

Univerzita Pardubice
Dopravní fakulta Jana Pernera

**Měření deformací na součásti pomocí tenzometrického měření a
ověření výsledků metodou MKP**

Jan Doutnáč

Bakalářská práce
2010

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Jan DOUTNÁČ**
Studijní program: **B3709 Dopravní technologie a spoje**
Studijní obor: **Provozní spolehlivost dopravních prostředků a infrastruktury**
Název tématu: **Měření deformací na součásti pomocí tenzometrického měření a ověření výsledků metodou MKP**
Zadávací katedra: **Katedra dopravních prostředků a diagnostiky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Cílem bakalářské práce je měření deformací na součásti pomocí tenzometrického snímače. Z naměřených výsledků výpočet napětí a ověření výsledků pomocí metody konečných prvků (pomocí software ANSYS). Nedílnou součástí bakalářské práce je zpracování teorie tenzometrického měření a metody MKP.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam odborné literatury:

Michalec, Jiří: Pružnost a pevnost I, 1 vydání, Praha:Vydavatelství ČVUT, 1995

Němec, Jindřich: Odporové tenzometry v praxi,1. vydání, Praha: Statní nakladatelství technické literatury,1967.

Vedoucí bakalářské práce:

Ing. Michal Musil, Ph.D.

Katedra dopravních prostředků a diagnostiky

Datum zadání bakalářské práce: **26. února 2010**

Termín odevzdání bakalářské práce: **31. května 2010**



prof. Ing. Bohumil Culek, CSc.

děkan

L.S.



doc. Ing. Miroslav Tesař, CSc.

vedoucí katedry

dne

Prohlášení autora

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 26. 05. 2010

.....

Jan DOUTNÁČ

ANOTACE

Cílem bakalářské práce je měření deformací na součásti pomocí tenzometrického snímače. Z naměřených výsledků výpočet napětí a ověření výsledků pomocí metody konečných prvků (pomocí software ANSYS). Nedílnou součástí bakalářské práce je zpracování teorie tenzometrického měření a metody MKP.

KLÍČOVÁ SLOVA

tenzometrické snímače, MKP, napětí, deformace, nejistoty měření, diskretizace

TITLE

Measurement of deformation on the part through the strain gage and confirmation through the FEM.

ANNOTATION

The target of bachelor thesis is deformation measurements of the beam with the assistance of tensometer. Calculation of tension from measured results and verification with a help of FEM (software ANSYS). Part of bachelor thesis is theory of tensometric measurements and FEM theory.

KEYWORDS

tensometer sensing element, FEM, stress, deformation, measurement uncertainty, discretization

PODĚKOVÁNÍ

V prvé řadě bych rád poděkoval své rodině, především rodičům že mě vždy vedly ke studiu. Velké dík patří mé přítelkyni za podporu a trpělivost v době studia a především v době příprav na zkoušky, kdy se snažila vytvářet ty nejlepší podmínky pro studium. Dále bych chtěl poděkovat svému zaměstnavateli za umožnění studia při zaměstnání.

Děkuji vedoucímu práce panu Ing. Michalu Musilovi, Ph.D. za obětavost, čas, důležité rady, poskytnutí prostoru a vybavení pro provedení experimentu.

Obsah

Úvod	9
1 Tenzometrické snímače	10
1.1 Aplikace tenzometrických snímačů	10
1.2 Měřicí obvody	11
1.3 Lepení tenzometrů	11
1.4 Měřící ústředna	12
1.5 Odvození základních vzorců	12
1.6 Výpočet obvodu	14
1.7 Nejistoty měření	16
1.7.1 Nejistota typu A (označení u_A)	16
1.7.2 Nejistota typu B (označení u_B)	17
2 Základní principy pružnosti a pevnosti	21
2.1 Předpoklady řešení:	21
2.2 Saint-Venantův princip:	21
2.3 Jednoosá napjatost:	21
2.4 Přetvoření	22
2.5 Pracovní diagram	23
2.6 Hookeův zákon	24
2.7 Poissonovo číslo	25
2.8 Výpočet napětí při ohybu nosníku	26
3 Metoda konečných prvků	28
3.1 Historie	28
3.2 Charakteristika	29
3.3 Diskretizace	30
4 Experimentální nosník	31
4.1 Popis nosníku a zatěžovacích stavů	31
4.2 MKP model	33
4.3 Výpočet napětí	40
4.4 Porovnání výsledků	41
5 Závěr	43
Literatura	45
Seznam obrázků	
Obrázek 1: Schéma zapojení měřícího obvodu	14
Obrázek 2: Štítek z obalu snímače	17
Obrázek 3: Geometrické nepřesnosti	18
Obrázek 4: Jednoosá napjatost	21
Obrázek 5: Přírůstek délky při přetvoření	22
Obrázek 6: Pracovní diagram	23
Obrázek 7: Deformace nosníku	25
Obrázek 8: Zatížení nosníku	26
Obrázek 9: Průběh M_0	26
Obrázek 10: Kvadratický moment průřezu	27
Obrázek 11: Diskretizace kruhu	30
Obrázek 12: Měřený nosník	31
Obrázek 13: Rozměrový nárt nosníku	32
Obrázek 14: Okrajové podmínky	34
Obrázek 15: Výsledné normálové napětí	36
Obrázek 16: Napětí v místě tenzometru 1	36
Obrázek 17: Napětí v místě tenzometru 2	36

Obrázek 18: Výsledné normálové napětí.....	37
Obrázek 19: Napětí v místě tenzometru 1	37
Obrázek 20: Napětí v místě tenzometru 2	37
Obrázek 21: Výsledné normálové napětí.....	38
Obrázek 22: Napětí v místě tenzometru 1	38
Obrázek 23: Napětí v místě tenzometru 2	38
Obrázek 24: Výsledné normálové napětí.....	39
Obrázek 25: Napětí v místě tenzometru 1	39
Obrázek 26: Napětí v místě tenzometru 2	39
Obrázek 27: Průběh M_0	40
Obrázek 28: Grafické porovnání výsledků v místě tenzometru I. (81N)	41
Obrázek 29: Grafické porovnání výsledků v místě tenzometru II. (81N).....	41
Obrázek 30: Grafické porovnání výsledků v místě tenzometru I. (161,5N)	42
Obrázek 31: Grafické porovnání v místě tenzometru II. (161,5N)	42

Úvod

V současné době je jednou z nejdůležitějších činností konstruktéra navrhnout součást tak, aby snesla požadované zatížení po dobu své životnosti a přitom byla ekonomicky výhodná. K tomu je zapotřebí navrhnout součást tak, aby byl plně využit materiál, z kterého je vyrobena a rozložení napětí nevykazovalo oblastí s příliš vysokým napětím a oproti tomu oblasti téměř bez napětí, což samozřejmě není vždy možné. K ulehčení práce nám v současné době slouží především výpočetní programy a samozřejmě měření napětí na již vyrobené součásti pomocí tenzometrických snímačů.

Cílem mé práce je porovnat výsledky těchto dvou odlišných metod mezi sebou na jednoduché součásti a výsledky ověřit i klasickým výpočtem, čímž ověřit důvěryhodnost těchto odlišných metod.

Práce se skládá ze čtyř hlavních částí. První tři části popisují teorii tenzometrického měření, pružnosti a pevnosti a metody konečných prvků. Poslední kapitola srovnává výsledky z praktického měření a výpočtu.

1 Tenzometrické snímače

Jedná se o zařízení sloužící k měření deformace na povrchu tělesa, která je převedena na změnu elektrického odporu. Jde o elektrický odporový snímač, který je tvořen drátkem z vhodného materiálu a podložkou na které je drátek připevněn.

Pomocí výpočtu a znalosti Hookova zákona je deformace převedena na povrchové napětí vyšetřované součásti. Tenzometrický snímač pracuje na principu změny ohmického odporu vodiče při prodlužování a současném zužování příčného profilu. Při zatížení vyšetřovaného tělesa dochází k deformaci krajních vláken. Tato deformace je přenesena na tenzometrický snímač čímž dochází k deformaci odporového drátku a tím i změně odporu snímače. Závislost mezi poměrnou deformací a poměrnou změnou odporu nazýváme konstantou snímače. Hodnota konkrétní konstanty je uvedena u každého snímače. Pro správnou funkci je potřeba, aby snímač splňoval následující podmínky: [1]

- Citlivost snímačů vyjádřená poměrnou změnou odporu musí být co možná největší.
- Celkový odpor snímače musí být co možná největší, aby se nežádoucí vliv odporů v měřicím obvodu a jejich změny udržely na co možná nejmenší hodnotě.
- Teplotní koeficient odporu musí být malý, aby se chyby způsobené kolísáním teploty, zmenšily na minimum.
- Drátek musí být dobře zpracován, aby nebyl křehký a dal se pájet.
- Drátek snímače musí vykazovat v co největším rozsahu lineární závislost mezi poměrnou deformací a změnou odporu drátku.

V současné době se tenzometry vyrábějí ve dvou základních provedeních, a to kovovém a polovodičovém (křemíkovém). Měřicí mřížky kovových tenzometrů jsou nejčastěji vinuty z konstantanového drátku. U kovových tenzometrů je změna ohmického odporu způsobena změnou průřezu drátku (fólie) měřicí mřížky a její délky, u polovodičových tenzometrů ve tvaru tyčinky je způsobena především změnou jejího měrného odporu – což je primární projev piezorezistentního jevu. Předností polovodičových tenzometrů je vysoká citlivost – přibližně 60× větší než kovových tenzometrů.

1.1 Aplikace tenzometrických snímačů

V současné době se tenzometrické snímače uplatňují hlavně v ověřování již vyrobených konstrukcí nebo jako měřicí člen v různých siloměrech, snímačích krouticího momentu, snímačů tlaku, diagnostických zařízení atd. Jejich výhodou je že lze proměřovat složité

sestavy a to při provozním nebo testovacím zatížení kdy okrajové podmínky odpovídají reálnému stavu což u metody MKP není vždy možné. Samozřejmostí je měření jak při dynamickém tak statickém zatížení. Další výhodou je, že při aplikaci na konkrétní součást jsou do měření zahrnuty jak výrobní tak materiálové nepřesnosti.

1.2 Měřící obvody

Aby se dala měřit deformace s nalepenými tenzometry, musí být připojeny k elektronickému obvodu, jenž je schopen odpovídající změny odporu snímat. Převodníky pro tenzometry mají obvykle vstupy pro čtyři tenzometry elektricky spojeny do Wheatstoneova můstku. V současné době se také používá zapojení do tzv. polovičního Wheatstoneova můstku, který využívá dvou rezistorů umístěných uvnitř zesilovače a společně s měřicími tenzometry tvoří plný můstek. Wheatstoneův můstek je také velmi vhodný pro teplotní kompenzaci. V každém obvodu jsou zapojeny dva tenzometry, jeden aktivní a jeden jako kompenzační. Kompenzační slouží k eliminaci vlivu teploty a je přilepen v blízkosti měřicího tenzometru na destičku z materiálu, jako je měřená součást. Destička je k součásti přilepena tak, aby nedocházelo k přenosu napětí na destičku. Před měřením je zapotřebí můstek vyvážit, tj. napětí na $U_m = 0$. Jakmile dojde ke změně odporu aktivního tenzometru v důsledku deformace rovnováha můstku se poruší a na svorkách U_m se objeví rozdíl napětí. Výstupní napětí Wheatstoneova můstku se vyjadřuje v mV na Volt (mV/V) napájecího napětí.

1.3 Lepení tenzometrů

Kvalita nalepení je jedním z nejdůležitějších činitelů ovlivňujících přesnost měření. Před nalepením snímače je důležité místo důkladně očistit a odmastit. Nejprve vybrousíme ruční bruskou nebo hrubým smirkovým plátnem plošku pro umístění snímače. Na povrchu nesmí zůstat viditelné stopy po broušení proto se povrch vyrovná jemným smirkovým plátnem a zároveň dostatečně zdrsňuje pro správné přilnutí lepidla. Po té se povrch dokonale očistí a odmastí vhodným přípravkem (na bázi acetonu). K nanášení lepidla používáme ploché štětečky. Nejprve nanese slabou vrstvičku lepidla, necháme po krátkou dobu zaschnout. Dále se nanese lepidlo na rub snímače a na plošku kam přijde snímač nalepit. Snímač přiložíme na připravenou plošku, konečky prstů jemně přes papírek vymáčkeme přebytečné lepidlo a vzduch. Snímač přidržujeme celou jeho plochou po dobu nezbytně nutnou k dostatečnému vytvrzení lepidla. Při lepení je nutné dodržovat následující zásady:

- Dodržovat důkladnou čistotu měřeného místa a veškerých chemikálií potřebných k nalepení snímače.

- Snímač správně nasměrovat ve směru měřené deformace a zároveň i umístit na správné místo.
- Použít pouze tenkou vrstvu lepidla.
- Mezi měřenou konstrukcí a tenzometrem nesmí dojít k průrazu (odpor minimálně 100 MΩ).

Po nalepení je vhodné snímač chránit vůči nepříznivým vlivům (vlhkost, agresivní látky, nečistoty) a to buď zažehlením pod vrstvu vosku, vhodnou folii nebo ochranným gelem.

1.4 Měřicí ústředna

Pro naše měření byla použita měřicí ústředna DMC Plus - HBM, jedná se o plně digitální měřicí systém spolupracující s PC prostřednictvím sběrnice GPIB, celý proces měření i záznam naměřených dat je řízen a realizován příslušným softwarem – Catman32. Měřicí systém DMC Plus umožňuje 18-kanálové měření ve statickém a dynamickém režimu, přičemž je možno využít vzorkovací frekvence až 9600 Hz na kanál. Měřicí systém umožňuje využít online i offline digitální filtraci měřených signálů. Pro připojení tenzometrů jsou používány dvoukanálové měřicí moduly DV 55.

1.5 Odvození základních vzorců

Jedním ze základních vzorců je výpočet ohmického odporu:

$$R = \rho \cdot \frac{l_0}{A} \quad [\Omega] \quad (1.1)$$

kde ρ měrný elektrický odpor materiálu drátku [Ω/m];

l_0 délka drátku [m];

A plocha průřezu drátku [m^2];

Poměrnou změnu odporu vyjádříme jako

$$\frac{dR}{R} \quad (1.2)$$

kde si dR vyjádříme jako parciální derivaci přes všechny proměnné

$$dR = d\rho \cdot \frac{l_0}{A} + dl \cdot \frac{\rho}{A} - \frac{dA}{A^2} \cdot \rho \cdot l \quad (1.3)$$

po dosazení (1.1) a (1.3) do (1.2) dostaneme

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dl}{l} - \frac{dA}{A} \quad (1.4)$$

dále platí

$$A = \pi \cdot r \quad (1.5)$$

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi \cdot r \Rightarrow dA = 2\pi \cdot r dr \quad (1.6)$$

pomocí (1.5) a (1.6) vyjádříme

$$\frac{dA}{A} = \frac{2}{r} dr \quad (1.7)$$

pomocí definice Poissonova čísla vyjádříme poměrné zúžení

$$\mu = \frac{-\frac{dr}{r}}{\frac{dl}{l}} \Rightarrow \frac{dr}{r} = -\mu \cdot \frac{dl}{l} \quad (1.8)$$

po té pomoci (1.7) a (1.8) dostaneme

$$\frac{dA}{A} = -2\mu \cdot \frac{dl}{l} \quad (1.9)$$

(1.9) dosadíme do (1.4)

$$\begin{aligned} \frac{dR}{R} &= \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dl}{l} + 2\mu \cdot \frac{dl}{l} \\ \frac{dR}{R} &= \frac{dl}{l} \cdot \left[1 + 2\mu + \frac{d\rho \cdot l}{\rho \cdot dl} \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

přičemž $\left[1 + 2\mu + \frac{d\rho \cdot l}{\rho \cdot dl} \right]$ nazýváme deformační konstantou tenzometru, značíme K_d .

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (1.11)$$

Kde ε značíme relativní deformaci (poměrné prodloužení). Po dosazení (1.11) do (1.10) dostaneme:

$$\frac{dR}{R} = \frac{dl}{l} \cdot K_d = \varepsilon \cdot K_d \quad (1.12)$$

Výslednou poměrnou změnu získáme pomocí integrace (1.12)

$$\begin{aligned} \int_R^{R+\Delta R} \frac{dR}{R} &= K_d \cdot \int_l^{l+\Delta l} \frac{dl}{l} \\ \lg \frac{R+\Delta R}{R} &= K_d \cdot \lg \frac{l+\Delta l}{l} \end{aligned}$$

$$K_d \cdot \ln \frac{l + \Delta l}{l} = K_d \cdot \ln(1 + \varepsilon) = \ln(1 + \varepsilon)^{K_d}$$

a po odlogaritmování dostaneme

$$\frac{R + \Delta R}{R} = (1 + \varepsilon)^{K_d}$$

$$\left(1 + \frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{1}{K_d}} = 1 + \varepsilon \quad (1.13)$$

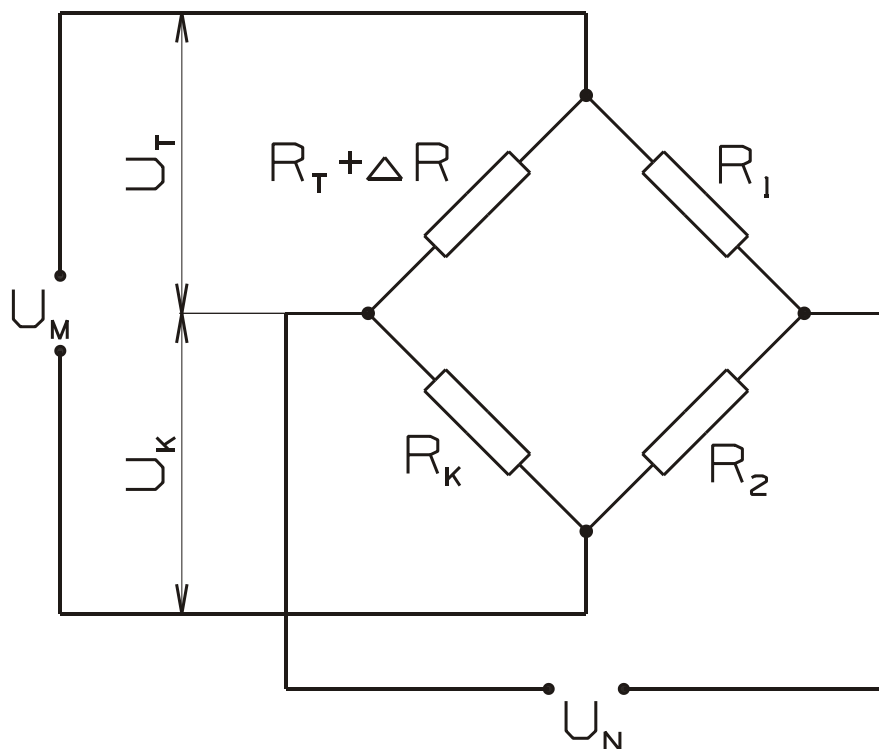
závislost poměrné deformace na změně odporu je

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{1}{K_d}} - 1 \quad (1.14)$$

Pomocí Hookova zákona vypočteme z poměrné deformace velikost napětí

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \text{ [MPa]}$$

1.6 Výpočet obvodu



Obrázek 1: Schéma zapojení měřícího obvodu

Zdroj: Autor

Použité veličiny:

- R_T odpor měřicího tenzometru [Ω];
- R_K odpor kompenzačního tenzometru [Ω];
- R_1, R_2 odpor uvnitř zesilovače kde $R_1 = R_2$ [Ω];
- R_{Δ} změna odporu měřicího tenzometru [Ω];
- U_N napájecí elektrické napětí [V];
- U_M měřené elektrické napětí [V];

Pro zapojení dle schématu platí:

$$\frac{U_T}{U_N} = \frac{R_T + \Delta R}{R_T + \Delta R + R_1} \quad (1.15)$$

$$\frac{U_R}{U_N} = \frac{R_K}{R_K + R_2} \quad (1.16)$$

$$U_M = U_T - U_R \quad (1.17)$$

Při vyvážení můstku platí: $R_T = R_K = R_1 = R_2 = R$ což dosadíme do (1.15), (1.16) a po té do (1.17):

$$\begin{aligned} U_M &= \frac{R + \Delta R}{2R + \Delta R} \cdot U_N - \frac{R}{2R} \cdot U_N \\ U_M \cdot (2R + \Delta R) &= U_N (R + \Delta R) - \frac{1}{2} U_N \cdot (2R + \Delta R) \\ 2U_M R + U_M \Delta R &= U_N R + U_N \Delta R - \frac{1}{2} U_N 2R - \frac{1}{2} U_N \Delta R \\ 2U_M R &= \Delta R \cdot \left(U_N - \frac{1}{2} U_N - U_M \right) \\ \frac{2U_M R}{U_N - \frac{1}{2} U_N - U_M} &= \Delta R \\ \frac{4U_M R}{U_N - 2U_M} &= \Delta R \end{aligned} \quad (1.18)$$

Což dosadíme do vztahu pro stanovení poměrné deformace (1.14):

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{\Delta R}{R} \right)^{\frac{1}{K_d}} - 1 = \left(1 + \frac{4U_M}{U_N - 2U_M} \right)^{\frac{1}{K_d}} - 1$$

Člen $2U_M$ můžeme vzhledem k jeho velikosti zanedbat, pak dostaneme:

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{4U_M}{U_N}\right)^{\frac{1}{K_d}} - 1 \quad (1.19)$$

Po dosazení do Hookeovův zákonu $\sigma = E \cdot \varepsilon$ dostaneme:

$$\sigma = E \cdot \left[\left(1 + \frac{4U_M}{U_N}\right)^{\frac{1}{K_d}} - 1 \right] \quad (1.20)$$

Vztah (1.20) použijeme pro kalibraci ústředny kde:

$$K_D = 2,03$$

$$U_N = 1 \text{ V}$$

$$U_M = 1 \text{ mV/V}$$

$$\sigma = 2,1 \cdot 10^5 \cdot \left[\left(1 + \frac{4 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{1}\right)^{\frac{1}{2,03}} - 1 \right]$$

$$\underline{\sigma = 413,7 \text{ MPa}}$$

1.7 Nejistoty měření

Při měření získáváme hodnotu, která je zatížena chybou lišící naměřenou hodnotou od hodnoty skutečné. Tato chyba je definována jako rozdíl naměřené hodnoty od hodnoty skutečné přičemž skutečná hodnota nám není známa. Chyby měření se vyskytují náhodně a dosahují jak kladných tak i záporných hodnot přičemž menší chyby jsou pravděpodobnější, větší chyba spíše vypovídá o hrubé chybě anebo nedodržení správného měřicího postupu. Vzhledem k těmto chybám hovoříme o nejistotě měření. Standardní nejistoty měření dělíme podle způsobu vyhodnocování na:

- Standardní nejistota typu A
- Standardní nejistota typu B
- Kombinovaná nejistota

1.7.1 Nejistota typu A (označení u_A)

Její hodnota s počtem měření klesá a vychází z Gaussovy teorie chyb z tzv. křivky normálního rozdělení. Nejistota typu A odpovídá směrodatné odchylce. Za předpokladu normálního rozdělení, pak pravděpodobnost, že se hodnota náhodné veličiny bude od střední hodnoty lišit nejvýše o jednu směrodatnou odchylku odpovídá 68% pravděpodobnosti správného výsledku. Nejistotu typu A vypočteme ze vztahu:

$$u_A = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

kde

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Stanovit nejistotu typu A má význam v případě s minimálním počtem měření větší jak 10 což v našem měření nebylo provedeno a proto nebudeme nejistotu typu A uvádět.


1.7.2 Nejistota typu B (označení u_B)

Její hodnota nezávisí na počtu opakování měření, ale na použitém měřicím řetězci. Patří sem tedy chyby měřicích přístrojů, použitých metod měření, podmínek měření atd. V našem případě se bude jednat o nejistotu tenzometrického snímače, geometrické polohy umístění snímače, nejistota měřicího zesilovače a nejistota kabelu propojující měřicí zesilovač s PC. Nejistota hardwaru a softwaru se neuvažuje vzhledem k tomu že signál je v digitální podobě a bylo použito pouze ověřený software.

Výsledná nejistota typu B se stanoví sloučením dílčích nejistot různého původu použitím zákona šíření nejistot.

Nejistota tenzometrického snímače

Nejistota odporu a deformačního faktoru tenzometrického snímače se stanoví na základě hodnot uvedených výrobcem na obalu snímače.

 Dehnungsmeßstreifen Strain Gauges Jauges d'extensométrie			
Widerstand Resistance Résistance	120.00	[Ω]	± 0.35 [%]
k-Faktor Gauge factor Facteur k	2.03		± 1 [%]
Querempfindlichkeit Transverse Sensitivity Sensibilité transverse			-0,1 [%]

Obrázek 2: Štítek z obalu snímače
Zdroj: Autor

Uvažujeme-li normální rozdělení pravděpodobnosti hodnot, redukuje se nejistota vztažená k odporu snímače součinitelem hodnoty 3 dle [1].

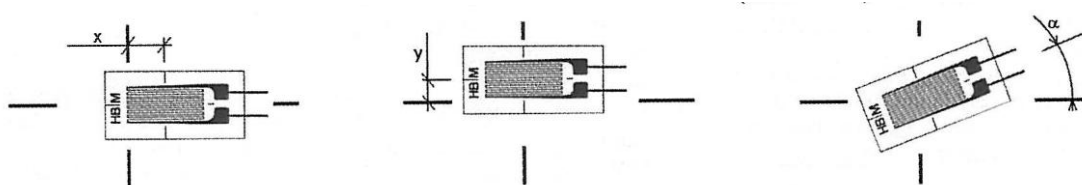
$$u_{B0} = \pm \frac{0,35}{3} = \pm 0,12\%$$

Nejistota deformačního K-faktoru snímače předpokládá odchylku výsledku měření podle rozdělení pravděpodobnosti rovnoměrného, pak se redukuje K-faktor součinitelem hodnoty 1,73 dle [1].

$$u_{B1} = \pm \frac{1}{1,73} = \pm 0,58\%$$

Nejistota geometrie snímače

Její velikost vyplývá z míry přesnosti nalepení snímače. Pro snadnější zapolohování je každý snímač opatřen osovým křížem a taktéž na měřené součásti je předem orýsován střed místa určeného pro nalepení snímače. Přípustná míra nepřesnosti činí 0,2 mm v ose x a y a 3° natočení od podélné roviny.



Obrázek 3: Geometrické nepřesnosti

Zdroj: Metodika AL-M-06

Vzhledem k naší konstrukci můžeme uvažovat výchylku v ose y nulovou, jelikož velikost napětí je po celé šířce konstantní. U snímače I. můžeme vzhledem k poloze v oblasti s konstantním M_0 uvažovat za nulovou i výchylku v ose x.

Maximální poměrná deformace tenzometru řady Y je 50 mm/m. Potom je koeficient změny dán vztahem:

$$k = \frac{50}{x}$$

Kde x je nejvzdálenější plocha hrany tenzometru vzhledem k neutrální ose.

Nejistotu měření při předpokladu rozdělení pravděpodobnosti odchylky měření rovnoměrného stanovíme dle [1].

$$u_{B2} = k \cdot \frac{\Delta x}{3}$$

kde Δx je definovaná přípustná míra nepřesnosti nalepení.

Nejistota z hlediska natočení snímače vůči podélné ose nosníku závisí na velikosti měřené poměrné deformace. Jestliže je osa snímače vychýlená o úhel α , pak pro délku měřeného vlákna nezatíženého nosníku l_{0N} vůči délce snímače l_{0T} platí vztah:

$$l_{0N} = \cos \alpha \cdot l_{0T}$$

a při zatížení dojde k prodloužení snímače vůči měřenému vláknu o délku Δl_{0T} :

$$\Delta l_T = \cos \alpha \cdot \Delta l_N$$

Výslednou nejistotu určíme z rozdílu poměrných deformací tenzometru a nosníku. Vzhledem k normálnímu rozdělení chyby musíme celou hodnotu dělit 3.

$$u_{B3} \cdot 3 = \varepsilon_N - \varepsilon_T = \frac{\Delta l_N}{l_{0N}} - \varepsilon_T = \frac{\Delta l_T}{\cos \alpha \cdot l_{0T}} - \varepsilon_T = \frac{\Delta l_T}{\cos^2 \alpha \cdot l_T} - \varepsilon_T$$

$$u_{B3} = \frac{\varepsilon_T \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right)}{3}$$

Nejvyšší hodnota napětí, kterou jsme naměřilo bylo 55 MPa, potom tedy:

$$\varepsilon_T = \frac{\sigma}{E} = \frac{55}{210000} = 2,62 \cdot 10^{-4}$$

a

$$u_{B3} = \frac{2,62 \cdot 10^{-4} \left(\frac{1}{\cos^2 3} - 1 \right)}{3} = 2,39 \cdot 10^{-7} \text{ m/m} = 0,239 \mu\text{m/m}$$

Nejistota lepidla

Pro lepení bylo použito lepidlo HBM Z70, pro které je plastická deformace při třetím a dalším cyklu 0,5 $\mu\text{m/m}$, potom tedy:

$$u_{B4} = 0,5 \mu\text{m/m}$$

Nejistota měřícího zesilovače

Pro nejistotu měření zde použijeme Gaussův zákon šíření nejistot pro nepřímé měřené veličiny:

$$u_{B5} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial X_j} u_{Bj} \right)^2} \quad (1.21)$$

kde $\frac{\partial f}{\partial X_j}$ jsou parciální derivace poměrné deformace

u_{Bj} jsou nejistoty jednotlivých zdrojů

Parciální derivace podle U_M a K_d :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial U_M} = \frac{1}{K_d} \left(1 + \frac{4U_M}{U_N} \right)^{\frac{1}{K_d}-1} \cdot \left(\frac{4}{U_N} \right) \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial K_d} = \left(1 + \frac{4U_M}{U_N} \right)^{\frac{1}{K_d}} \cdot \ln \left(1 + \frac{4U_M}{U_N} \right) \cdot \left(-\frac{1}{K_d^2} \right) \quad (1.23)$$

Po dosazení (1.22) a (1.23) do (1.21) dostaneme výsledný tvar pro určení nejistoty měřícího zesilovače:

$$u_{B5} = \sqrt{\left(\frac{1}{K_d} \left(1 + \frac{4U_M}{U_N} \right)^{\frac{1}{K_d}-1} \cdot \left(\frac{4}{U_N} \right) \right)^2 \cdot u_{BD}^2 + \left(\left(1 + \frac{4U_M}{U_N} \right)^{\frac{1}{K_d}} \cdot \ln \left(1 + \frac{4U_M}{U_N} \right) \cdot \left(-\frac{1}{K_d^2} \right) \right)^2 \cdot u_{B1}^2}$$

kde u_{BD} je nejistota měřícího zesilovače stanovená na základě kalibračního listu.

Výsledná nejistota typu B

Výsledná nejistota typu B se stanoví sloučením dílčích nejistot typu B.

$$u_B = \sqrt{u_{B0}^2 + u_{B1}^2 + u_{B2}^2 + u_{B3}^2 + u_{B4}^2 + u_{B5}^2}$$

Kombinovaná nejistota

Stanovíme sloučením nejistot typu A a B.

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

Rozšířená nejistota měření

Rozšířenou nejistotu měření stanovíme z kombinované nejistoty vynásobené koeficientem rozšíření $k = 2$, což při normálním rozdělení odpovídá 95% pravděpodobnosti správného výsledku.

$$u = k \cdot u_C$$

2 Základní principy pružnosti a pevnosti

Pružnost tělesa: je schopnost tělesa po odstranění vnějších sil se vrátit do původního stavu

Tuhost tělesa: je vyjádřením jeho odolnosti proti deformaci od vnějších sil

2.1 Předpoklady řešení:

1. platnost předpokladu malých poměrných deformací
2. lineární závislost mezi napětím a deformací (Hookeův zákon)
3. platnost St. Vénantova principu
4. materiál -homogenní: tj. stejné složení a vlastnosti v celém objemu
-isotropní: tj. stejné mechanické vlastnosti ve všech směrech

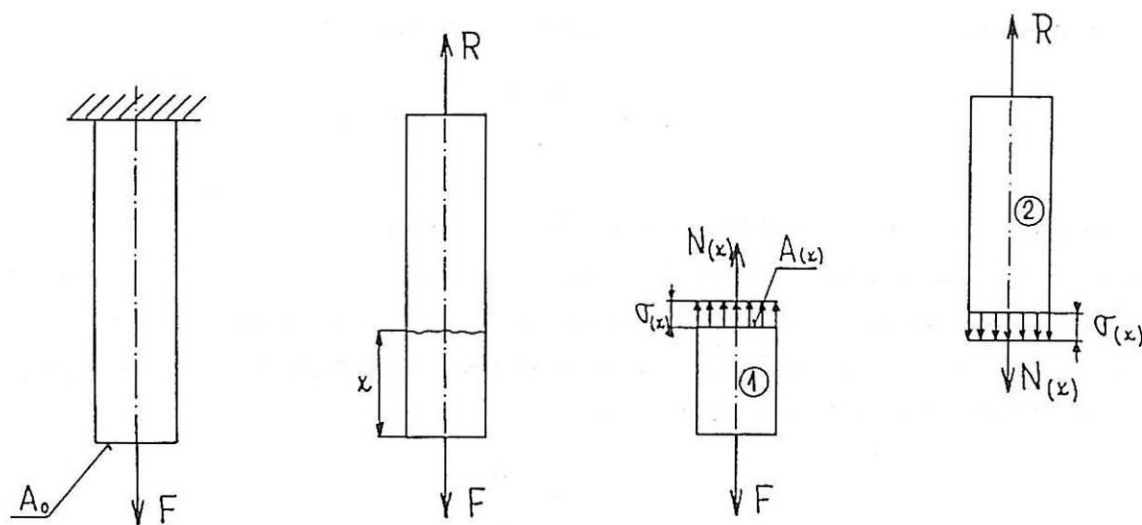
2.2 Saint-Venantův princip:

Vliv místního působení sil a vetknutí součásti se projevuje jen v jeho blízkém okolí a zaniká přibližně ve vzdálenosti řádově rovné příčným rozměrům prutu. Proto vliv vetknutí ve zjednodušených příkladech zanedbáváme.

2.3 Jednoosá napjatost:

Pro řešení nejjednodušších úloh pružnosti a pevnosti používáme metodu řezu. Prut, který je v silové rovnováze rozdělíme myšleným řezem na části. Tuto rovnováhu zajišťují vnitřní síly:

$$F - R = 0$$



Obrázek 4: Jednoosá napjatost

Zdroj: Pružnost a pevnost I.

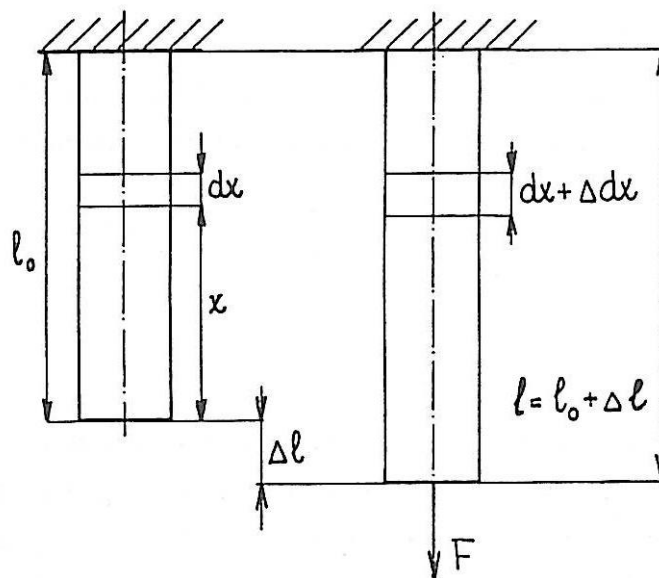
$$\sigma(x) = \frac{dN(x)}{dA(x)} \text{ [MPa]}$$

V případě rovnoměrného rozložení tlaku/tahu:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} \text{ [MPa]}$$

Jelikož napětí je funkcí jedné osy (x) nazýváme tuto napjatost jednoosou.

2.4 Přetvoření



Obrázek 5: Přírůstek délky při přetvoření
Zdroj: Pružnost a pevnost I.

Prut neproměnného průřezu o délce l_0 po zatížení osovou silou změní svou délku na hodnotu l .

Přírůstek délky (absolutní deformace):

$$\Delta l = l - l_0$$

Relativní deformace (poměrné prodloužení):

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Při uvažování pouze elementární části prutu:

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta dx}{dx}$$

V případě že ε není po celé délce prutu konstantní, je nutné změnu délky určit jako součet jednotlivých elementárních změn:

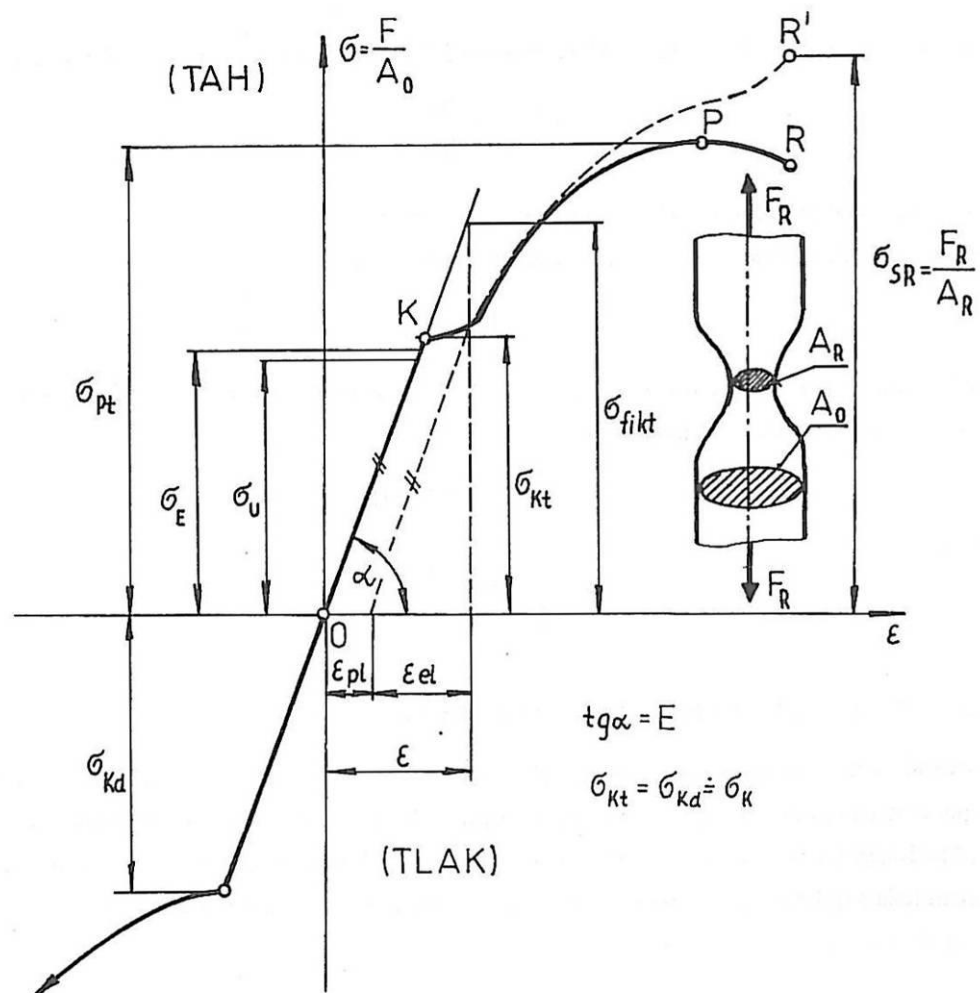
$$\Delta dx = \varepsilon(x) \cdot dx$$

a po integraci:

$$\Delta l = \int_{(l)} \Delta dx = \int_{(l)} \varepsilon(x) \cdot dx$$

2.5 Pracovní diagram

Při tahové zkoušce na trhacím stroji, obdržíme závislost síly a jí odpovídající deformaci. Závislost $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, kde napětí je vztahováno stále k počátečnímu průřezu A_0 , nazýváme smluvní pracovní diagram.



Obrázek 6: Pracovní diagram
Zdroj: Pružnost a pevnost I.

Pro materiál podle obr.5 je závislost $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ až do hodnoty napětí σ_u (mez úměrnosti) lineární. Při zatěžování do hodnoty σ_E (mez pružnosti) nevznikají po odlehčení trvalé deformace, materiál se deformuje pouze pružně. U některých materiálů (polykrystalických) se jednoznačná mez pružnosti prakticky nevyskytuje, v tom případě zavádíme smluvní mez pružnosti $\sigma_{0,005}$, tj. napětí při níž je trvalá deformace po odlehčení 0,005%. Při dosažení napětí meze kluzu σ_k , začnou deformace rychle vzrůstat. Poměrná deformace je pak složená z části vratné – elastické a trvalé – plastické. Řada materiálů nemá výraznou mez kluzu, u nich je zaváděná smluvní mez kluzu, což je napětí, které způsobí určitou trvalou deformaci, většinou se uvádí $\sigma_{0,2}$.

V průběhu zatěžování dochází ke zmenšování příčného průřezu a tím ke změně A_0 , proto má pracovní diagram skutečné napětí $\sigma_s = F/A$ (kde A je okamžitá velikost průřezu). Průběh je znázorněn na grafu čárkovaně a napjetí dosahuje meze R' .

2.6 Hookeův zákon

Lineární část funkční závislosti $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ je matematicky vyjádřena *Hookeovým zákonem* v případě jednoosé napjatosti ve tvaru a vyjadřuje nám lineární závislost napětí na deformaci:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \text{ [MPa]}$$

Konstana E se nazývá modul pružnosti v tahu nebo také Youngův modul. Jednotkou modulu pružnosti je MPa. Modul pružnosti je konstantní v oblasti elastických deformací a je závislý na teplotě.

Na základě znalosti vnitřních sil a Hookeova zákona lze určit deformaci (prodloužení) prutu.

Napětí v obecném řezu x je rovno:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A_0} = \frac{F}{A_0} \text{ [MPa]}$$

Z Hookeova zákona:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{F}{E \cdot A_0}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{F}{E \cdot A_0}$$

Prodloužení Δl :

$$\Delta l = \frac{F \cdot l_0}{E \cdot A_0}$$

V případě že ε není po celé délce konstantní:

$$\Delta d(x) = \frac{F \cdot \Delta dx}{E \cdot A_0}$$

Celkové prodloužení je rovno součtu jednotlivých dílčích prodloužení:

$$\Delta l = \int_{(l_0)} \Delta dx = \int_0^{l_0} \frac{F \cdot dx}{E \cdot A_0}$$

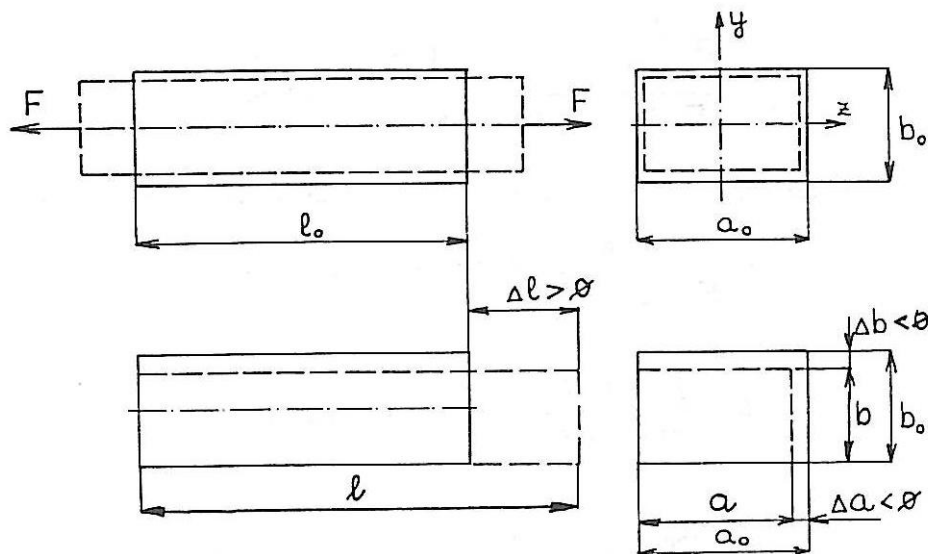
2.7 Poissonovo číslo

Při natahování tyče nedochází jen ke změně jejího podélného rozměru, ale mění se i rozměry příčné. Připojíme-li k poměrným deformacím indexy os, v níž deformaci zjišťujeme, pak vyplývá:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b_0}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta a}{a_0}$$



Obrázek 7: Deformace nosníku
Zdroj: Pružnost a pevnost I.

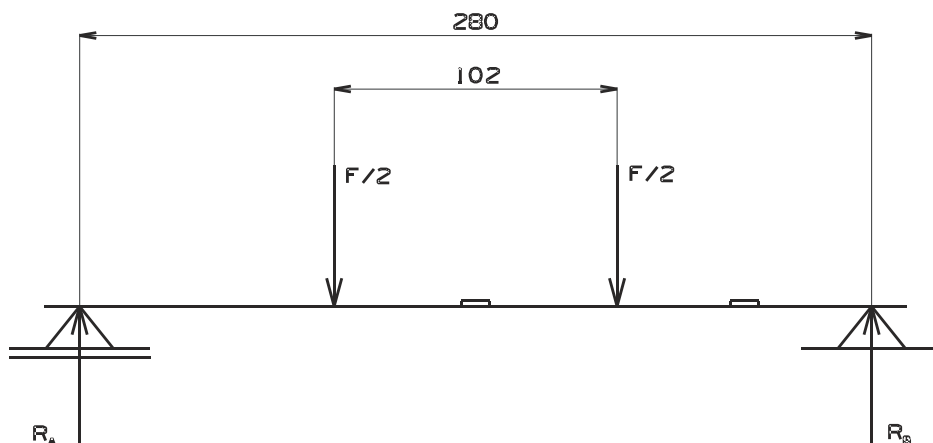
U hodnot ε_x , ε_y vycházejí záporné hodnoty, což značí, že jde o poměrné zkrácení (zúžení). I při jednoosé napjatosti tedy dochází k deformaci ve třech směrech. Součinitel příčného zúžení μ , nazýváme *Poissonovo číslo* a je pro daný materiál v oblasti pružných

deformací přibližně konstantní. Hodnoty μ definujeme při jednoosé napjatosti jako absolutní hodnota poměru příčné a podélné deformace:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right|$$

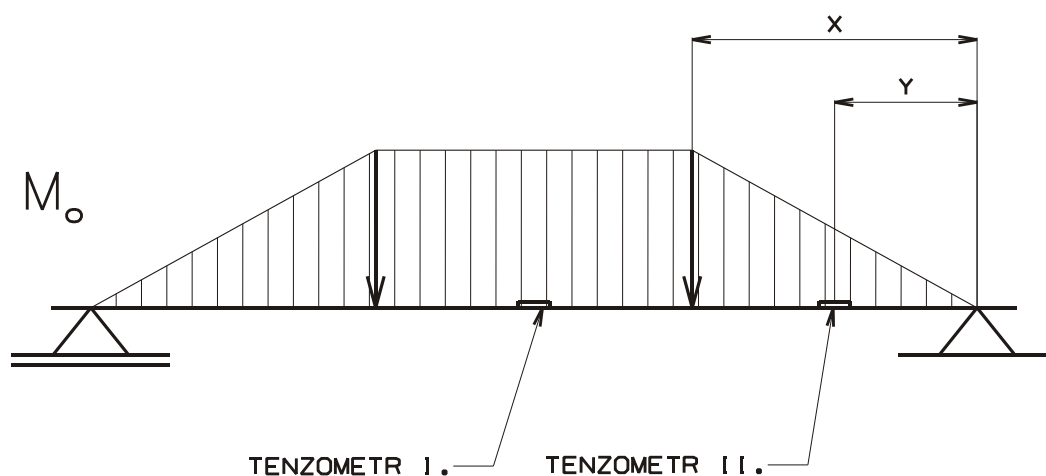
2.8 Výpočet napětí při ohybu nosníku

Vzhled k naší úloze budeme uvažovat pouze nosník zatížený ohybovým momentem, jelikož posouvající síla má pouze zanedbatelný vliv na výsledné napětí. Velikost výsledného napětí je závislé jak na zatížení, tak na způsobu jeho uložení. V našem případě uvažujeme pravou podpěru jako neposuvnou kloubovou podpěru a levou podpěru jako posuvnou kloubovou podpěru.



Obrázek 8: Zatížení nosníku
Zdroj: Autor

Průběh ohybového momentu je zobrazen na obrázku níže.



Obrázek 9: Průběh M_o
Zdroj: Autor

Stopa ohybového momentu je totožná s hlavní centrální osou průřezu proto se jedná o rovinný ohyb.

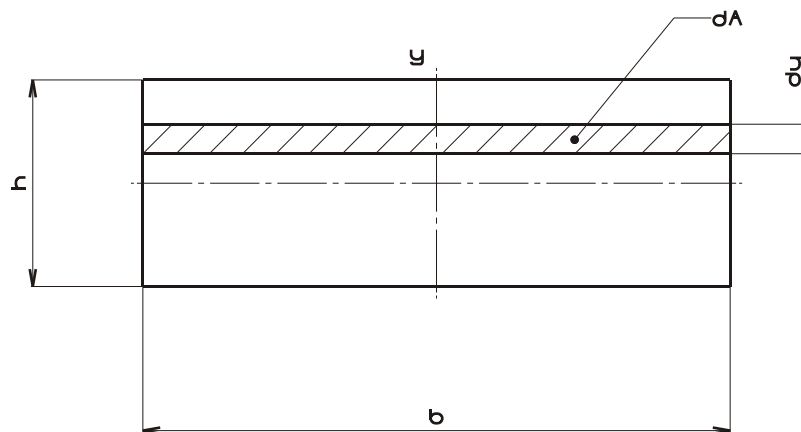
Výpočet ohybového momentu:

$$M_{o1} = \frac{F}{2} \cdot x \quad \text{respektive} \quad M_{o2} = \frac{F}{2} \cdot y$$

Velikost výsledného napětí je přímo úměrná vzdálenosti krajního vlákna od neutrální osy, která se vždy nachází v těžišti průřezu. Což v našem případě vzhledem k souměrnosti nosníku podél os bude znamenat, že velikost napětí v krajních vláknech bude jak v tlaku, tak v tahu stejná. Maximální napětí bude samozřejmě ve vláknech nejvzdálenějších od neutrální osy. Pokud vzdálenost tohoto místa označíme jako e bude pak velikost napětí rovna:

$$|\sigma_{MAX}| = \frac{M_o}{\frac{J_Z}{e}}$$

kde J_Z je kvadratický moment průřezu k neutrální ose.



Obrázek 10: Kvadratický moment průřezu

Zdroj: Pružnost a pevnost I.

$$J_Z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = b \cdot \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b \cdot \left(\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{h}{2}\right)^3}{3} \right) = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$

Člen $\frac{J_Z}{e}$ nazýváme průřezovým modulem v ohybu a značíme jako W_o .

$$W_o = \frac{J_Z}{e} = \frac{\frac{1}{12} b \cdot h^3}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6} b \cdot h^2$$

3 Metoda konečných prvků

3.1 Historie

Metoda vznikla v období kolem roku 1956 ve výzkumném ústavu aeronautické a kosmické mechaniky v Ohio, USA (Wright Paterson Air Force Base). Výzkumný tým byl veden prof. R.W. Cloughem a spolupracovali zejména R.L. Melosh, H.C. Martin, J.L. Tocher a další. Výzkum a vývoj uvedené numerické metody vyvolal striktní požadavek "měsíčního" programu Apollo v oblasti vývoje a konstrukce nosných raket. V daném čase a při známém objemu financí (3 miliardy) se po rozboru zjistilo, že se pomocí experimentu nedá úkol splnit. Zbyla jediná cesta a sice vývoj takové numerické metody, která by výpočty potřebné pro projekty nových typů raket a dalších systémů projektu Apollo zvládla. Výsledky výzkumu byly dále intenzivně využívány na uvedené vojenské základně při projektech letadel, ponorek, raket všech typů, atd. Tato skutečnost způsobila utajení detailů metody tak, že programy a teoretické články ležely nejméně deset roků ve vojenských sejfech. První konference v Ohio (1965 a 1968) uváděly jen kusé informace. Další vývoj byl pak často poznamenán četnými duplicitami v odvození základních "nástrojů" metody (uvádí se, že deskový trojúhelníkový prvek odvodilo na sobě nezávisle aspoň 7 autorů). Je zajímavé, že inženýři s metodou dlouhé roky úspěšně počítali, než matematikové dokázali konvergenci metody a vlastně posvětili desetileté výpočtářské úspěchy. V civilním sektoru se nejbouřlivěji metoda konečných prvků (MKP) rozvíjela v letech 1965-1975. Prvním propagátorem a neochvějným zastáncem metody byl v ČSFR prof. V. Kolář, DrSc. z Brna, který také dosáhl značného mezinárodního uznání. Pomocí MKP se dnes řeší celá řada úloh, jejichž realizace nebyla dosud možná a to nejen v oblasti mechaniky spojitých těles či soustav. Svou obecnou matematickou formulací umožňuje MKP řešit problém: mechaniky hornin, proudění kapalin a plynů, šíření tepla a záření, stacionárních a nestacionárních elektromagnetických polí atd. Dokonce jsou známy pokusy o řešení sociologických úloh a modelování ekonomických problémů. O MKP má smysl hovořit pouze v souvislosti s nasazením na číslicových počítačích - směle se dá říci, že metoda je produktem doby moderních počítačů. V současné době jsou to pro zajímavost vědecko-technické výpočty meteorologů, které mají největší požadavky na velikost a rychlost počítačů tak, aby předpověď počasí pro celou zeměkouli byla vypočítána do dvou hodin po shromáždění naměřených dat.

3.2 Charakteristika

Analýza metodou konečných prvků (MKP) je napodobení fyzikálního systému (geometrie a zatížení) matematickou aproximací reálného systému. Užitím jednoduchých vzájemně spojených bloků nazývaných elementy, je reálný systém s nekonečně mnoha neznámými aproximován systémem s konečným počtem neznámých, tzv. diskretizace. Jedná se o numerickou metodu pro získání přibližného řešení široké třídy inženýrských úloh. Těleso (příp. soustava těles) se nahrazuje odpovídající soustavou menších částí (prvků). Namísto řešení problému celého tělesa je problém formulován pro jeho jednotlivé části, v nichž jsou neznámé f-ce (např. deformace) přibližně popsány jen malým počtem parametrů ve zvolených bodech (uzlech). Dále se systematicky "zkompletuje" řešení pro celé těleso [4].

Velká část inženýrských problémů není bez užití moderních metod analyticky řešitelná. Před nástupem počítačů do praxe se postupovalo tak, že se složitá soustava značně zjednodušila a to tak aby se dali použít již známé vzorce. Používání MKP se rozšířilo v praxi spolu se vzrůstajícím použitím počítačů v konstrukční praxi a v dostupnosti těchto softwarů. Velkou výhodou použití MKP je jeho použití již při vývoji součástí a umožnění optimalizace konstrukce bez zhotovení prototypu, což má za následek velké finanční a časové úspory. V současnosti je MKP široce a podrobně rozpracovávaný vědní obor obsahující tyto části [4]:

- a) teoretická- formulace variačních principů, odvozování vztahů pro různé typy prvků atd.
- b) matematická - problematika vhodných numerických metod, výběr algoritmů, důkazy existence a konvergence řešení, odhad chyby řešení atd.
- c) počítačová: 1) preprocessing - generování vstupních dat, grafické zobrazení členění, vstupní data, okrajové podmínky, zatížení, opravy a úpravy dat atd.
2) processing - výpočet matic prvků, sestavení matic celého systému, sestavení maticových rovnic a jejich řešení atd.
3) postprocessing - výpočty závislých parametrů, výstupní soubory, grafické znázornění výsledků, výstupy výsledků na periferie atd.
- d) inženýrsko problémová - využití možnosti MKP pro konkrétní inž. úlohy tj. dělení tělesa na prvky, výběr typu prvku, výběr vhodného prvku pro danou úlohu, zadání potřebných vstupních údajů, volba forem výstupů atd.

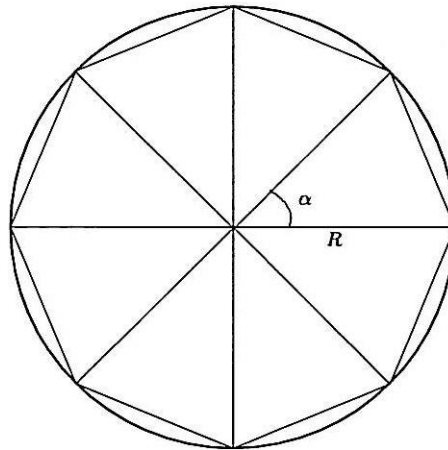
MKP umožňuje řešit kvalitativně nové úlohy (jak rozsahem, tak obsahem). Dnes jsou vyvinuty stovky typů konečných prvků a na světě existují desítky celosvětově známých programových systémů (ADINA, ANSYS, APPLE-SAP, ASAS, ASKA, BEASY, COSMOS,

CASTEM, DIAL, MARC, MSC/NASTRAN, PAFEC, SAP7, SYSTUS, SYSNOISE, TITUS, TPS10...) [4].

3.3 Diskretizace

Základním krokem metody je rozdělit (diskretizovat) libovolný mechanický systém na konečný počet prvků obvykle geometricky jednoduchých (úsečka, trojúhelník, obdélník, hranol,...), tzv. elementu; resp. rozdělení složité oblasti na jednoduché části. Dělení na prvky není v žádném případě jednoznačné a je silně ovlivněno technickými zkušenostmi a citem řešitele.

Příkladem této jednoduché a ve všech odvětvích hojně používané myšlenky je např. způsob výpočtu plochy kruhu dané součtem ploch jednotlivých trojúhelníků.



Obrázek 11: Diskretizace kruhu

Zdroj: Autor

$$S_i = R^2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

Jelikož $2 \sin(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x)$

Volíme $x = \frac{\alpha}{2}$

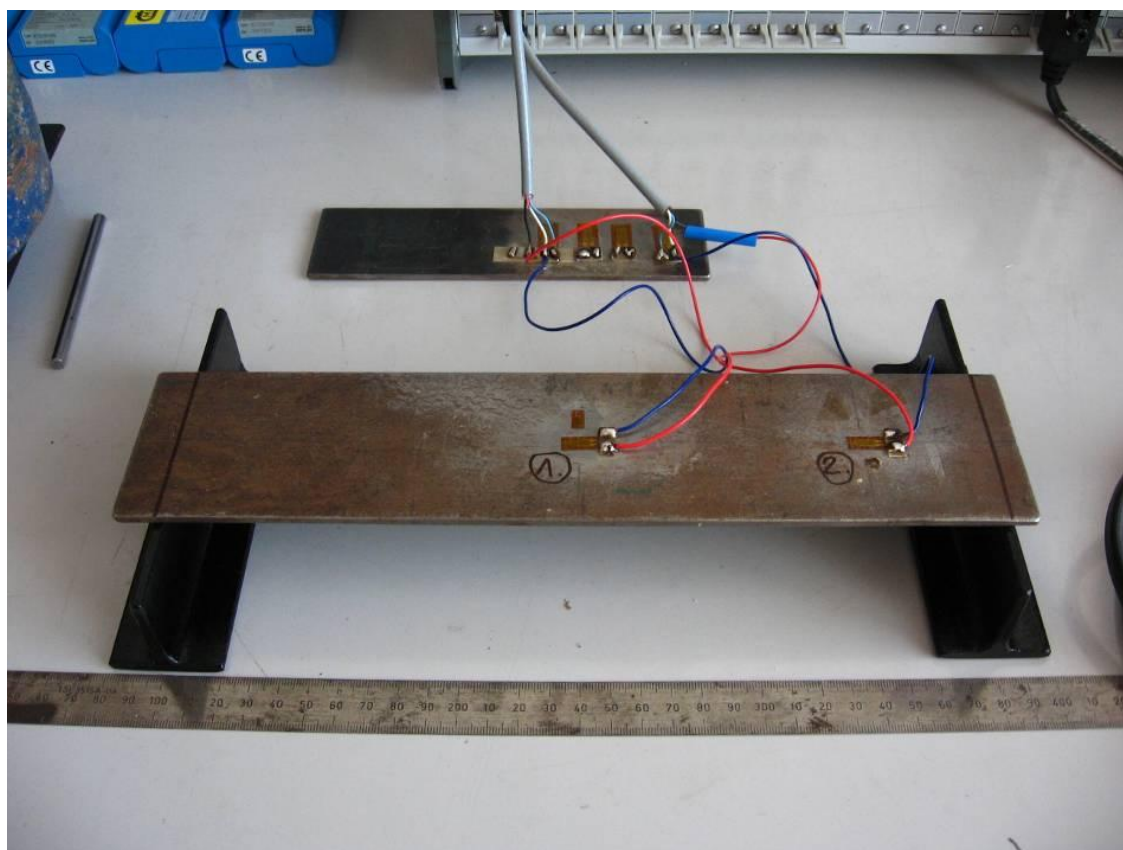
pak $S_i = R^2 \cdot \frac{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{2} = R^2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \alpha$

$$S_N = \sum_{i=1}^{i=N} S_i = \frac{1}{2} N \cdot R^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{N}$$

4 Experimentální nosník

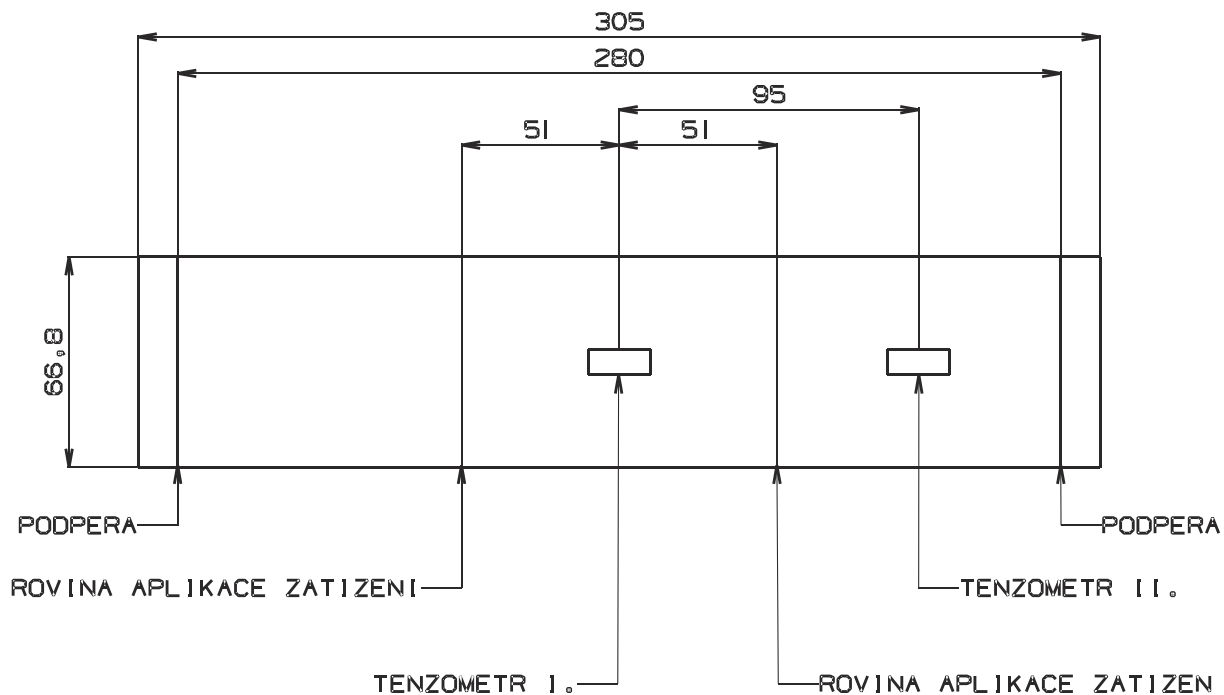
4.1 Popis nosníku a zatěžovacích stavů

V našem případě byl použit jednoduchý na dvou místech podepřený plochý nosník tloušťky 3,5 mm z materiálu třídy 11., viz následující obr. Tento jednoduchý tvar byl vybrán z důvodu možné aplikace vzorců pro výpočet napětí, jelikož se bude jednat pouze o rovinný průhyb a tím i možnosti ověření správnosti výsledků naměřených pomocí tenzometrického snímače a výpočtu pomocí MKP. Pro měření napětí byly umístěny na nosník dva tenzometrické snímače. Snímač I leží uprostřed součásti a snímač II je vyosen o 95 mm. Zatížení bylo aplikováno pomocí předem zvážených závaží a to vždy dva zatěžovací stavy. Přenos zatížení na nosník byl pomocí dvou podpěr umístěných 51 mm od středu součásti.



Obrázek 12: Měřený nosník

Zdroj: Autor



Obrázek 13: Rozměrový nárt nosníku

Zdroj: Autor

Měření bylo provedeno ve dvou základních zatěžovacích stavech viz níže uvedená tabulka.

- stav 1: tenzometry umístěné na horní ploše nosníku a zatížené na tlak
- stav 2: tenzometry umístěné na spodní ploše nosníku a zatížené na tah

V každém stavu bylo aplikováno zatížení o dvou velikostech a každé měření bylo provedeno 3x.

Tabulka 1: Zátěžové stavy

		Namáhání tenzometru	Velikost zatížení F [N]
Zátěžový stav 1.	Stav 1.1	tlak	81
	Stav 1.2	tlak	161,5
Zátěžový stav 2.	Stav 2.1	tah	81
	Stav 2.2	tah	161,5

Tabulka 2: Naměřené hodnoty

Zátěžový stav	Tenzometr	Ztížení [N]	Měření [MPa]			Střední hodnota [MPa]
			I	II	III	
1.1	1	81	26,89	26,91	26,98	26,927
	2		13,53	13,56	13,57	13,553
1.2	1	161,5	53,11	53,24	53,27	53,207
	2		26,8	26,87	26,88	26,850
2.1	1	81	27,74	26,96	27,82	27,507
	2		13,85	13,88	13,9	13,877
2.2	1	161,5	54,56	54,67	54,72	54,650
	2		27,71	27,77	27,79	27,757

4.2 MKP model

Pro výpočet napětí byl použit software ANSYS 10.0. Vzhledem k jednoduchosti nosníku byla použita síť tvořená z hexa prvků.

Okrajové podmínky

Nosník byl podepřen v místě podpěr a to pouze ve směru kolmém k nosníku (směr osy Y) jako náhrada levé podpěry (posuvná kloubová podpora) a ve směru kolmém a podélném k nosníku (směr osy Y a X) v místě pravé podpěry (pevná kloubová podpora). Pro zamezení pohybu v ose Z byl nosníku zakázán pohyb v tomto směru. Zatížení bylo aplikováno ve směru kolmém k nosníku na průsečnici mezi nosníkem a podpěrami přenášejícími zatížení na nosník o velikosti odpovídající hmotnosti závaží (viz. následující obr).

Velikost elementu

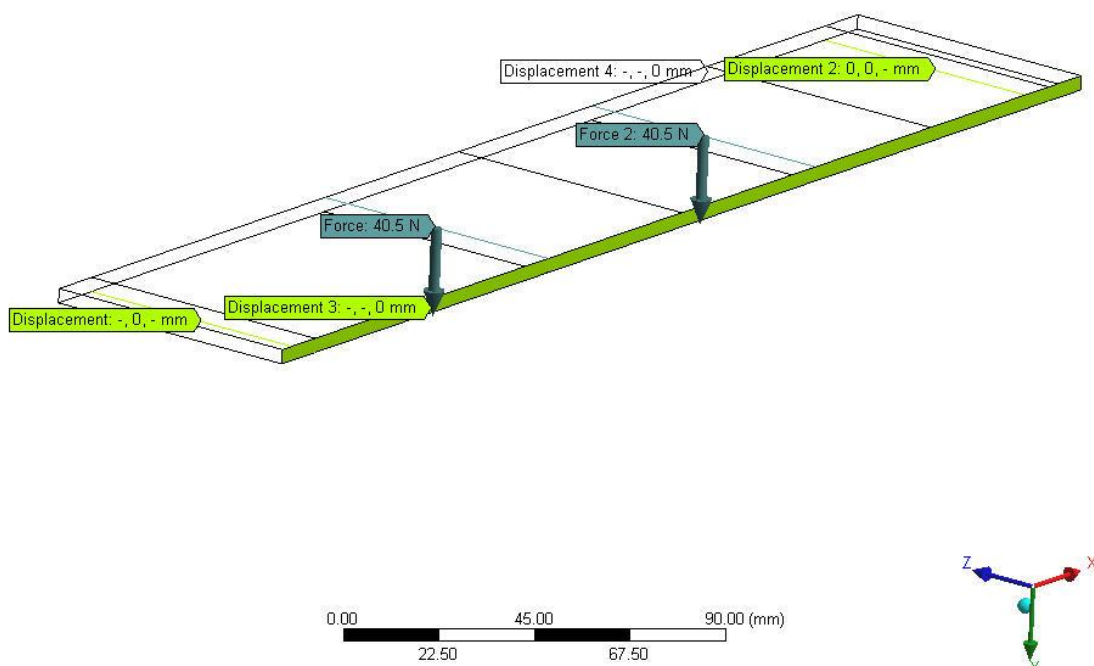
K stanovení vhodné velikosti elementu bylo použito několik výpočtů o různé velikosti sítě, kdy každý následující výpočet měl na příčném průřezu nosníku a jeden element více přičemž se začínalo na dvou elementech. Jako výsledek byla sledována velikost změny napětí dvou sousedních výpočtů a pro zajímavost byl sledován výpočetní čas. Naměřené výsledky jsou shrnuty v následující tabulce a jako nejvhodnější počet elementu na příčný průřez bylo 6

elementů. Při každém dalším zvyšování počtu elementů již docházelo pouze k zanedbatelné změně vypočteného napětí a docházelo pouze k nárůstu výpočetního času.

Tabulka 3: Tabulka porovnání přesnosti výpočtu v závislosti na velikosti elementů

Počet elementů / průřez	Napětí [MPa]	Rozdíl sousedních výpočtů [%]	Výpočetní čas [s]
2	25,169	4,96	11
4	26,418	0,04	25
6	26,429	0	82
8	26,429	-	243

ANSYS100
WORKBENCH

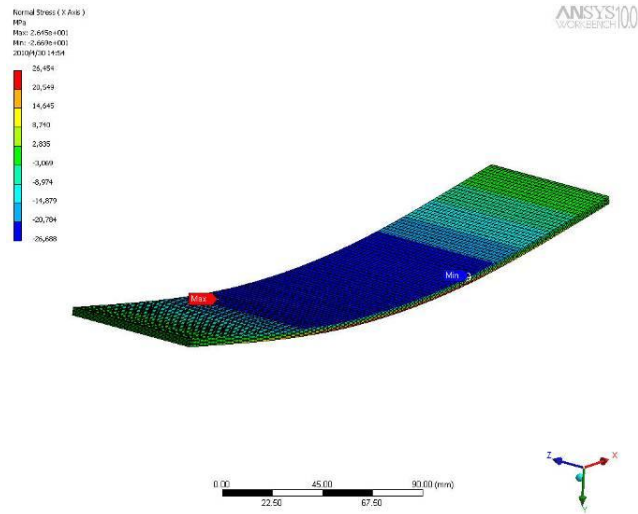


Obrázek 14: Okrajové podmínky
Zdroj: Autor

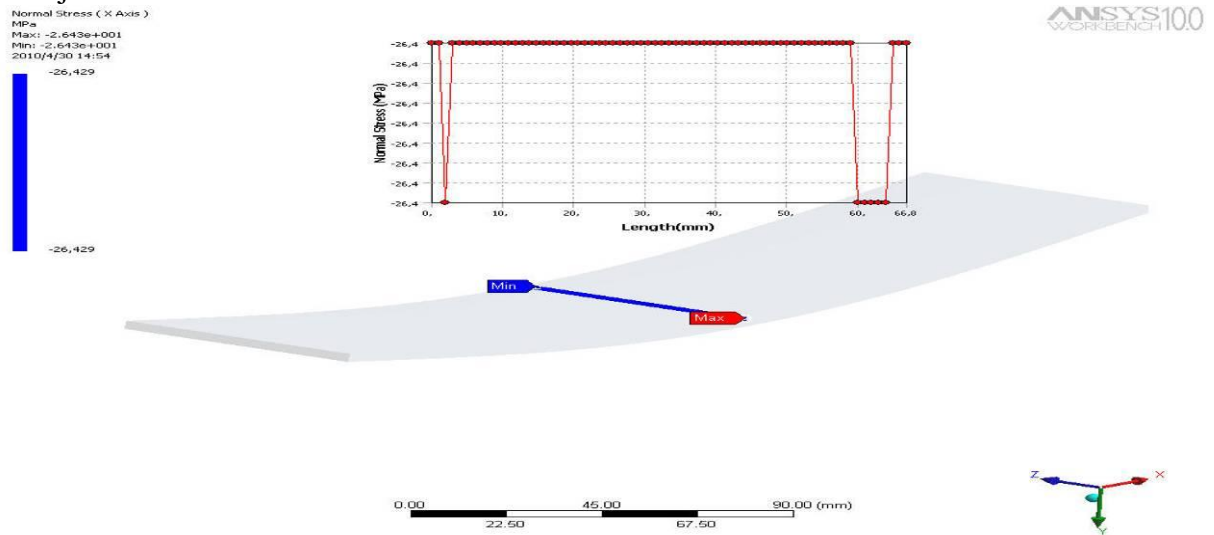
Tabulka 4: Vypočtené hodnoty MKP

Zátěžový stav	Tenzometr	Ztížení [N]	Vypočtená hodnota [MPa]
1.1 Obr. 14 až 16	1	81	26,429
	2		13,362
1.2 Obr. 17 až 19	1	161,5	52,695
	2		26,641
2.1 Obr. 20 až 22	1	81	26,429
	2		13,362
2.2 Obr. 23 až 25	1	161,5	52,695
	2		26,641

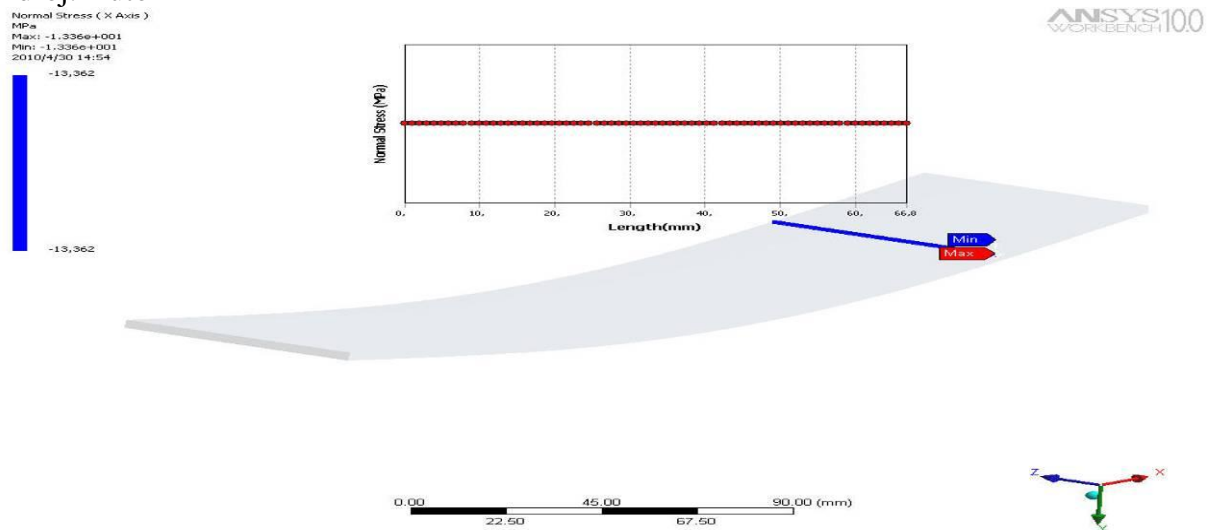
Zátěžový stav 1.1:



Obrázek 15: Výsledné normálové napětí
Zdroj: Autor

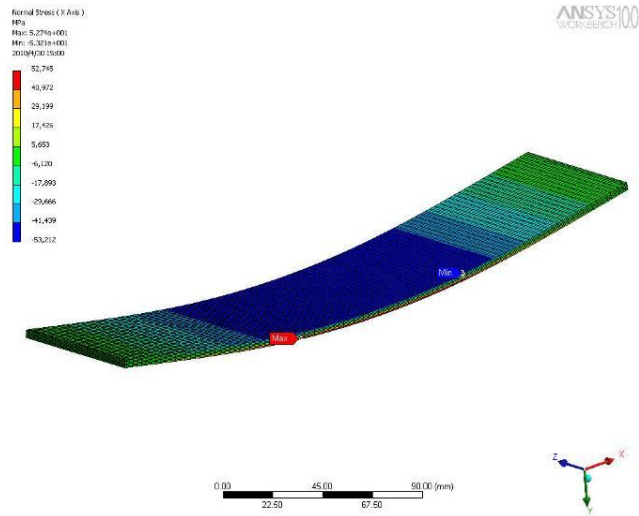


Obrázek 16: Napětí v místě tenzometru 1
Zdroj: Autor



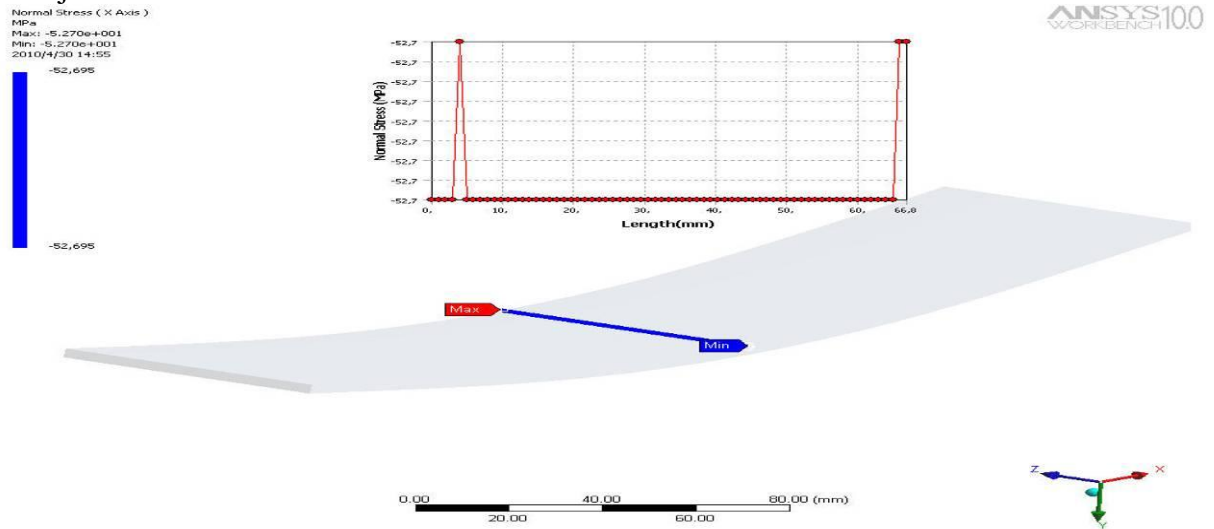
Obrázek 17: Napětí v místě tenzometru 2
Zdroj: Autor

Zátěžový stav 1.2:



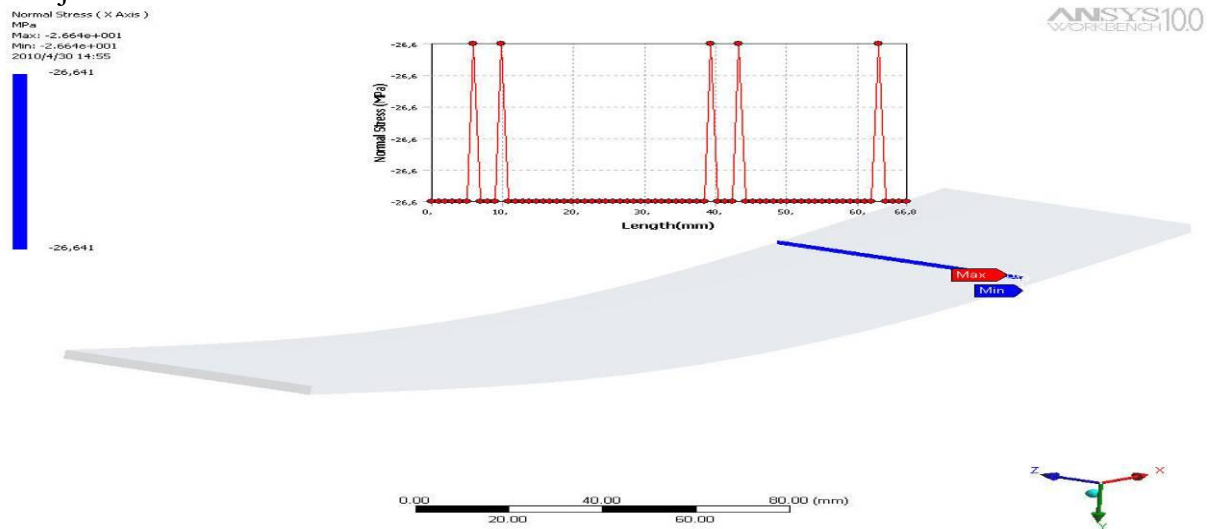
Obrázek 18: Výsledné normálové napětí

Zdroj: Autor



Obrázek 19: Napětí v místě tenzometru 1

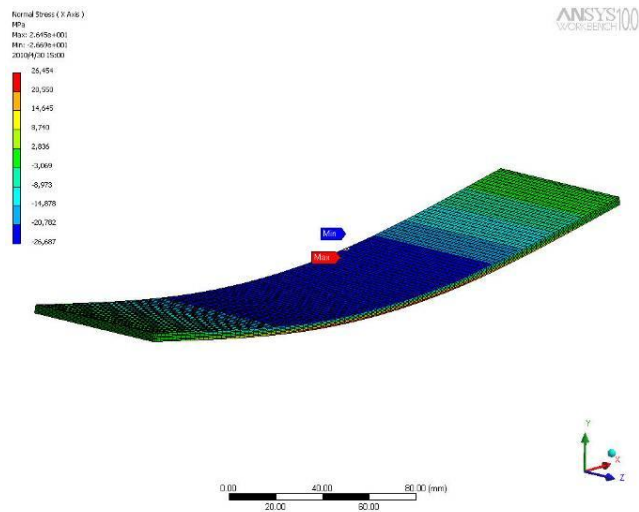
Zdroj: Autor



Obrázek 20: Napětí v místě tenzometru 2

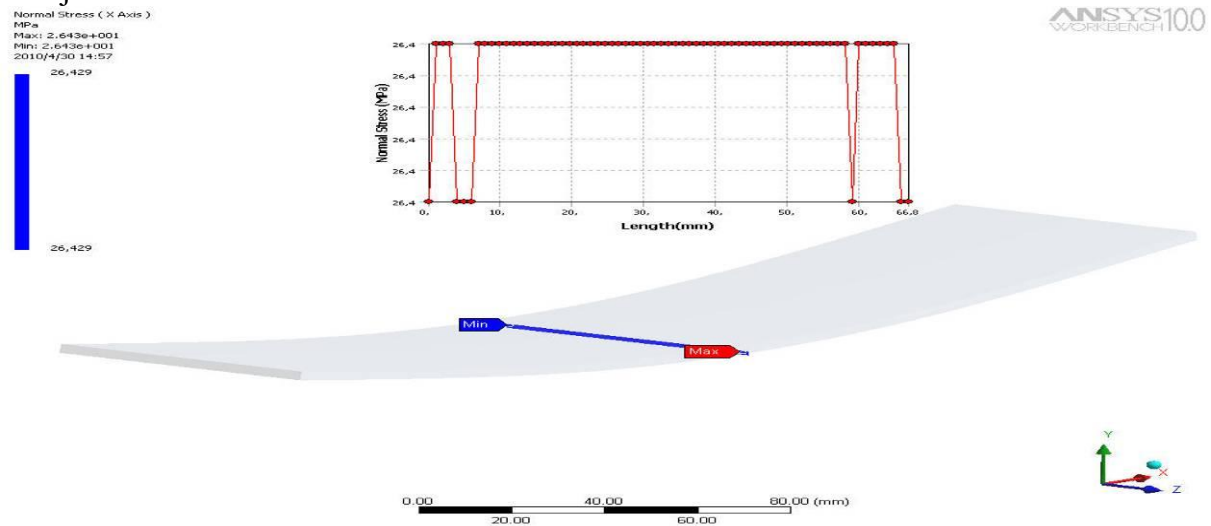
Zdroj: Autor

Zátěžový stav 2.1:



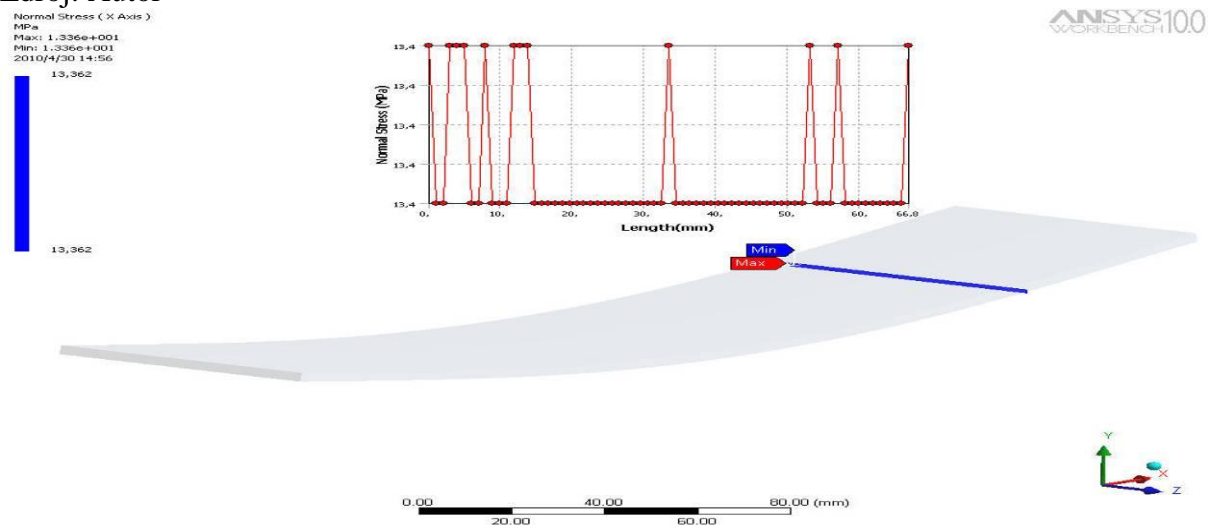
Obrázek 21: Výsledné normálové napětí

Zdroj: Autor



Obrázek 22: Napětí v místě tenzometru 1

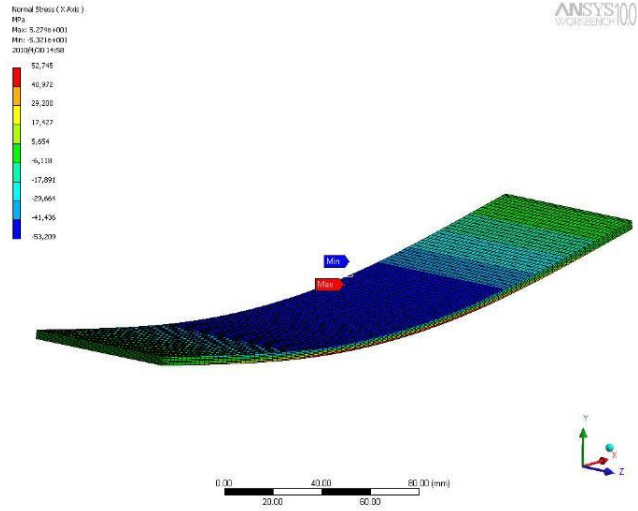
Zdroj: Autor



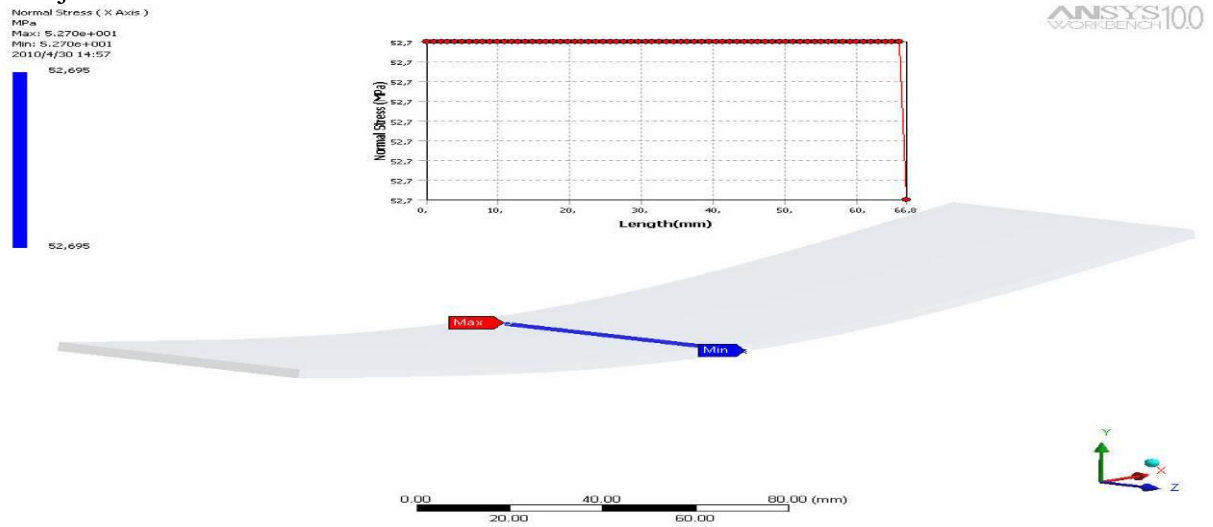
Obrázek 23: Napětí v místě tenzometru 2

Zdroj: Autor

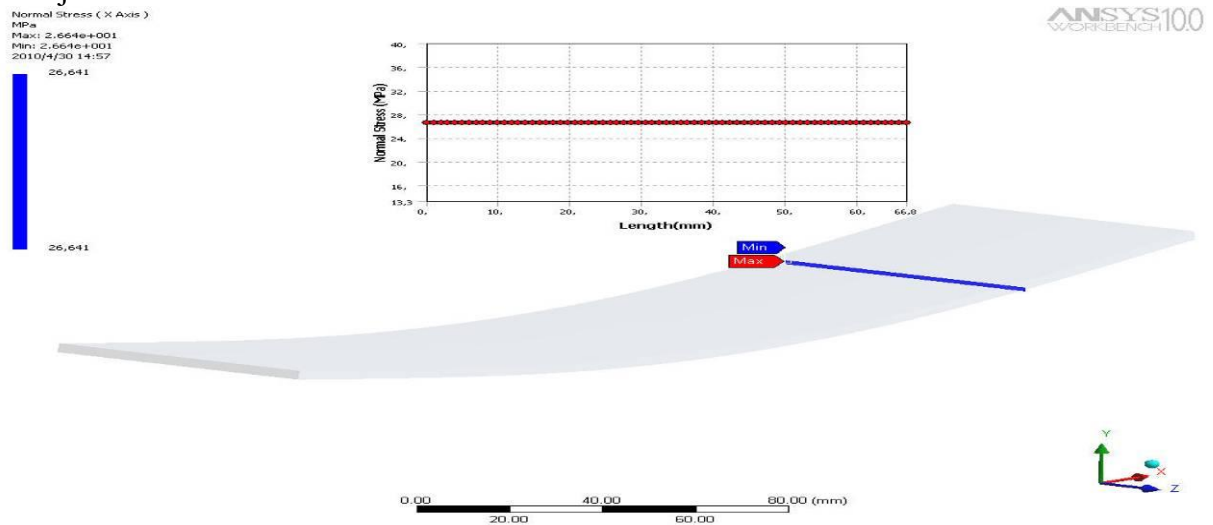
Zátěžový stav 2.2:



Obrázek 24: Výsledné normálové napětí
Zdroj: Autor



Obrázek 25: Napětí v místě tenzometru 1
Zdroj: Autor



Obrázek 26: Napětí v místě tenzometru 2

4.3 Výpočet napětí

Základní vzorec pro výpočet ohybového napětí v krajním vlákne viz kapitola 2.

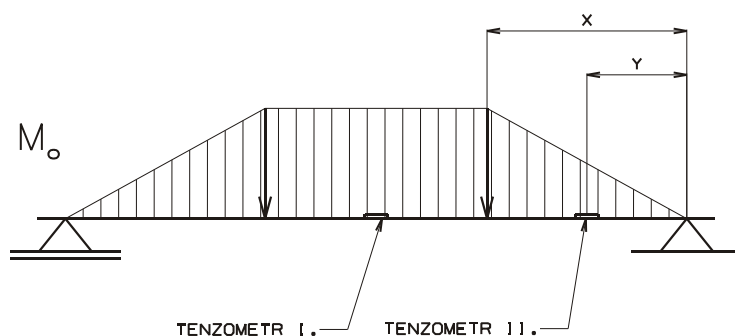
$$\sigma = \frac{M_o}{W_o} \text{ [MPa]}$$

kde

$$M_{o1} = \frac{F}{2} \cdot x \text{ [Nm]} \quad \text{resp.} \quad M_{o2} = \frac{F}{2} \cdot y \text{ [Nm]}$$

$$W_o = \frac{1}{6} b \cdot h^2 \text{ [m}^3\text{]}$$

Geometrické rozměry nosníku:



Obrázek 27: Průběh M_o

Zdroj: Autor

šířka nosníku: $b = 68,3 \text{ mm}$

výška nosníku: $h = 3,5 \text{ mm}$

$x = 89 \text{ mm}$

$y = 45 \text{ mm}$

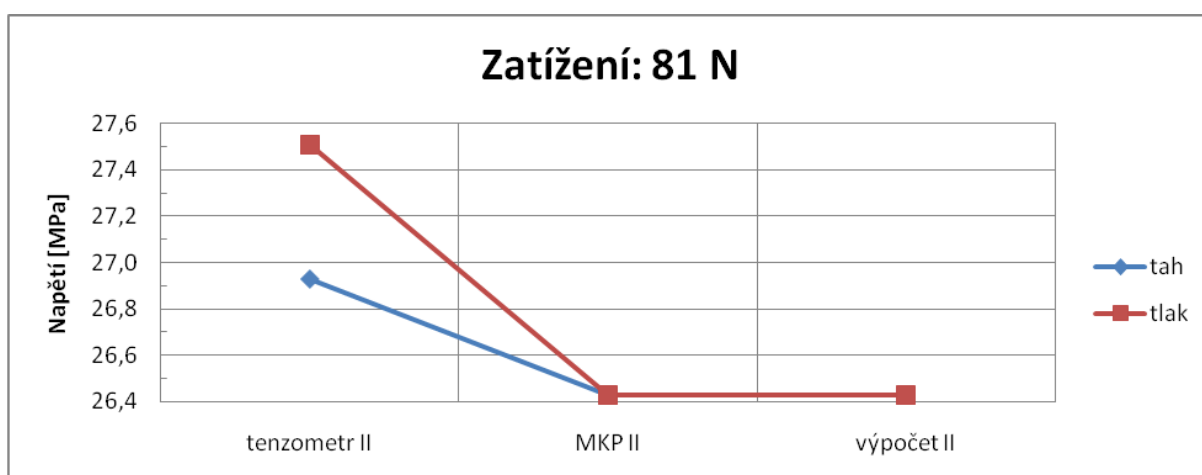
Tabulka 5: Vypočtené hodnoty

Zátěžový stav	Tenzometr	Vypočtené hodnoty			
		Ztížení [N]	M_o [Nm]	W_o [m ³]	σ [MPa]
1.1	1	81	3604,5	136,383	26,429
	2		1822,5		13,363
1.2	1	161,5	7186,75		52,695
	2		3633,75		26,643
2.1	1	81	3604,5		26,429
	2		1822,5		13,363
2.2	1	161,5	7186,75		52,695
	2		3633,75		26,643

4.4 Porovnání výsledků

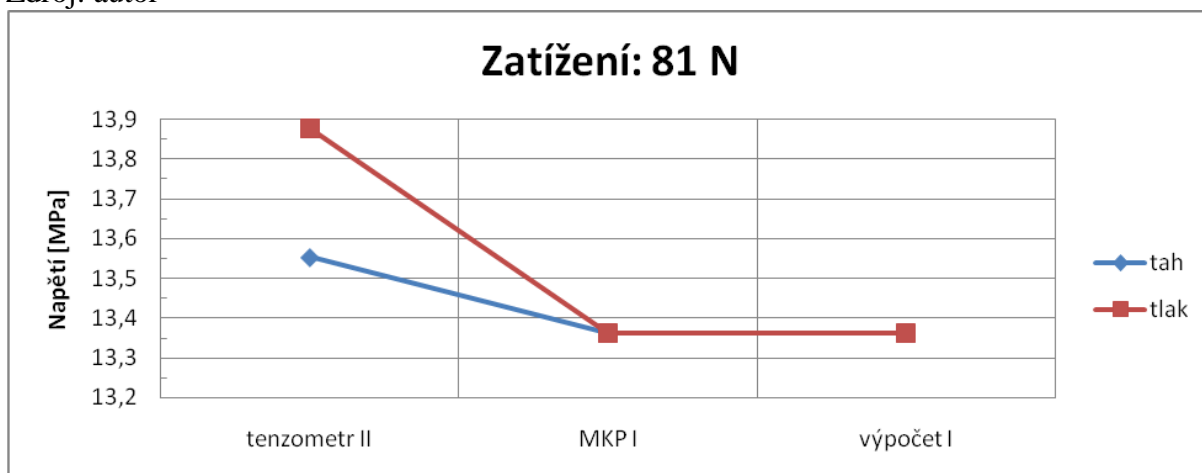
Tabulka 6: Porovnání výsledků

Zátěžový stav	Tenzometr	Vypočtené hodnoty			
		Ztížení [N]	Tenzometr [MPa]	MKP [MPa]	Výpočet
1.1	1	81	26,927	26,429	26,429
	2		13,553	13,362	13,363
1.2	1	161,5	53,207	52,695	52,695
	2		26,850	26,641	26,643
2.1	1	81	27,507	26,429	26,429
	2		13,877	13,362	13,363
2.2	1	161,5	54,650	52,695	52,695
	2		27,757	26,641	26,643



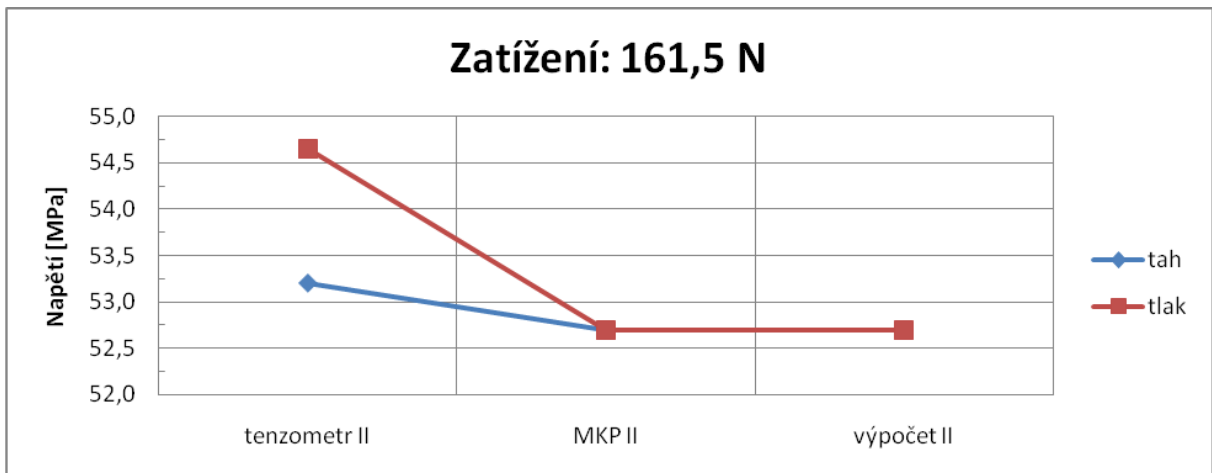
Obrázek 28: Grafické porovnání výsledků v místě tenzometru I. (81N)

Zdroj: autor



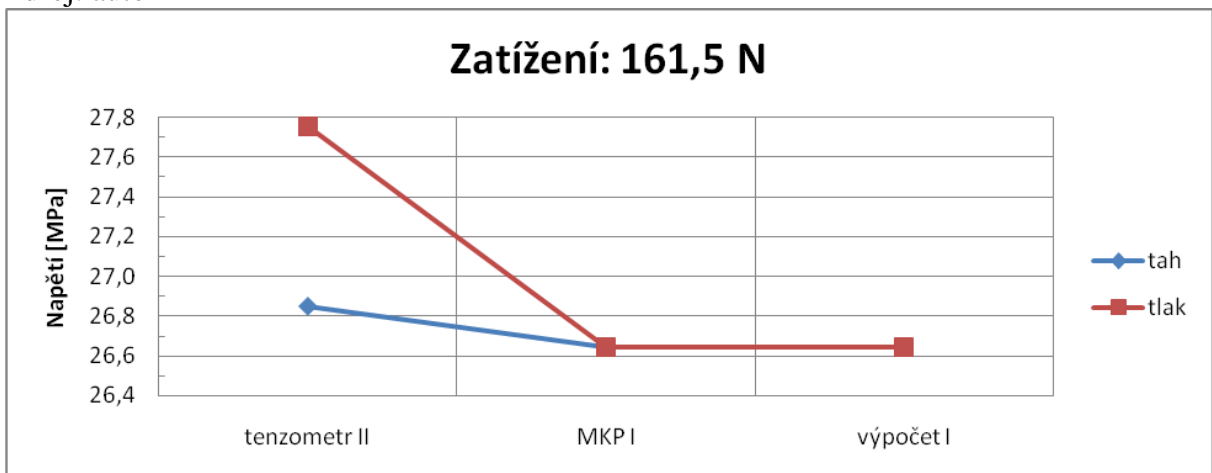
Obrázek 29: Grafické porovnání výsledků v místě tenzometru II. (81N)

Zdroj: autor



Obrázek 30: Grafické porovnání výsledků v místě tenzometru I. (161,5N)

Zdroj: autor



Obrázek 31: Grafické porovnání v místě tenzometru II. (161,5N)

Zdroj: autor

5 Závěr

Úkolem práce bylo porovnat výsledky jednotlivých metod určených k vyšetřování napětí na namáhané součásti. Pro tento experiment byl jako vhodná součást vybrán jednoduchý nosník zatížený silou kolmou na nosník a to především z důvodu, že tato jednoduchá součást nám omezí možnosti vzniku chyb získaných především z geometrického a výpočetního hlediska. Cílem této práce nebylo vyhodnotit napětí na složité součásti, ale především co nejpřesněji stanovit napětí jednotlivými metodami zatíženými co nejmenší chybou a navzájem tyto výsledky porovnat. Jeho velkou výhodou je také jednoduchost výpočtu napětí popsaného v nauce o pružnosti a pevnosti. Taktéž při výpočtu pomocí MKP nemusíme vzhledem k jednoduchosti součásti provádět výpočet na zjednodušeném modelu, ale na modelu přesně odpovídajícímu zatěžovanému nosníku.

Vzhledem k jednoduchosti součásti považuji výpočet pomocí základních vzorců jako nejpřesnější metodu a výsledek této metody považuji za směrodatný s kterým porovnávám zbývající metody. Z výše uvedených výsledků je patrné že v našem případě analytickému řešení nejlépe odpovídají výsledky vypočtené metodou MKP. Ovšem této přesnosti bylo dosaženo až po odladění úlohy, které se týkalo především způsobu vetknutí nosníku nejlépe popisující reálný stav. U této metody bylo také experimentováno s velikostí elementu respektive počtu elementů na příčný průřez a jako nejlepší v poměru přesnost a rychlost řešení byl počet 6 elementů na příčný průřez. Další zvyšování počtu elementů vedlo pouze k prodlužování výpočetního času bez dopadu na přesnost výsledků.

Při tenzometrickém měření bylo provedeno i několik měření s účelně vyoseným zatížením, aby mohl být sledován vliv těchto nepřesností na výsledky měření a tím stanovení přesnosti rozměření jednotlivých podpěr. Také zde vzhledem k štíhlosti nosníku muselo být uvažováno s vlivem gravitace a při obrácení nosníku musel být výstup vynulován, aby došlo k odstranění tohoto vlivu.

Úkolem této práce nebylo jednoznačně říci která metoda je lepší anebo přesnější ve stanovení napětí jelikož každá metoda má své opodstatnění. Tenzometrické měření je vhodné pro již vyrobené a provozované zařízení jelikož se ve výsledcích projeví výrobní a materiálové nepřesnosti, jeho nevýhodou je však možnost zjistit pouze povrchové napětí a to pouze v přístupných místech a místech umožňující nalepení tenzometrického snímače. Je zde také velký prostor k chybám způsobených převážně nalepením tenzometru na součást.

MKP je moderní metodou a silným nástrojem konstruktéra, který umožní vyšetřovat napětí s poměrně vysokou přesností už v době návrhu součásti. Jeho nevýhodou je odborná

náročnost na obsluhu, která musí mít zkušenosti a cit především pro stanovení okrajových podmínek mající velký vliv na přesnost výsledků. Klasická metoda výpočtu je již v dnešní době vytlačovaná především díky rozvoji MKP. Její obrovskou výhodou je její rychlost a vhodnost především v době návrhu konstrukce, kdy nám pomůže získat alespoň předběžnou představu o základních rozměrech konstrukce.

Literatura

- [1] *Tenzometrické měření ocelových konstrukcí-metodika*, Zkušební laboratoř AL DFJP, dokument AL-M-06

- [2] NĚMEC, Jindřich. *Odporové tenzometry v praxi*. Vyd. 1. Praha 1 : Nakladatelství technické literatury n. p., 1967. 176 s.

- [3] MICHALEC, Jiří, et al. *Pružnost a pevnost I*. Vyd. 2. Praha 6 : Vydavatelství ČVUT, 2001. 320 s.

- [4] HORYL, Petr. *Inženýrské základy MKP*. Technická univerzita Ostrava, 2002. 31 s. Oborová práce. VŠB - Technická univerzita Ostrava.