

PROBLÉM OPTIMÁLNÍHO STŘÍDÁNÍ SMĚN

Anna Černá, Jan Černý

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta managementu Jindřichův Hradec

Abstract: *The paper deals with the problem of optimal workshift scheduling in the 2-turn case (12 hours day turn – night turn) or 3-turn case (8 hours morning turn – afternoon turn – night turn). It is supposed that 4 teams are scheduled in four weeks i.e. 28 days. Several practical constraints and objectives are treated.*

Key words: *turn of labor, scheduling, optimization*

Článek vznikl s podporou grantu GAČR 402/06/0084 ve spolupráci s FES UPa

1. Úvod

V běžném životě se slovo směna používá ve dvou smyslech:

- skupina pracovníků, kteří společně nastupují do práce a společně ji končí,
- časový interval, v němž takováto skupina pracuje, např. 6:00-18:00 denní směna, 18:00-6:00 noční směna, nebo 6:00-14:00 ranní směna, 14:00-22:00 odpolední směna, 22:00-6:00 noční směna.

Abychom se vyhnuli možným nejasnostem, budeme toto slovo používat jen v prvním smyslu a uvedené časové intervaly budeme nazývat služba.

Ve veřejných službách může jít o různé pohotovosti (v dopravě, zdravotnictví, požární ochraně), o strážní službu apod. V podnicích se s touto problematikou setkáváme tam kde je nepřetržitá výroba nebo pohotovostní služba.

Budeme předpokládat, že směny se střídají v činnosti nepřetržitě, tzn. že v týdnu musí obsadit 14 dvanáctihodinových nebo 21 osmihodinových služeb. Dále je zřejmé, že 168 hodin sedmidenního týdne je v takovém případě dobré obsazovat čtyřmi směnami *A, B, C, D*, v dlouhodobém průměru tak na jednu směnu vyjde 42 pracovních hodin za týden. Ty se pak mohou proplácet jako 40 hodin běžného pracovního času a 2 hodiny přesčasů.

Ani číslo 14, ani 21 nejsou dělitelné číslem 4. Z toho vyplývá, že ani u dvanáctihodinových, ani u osmihodinových služeb není možné dosáhnout, aby v jednom týdnu každá směna měla stejný počet služeb. Týden je proto příliš krátká doba na to, abychom v rámci týdenního rozvrhu služeb zatížili všechny směny *A-D* stejně. Například u osmihodinových služeb je jasné, že bude nutné tvořit až 4-týdenní rozvrhy, protože $4 \times 21 = 84$ je nejmenší násobek čísla 21, který je dělitelný čtyřmi.

Pokud bychom za jedinou vlastnost „spravedlivého“ rozvrhu považovali stejný počet služeb pro každou směnu, u 12-hodinových služeb a toho možné dosáhnout už u dvou týdnů, které obsahují 28 směn. Jenže tam bychom nemohli zajistit, aby každá směna měla přesně stejnou konfiguraci služeb a mohly by vzniknout projevy nespokojenosti s tím, že všichni nemají stejné podmínky. Proto i u dvanáctihodinových služeb bude potřebné rozvrhovat až 4-týdenní celky.

Dlužno podotknout, že spravedlivost rozvrhu nespočívá jen ve stejném počtu směn, ale i v jejich poloze. Není to přitom jediný požadavek, který nutno při jeho tvorbě brát v úvahu. Objevují se ještě další, například dostatečná doba na odpočinek, „rozumné“ volno o víkendu, ne příliš dlouhá doba volna vcelku (může způsobit problémy při předávání služby,

odevzdávající musí upozornit přebírajícího na příliš mnoho změn a dalších důležitých skutečností, které nastaly od ukončení jeho poslední služby).

2. Matematický model

Matematicky lze vidět podobnost problému optimálního rozvrhování směn s rozmísťováním skoro pravidelných mnohoúhelníků na kružnicích, jak je pojednáváno v článku [1], dále v knize [2] - část 532 a 533 - a částečně v knize [3] - část 13.2.7. Můžeme si představit kružnici a na ní pravidelně rozmístěno buď 56 bodů, představujících 56 12-hodinových služeb, nebo 84 představující 8-hodinové služby. Tyto body - vrcholy pravidelného 56- resp. 84-úhelníka je nutno pokrýt čtyřmi mnohoúhelníky o čtvrtině všech bodů, představujícími služby čtyř směn. Žel, prozatím se ukazuje, že metody, popsané v citovaných pramenech, nevedou při řešení našeho problému k uspokojivým výsledkům a nutno jej řešit jinak.

K popisu výsledného rozvrhu můžeme využít dvě možnosti. První z nich, označme jej způsob (P), představuje posloupnost směn, tak, jak po sobě přebírají službu - například

$$R = \ddot{i}iA, B\ddot{i}C, D\ddot{i}A, B\ddot{i}C, D\ddot{i}A, B\ddot{i}iC, D\ddot{i}A, B\ddot{i}iC, D\ddot{i}A, B\ddot{i}C, D\ddot{i}A, B\ddot{i}C, D\ddot{i}iA, B\ddot{i}C, D\ddot{i}i \quad (P)$$

Tato posloupnost představuje střídání 12-hodinových směn během dvou týdnů, kde čárka odděluje denní službu (vlevo od ní) od noční (vpravo), jednoduché lomítko odděluje dny stejného typu (pracovní od pracovních, víkendové od víkendových), kdežto dvojitě odděluje dny různého typu.

Druhou možností je způsob, jenž označíme (M). Je to vyjádření rozvrhu pomocí matice o čtyřech řádcích, každý pro jednu směnu - pro náš příklad je to

$$R = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (M)$$

Zde dvojice sloupců představuje jeden den, z toho levý denní službu na kterou se ten den nastupuje a pravý noční. Čárkovaně jsou odděleny dny stejného typu, plnou čarou dny různého typu. Jednička znamená, že příslušná směna obsazuje tu službu, nula že nikoli. Například jednička v třetím řádku a sedmém sloupci znamená, že směna C má v první čtvrtek denní službu.

Pro praktika je způsob (P) daleko přehlednější než (M). Hned na něm vidí základní vlastnosti, např. kolik má která směna služeb a jakých, jak má obsazeny víkendy, jaké má intervaly mezi po sobě následujícími směnami apod. Má-li však počítač kvantifikovat stupeň splnění jednotlivých požadavků přímo na zápisu typu (P), bude muset použít i řadu logických operací typu if-then, or apod., kdežto u typu (M) se mnohé podmínky dají ověřit operacemi vektorové algebry, anebo jinými operacemi, běžnými pro tabulkové procesory (MS Excel apod.). Například:

- počet všech služeb dané směny dostaneme, když její řádkový vektor skalárně vynásobíme vektorem ze samých jedniček, např. pro 2-směnné služby během jednoho týdne

$$(1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) \cdot (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) = 4$$

- počet nočních služeb dané směny dostaneme skalárním vynásobením jejího řádkového vektoru vektorem, kde na lichých místech jsou nuly a na sudých jedničky:

$$(1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0).(0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1) = 3$$

- počet víkendových služeb zase dostaneme vynásobením vektorem, který má jedničky v místech víkendových služeb

$$(1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0).(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1) = 1$$

- největší interval mezi službami jedné směny dostaneme, když z řádkového vektoru matice vytvoříme vektor indexů složek, kde má jedničky a potom vypočteme rozdíly sousedních složek, přičemž za následující složku po poslední složce považujeme první složku zvětšenou o celkový počet služeb, na které se sestavuje rozvrh.

Můžeme tedy předpokládat, že pro každý rozvrh R a každé kritérium K_i , $i = 1, \dots, n$ máme danou hodnotu $f_i(R)$ vyjadřující míru nesplnění kritéria K_i rozvrhem R . Rovněž předpokládáme, že zadavatel optimalizační úlohy stanoví váhové koeficienty w_i pro každé kritérium K_i . Potom naši optimalizační úlohu můžeme formulovat takto:

Najít rozvrh služeb R takový, který minimalizuje hodnotu funkce

$$f(R) = w_1 f_1(R) + \dots + w_n f_n(R)$$

Dlužno poznamenat, že někdy se v praxi formuluje omezení $f_k(R) \leq b_k$, kde b_k je daná konstanta. Potom ve funkci $f(R)$ můžeme funkci $f_k(R)$ nahradit funkcí

$$g_k(R) = \max\{0; f_k(R) - b_k\}$$

a koeficient w_k ve sčítanci $w_k g_k(R)$ zvolit tak velký, aby se do optimálního řešení nemohl dostat rozvrh R , pro který by platilo $g_k(R) > 0$, tj. $f_k(R) > b_k$.

3. Metody optimalizace

Máme-li například 56 služeb pro 4 směny, je všech možných rozvrhů

$$\binom{56}{14} \binom{42}{14} \binom{28}{14} = 1,23094 \cdot 10^{31}$$

což signalizuje, že prohlédnutí a posouzení všech variant je naprosto nereálné. Autoři pochybují i o tom, že by se dala použít nějaká exaktně optimální metoda na báze backtrackingu nebo větvení a hranic.

Proto je potřebné najít některou vhodnou heuristiku. V úvahu připadá některá z metod postupného zlepšování výchozího řešení, za něž se může vzít absolutně pravidelné střídání čtyř směn, ať se jedná o 56 směn 12-hodinových nebo 84 směn 8-hodinových. Za matematicky „sousední“ rozvrh R' k rozvrhu R považujeme ten, který vznikne záměnou obsazení některé dvojice sousedních služeb. Metoda je potom takováto:

1° krok (inicializační): Vytvoříme výchozí rozvrh R a určíme v něm hodnotu účelové funkce $f(R)$.

2° krok (rekurzivní): K rozvrhu R vyhledáme všechny sousední rozvrhy a vybereme z nich ten rozvrh R' který má nejmenší hodnotu $f(R')$. Pokud platí $f(R') \geq f(R)$ považujeme R za výsledek řešení. Pokud $f(R') < f(R)$, změníme označení R' na R a pro tento nový rozvrh R zopakujeme rekurzivní krok 2°.

4. Rozvrhování 12-hodinových služeb

Jako výchozí zde může sloužit absolutně pravidelné střídání směn během dvou týdnů (během čtyř týdnů by se konfigurace opakovala) – tuto variantu si označíme $R1$:

$$\dot{I}\dot{I}A, B\dot{I}C, D\dot{I}A, B\dot{I}C, D\dot{I}A, B\ddot{I}\dot{I}C, D\dot{I}A, B\ddot{I}\dot{I}C, D\dot{I}A, B\dot{I}C, D\dot{I}A, B\dot{I}C, D\ddot{I}\dot{I}A, B\dot{I}C, D\ddot{I}\dot{I}$$

Toto střídání zajišťuje dostatečný odpočinek, dosahuje absolutního minima i maxima délky volna v délce 36 hodin a rovněž splňuje požadavek stejného počtu 7 služeb pro každou směnu. S ostatními požadavky je to horší – směny *A* a *C* mají jen denní, *B* a *D* jen noční službu, každá směna má „pokažený“ každý víkend. Pokud dáme poměrně vysoký váhový koeficient pro kritérium stejného počtu denních a nočních směn (tzn. bychom chtěli odstranit jen první z těchto nedostatků), dá nám metoda výsledek, v němž je změna pořadí od třetího pondělka (uvádíme už kompletní 4 týdny) – tuto variantu označíme *R2*:

iiA, BiC, DiA, BiC, DiA, Biic, DiA, Biic, DiA, BiC, DiA, BiC, Diia, BiC, Di

iiB, AiD, CiB, AiD, CiB, Aiid, CiB, Aiid, CiB, AiD, CiB, AiD, CiiB, AiD, Cii

Zde už každá směna má během čtyř týdnů v pondělí jednu denní a jednu noční službu, podobně v úterý, středu atd. až neděli. Minimální volno klesne jednou za 4 týdny na 24 hodin a maximální stoupne zase jednou za 4 týdny na 48 hodin, což obojí je (snad) akceptovatelné.

Chceme-li navíc dosáhnout, aby každá směna měla volný jeden nebo dva víkendy, je možnost takového řešení závislá na tom, jaké minimální a maximální volno připustíme, neboli jak velký váhový koeficient pro kritérium rozdílů mezi délkami volna zvolíme. . Pokud je tak malý, že „příliš nevádí“ 12 a 84 hodin, stačí nám udělat změnu denní na noční ve středu a o víkendech nechat sloužit vždy jen jednu dvojici směn – tuto variantu označíme *R3*:

iiA, BiC, DiA, BiC, DiA, Biia, Bia, Biic, DiA, BiD, CiB, AiD, CiiD, CiD, Cii

iiB, AiD, CiA, BiC, DiB, Aiib, Aib, Aiid, CiB, Aic, DiA, BiC, Diic, DiC, Di

Jenže obě ty hodnoty, 12 i 84, mohou být nepřijatelné. Pokud by se tomuto kritériu zvýšil váhový koeficient a naopak snížil koeficient pro volné víkendy, dá se dospět k řešení *R4*, kde každá směna má jen jeden víkend celý volný:

iiA, BiC, DiA, BiC, DiA, Biic, DiA, CiiB, DiA, CiB, DiA, CiB, Diia, CiB, Ai

iiD, CiB, AiD, CiB, AiD, CiiB, AiD, Biic, AiD, BiC, AiD, BiC, Aiid, BiC, Di

V něm je minimální volno 24 h a maximální 48 h, podobně jako u *R2*. Přitom má navíc každá směna jeden volný víkend, a to na úkor toho, že jiný jeden víkend slouží v sobotu denní a z neděle na pondělí noční.

5. Rozvrhování 8-hodinových služeb

Postup hledání různých variant rozvrhu bude podobný, jako u 12-hodinových služeb.

Jako výchozí zde může sloužit absolutně pravidelná varianta *W1* (uváděná bez čárek abychom ušetřili místo:

iiABCiDABiCDAiBCDiABCiiDABiCDAiBCDiABCiDABiCDAiBCDiABCiDAB
ii

iiCDAiBCDiABCiDABiCDAiBCDiABCiiDABiCDAiBCDiABCiDABiiCDAiBCD
ii

Zde, zcela pochopitelně, každá směna má stejný počet 7 ranních, odpoledních i nočních služeb a minimální i maximální doba odpočinku je 24 h. Nevýhodou je, že každá směna slouží každý víkend, přičemž každý druhý víkend dokonce oba dny. Dále se zde považuje za nevýhodu to, že ani dva dny za sebou nemají stejný typ služby. Z tohoto pohledu se vhodným kompromisem jeví varianta *W2*:

iiABCiABCiDBCiDACiDABiiDACiDACiBDAiBDAiCDAiCBAiCBDiiCBAiCBA
ii

*iiDCBiDCBiACBiADBiADCiiADBiADBii
CADiCADiBADiBCDiBCAiïBCDiBCDiï*

V ní každá směna má stejný počet 7 ranních, odpoledních a nočních služeb, každá směna dohromady 14 dnů má stejnou službu jako den předtím, 7 dnů má jinou a 7 dnů má volných, z toho 2 víkendové vcelku, dva pracovní vcelku a 3 pracovní jednotlivé. Minimální interval mezi službami je 16 hodin a maximální 48 h.

V konkurenci varianty W2 sotva obtojí občas v praxi používaná varianta W3:

*iiDBCiABCiABCiABCiADCiiADBiADBii
CDAiBDAiBDAiBDAiBCAiïBCDiBCDiï*

*iiACBiDCBiDCBiDCBiDABiiDACiDACii
BADiCADiCADiCADiCBDiiCBAiCBAii*

I zde každá směna má stejný počet 7 ranních, odpoledních a nočních služeb, každá směna má dokonce 16 dnů stejnou službu jako den předtím, 5 dnů má jinou a 7 dnů má volných, z toho 3 pracovní vcelku, dva víkendové vcelku a dva pracovní jednotlivé – tedy z těchto dvou hledisek je lepší, jako W2, s níž má stejný minimální odpočinek 16 h, ale dojem kazí maximální odpočinek 96 h, který při běžných volbách váhových koeficientů heuristika zamítá.

6. Rozvrhování 8-hodinových služeb se „štábní službou“

Zdánlivě nevýznamný rozdíl oproti minulé úloze je v tom, že jednu službu týdně (např. ranní v neděli) neobsazuje žádná ze směn A-D, ale „štáb“ – např. velitel městských strážníků + jeho zástupce + zástupce starosty města, nebo zvláštní směna podnikových manažerů, úředníků nebo údržbářů. Motivem může být např. to, aby pracovníci ze směn neměli přesčasové hodiny.

V takovéto situaci je celkem přijatelné řešení v rámci 4-týdenních rozvrhů W2 resp. W3 nahradit příslušnou směnu písmenem Š. Zejména pokud jde o takto upravenou variantu W2 lze očekávat, že se sotva najde lepší řešení:

*iiABCiABCiDBCiDACiDABiiDACiŠACiiBDAiBDAiCDAiCBAiCBDiiCBAiŠBAi
i*

*iiDCBiDCBiACBiADBiADCiiADBiŠDBii
CADiCADiBADiBCDiBCAiïBCDiŠCDii.*

Použitá literatura:

- [1] Černý, J. and Guldan, F.: Location of polygon vertices on circles and its application in transport studies. *Apl. mat.* 32 (1987) 81-95.
- [2] Černý, J. a Kluvánek, P.: *Základy matematickej teórie dopravy*. Veda Bratislava, 1991, 280 s. ISBN 80-224-0099-8
- [3] Černá, A. a Černý, J.: *Teorie řízení a rozhodování v dopravních systémech*. Institut Jana Pernera, Praha, 2004, 150 s. ISBN 80-86530-15-9

Kontaktní adresa:

prof. RNDr. Jan Černý, DrSc., Dr.h.c.
Fakulta managementu VŠE, Jarošovská 1117/II, 37701 Jindřichův Hradec
e-mail: cerny@fm.vse.cz, tel. 776 725 967