maximální absolutní odchylka  $|F_n(x) - F(x)|$  může

představovat buď vzdálenost křivky  $F(x)$  od paty nebo od vrcholu schodu. Při určování hodnoty testovacího kritéria  $d_n$  se zkoumají v bodech  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$  absolutní odchylky:

$$|F_n(x) - F(x)| \quad \text{a} \quad |F_n(x_{(j+1)}) - F(x_{(j)})|$$

pro  $j = 1, 2, \dots, n$ , přičemž  $F_n(x_{(n+1)}) = 1$ .

Největší z těchto odchylek se považují za hodnotu testovacího kritéria  $d_n$ .

Zda-li je podle předpokladu funkce  $F(x)$  spojitá, je možné nalézt rozdělení statistiky  $d_n$ , které nezávisí od  $F(x)$ . Ve statistických tabulkách pro Kolmogorov-Smirnovův test jsou uvedené kvantily  $d_{n;0,95}$  a  $d_{n;0,99}$  pro rozsah výběru  $n = 1, 2, \dots, 100$ , které při testu hypotézy slouží jako kritické hodnoty. V případě výběrových souborů s rozsahem  $n > 100$  je možné využít asymptotické rozdělení náhodně proměnné  $d_n$ , odvozené Kolmogorovem. V takovém případě se přibližné kritické hodnoty  $d_{n;0,95}$  a  $d_{n;0,99}$  určí podle vztahu:

$$d_{n;0,95} \approx \frac{1,358}{\sqrt{n}} \quad \text{a} \quad d_{n;0,99} \approx \frac{1,628}{\sqrt{n}}.$$

Hypotézu, že náhodný výběr pochází z rozdělení s distribuční funkcí  $F(x)$  přijmeme tehdy, když platí že  $d_n < d_{n;1-\alpha}$ , přičemž  $\alpha = 0,05$ , resp.  $\alpha = 0,01$  je hladina významnosti[12].

### 6.3 Praktická ukázka odhadu parametrů a ověření vhodnosti rozdělení v programu Excel

Pro odhady parametrů a testy dobré shody byl použit program Microsoft Excel. Bylo použito 120 pojistných plnění z portfolia pojistek. Dané údaje jsou vyjádřeny v 1 000 PJ (peněžní jednotky). Jednotlivé pojistné plnění zobrazuje následující tabulka 1.

**Tabulka 1: Pojistné plnění z portfolia pojistek v 1000 PJ [1]**

3	11	27	36	47	49	54	77	78	85
104	121	130	138	139	140	143	153	193	195
205	207	216	224	233	237	254	257	259	265
273	275	278	281	396	405	412	423	436	456
473	475	503	510	534	565	656	656	716	734
743	756	784	786	819	826	841	842	853	860
877	942	942	945	998	1029	1066	1101	1128	1167
1194	1209	1223	1283	1288	1296	1210	1320	1367	1369
1373	1382	1383	1395	1436	1470	1512	1607	1699	1720
1772	1780	1858	1922	2042	2247	2348	2377	2418	2795
2964	3156	3858	3872	4084	4620	4901	5021	5331	5771
6240	6385	089	7482	8059	8079	8316	11453	22274	32043

#### 6.3.1 Odhady parametrů

Při hledání vhodného pravděpodobnostního modelu počtu, resp. výšky pojistných plnění je určení parametrů prvním závažným problémem v konkrétních praktických situacích. Jak již bylo řečeno, byly použity dvě metody: metoda maximální věrohodnosti a metoda momentů.

Pro údaje z tabulky 1 byly provedeny tyto odhady parametrů:

##### 1. Odhad parametrů $\mu, \sigma^2$ lognormálního rozdělení:

Proměnná  $X$  má lognormální rozdělení  $LN(\mu, \sigma^2)$ , když  $\ln(X)$  má normální rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$ .



Lognormální rozdělení je kladně zešikmené rozdělení, při kterém velmi malé hodnoty sledované náhodné proměnné mají malou pravděpodobnost, středně velké jsou nejpravděpodobnější a vysoké se stávají méně pravděpodobné. Toto rozdělení má široké využití v ekonomické oblasti a je vhodné pro modelování výšky pojistných plnění např. v havarijním pojištění, v požárním pojištění budov a pojištění proti vichřicím.

a) metoda maximální věrohodnosti:

Na následujícím obrázku 1 je znázorněn postup výpočtu. Nejdříve byla vypočítána hodnota  $\ln(x)$  z původních dat (viz tabulka č. 1).

x	ln x	x^2
3	1,09861	9
11	2,39790	121
27	3,29584	729
36	3,58352	1296
47	3,85015	2209
49	3,89182	2401
54	3,98998	2916
77	4,34381	5929
78	4,35671	6084
85	4,44265	7225
104	4,64439	10816
121	4,79579	14641
130	4,86753	16900
138	4,92725	19044
139	4,93447	19321
140	4,94164	19600
143	4,96284	20449
153	5,03044	23409
193	5,26269	37249
195	5,27300	38025
205	5,32301	42025
207	5,33272	42849
216	5,37528	46656
224	5,41165	50176
233	5,45104	54289
237	5,46806	56169
254	5,53733	64516
257	5,54908	66049
259	5,55683	67081
265	5,57973	70225
273	5,60947	74529
275	5,61672	75625
278	5,62762	77284
281	5,63835	78961
396	5,98141	156816
405	6,00389	164025
412	6,02102	169744
423	6,04737	178929
436	6,07764	190096
456	6,12249	209336

a) metoda maximální věrohodnosti		
$\mu$	6,62417212	
$\sigma^2$	2,30305668	
$\sigma$	1,51758251	

Kolmogorův-Smirnov test						
j	x	F(x)	F120(xj)	F120(xj+1)	ABS1	ABS
1	3	0,00014	0,00000	0,00833	0,00014	0,00833
2	11	0,00268	0,00833	0,01667	0,00566	0,01300
3	27	0,01415	0,01667	0,02500	0,00252	0,01008
4	36	0,02256	0,02500	0,03333	0,00244	0,01000
5	47	0,03378	0,03333	0,04167	0,00045	0,00778
6	49	0,03589	0,04167	0,05000	0,00577	0,01400
7	54	0,04124	0,05000	0,05833	0,00876	0,01700
8	77	0,06647	0,05833	0,06667	0,00813	0,00800
9	78	0,06757	0,06667	0,07500	0,00090	0,00700
10	85	0,07529	0,07500	0,08333	0,00029	0,00800
11	104	0,09602	0,08333	0,09167	0,01269	0,00400
12	121	0,11414	0,09167	0,10000	0,02247	0,01400
13	130	0,12353	0,10000	0,10833	0,02353	0,01500
14	138	0,13175	0,10833	0,11667	0,02341	0,01500
15	139	0,13277	0,11667	0,12500	0,01610	0,00700
16	140	0,13378	0,12500	0,13333	0,00878	0,00800
17	143	0,13682	0,13333	0,14167	0,00349	0,00400
18	153	0,14682	0,14167	0,15000	0,00515	0,00300
19	193	0,18482	0,15000	0,15833	0,03482	0,02600
20	195	0,18664	0,15833	0,16667	0,02831	0,01900
21	205	0,19561	0,16667	0,17500	0,02895	0,02000
22	207	0,19739	0,17500	0,18333	0,02239	0,01400
23	216	0,20527	0,18333	0,19167	0,02194	0,01300
24	224	0,21215	0,19167	0,20000	0,02048	0,01200
25	233	0,21975	0,20000	0,20833	0,01975	0,01100
26	237	0,22309	0,20833	0,21667	0,01475	0,00600
27	254	0,23695	0,21667	0,22500	0,02028	0,01100
28	257	0,23934	0,22500	0,23333	0,01434	0,00600
29	259	0,24093	0,23333	0,24167	0,00760	0,00400
30	265	0,24655	0,24167	0,25000	0,00399	0,00400
31	273	0,25187	0,25000	0,25833	0,00187	0,00600
32	275	0,25340	0,25833	0,26667	0,00493	0,01300
33	278	0,25570	0,26667	0,27500	0,01097	0,01900
34	281	0,25798	0,27500	0,28333	0,01702	0,02500
35	396	0,33695	0,28333	0,29167	0,05262	0,04400
36	405	0,34137	0,29167	0,30000	0,04970	0,04100
37	412	0,34552	0,30000	0,30833	0,04552	0,03700
38	423	0,35194	0,30833	0,31667	0,04361	0,03500
39	436	0,35937	0,31667	0,32500	0,04271	0,03400
40	456	0,37048	0,32500	0,33333	0,04548	0,03700

Obrázek 1: Odhad parametrů lognormálního rozdělení (Zdroj: vlastní)

Odhady parametru:

- pomocí funkce PRŮMĚR z hodnot  $\ln(x)$  byl odhadnut parametr  $\mu$ ,
- pomocí funkce VAR.VÝBĚR z hodnot  $\ln(x)$  byl odhadnut parametr  $\sigma^2$ .

Následující tabulka obsahuje přehled hodnot odhadnutých parametrů:

**Tabulka 2: Odhad parametrů lognormálního rozdělení metodou maximální věrohodnosti**

(Zdroj: vlastní)

$\mu$	6,62417
$\sigma^2$	2,30306

b) metoda momentů

Pro odhad parametrů metodou momentů je potřeba nejdříve vypočítat  $E(X)$  a  $E(X^2)$ . V programu Microsoft Excel byla hodnota  $E(X)$  vypočítána pomocí funkce PRŮMĚR z původních hodnot (viz tabulka 1). Pro hodnotu  $E(X^2)$  byla použita také funkce PRŮMĚR z hodnot  $X^2$ . Následující tabulka 3 obsahuje odhady hodnot  $E(X)$  a  $E(X^2)$ .

**Tabulka 3: Hodnoty odhadů  $E(X)$  a  $E(X^2)$  (Zdroj: vlastní)**

$E(X)$	2 020,29167
$E(X^2)$	19 552 940,14167

Dále byl pomocí vypočítán první a druhý moment počátečný moment empirických hodnot  $x$  (označení  $m_1$  a  $m_2$ ). Pro odhad parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$  platí tyto vztahy:

$$\text{est}\mu = 2 \cdot \ln(m_1) - \frac{\ln(m_2)}{2} \quad \text{a} \quad \text{est}\sigma^2 = \ln(m_2) - 2 \cdot \ln(m_1).$$

Tabulka č. 4 obsahuje odhady parametrů:

**Tabulka 4: Odhad parametrů lognormálního rozdělení metodou momentů (Zdroj: vlastní)**

$\mu$	6,82768
$\sigma^2$	1,56664

Porovnání odhadu parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$  metodou maximální věrohodnosti a metodou momentů znázorňuje tabulka č. 5:

**Tabulka 5: Porovnání odhadu parametrů lognormálního rozdělení obou metod (Zdroj: vlastní)**

<b>Odhadovaný parametr</b>	<b>Metoda maximální věrohodnosti</b>	<b>Metoda momentů</b>
<b><math>\mu</math></b>	<b>6,62417</b>	<b>6,82768</b>
<b><math>\sigma^2</math></b>	<b>2,30306</b>	<b>1,56664</b>

## 2. Odhad parametrů $\alpha, \beta$ gama rozdělení

Proměnná  $X$  má gama rozdělení s parametry  $\alpha, \beta$  právě tehdy, když její hustota pravděpodobnosti má funkční vyjádření  $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$  pro  $x > 0$ .

Gama rozdělení  $G(\alpha; \beta)$  je flexibilnější (v porovnání s exponenciálním rozdělením) parametrický model rozdělení pojistných plnění. Nevýhodou gama rozdělení je, že neodhaduje přesně pravděpodobnost příliš vysokých pojistných plnění. Toto rozdělení je vhodné např. na modelování výšky pojistných plnění při pojištění motorových vozidel, kde variabilita výšky pojistných škod není tak velká jako např. v majetkovém pojištění proti požáru.

Pro odhad parametrů  $\alpha, \beta$  bylo zapotřebí nejdříve vypočítat hodnoty  $s^2$  a  $\bar{x}$ . Pro  $s^2$  byla použita funkce VAR.VÝBĚR z výběrových hodnot  $x$  (viz tabulka č. 1) a pro  $\bar{x}$  byla použita funkce PRŮMĚR ze stejných hodnot. Získané hodnoty těchto výběrových charakteristik jsou uvedeny v tabulce 6:

**Tabulka 6: Hodnoty  $s^2$  a  $\bar{x}$  (Zdroj: vlastní)**

$s^2$	<b>15 601 373,16632</b>
$\bar{x}$	<b>2 020,29167</b>

Pro odhad parametrů  $\alpha, \beta$  platí tyto vztahy:

$$est\alpha = \frac{\bar{x}^2}{s^2} \quad a \quad est\beta = \frac{\bar{x}}{s^2}.$$

Podle uvedených vztahů byly získány odhady parametrů, které jsou uvedeny v tabulce 7.

Tabulka 7: Odhad parametrů gama rozdělení (Zdroj: vlastní)

$\alpha$	0,26162
$\beta$	0,00013

### 3. Odhad parametrů $\alpha, \lambda$ Paterova rozdělení

Proměnná  $X$  má Paretovo rozdělení  $Pa(\alpha; \lambda)$  právě tehdy, když funkční vyjádření její hustoty pravděpodobnosti má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} & \text{pro } x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}$$

Toto rozdělení se používá jako rozdělení pojistných plnění zejména při existenci extrémních hodnot, např. v nemocenském pojištění a v pojištění proti požáru.

Odhady parametrů  $\alpha, \lambda$  pomocí programu Microsoft Excel znázorňuje obrázek 2:

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data for the method of moments:

n	x	ln(1+x/λ)	1/(1+x/λ)	x/λ	D'E
277	3	1,00087	0,00087	0,00087	0,0000003
278	11	1,00319	0,00319	0,00319	0,0000009
279	27	1,00782	0,00779	0,00782	0,0000022
280	36	1,01043	0,01037	0,01043	0,0000030
281	47	1,01362	0,01352	0,01362	0,0000039
282	54	1,01420	0,01410	0,01420	0,0000041
283	77	1,01564	0,01552	0,01564	0,0000045
284	99	1,02231	0,02230	0,02231	0,0000063
285	104	1,02260	0,02234	0,02260	0,0000064
286	104	1,02462	0,02433	0,02462	0,0000070
287	121	1,03013	0,02968	0,03013	0,0000095
288	121	1,03505	0,03445	0,03505	0,0000098
289	130	1,03766	0,03697	0,03766	0,0000105
290	138	1,03996	0,03920	0,03996	0,0000111
291	139	1,04027	0,03948	0,04027	0,0000112
292	140	1,04056	0,03976	0,04056	0,0000113
293	143	1,04143	0,04059	0,04143	0,0000115
294	153	1,04432	0,04337	0,04432	0,0000123
295	193	1,05891	0,05440	0,05891	0,0000153
296	195	1,05895	0,05495	0,05895	0,0000155
297	205	1,05939	0,05769	0,05939	0,0000162
298	207	1,05987	0,05824	0,05987	0,0000164
299	216	1,06257	0,06089	0,06257	0,0000171
300	224	1,06489	0,06287	0,06489	0,0000177
301	233	1,06750	0,06532	0,06750	0,0000183
302	237	1,06866	0,06640	0,06866	0,0000186
303	254	1,07369	0,07100	0,07369	0,0000199
304	257	1,07445	0,07181	0,07445	0,0000201
305	259	1,07503	0,07235	0,07503	0,0000202
306	265	1,07677	0,07386	0,07677	0,0000207
307	273	1,07909	0,07611	0,07909	0,0000212
308	275	1,07967	0,07665	0,07967	0,0000214
309	278	1,08054	0,07746	0,08054	0,0000216
310	281	1,08140	0,07826	0,08140	0,0000218
311	322	1,11472	0,10880	0,11472	0,0000298

The Kolmogorov-Smirnov test table shows the following data:

k	s	F(s)	F120(s)	F120(s+1)	ABS1
1	3	0,00235	0,00000	0,00833	0,00235
2	11	0,00858	0,00833	0,01667	0,00025
3	27	0,02088	0,01667	0,02500	0,00422
4	36	0,02771	0,02500	0,03333	0,00271
5	47	0,03597	0,03333	0,04167	0,00263
6	49	0,03746	0,04167	0,05000	0,00421
7	54	0,04117	0,05000	0,05833	0,00883
8	77	0,05801	0,05833	0,06667	0,00033
9	78	0,05873	0,06667	0,07500	0,00794
10	85	0,06377	0,07500	0,08333	0,01123
11	104	0,07725	0,08333	0,09167	0,00608
12	121	0,08910	0,09167	0,10000	0,00257
13	130	0,09529	0,10000	0,10833	0,00472
14	138	0,10073	0,10833	0,11667	0,00760
15	139	0,10141	0,11667	0,12500	0,01525
16	140	0,10209	0,12500	0,13333	0,02291
17	143	0,10412	0,13333	0,14167	0,02922
18	153	0,11083	0,14167	0,15000	0,03083
19	193	0,13702	0,15000	0,15833	0,01298
20	195	0,13830	0,15833	0,16667	0,02004
21	205	0,14467	0,16667	0,17500	0,02200
22	207	0,14593	0,17500	0,18333	0,02807
23	216	0,15180	0,18333	0,19167	0,03174
24	224	0,15659	0,19167	0,20000	0,03608
25	233	0,16216	0,20000	0,20833	0,03784
26	237	0,16461	0,20833	0,21667	0,04372
27	254	0,17495	0,21667	0,22500	0,04171
28	257	0,17676	0,22500	0,23333	0,04624
29	259	0,17796	0,23333	0,24167	0,05537
30	265	0,18155	0,24167	0,25000	0,06012
31	273	0,18630	0,25000	0,25833	0,06370
32	275	0,18748	0,25833	0,26667	0,07085
33	278	0,18925	0,26667	0,27500	0,07741
34	281	0,19102	0,27500	0,28333	0,08396
35	322	0,25484	0,28333	0,29167	0,02849

Obrázek 2: Postup odhadu parametrů Paretova rozdělení metodou momentů (Zdroj: vlastní)

**a. metoda maximální věrohodnosti**

Z vyjádření  $f(x; \alpha, \lambda)$  se dostane funkci věrohodnosti ve tvaru

$$L(\alpha, \lambda; x) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + x_i)^{\alpha+1}}$$

a po zlogaritmování

$$l(\alpha, \lambda; x) = \sum_{i=1}^n [\ln \alpha + \alpha \ln \lambda - (\alpha + 1) \ln(\lambda + x_i)] = n \ln \alpha + n \alpha \ln \lambda - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \ln(\lambda + x_i).$$

Z parciální derivaci  $l(\alpha, \lambda; x)$  podle  $\alpha$ , označení  $\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln(\lambda + x_i)$ . řešením

rovnice  $\frac{\partial l}{\partial \alpha} = 0$  dostaneme maximálně věrohodný odhad  $\hat{\alpha}$ :

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right)}$$

Podobně z derivace podle  $\lambda$ , označení  $\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{n\alpha}{\lambda} - (\alpha + 1) * \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda + x_i}$  řešením rovnice

$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = 0$  získáme další vyjádření pro odhad  $\hat{\alpha}$ :

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda + x_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\lambda(\lambda + x_i)}}.$$

Z toho vyplývá, že jsou dvě možnosti vyjádření pro maximálně věrohodný odhad  $\hat{\alpha}$ . Z jejich rovnosti dostaneme funkci druhého parametru  $\lambda$ :

$$f(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda + x_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\lambda(\lambda + x_i)}} - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right)}.$$

Řešením nelineární rovnice  $f(\hat{\lambda})=0$  se získá maximálně věrohodný odhad  $\hat{\lambda}$ .

Dosazením řešení  $\hat{\lambda}$  nelineární rovnice se dostane maximálně věrohodný odhad  $\hat{\alpha}$ .

x	1+x/λ	ln(1+x/λ)	1/(λ+x)	x/λ	D*E
3	1,00087	0,00087	0,00029	0,00087	0,0000003
11	1,00319	0,00318	0,00029	0,00319	0,0000009
27	1,00782	0,00779	0,00029	0,00782	0,0000022
36	1,01043	0,01037	0,00029	0,01043	0,0000030
47	1,01362	0,01352	0,00029	0,01362	0,0000039
49	1,01420	0,01410	0,00029	0,01420	0,0000041
54	1,01564	0,01552	0,00029	0,01564	0,0000045
77	1,02231	0,02206	0,00028	0,02231	0,0000063
78	1,02260	0,02234	0,00028	0,02260	0,0000064
85	1,02462	0,02433	0,00028	0,02462	0,0000070
104	1,03013	0,02968	0,00028	0,03013	0,0000085
121	1,03505	0,03445	0,00028	0,03505	0,0000098
130	1,03766	0,03697	0,00028	0,03766	0,0000105
138	1,03998	0,03920	0,00028	0,03998	0,0000111
139	1,04027	0,03948	0,00028	0,04027	0,0000112
140	1,04056	0,03976	0,00028	0,04056	0,0000113
143	1,04143	0,04059	0,00028	0,04143	0,0000115
153	1,04432	0,04337	0,00028	0,04432	0,0000123

Obrázek 3: Výpočtová tabulka – začátek (Zdroj: vlastní)

2795	1,80970	0,59316	0,00016	0,80970	0,0001296
2964	1,85865	0,61985	0,00016	0,85865	0,0001338
3156	1,91428	0,64934	0,00015	0,91428	0,0001384
3858	2,11764	0,75030	0,00014	1,11764	0,0001529
3872	2,12170	0,75222	0,00014	1,12170	0,0001532
4084	2,18311	0,78075	0,00013	1,18311	0,0001570
4620	2,33839	0,84946	0,00012	1,33839	0,0001658
4901	2,41979	0,88368	0,00012	1,41979	0,0001700
5021	2,45456	0,89795	0,00012	1,45456	0,0001717
5331	2,54436	0,93388	0,00011	1,54436	0,0001758
5771	2,67183	0,98276	0,00011	1,67183	0,0001813
6240	2,80769	1,03236	0,00010	1,80769	0,0001865
6385	2,84970	1,04721	0,00010	1,84970	0,0001880
7089	3,05365	1,11634	0,00009	2,05365	0,0001948
7482	3,16750	1,15294	0,00009	2,16750	0,0001982
8059	3,33465	1,20437	0,00009	2,33465	0,0002028
8079	3,34044	1,20610	0,00009	2,34044	0,0002030
8316	3,40910	1,22645	0,00008	2,40910	0,0002047
11453	4,31787	1,46276	0,00007	3,31787	0,0002226
22274	7,45266	2,00857	0,00004	6,45266	0,0002508
32043	10,28269	2,33046	0,00003	9,28269	0,0002615
<b>2020,29167</b>		<b>41,94856</b>	<b>0,02604</b>		<b>0,0087252</b>

Obrázek 4: Výpočtová tabulka – konec (Zdroj: vlastní)

Na obrázku 3 je znázorněna výpočtová tabulka.

Výpočtem pomocí programu Excel se získají dvě vyjádření pro maximálně věrohodný odhad  $\hat{\alpha}$ , který se označí jako A a B. Jejich výpočet lze vidět na obrázku č. 2 a 3. Při výpočtu se použila hodnota  $\tilde{\lambda} = 3451,91073$ . Tato hodnota byla získána metodou momentů (viz bod b.) Podle již uvedených vztahů byly vypočítány následující hodnoty:

**Tabulka 8: Odhad parametrů Paretova rozdělení (Zdroj: vlastní)**

<b>A</b>	<b>2,86065</b>
<b>B</b>	<b>2,98426</b>
<b>A-B</b>	<b>-0,12361</b>

Protože pro maximálně věrohodný odhad  $\hat{\lambda}$  parametru  $\lambda$  musí platit rovnost  $f(\hat{\lambda}) = 0$ , pomocí funkce *Hledání řešení z nabídky Nástroje* programu Excel, se změní hodnota původně odhadnutého parametru  $\tilde{\lambda} = 3451,91073$  tak, aby platilo  $f(\lambda) = A - B = 0$ . Nový odhad parametrů jsou hodnoty maximálně věrohodných odhadů  $\hat{\lambda} = 1\,872,12684$  a  $\hat{\alpha} = 1,88046$

#### **b. metoda momentů**

Při této metodě se nahrazují charakteristiky základního souboru odpovídajícími výběrovými charakteristikami. Při Paretově rozdělení se dostanou tyto rovnice:

$$\bar{x} = \frac{\lambda}{\alpha - 1}$$

$$s^2 = \frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}$$

Po úpravách těchto dvou rovnic se získají vztahy pro odhady  $\tilde{\alpha}, \tilde{\lambda}$  parametrů  $\alpha, \lambda$  metodou momentů:

$$\tilde{\alpha} = \frac{2s^2}{s^2 - \bar{x}^2} \quad \text{a} \quad \tilde{\lambda} = (\tilde{\alpha} - 1)\bar{x}.$$

V našem případě byly z těchto rovnic vypočítány odhady parametrů, které uvádí tabulka 9:

**Tabulka 9: Odhady parametrů Paretova rozdělení metodou momentů**

$\alpha$	<b>2,70862</b>
$\lambda$	<b>3 451,91073</b>

Při porovnání odhadů pomoci těchto dvou metod jsou maximálně věrohodné odhady  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\lambda}$  vydatnější než odhady získané metodou momentů. Je to z toho důvodu, že výběrová charakteristika  $S^2$ , od které závisí  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\lambda}$ , má při Paretově rozdělení vysokou variabilitu, protože vysoké hodnoty  $x$  jsou značně pravděpodobné.

### 6.3.2 Testy dobré shody

Dalším krokem v programu Microsoft Excel bylo ověření vhodnosti vybraného rozdělení s odhadnutými parametry na základě výběrových údajů.

- 1) Pomocí Kolmogorov-Smirnovova testu na hladině významnosti  $\alpha = 0,05$  byla ověřena hypotéza, že výška pojistných plnění při tomto typu pojištění má *lognormální rozdělení*.

Obrázek 5 znázorňuje výpočtovou tabulku. V prvním sloupci jsou uvedena pořadová čísla  $j$ , v druhém jsou vzestupně uspořádaná původní data (viz tabulka č. 1). Ve třetím sloupci jsou hodnoty předpokládané distribuční funkce vypočítané v hodnotách  $\underline{x}$  s odhadnutými parametry  $\mu; \sigma^2$  (metodou maximální věrohodnosti). Hodnoty předpokládané distribuční funkce byly vypočítány pomocí funkce LOGNORMDIST v programu Excel.

Ve čtvrtém a pátém sloupci jsou uvedeny hodnoty empirické distribuční funkce.

Poslední dva sloupce obsahují absolutní rozdíly hodnot empirické a předpokládané distribuční funkce v bodech nespojitosti. Pomocí funkce MAX byla z těchto dvou



sloupců získána maximální absolutní odchylka, která představuje hodnotu testovacího kritéria.

V našem případě je hodnota testovacího kritéria  $d_{120} = 0,08673$ . Kritická hodnota byla vypočítána podle vztahu  $d_{n;1-\alpha} = \frac{1,358}{\sqrt{n}}$ , tím se dostane její hodnota  $d_{120;0,95} = 0,12397$ . Protože  $d_{120} < d_{120;0,95}$ , můžeme nulovou hypotézu přijmout. Výška pojistných plnění má lognormální rozdělení s odhadnutými parametry  $\mu, \sigma^2$ .

j	x	F(x)	F120 (xj)	F120 (xj+1)	ABS1	ABS2
1	3	0,00014	0,00000	0,00833	0,00014	0,00820
2	11	0,00268	0,00833	0,01667	0,00566	0,01399
3	27	0,01415	0,01667	0,02500	0,00252	0,01085
4	36	0,02256	0,02500	0,03333	0,00244	0,01078
5	47	0,03378	0,03333	0,04167	0,00045	0,00789
6	49	0,03589	0,04167	0,05000	0,00577	0,01411
7	54	0,04124	0,05000	0,05833	0,00876	0,01709
8	77	0,06647	0,05833	0,06667	0,00813	0,00020
9	78	0,06757	0,06667	0,07500	0,00090	0,00743
10	85	0,07529	0,07500	0,08333	0,00029	0,00804
11	104	0,09602	0,08333	0,09167	0,01269	0,00435
12	121	0,11414	0,09167	0,10000	0,02247	0,01414
13	130	0,12353	0,10000	0,10833	0,02353	0,01520
14	138	0,13175	0,10833	0,11667	0,02341	0,01508
15	139	0,13277	0,11667	0,12500	0,01610	0,00777
16	140	0,13378	0,12500	0,13333	0,00878	0,00045
17	143	0,13682	0,13333	0,14167	0,00349	0,00485
18	153	0,14682	0,14167	0,15000	0,00515	0,00318
19	193	0,18482	0,15000	0,15833	0,03482	0,02649
20	195	0,18664	0,15833	0,16667	0,02831	0,01997

Obrázek 5: Kolmogorov-Smirnovov test pro lognormální rozdělení (Zdroj: vlastní)

- 2) Pomocí testu Kolmogorovova-Smirnovova (K-S) na hladině významnosti  $\alpha = 0,05$  sme ověřili hypotézu, zda výška pojistných plnění při tomto typu pojištění má gama rozdělení.

Postup výpočtu a výpočtové tabulky (viz obrázek 6) je analogický jako v předchozím případě pro lognormální rozdělení, s tím rozdílem, že předpokládaná distribuční funkce (viz obrázek 5, třetí sloupec) s odhadnutými parametry  $\alpha, \beta$  (metodou momentů), byla vypočítaná pomocí funkce GAMMADIST.

Opět pomocí funkce MAX v posledních dvou sloupcích byla zjištěna maximální absolutní odchylka, která je hodnotou testovacího kritéria. V našem případě je hodnota testovacího kritéria  $d_{120} = 0,28002$ . Kritická hodnota byla vypočítána podle vztahu

$$d_{n;1-\alpha} = \frac{1,358}{\sqrt{n}} = 0,12397. \text{ Protože } d_{120} > d_{120,0,95}, \text{ zamítáme nulovou hypotézu, že výška}$$

pojistných plnění má gama rozdělení s odhadnutými parametry  $\alpha, \beta$ .

j	x	F(x)	F120 (xj)	F120 (xj+1)	ABS1	ABS2
1	3	0,14174	0	0,00833	0,14174	0,13340
2	11	0,19907	0,00833	0,01667	0,19074	0,18240
3	27	0,25168	0,01667	0,02500	0,23501	0,22668
4	36	0,27129	0,02500	0,03333	0,24629	0,23795
5	47	0,29080	0,03333	0,04167	0,25747	0,24913
6	49	0,29397	0,04167	0,05000	0,25230	0,24397
7	54	0,30150	0,05000	0,05833	0,25150	0,24317
8	77	0,33062	0,05833	0,06667	0,27229	0,26396
9	78	0,33173	0,06667	0,07500	0,26507	0,25673
10	85	0,33921	0,07500	0,08333	0,26421	0,25588
11	104	0,35741	0,08333	0,09167	0,27408	0,26575
12	121	0,37169	0,09167	0,10000	0,28002	0,27169
13	130	0,37864	0,10000	0,10833	0,27864	0,27030
14	138	0,38452	0,10833	0,11667	0,27618	0,26785
15	139	0,38523	0,11667	0,12500	0,26857	0,26023
16	140	0,38595	0,12500	0,13333	0,26095	0,25261
17	143	0,38806	0,13333	0,14167	0,25473	0,24640
18	153	0,39488	0,14167	0,15000	0,25321	0,24488
19	193	0,41917	0,15000	0,15833	0,26917	0,26084
20	195	0,42028	0,15833	0,16667	0,26195	0,25361

Obrázek 6: Kolmogorov-Smirnovov test pro gama rozdělení (Zdroj: vlastní)

- 3) Pomocí K-S testu na hladině významnosti  $\alpha = 0,05$  byla ověřena hypotéza, že výška pojistných plnění při tomto typu pojištění má Paretovo rozdělení.

Postup výpočtu a výpočtová tabulka (viz obrázek 6) je stejná jako v předchozích dvou případech, s tím rozdílem, že předpokládaná distribuční funkce byla vypočítaná v hodnotách  $x$  s parametry  $\alpha, \lambda$  odhadnutými metodou momentů podle vztahu:

$$F(x) = 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^\alpha$$

Opět pomocí funkce MAX v posledních dvou sloupcích byla zjištěna maximální absolutní odchylka, která je hodnotou testovacího kritéria. V našem případě vyšla hodnota

testovacího kritéria  $d_{120} = 0,09920$ . Kritická hodnota, vypočítána podle vztahu

$d_{n;1-\alpha} = \frac{1,358}{\sqrt{n}}$  je rovna  $d_{120;0,95} = 0,12397$ . Protože  $d_{120} < d_{120;0,95}$ , můžeme nulovou

hypotézu přijmout. Výška pojistných plnění má proto Paterovo rozdělení s parametry  $\alpha, \lambda$ , odhadnutými metodou momentů.

j	x	F(x)	F120 (xj)	F120 (xj+1)	ABS1	ABS2
1	3	0,00235	0,00000	0,00833	0,00235	0,00598
2	11	0,00858	0,00833	0,01667	0,00025	0,00809
3	27	0,02088	0,01667	0,02500	0,00422	0,00412
4	36	0,02771	0,02500	0,03333	0,00271	0,00562
5	47	0,03597	0,03333	0,04167	0,00263	0,00570
6	49	0,03746	0,04167	0,05000	0,00421	0,01254
7	54	0,04117	0,05000	0,05833	0,00883	0,01716
8	77	0,05801	0,05833	0,06667	0,00033	0,00866
9	78	0,05873	0,06667	0,07500	0,00794	0,01627
10	85	0,06377	0,07500	0,08333	0,01123	0,01967
11	104	0,07725	0,08333	0,09167	0,00608	0,01441
12	121	0,08910	0,09167	0,10000	0,00257	0,01090
13	130	0,09528	0,10000	0,10833	0,00472	0,01305
14	138	0,10073	0,10833	0,11667	0,00760	0,01593
15	139	0,10141	0,11667	0,12500	0,01525	0,02359
16	140	0,10209	0,12500	0,13333	0,02291	0,03124
17	143	0,10412	0,13333	0,14167	0,02922	0,03755
18	153	0,11083	0,14167	0,15000	0,03083	0,03917
19	193	0,13702	0,15000	0,15833	0,01298	0,02132
20	195	0,13830	0,15833	0,16667	0,02004	0,02837

Obrázek 7: Kolmogorov-Smirnov test pro Pareto rozdělení (Zdroj: vlastní)

Na základě K-S testu bylo zjištěno, že výška pojistných plnění má lognormální a Pareto rozdělení. Pro gama rozdělení byla nulová hypotéza zamítnuta.

Pro srovnání testovacích kritérií a kritické hodnoty slouží tabulka 10.

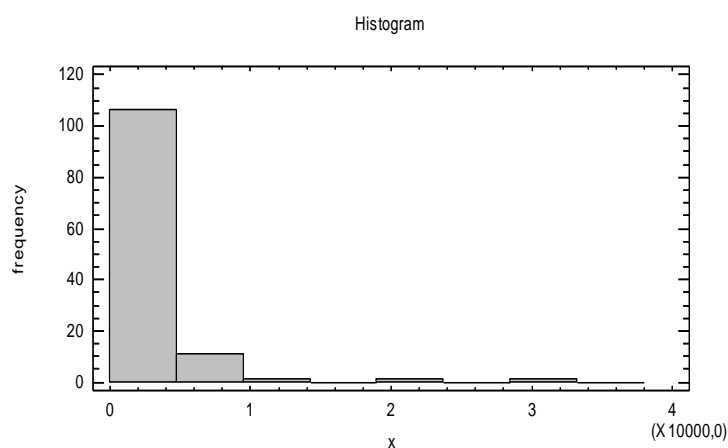
Tabulka 10: Výsledky Kolmogorova-Smirnovova testu (Zdroj: vlastní)

	Testovací kritérium	Kritická hodnota	Nulová hypotéza
<b>Lognormální rozdělení</b>	0,08673	0,12397	přijímá se
<b>Gama rozdělení</b>	0,28002	0,12397	zamítá se
<b>Pareto rozdělení</b>	0,09920	0,12397	přijímá se

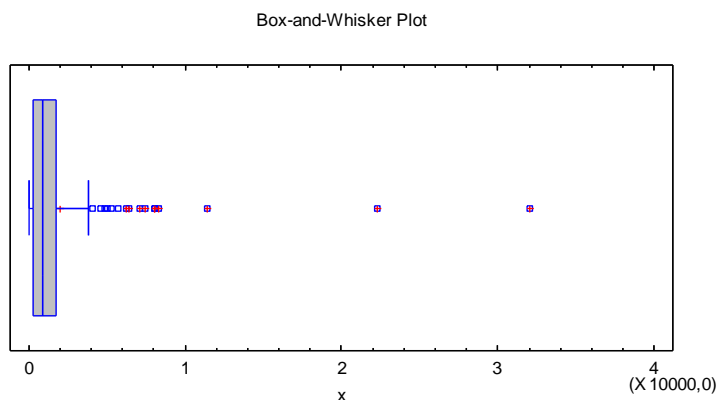
## 6.4 Ukázka odhadu parametrů a ověření vhodnosti rozdělení v systému STATGRAPHICS Centurion XV

Vzhledem k výpočtové náročnosti, spojené s testy dobré shody empirických a teoretických rozdělení, stejně jako s maximálně věrohodnými odhady parametrů teoretických rozdělení je výhodné použití procedury *Distribution Fitting* systému STATGRAPHICS Centurion XV.

Znovu bylo použito 120 pojistných plnění z portfolia pojistek, kterých výška je uvedena v tabulce 1.



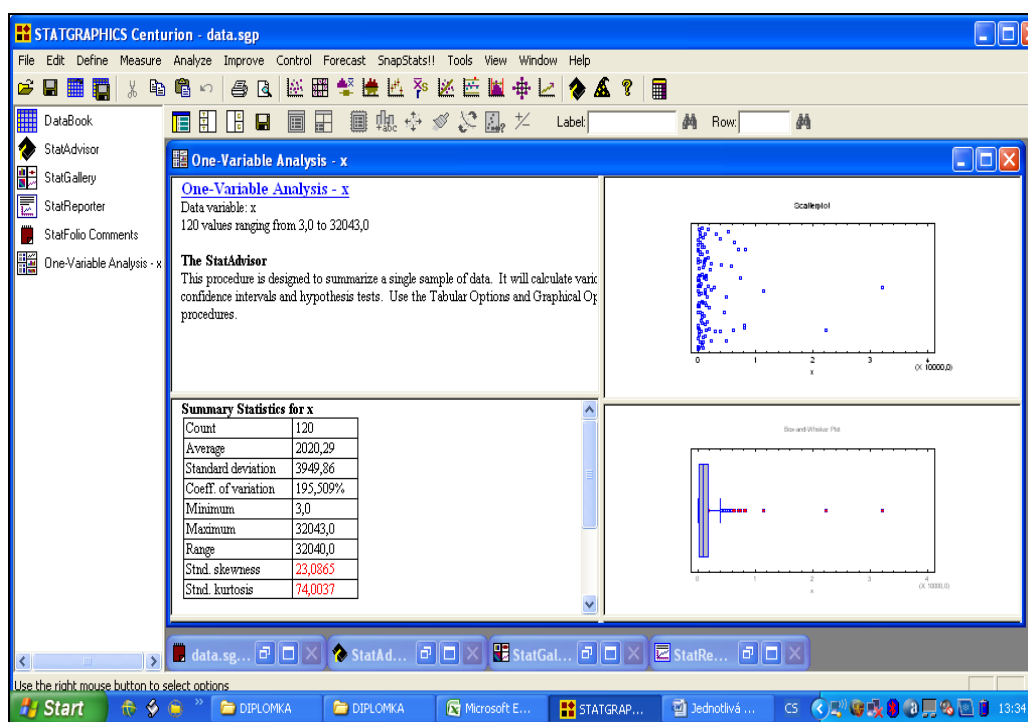
Obrázek 8: Histogram rozdělení četnosti výšky pojistných plnění (Zdroj: vlastní)



Obrázek 9: Box-and-Whisker Plot (Zdroj: vlastní)

Nejdříve bylo potřebné získat konkrétní představu o empirickém rozdělení výběrových údajů, která se získala pomocí histogramu (obrázek 8) a grafického znázornění charakteristik empirických dat pomocí *Box-and-Whisker Plot* (obrázek 9).

Dále byly vypočítány základní charakteristiky výšky pojistných plnění pomocí procedury *Summary Statistics*. Výpočet naznačuje následující obrázek č. 10:



**Obrázek 10: Základní charakteristiky výšky pojistných plnění (Zdroj: vlastní)**

Tabulka 11 uvádí vypočítané základní charakteristiky výšky pojistných plnění.

**Tabulka 11: Základní charakteristiky výšky pojistných plnění (Zdroj: vlastní)**

Count (rozsah)	120
Average (aritmetický průměr)	2020,29
Median (medián)	868,5
Variance (výběrový rozptyl)	1,56014E7
Standard deviation (výběrová směrodatná odchylka)	3949,86
Coeff. of variation v % (variační koeficient)	195,509
Minimum (minimální hodnota)	3,0

Maximum (maximální hodnota)	32043,0
Range (variační rozpětí)	32040,0
Lower quartile (horní kvartil)	269,0
Upper quartile (dolní kvartil)	1746,0
Skewness (koeficient šikmosti)	5,1623
Std. Skewness (standardizovaný koef. šikmosti)	23,0865
Kurtosis (koeficient špičatosti)	33,0954
Std. Kurtosis (standardizovaný koef. špičatosti)	74,0037

Ze základních informací o rozdělení výšky pojistných plnění na základě histogramu, krabicového grafu a výběrových charakteristik lze tvrdit, že většina pojistných plnění má nízké hodnoty, jde o pravostranně (pozitivně) zešikmené rozdělení, protože hodnota koeficientu šikmosti ( $Skewness = 5,1623$ ) je větší než nula. Vyskytují se však i extrémně vysoké hodnoty a to způsobuje velkou variabilitu pojistných plnění, což nám ukazuje hodnota variačního koeficientu ( $Coeff. of variation = 195,509\%$ ).

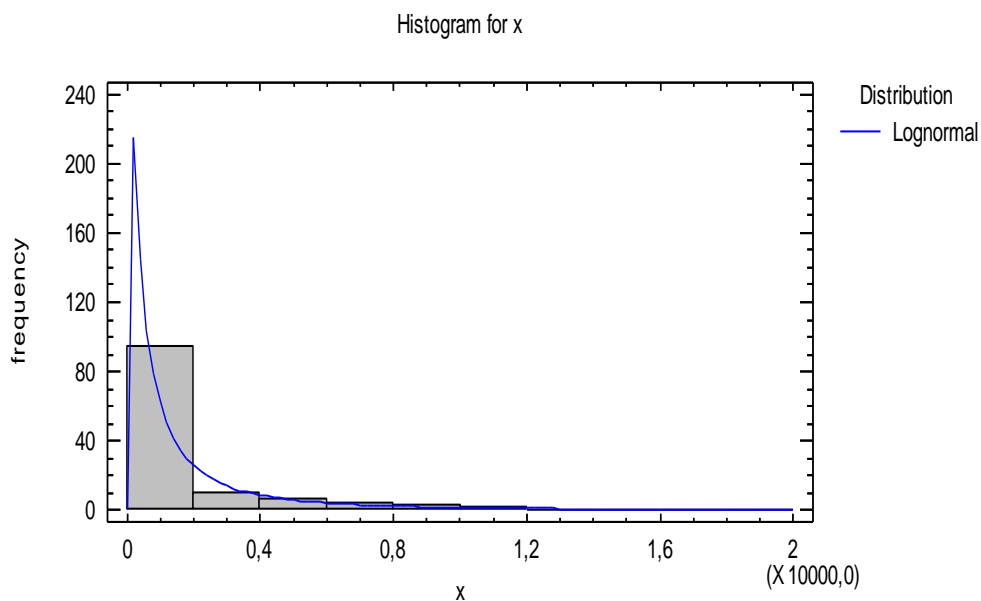
Jako vhodný model výšky pojistných plnění z pravostranně zešikmených rozdělení byly vybrány tyto tři rozdělení pravděpodobnosti: lognormální, gama a Pareto rozdělení.

#### 6.4.1 Lognormální rozdělení

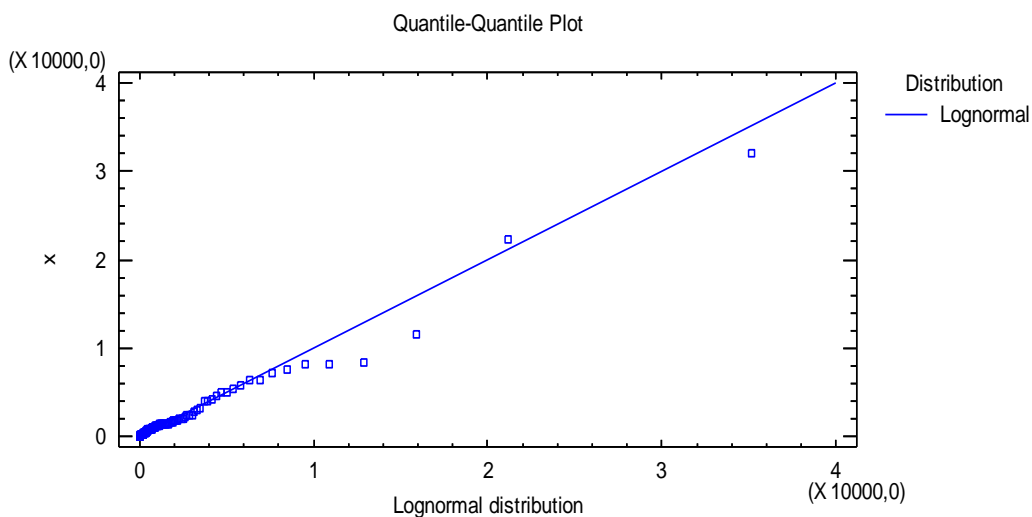
Pomocí procedury *Distribution fitting* (testy dobré shody) byl nejdříve ověřen předpoklad, zda výšky pojistných plnění mají *lognormální rozdělení* s maximálně věrohodným odhadem parametrů  $\mu, \sigma^2$ . Výsledky odhadů parametrů uvádí tabulka 12.

**Tabulka 12: Odhady parametrů pro lognormální rozdělení (Zdroj:výstup STATGRAPHICS)**

<i>Lognormal</i>
mean = 2382,01
standard deviation = 7147,91
Log scale: mean $\mu = 6,62417$
Log scale: std. dev. $\sigma^2 = 1,51758$



**Obrázek 11: Histogram četností a hustota lognormálního rozdělení výšky škod (Zdroj:výstup STATGRAPHICS)**



**Obrázek 12: Quantile-Quantile Plot (Zdroj:výstup STATGRAPHICS)**

Pomocí Kolmogorova-Smirnova testu a  $\chi^2$ -testu byla na hladině významnosti  $\alpha = 0,05$  ověřena hypotéza, zda výšky pojistných plnění mají lognormální rozdělení. Výsledek testu znázorňují tabulky 13 a 14.

**Tabulka 13: Kolmogorov-Smirnov Testu (Zdroj:výstup STATGRAPHICS)**

	<i>Lognormal</i>
DPLUS	0,0520834
DMINUS	0,0867263
DN	0,0867263
<b>P-Value</b>	<b>0,329632</b>

**Tabulka 14: Výsledky Chi-Squared test (Zdroj:výstup STATGRAPHICS)**

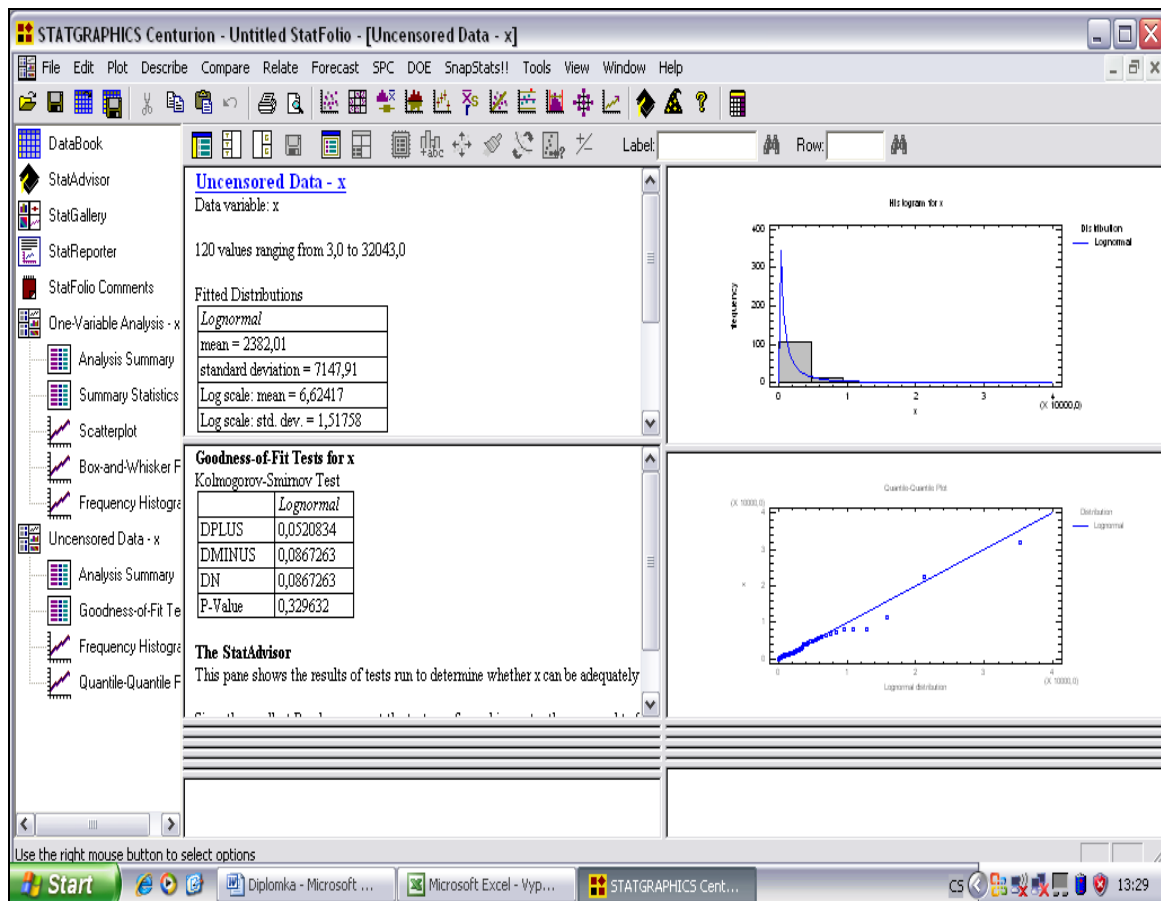
	<i>Lower Limit</i>	<i>Upper Limit</i>	<i>Observed Frequency</i>	<i>Expected Frequency</i>	<i>Chi-Squared</i>
at or below		3000,0	101	98,26	0,08
	3000,0	6000,0	9	11,46	0,53
	6000,0	9000,0	7	4,16	1,94
	9000,0	12000,0	1	2,04	0,53
above	12000,0		2	4,09	1,07

Chi-Squared = 4,13625 with 2 d.f. **P-Value = 0,126423**

Hodnota P-Value je u obou testů větší než zvolená hladina významnosti a lze tedy přijat předpoklad, že výšky pojistných plnění mají lognormální rozdělení, nebo že lognormální rozdělení je jejich vhodným pravděpodobnostním modelem.

Postup testů dobré shody v systému STATGRAPHICS Centurion XV znázorňuje obrázek 13.

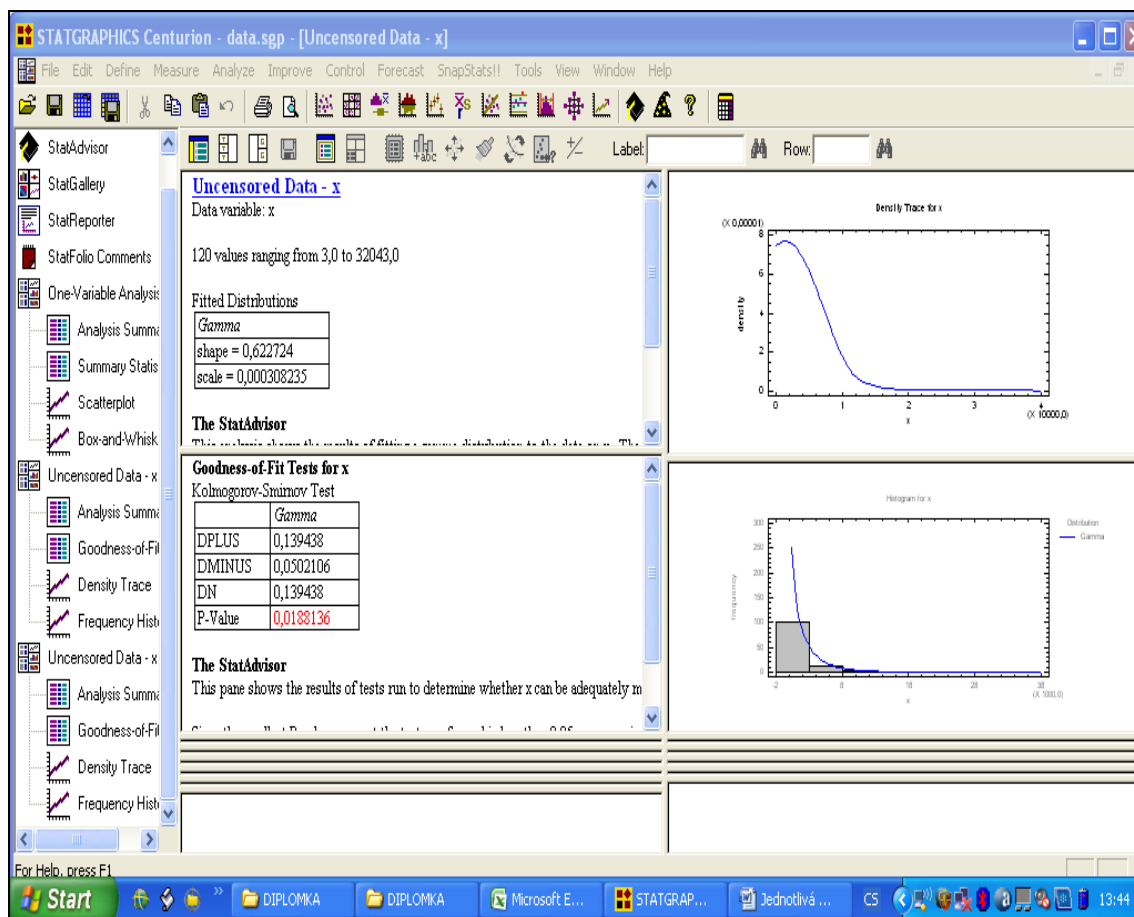




Obrázek 13: Ukázka výpočtu v systému Statgraphics pro lognormální rozdělení (Zdroj: vlastní)

## 6.4.2 Gama rozdělení

Pomocí stejné procedury a stejným postupem byl ověřen předpoklad, zda výšky individuální pojistných plnění mají *gama rozdělení* s maximálně věrohodným odhadem parametrů  $\alpha, \beta$ . Výpočet je zobrazen na obrázku 14:



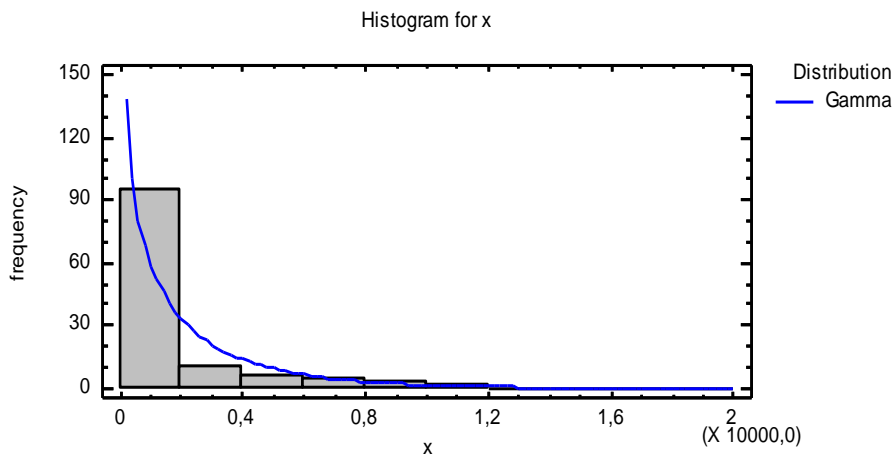
Obrázek 14: Ukázka výpočtu v systému Statgraphics pro gama rozdělení (Zdroj: vlastní)

Výsledky odhadu parametrů jsou uvedeny v tabulce 15.

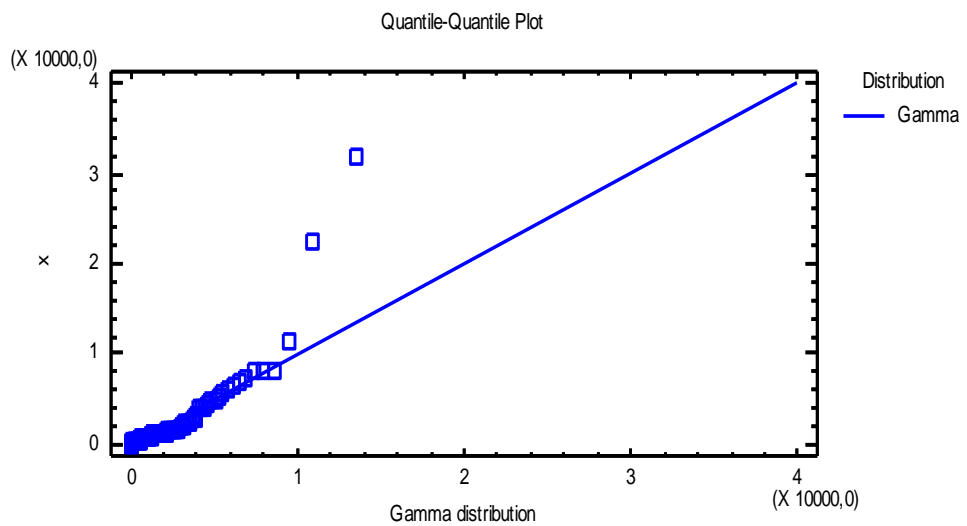
Tabulka 15: Odhad parametrů gama rozdělení (Zdroj:výstup STATGRAPHICS)

<i>Gamma</i>
shape = 0,622724
scale = 0,000308235

Grafické znázornění pomocí histogramu a grafu Quantile-Quantile poskytují obrázky 15 a 16.



**Obrázek 15:Histogram (Zdroj:výstup STATGRAPHICS)**



**Obrázek 16:Quantile-Quantile Plot (Zdroj:výstup STATGRAPHICS)**

Pomocí Kolmogorova-Smirnova testu a  $\chi^2$ -testu byla na hladině významnosti  $\alpha = 0,05$  ověřena hypotéza, zda výšky pojistných plnění mají *gama rozdělení*. Výsledek testu znázorňují tabulky 16 a 17.

**Tabulka 16: Kolmogorov-Smirnov test (Zdroj:výstup STATGRAPHICS)**

	<i>Gamma</i>
DPLUS	0,139438
DMINUS	0,0502106
DN	0,139438
<b>P-Value</b>	<b>0,0188136</b>

**Tabulka 17: Chi-Squared test (Zdroj:výstup STATGRAPHICS)**

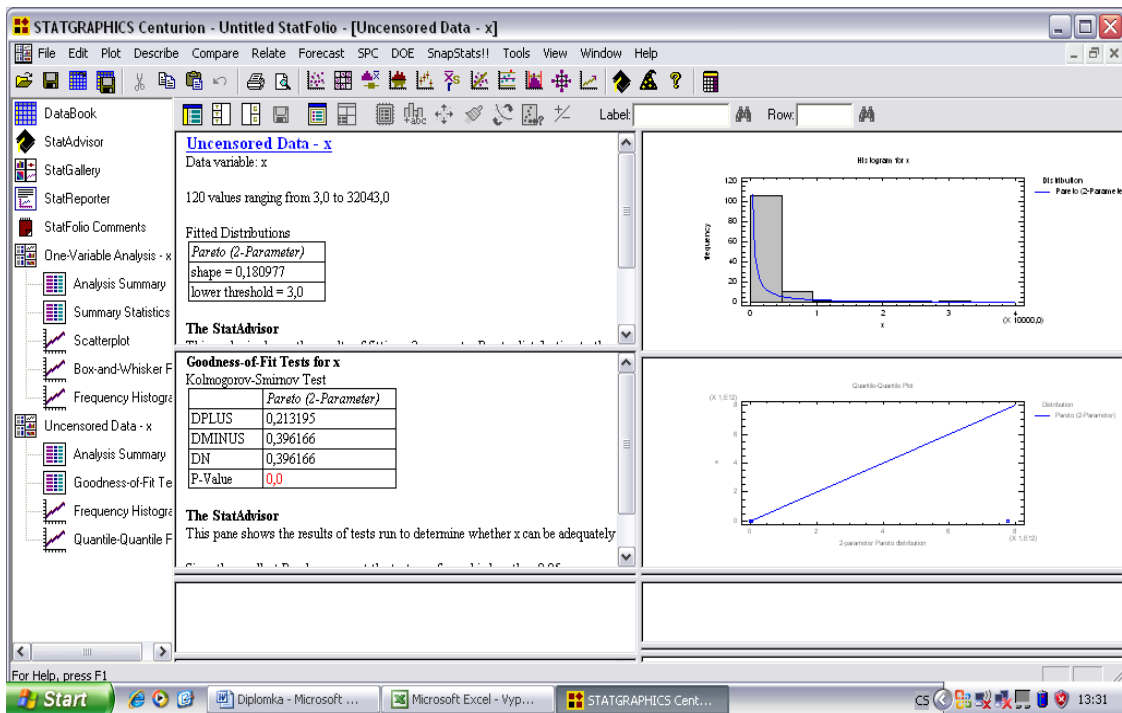
	<i>Lower Limit</i>	<i>Upper Limit</i>	<i>Observed Frequency</i>	<i>Expected Frequency</i>	<i>Chi- Squared</i>
at or below		2000,0	94	79,51	2,64
	2000,0	4000,0	10	21,83	6,41
	4000,0	6000,0	6	9,61	1,35
	6000,0	8000,0	4	4,55	0,07
	8000,0	10000,0	3	2,23	0,27
above	10000,0		3	2,28	0,23

Chi-Squared = 10,973 with 3 d.f. **P-Value = 0,0118721**

Hodnota P-Value u obou testů je nižší než hladina významnosti, tedy dochází k zamítnutí nulové hypotézy, že výšky pojistných plnění mají gama rozdělení. Gama rozdělení jako model výšky pojistných plnění není vhodný.

### 6.4.3 Paretovo rozdělení

Analogickým postupem byl ověřen poslední předpoklad, zda výšky pojistných plnění mají Paretovo rozdělení s maximálně věrohodným odhadem parametrů  $\alpha$ ,  $\lambda$ . Postup výpočtu znázorňuje obrázek 17.

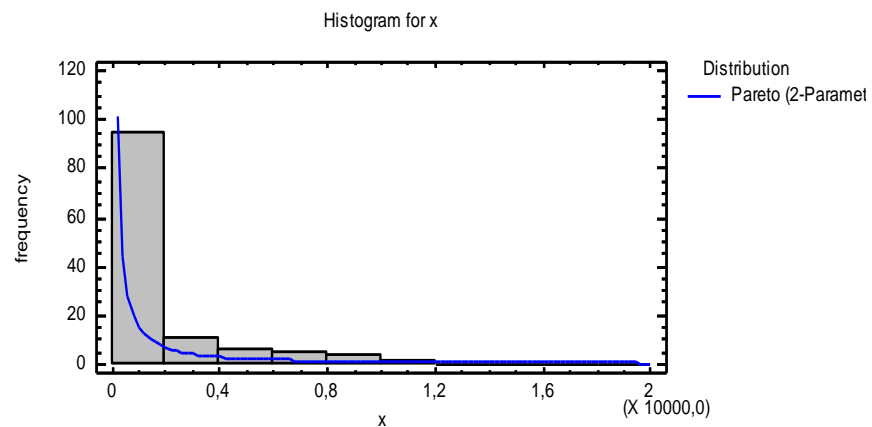


Obrázek 17: Ukázka výpočtu v systému Statgraphics pro Paretovo rozdělení (Zdroj: vlastní)

Výsledky odhadu parametrů uvádí tabulka 18.

Tabulka 18: Odhad parametrů (Zdroj:výstup STATGRAPHICS)

<i>Pareto (2-Parameter)</i>
shape = 0,180977
lower threshold = 3,0



Obrázek 18: Histogram (Zdroj: vlastní)

Vizuální posouzení shody histogramu a hustoty předpokládaného Paretova rozdělení umožňuje obrázek 18. Pomocí Kolmogorova-Smirnova testu a  $\chi^2$ -testu byla na hladině významnosti  $\alpha = 0,05$  ověřena hypotéza, zda výšky pojistných plnění mají *Pareto* rozdělení. Výsledek testu znázorňuje následující tabulky 19 a 20:

**Tabulka 19: Kolmogorov-Smirnov test (Zdroj:výstup STATGRAPHICS)**

	<i>Pareto (2-Parameter)</i>
DPLUS	0,213195
DMINUS	0,396166
DN	0,396166
<b>P-Value</b>	<b>0,0</b>

**Tabulka 20: Chi-Squared test (Zdroj:výstup STATGRAPHICS)**

	<i>Lower Limit</i>	<i>Upper Limit</i>	<i>Observed Frequency</i>	<i>Expected Frequency</i>	<i>Chi-Squared</i>
at or below		2000,0	94	83,01	1,46
	2000,0	4000,0	10	4,36	7,29
	4000,0	6000,0	6	2,31	5,90
	6000,0	10000,0	7	2,68	6,98
	10000,0	16000,0	1	2,25	0,70
above	16000,0		2	24,39	20,55

Chi-Squared = 42,8732 with 3 d.f. **P-Value = 2,61835E-9**

Hodnota P-Value je u obou testů nižší než hladina významnosti, tedy dochází k zamítnutí nulové hypotézy, že výšky pojistných plnění mají Pareto rozdělení. Z toho vyplývá, že Pareto rozdělení jako model výšky pojistných plnění není vhodný.

#### 6.4.4 Srovnání výsledků získaných v systému Statgraphics Centurion XV

Hodnoty P-Value testů dobré shody, kde pomocí systému Statgraphics Centurion XV byl proveden Kolmogorov-Smirnov test a  $\chi^2$  - test znázorňuje tabulka 21:

Tabulka 21: Hodnoty P-Value (Zdroj: vlastní)

	<b>Chi-Square</b>	<b>Kolmogorov-Smirnov</b>	<b>Nulová hypotéza</b>
<b>Lognormální rozdělení</b>	0,12642	0,32963	přijímá se
<b>Gama rozdělení</b>	0,01187	0,01881	zamítá se
<b>Paretovo rozdělení</b>	2,61835E-9	0,00000	zamítá se

Z těchto výsledků vyplývá, že vhodným modelem výšky pojistných plnění je pouze *lognormální rozdělení*.

Vvysledky, které byly získány pomocí programu Excel a systému STATGRAPHICS Centurion XV jsou porovnány v následující kapitole.

## 6.5 Porovnání výsledků získaných pomocí programu Excel a systému Statgraphics Centurion XV

Tato kapitola se zabývá porovnáním výsledků, které byly získány z předchozích výpočtů pomocí již zmiňovaných programů. Pro přehlednost byly tyto výsledky uvedeny do následující tabulky.

Tabulka 22: Porovnání výsledků programu Excel a systému Statgraphics (Zdroj: vlastní)

	Program Excel	Systém Statgraphics
Lognormální rozdělení	vhodné	vhodné
Gama rozdělení	nevhodné	nevhodné
Paretovo rozdělení	vhodné	nevhodné

Na základě odhadu parametrů rozdělení a ověření vhodnosti daného rozdělení byla provedena aproximace kolektivního modelu rizika. Výsledky v programu Excel jsou takové, že vhodným modelem výšky pojistných plnění je lognormální a Paretovo rozdělení. V porovnání s výsledkem systému STATGRAPHICS Centurion XV je vhodným modelem pouze lognormální rozdělení. Rozdílnost výsledků má toto odůvodnění:

- Pro lognormální rozdělení se odhady parametrů a přijetí vhodnosti rozdělení pro model výšky pojistných plnění shodují. Pro odhady parametrů byla v programu Excel zvolena jak metoda momentů, tak i metoda maximální věrohodnosti. Pro Kolmogorov-Smirnov test byly použity pouze odhady získané metodou maximální věrohodnosti, kterou používá i systém STATGRAPHICS Centurion XV. Na základě toho jsou výsledky obou programů stejné. Pro ukázkou bylo v systému STATGRAPHICS Centurion XV použit i další test shody, a to  $\chi^2$ -test. Tento test má značnou výpočetní pracnost, z toho důvodu nebyl proveden v programu Excel. I tento test potvrdil, že lognormální rozdělení je vhodným modelem výšky pojistných plnění.
- Pro gama rozdělení se výsledky odhadu parametrů liší. Jak je již známo, odhady získané metodou momentů nejsou tak vydatné jako odhady získané



metodou maximální věrohodnosti. V programu Excel je aplikována pouze metoda momentů, protože metoda maximální věrohodnosti má velkou výpočetní pracnost. Proto byl odhad parametrů touto metodou proveden v systému STATGRAPHICS Centurion XV. To je příčinou rozdílnosti výsledků odhadu parametrů. Na základě toho jsou použity jiné hodnoty parametrů v následném ověření vhodnosti rozdělení. V obou programech je však gama rozdělení zamítnuto, proto není vhodným modelem výšky pojistných plnění. V konečném výsledku se oba programy shodují.

- U Paretova rozdělení se získané výsledky také liší. V programu Excel byla provedena metoda momentů i metoda maximální věrohodnosti pro odhad parametrů. Pro Kolmogorov-Smirnov test byly použity pouze odhady metodou momentů a tento test potvrdil nulovou hypotézu, že Paretovo rozdělení je vhodným modelem výšky pojistných plnění. Na základě tohoto výsledku byla v programu Excel provedena aproximace kolektivního modelu rizika. V systému STATGRAPHICS Centurion XV, který je založen na metodě maximální věrohodnosti, výsledky testů dobré shody vedly k přijetí alternativní hypotézy, že Paretovo rozdělení není vhodným modelem výšky pojistných plnění. Opět se ukazuje, že použitím metody momentů či metody maximální věrohodnosti se získají takové odhady, které mohou vést k odlišným výsledkům.

Na základě dosažených výsledků testů dobré shody byla aplikována v programu Excel aproximace kolektivního modelu rizika normálním a posunutým gama rozdělením pro lognormální a Paretovo rozdělení výši individuálních poistných plnění. Praktická ukázka aproximace je popsána v kapitole 6.

## 7. Praktická ukázka aproximace kolektivního modelu rizika v programu Excel

V prostředí programu Excel byla provedena aproximace kolektivního modelu rizika normálním rozdělením a posunutým gama rozdělení. Tato aproximace se v praxi často používá na určení tzv. rizikové přírážky  $\theta$  k čistému pojistnému, kterým se rozumí střední hodnota  $E(S)$  kolektivního rizika.

V této kapitole je popsán postup aproximace kolektivního modelu rizika  $S$ , kdy pojistné plnění  $X_i$  má buď lognormální či Pareto rozdělení a následně vypočítána *riziková přírážka*. Riziková přírážka představuje konstantu, která zaručuje, že příjem z pojistného se rovná hodnotě zvoleného kvantilu (např. 95. percentil  $S_{0,95}$ ) rozdělení celkového pojistného plnění  $S$ .

V případě kdy průměrné pojistné plnění  $E(S)$  je tzv. čisté (netto) pojistné, požaduje se, aby se rizikové pojistné

$$RP = (1 + \theta)E(S)$$

rovnalo 95. percentilu  $S_{0,95}$  rozdělení  $S$ . Toto vyjadřuje zápis [12]:

$$P(S \leq S_{0,95}) = P(S \leq (1 + \theta)E(S)) = 0,95$$

Pro rizikovou přírážku  $\theta$  dostáváme vyjádření

$$\theta = \frac{S_{0,95} - E(S)}{E(S)}$$

Při normální aproximaci rozdělení kolektivního rizika  $S$  dostaneme tento vztah pro rizikovou přírážku  $\theta$  [12]:

$$\theta = \frac{z_\alpha \sigma(S)}{E(S)}$$

kde  $z_{0,95}$  je 95 percentil (obecně  $z_\alpha$  kvantil) normovaného normálního rozdělení. a  $\sigma(S) = \sqrt{D(S)}$ .

Uvažujeme případ, kdy celkové pojistné plnění  $S$  má složené Poissonovo rozdělení pravděpodobností, přičemž pojistné plnění  $X_i$  mají lognormální rozdělení pravděpodobností s parametry, kterých odhad :

$$\mu = 6,82768$$

$$\sigma^2 = 1,56664$$

Vypočítali se charakteristiky  $E(S)$ ,  $D(S)$  a  $\gamma_1$  celkového pojistného plnění  $S$ , za předpokladu, že pro parametr Poissonova rozdělení  $\lambda^*$  platí  $\lambda^* = 1000$ .

Pro počáteční momenty lognormálního rozdělení platí vztah:

$$E(X^k) = e^{k \cdot \mu + k^2 \cdot \frac{\sigma^2}{2}}$$

Na základě tohoto vztahu byly vypočítány první tři počáteční momenty:

**Tabulka 23: začáteční momenty (Zdroj: vlastní)**

<b>k</b>	$k \cdot \mu + k^2 \cdot \frac{\sigma^2}{2}$	$\exp(k \cdot \mu + k^2 \cdot \frac{\sigma^2}{2})$
1	7,611	2 020,292
2	16,789	19 552 940,142
3	27,533	906 554 660 446,952

Dále byly vypočítány základní charakteristiky celkového pojistného plnění  $S$  postupem, uvedeným v kapitole 3.3.

**Tabulka 24: Základní charakteristiky  $S$  (Zdroj: vlastní)**

<b>E(S)</b>	2 020 291,66667
<b>D(S)</b>	19 682 951 584,71930
<b><math>\mu_3(S)</math></b>	343 762 075 166 119,00000
<b><math>\gamma(S)</math></b>	0,12449

a) *Aproximace kolektivního modelu rizika normálním rozdělením*

Tabulka 25: aproximace normálním rozdělením a určení rizikové přírážky (Zdroj: vlastní)

<b>p</b>	<b><math>S_{p(N)}</math></b>	<b><math>\Theta^N</math></b>
0,90	2 199 493,36484	0,08870
0,95	2 250 294,55623	0,11385
0,98	2 307 471,13124	0,14215
0,99	2 345 589,14262	0,16102

Hodnoty  $S_{p(N)}$  ve druhém sloupci byly vypočítány pomocí funkce *NORMINV*. Pro tuto funkci jsou zapotřebí tyto tři hodnoty: pravděpodobnost  $p$ , střední hodnota  $E(S)$  a rozptyl  $D(S)$ ; které byly získány v předchozích výpočtech. Hodnota  $S_{p(N)}$  je vyjádřena pro 90., 95., 98. a 99. percentil. Poslední sloupec představuje určení rizikové přírážky.

b) *Aproximace kolektivního modelu rizika posunutým gama rozdělením*

Nejdřív byly vypočteny parametry  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k$ . Výsledky jsou uvedeny v tabulce 26.

Tabulka 26: Hodnoty parametrů  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k$  (Zdroj: vlastní)

<b><math>\alpha</math></b>	258,11589
<b><math>\beta</math></b>	0,00011
<b><math>k</math></b>	-233 700,91177

Následně byla provedena aproximace posunutým gama rozdělením a určení rizikové přírážky. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 27:

Tabulka 27: Aproximace posunutým gama rozdělení a určení rizikové přírážky (Zdroj: vlastní)

<b>p</b>	<b><math>Y_p</math></b>	<b><math>S_{p(G)}</math></b>	<b><math>\Theta^G</math></b>
0,90	1026881,28383	2203721,39735	0,09079
0,95	1085861,35268	2262701,46620	0,11999
0,98	1154838,18439	2331678,29791	0,15413
0,99	1202367,53746	2379207,65098	0,17766

Druhý sloupec představuje hodnotu kvantilu, která byla vypočtena pomocí funkce GAMAINV. Pro tuto funkci jsou zapotřebí tyto tři hodnoty: pravděpodobnost  $p$ ,  $\alpha$  a  $\beta$ , které byly získány v předchozích výpočtech. Poslední sloupec obsahuje hodnoty rizikové přírážky.

Výsledky rizikových přírážek se liší, je to způsobeno horší aproximací rozdělení  $S$  normálním rozdělením jako při aproximaci posunutým gama rozdělením.

**Tabulka 28: Srovnání rizikových přírážek jednotlivých rozdělení (Zdroj: vlastní)**

$\Theta^N$	$\Theta^G$
0,08870	0,09079
0,11385	0,11999
0,14215	0,15413
0,16102	0,17766

Dále uvažujeme případ, kdy celkové pojistné plnění  $S$  má *složené Poissonovo rozdělení* pravděpodobností, přičemž pojistné plnění  $X_i$  mají *Paretovo rozdělení pravděpodobností* s parametry:

$$\alpha = 2,70862$$

$$\lambda = 3\,451,91073$$

Vypočítali se charakteristiky  $E(S)$  a  $D(S)$  celkového pojistného plnění  $S$ , pokud platilo pro parametr Poissonova rozdělení  $\lambda^* = 1000$ .

Pro začáteční momenty  $m_1$  a  $m_2$  platí tyto vztahy:

$$m_1 = \frac{\lambda}{\alpha - 1}$$

$$m_2 = D(X) + m_1^2$$

kde  $D(X) = \frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}$ . Potom dostáváme  $D(X) = 7\,834\,109,24809$ , odkud

$$m_1 = 2\,020,29167$$

$$m_2 = 11\,915\,687,66649$$

Dále byly vypočítány základní charakteristiky celkového pojistného plnění  $S$  postupem, popsaným v kapitole 3.3.

**Tabulka 29: Základní charakteristiky  $S$**

<b>E(S)</b>	<b>2 020 291,66667</b>
<b>D(S)</b>	<b>11 915 687 666,48860</b>

**a) Aproximace kolektivního modelu rizika normálním rozdělením**

<b>p</b>	<b><math>S_{p(N)}</math></b>	<b><math>\Theta^N</math></b>
0,9	2160184,556	0,06924391
0,95	2199842,247	0,08887359
0,98	2244476,848	0,11096674
0,99	2274233,478	0,12569562

Přitom byl použit stejný postup jako v předchozím případě.

**b) Aproximace kolektivního modelu rizika posunutým gama rozdělením**

Z důvodu, že  $\alpha < 3$ , nemohl být vypočítán třetí moment a tím nebyla možná aproximace posunutým gama rozdělením

## 8. ZÁVĚR

Cílem této diplomové práce bylo definovat kolektivní model rizika, vysvětlit jeho význam, popsat teoretický základ aproximace kolektivního modelu rizika se zaměřením na aproximaci normálním rozdělením a posunutým gama rozdělením a v praktických ukázkách aplikovat dané postupy v prostředí programu Microsoft Excel a systému STATGRAPHICS Centurion XV.

V úvodní části práce byly vymezeny základní pojmy, především pojem riziko a neživotní pojištění. Další část práce byla věnována kolektivnímu modelu rizika, jeho definice, rozdělení a charakteristiky. Pak byla popsána aproximace kolektivního modelu rizika. Největší pozornost byla zaměřena na aproximaci normálním rozdělením a posunutým gama rozdělením. V práci jsou však uvedeny i další možnosti aproximace.

Na základě teoretických poznatků byly provedeny dané postupy v praktických ukázkách. Nejdříve bylo zapotřebí odhadnout parametry předpokládaného rozdělení individuálních pojistných plnění, kterými bylo lognormální, gama a Paretovo rozdělení. K těmto odhadům byl použit program Microsoft Excel i systém STATGRAPHICS Centurion XV. V programu Excel byly provedeny dvě metody odhadů, a to metoda maximální věrohodnosti u lognormálního a Paretova rozdělení a metoda momentů u všech rozdělení. Na základě těchto odhadů následovalo ověření vhodnosti daného rozdělení pomocí testů dobré shody. V programu Excel byl použit pouze Kolmogorovův-Smirnovův test. Pro výpočetní pracnost těchto odhadů k ověření dobré shody byl použit systém Statgraphics. Tento systém je založen pouze na maximálně věrohodném odhadu parametrů a to byl důvod, proč se výsledky z programu Excel a STATGRAPHICS liší.

V programu Microsoft Excel byli pro ověření vhodnosti předpokládaného rozdělení použity Kolmogorov-Smirnov test a Pearsonův  $\chi^2$ -test. Na základě těchto testů byla přijata hypotéza, že jako vhodný model individuálních pojistných plnění může být přijato lognormální rozdělení a Paretovo rozdělení. Pomocí systému STATGRAPHICS Centurion XV bylo jako vhodný model pojistných plnění přijato pouze lognormální rozdělení. Příčinou odlišnosti těchto výsledků je to, že u Paretova rozdělení byla pro odhad parametrů v programu Excel použita metoda momentů a v systému STATGRAPHICS Centurion XV metoda maximální věrohodnosti.

Po těchto krocích následovala samotná aproximace kolektivního modelu rizika a určení rizikové přírážky v programu Excel.

Získané výsledky pak slouží k posouzení rizik, které na sebe pojišťovna přebírá od všech pojištěných. K jejich posouzení musí pojišťovna přistupovat velmi zodpovědně, protože jde o velmi náročný problém, od kterého řešení se vyvíjí stanovení pojistného a tím i zajistného.

Hlavním přínosem diplomové práce je teoretický postup aproximace kolektivního modelu rizika i praktické ukázky jeho aplikace pomocí vhodných programů. V příslušných kapitolách jsou výpočtové tabulky těchto programů uvedeny pouze ve zkrácené verzi. Z důvodu velkého objemu dat jsou výpočtové tabulky uvedeny v příloze.



## SEZNAM LITERATURY

- [1] ARLTOVÁ, M.ŘEZANKOVÁ, H. *Statgraphics (zadávání úloh)*. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, 1995. 57 s. ISBN 80-7079-306-6.
- [2] BOLAND, P. J. *Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science*. London: Chapman&Hall/CRC, 2007. 351 s. ISBN 978-1-58488-695-2.
- [3] BOOTH, P., CHADBURN, R., COOPER, D., HABERMAN, S., JAMES, D. *Modern Actuarial Theory and Practice*. Chapman&Hall/CRC, 1999. ISBN 0-8493-0388-5.
- [4] CIPRA, T. *Pojistná matematika, Teorie a praxe*. Praha: nakladatelství Ekopress s. r. o., 2006. 411 s. ISBN 80-86929-11-6.
- [5] CIPRA, T. *Finanční a pojistné vzorce*. 1. vyd. Praha : Grada, 2006. 374 s. ISBN 80-247-1633.
- [6] C.M. DICHSON, D. *Insurance risk and ruin*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. ISBN 0521 84640 4.
- [7] DUCHÁČKOVÁ, E. *Principy pojištění a pojišťovnictví*. Praha: nakladatelství Ekopress s. r. o., 2005. 178 s. ISBN 80-86119-92-0.
- [8] MAJTÁNOVÁ, A. DAŇHEL, J. DUCHÁČKOVÁ, E. KAFKOVÁ, E. *Poist'ovnictvo, Teória a prax*. Praha: : nakladatelství Ekopress s. r. o., 2006. 288 s. ISBN 80-86929-19-1.
- [9] KAAS, R. *Modern actuarial risk theory*. Dordrecht : Kluwer Academic, 2001. 306 s. ISBN 1-4020-2952-7.
- [10] KAHOUN, V., VURM, V., KUČEROVÁ, B. *Vybrané kapitoly z pojišťovnictví*. Praha: Triton, 2008. 87 s. ISBN 978-80-7387-130-7.
- [11] KUBANOVÁ, J. *Statistické metody pro ekonomickou a technickou praxi*. Bratislava: Statis, 2004. 249 s. ISBN 80-85659-37-9.
- [12] PACÁKOVÁ, V. *Aplikovaná poistná štatistika*. Bratislava: vydavateľství IURA EDITION, 2004. 261 s. ISBN 80-8078-004-8.

- [13] PACÁKOVÁ, V. Modelovanie a simulácia rizík v neživotnom pojištění. *Ekonomika a management*. roč. 10, Technická univerzita v Liberci, 3/2007, ISSN 1212-3609.
- [14] PACÁKOVÁ, V. *Využitie Paretovho rozdelenia v neproporciálnom zaistení*. Forum Statisticum Slovacum, 7/2009. 125 s. ISSN 1336-7420.
- [15] ZLATÁ KORUNA. Co byste měli vědět o neživotním pojištění [online]. [cit. 2010-01- 12] Dostupné na: <<http://www.penizevip.cz/clanky/498-492-nezivotni-pojisteni/14565-co-byste-meli-vedet-o-nezivotnim-pojisteni>>.

## **POUŽITÉ PROGRAMY**

Microsoft Office Excel 2007

STAGRAPHS CENTURION XV

## **PŘÍLOHY**

**CD – výpočetní postup v programu Excel**