

VÍCEKRITERIÁLNÍ ROZHODOVÁNÍ - METODA WSA

Rudolf KAMPF

Katedra Dopravního managementu, marketingu a logistiky

Úvod

V reálných rozhodovacích situacích je často třeba vzít do úvahy několik optimalizačních (rozhodovacích) kritérií. Tato kritéria nebývají zpravidla ve vzájemném souladu, tzn. varianta, která je nejlépe hodnocená podle jednoho kritéria, nebývá nejlépe hodnocená podle kritéria jiného. Cílem při analýze vícekritériálních rozhodovacích úloh je potom řešit konflikt mezi vzájemně protikladnými kritérii. Konkrétním cílem potom může být výběr jedné varianty, která bude podkladem pro konečné rozhodnutí. Jsou-li varianty určeny jejich konkrétním výčtem či seznamem, mluvíme o úlohách vícekritériálního hodnocení variant [1], [2].

1. Úlohy vícekritériálního hodnocení variant

V úlohách vícekritériálního hodnocení variant (VHV) je definována množina rozhodovacích variant $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, které jsou hodnoceny podle kritérií Y_1, Y_2, \dots, Y_k . Každá varianta X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ je podle těchto kritérií popsána vektorem tzv. kritériálních hodnot $(y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik})$. Matematický model úlohy VHV [3] tak může být vyjádřen ve tvaru tzv. kritériální matice:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & Y_1 & Y_2 & \dots & Y_k \\
 X_1 & y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1k} \\
 X_2 & y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2k} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 X_n & y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nk}
 \end{array} , \quad (1)$$

kde v i -tém řádku je vektor kritériálních hodnot varianty X_i . Součástí matematického modelu úlohy VHV musí být i určení typu jednotlivých kritérií. Kritéria mohou být buď maximalizačního nebo minimalizačního typu. Z hlediska maximalizačních kritérií jsou lépe hodnoceny varianty s vyššími kritériálními hodnotami, podle minimalizačních kritérií naopak varianty s nižšími kritériálními hodnotami. Při hodnocení infrastrukturních projektů může být příkladem maximalizačního kritéria propustnost vozidel. Příkladem minimalizačního kritéria může být velikost nákladů na výstavbu nové infrastruktury. Některé metody hodnocení variant vyžadují, aby byla všechna kritéria stejného typu. Jak si ukážeme dále, není problém transformovat minimalizační kritéria na maximalizační nebo naopak.

Oblasti aplikací úloh VHV mohou být velmi rozmanité. Je to dáno mimo jiné i skutečností, že formulace úlohy tohoto typu je srozumitelná v podstatě pro každého. Jako ilustrace potenciálních aplikací uvedeme několik případů, které se týkají infrastrukturních projektů [4]:

- výběr trasy pro realizaci výstavby silniční infrastruktury. Variantami jsou v tomto případě trasy, které jsou potenciálně pro výstavbu k dispozici, kritéria mohou být například cena pozemků, investiční náklady pro výstavbu, vliv staveb na životní prostředí apod.
- Výběr vhodného způsobu financování silniční infrastruktury. Variantami jsou různé zdroje, možnosti financování. Kritéria mohou být například velikost úroku, náklady na pořízení finančních prostředků, doba splacení úvěru, platební podmínky apod.
- Konkurz na dodavatele staveb silniční infrastruktury. Variantami jsou uchazeči o dodavatele. Kritéria mohou být cena, doba a způsob dodání, doplňkové služby, tj. možnost reklamace, záruka apod.

V těchto případech by bylo možné pokračovat, protože téměř každé rozhodování člověka je rozhodováním vícekritériálním, i když ve většině případů jej není účelné a často ani možné nějakým modelovým způsobem podchytit. Na výše uvedené ilustraci je však možné ukázat, jaké cíle si rozhodovací subjekt může definovat při analýze úloh VHV. Mezi základní cíle patří:

- výběr jedné varianty, která bude východiskem pro konečné rozhodnutí. Tato varianta je vlastně kompromisem mezi jednotlivými rozhodovacími kritérii. Proto se také označuje jako kompromisní varianta. Výběr kompromisní varianty je prioritním cílem například při výběru lokality, pro realizaci infrastrukturní investice apod. V takovýchto situacích rozhodovatele zpravidla ani tak nezajímá, jaká varianta

bude hodnocena jako druhá či další v pořadí, ale zajímá ho právě ta jedna kompromisní varianta.

- Uspořádání variant je obecnějším cílem než výběr kompromisní varianty. V tomto případě rozhodovatel požaduje, aby byly varianty uspořádány od nejlepší po nejhorší. Zde si je třeba uvědomit, že při vícekriteriálním rozhodování závisí často pojmy nejlepší, nejhorší nebo kompromisní varianta na jejich definici, která vychází z vyjádření preferencí rozhodovatele. Není to tedy jako v monokriteriálních rozhodovacích úlohách, kde je pojem nejlepší nebo optimální varianta (řešení) určena v typickém případě jednoznačně. Uspořádání variant se požaduje všude tam, kde v hodnoceném souboru jednotek má pro rozhodovatele význam informace o celkovém uspořádání.
- Klasifikace variant je cílem, ve kterém jde rozhodovateli především o to, jak rozdělit varianty do několika tříd. Mohou to být třeba jen dvě třídy, například při hodnocení dodávek vyhovuje/nevyhovuje nebo více/méně podrobná ABC klasifikace, například při hodnocení klientů bank.

Pokud nejsou rozhodvateli při analýze úloh VHV k dispozici žádné dodatečné informace, potom může pouze rozhodnout o vzájemném vztahu všech dvojic variant. Může dojít k následujícím situacím [2]:

- varianta X_i dominuje variantu X_j pokud jsou kritériální hodnoty varianty X_i lepší nebo stejné jako kritériální hodnoty varianty X_j a obě varianty nejsou stejně hodnocené podle všech kritérií. Pro maximalizační kritéria tedy platí $(y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik}) \geq (y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jk})$, kde relace \geq vylučuje rovnost obou vektorů.
- Varianta X_j dominuje variantu X_i pokud všechny kritériální hodnoty varianty X_j jsou lepší nebo stejné jako kritériální hodnoty varianty X_i a obě varianty nejsou stejně hodnocené podle všech kritérií.
- Varianty X_i a X_j nejsou navzájem dominované, neplatí-li ani jedna z předcházejících dvou možností.

Varianta X_i se označuje jako nedominovaná varianta, jestliže na množině rozhodovacích variant neexistuje jiná varianta, která by ji dominovala.

Je zřejmé, že při hledání kompromisní varianty bude stačit, soustředíme-li se na nedominované varianty úlohy. Kompromisní varianta musí být tedy vždy variantou nedominovanou. Problém je však v tom, že nedominovaných variant bývá v úlohách VHV značný počet. Proto je třeba, aby rozhodovatel vyjádřil nějakým způsobem své preference, které se použijí při analýze dané úlohy. Pro vícekriteriální hodnocení variant byla navržena celá řada metod, od velmi jednoduchých až po poměrně složité postupy. Většina metod má společné to, že rozhodovatel musí vyjádřit nějakým způsobem své preference ve vztahu k jednotlivým kritériím, zahrnutým do modelu. Je zřejmé, že pro rozhodovatele mohou mít jednotlivá kritéria různou důležitost, kterou je třeba pro použití jednotlivých metod nějakým způsobem kvantifikovat. Kvantifikované vyjádření důležitosti

jednotlivých kritérií se označuje jako váhy kritérií. Váhy kritérií [3] lze vyjádřit ve formě váhového vektoru:

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_k), \sum v_i = 1, v_i > 0. \quad (2)$$

Čím je důležitost kritérií vyšší, tím je vyšší i jejich váha. Podmínka, že součet složek váhového vektoru má být roven jedné, není nezbytná. Některé metody ji však vyžadují a není problém vyjádřit váhy kritérií tak, aby jejich součet byl roven jedné.

2. Metoda WSA

Metod pro VHV je velké množství a jsou založené na různých principech. Mezi nejčastěji používané patří metoda AHP, metody třídy ELECTRE, PROMETHEE, metoda váženého součtu (WSA), metoda funkce užítku, metoda TOPSIS a další.

Metoda váženého součtu bývá označována [1] také jako metoda WSA (Weighted Sum Approach). Tato metoda je založena na konstrukci lineární funkce užítku na stupnici od 0 do 1. Nejhorší varianta podle daného kritéria bude mít užitek nula, nejlepší varianta užitek jedna a ostatní varianty budou mít užitek mezi oběma krajními hodnotami. Znamená to, že je třeba při aplikaci této metody nahradit prvky y_{ij} vstupní kritériální matice hodnotami y'_{ij} , které budou představovat užitek varianty X_i při hodnocení podle kritéria Y_j . Hodnoty y'_{ij} lze získat pro maximalizační kritéria podle následujícího vztahu [3]:

$$y'_{ij} = \frac{y_{ij} - D_j}{H_j - D_j}, \quad (3)$$

kde D_j je nejnižší (při maximalizaci tedy nejhorší) a H_j nejvyšší (při maximalizaci nejlepší) kritériální hodnota kritéria Y_j . Z uvedeného vztahu je zřejmé, že užitek y'_{ij} pro nejhorší kritériální hodnotu $y_{ij} = D_j$ bude roven nule a pro nejlepší kritériální hodnotu $y_{ij} = H_j$ bude roven 1. Pro minimalizační kritéria je třeba modifikovat uvedený vztah následovně [3]:

$$y'_{ij} = \frac{y_{ij} - D_j}{H_j - D_j}. \quad (4)$$

Celkový užitek varianty X_i lze potom vypočítat jako vážený součet dílčích užítků podle jednotlivých kritérií [3]:

$$u(X_i) = \sum_{j=1}^k v_j y'_{ij}. \quad (5)$$

Varianty je potom možné uspořádat podle klesajících hodnot užítku $u(X_i)$.

3. Praktická aplikace metody WSA

Metoda Weighted Sum Approach (WSA) je metodou vícekritériálního hodnocení variant (projektů) a je založená na konstrukci lineární funkce užítku. V praktické aplikaci využijeme výše uvedené skutečnosti při hodnocení jednotlivých variant silničních

infrastrukturních projektů. Infrastrukturní projekty uspořádáme podle klesajících hodnot vypočtených užiteků.

Pro počítačovou podporu praktické aplikace metody WSA byl použit vizuální programovací jazyk Delphi.

V programu lze šipkami navolit minimálně dva projekty a dvě kritéria hodnocení. Maximálně je nastaveno třináct projektů a devět hodnotících kritérií. Počet projektů a počet kritérií může být i větší, lze je podle potřeby upravit ve zdrojovém programu.

Pro ilustraci můžeme použít následující příklad (vstupní hodnoty nám znázorňuje obrázek *obr. 1*).

Budeme hodnotit jednotlivé infrastrukturní projekty (například šest projektů silniční infrastruktury) od A až po F podle těchto kritérií¹ [4]:

- a cena projektu (kritérium budeme minimalizovat - 0.3208),
- b doba výstavby (kritérium budeme minimalizovat - 0.1167),
- c vliv na životní prostředí (kritérium budeme minimalizovat - 0.1731),
- d dopravní kapacita (kritérium budeme maximalizovat - 0.3272),
- e návratnost vložených prostředků (kritérium budeme maximalizovat - 0.0622).

	Kritérium a	Kritérium b	Kritérium c	Kritérium d	Kritérium e
Váhy	0.3208<	0.1167<	0.1731<	0.3272	0.0622
Projekt A	10200	12	5	1000	120
Projekt B	9800	12	8	500	120
Projekt C	7000	18	25	100	240
Projekt D	8500	18	15	500	180
Projekt E	8500	18	15	800	180
Projekt F	7500	12	15	700	160

Obr. 1 Vstupní hodnoty

Fig. 1 Inputs

Kritériální matice je obsažena v obrázku 1. Jsou zde uvedeny rovněž typy kritérií a jejich váhy.² Symbolem „<” v řádku “váhy” značíme minimalizaci uvedeného kritéria.

1 Uvedené hodnoty kritérií neodpovídají skutečnosti. Slouží pouze pro ilustraci a ukázkou výpočtu užiteků jednotlivých variant (projektů) pomocí metody WSA s počítačovou podporou.

2 V našem případě je součet vah jednotlivých kritérií roven jedné. V případech, kdy součet vah není roven jedné, program provede transformaci na jednotkový součet.

Maximalizaci značit nebudeme a hodnota váhy bez znaménka „<“ bude automaticky znamenat maximalizaci uvedeného kritéria.

Podle vztahu (3) pro maximalizační kritéria a vztahu (4) pro minimalizační kritéria se normalizuje kritériální matice a potom se podle vztahu (5) vypočte užitek jednotlivých variant (obr. 2).

	Kritérium a	Kritérium b	Kritérium c	Kritérium d	Kritérium e	užitek
Váhy	0.3208	0.1167	0.1731	0.3272	0.0622	
Projekt A	0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.6170
Projekt B	0.1250	1.0000	0.8500	0.4444	0.0000	0.4494
Projekt C	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.3930
Projekt D	0.5313	0.0000	0.5000	0.4444	0.5000	0.4335
Projekt E	0.5313	0.0000	0.5000	0.7778	0.5000	0.5426
Projekt F	0.8438	1.0000	0.5000	0.6667	0.3333	0.7128

Obr.2 Výpočet podle metody WSA

Fig.2 Outputs by WSA method

Metoda WSA hodnotí užitek jednotlivých projektů na stupnici od 0 do 1. Nejhorší varianta má podle daného kritéria užitek nula, nejlepší varianta užitek jedna a ostatní varianty budou mít užitek mezi oběma mezními hodnotami. Z toho vyplývá, že podle metody WSA je tedy v našem příkladě nejlepší projekt F a je následován projektem A, E, B, D a nejhůře dopadl projekt C.

4. Zdrojový program

```
unit metoda WSA;
interface
uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, ComCtrls, Grids, StdCtrls, StrUtils;
type
  TForm1 = class(TForm)
    UpDown1: TUpDown;
    UpDown2: TUpDown;
    StringGrid1: TStringGrid;
    Button1: TButton;
    Label1: TLabel;
    Label2: TLabel;
    Button2: TButton;
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure UpDown1Click(Sender: TObject; Button: TUDBtnType);
    procedure UpDown2Click(Sender: TObject; Button: TUDBtnType);
    procedure Button2Click(Sender: TObject);
    procedure StringGrid1Enter(Sender: TObject);
  private
```

```

    { Private declarations }
public
    { Public declarations }
end;
var
    Form1: TForm1;
implementation
{$R *.dfm}
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var k1,k2,i,ii:integer;
    {d,h:extended;}
    suma:extended;
    yy,d,h,k:array[1..10] of extended;
    min:array[1..10] of boolean;
    y:array[1..10,1..10] of extended;
    pom:string;
begin
k1:=UpDown2.Position-1;
k2:=UpDown1.Position-1;
for i:=1 to k2 do begin
    pom:=StringGrid1.Cells[i,1];
    min[i]:=false;
    if not(TryStrToFloat(pom,yy[i])) then
        if Pos('<',pom)=Length(pom) then begin
            min[i]:=true;
            if not(TryStrToFloat(LeftStr(pom,Length(pom)-1),yy[i])) then yy[i]:=5;
            end else yy[i]:=5;
        end
for ii:=2 to k1 do begin
    if not(TryStrToFloat(StringGrid1.Cells[i,ii],y[ii-1,i])) then y[ii-1,i]:=0;
    if ii=2 then begin d[i]:=y[ii-1,i];h[i]:=y[ii-1,i];end else
        begin
            if y[ii-1,i]<d[i] then d[i]:=y[ii-1,i];
            if y[ii-1,i]>h[i] then h[i]:=y[ii-1,i];
        end;
end;
end;
suma:=0;
for i:=1 to k2 do suma:=suma+yy[i];
for i:=1 to k2 do yy[i]:=yy[i]/suma;
for i:=1 to k1-1 do for ii:=1 to k2 do
    if h[ii]=d[ii] then y[i,ii]:=0 else
        if min[ii] then y[i,ii]:=(h[ii]-y[i,ii])/(h[ii]-d[ii]) else
            y[i,ii]:=(y[i,ii]-d[ii])/(h[ii]-d[ii]);
for i:=1 to k2 do begin Str(yy[i]:0:4,pom);StringGrid1.Cells[i,1]:=pom; end;
for i:=2 to k1 do for ii:=1 to k2 do
    begin Str(y[i-1,ii]:0:4,pom);StringGrid1.Cells[ii,i]:=pom;end;
StringGrid1.ColCount:=k2+2;
StringGrid1.Cells[k2+1,0]:='užitek';
for i:=1 to k1-1 do begin k[i]:=0;
    for ii:=1 to k2 do k[i]:=k[i]+y[i,ii]*yy[ii];
    Str(k[i]:0:4,pom);StringGrid1.Cells[k2+1,i+1]:=pom;
end;
end;
procedure TForm1.UpDown1Click(Sender: TObject; Button: TUDBtnType);
var i:integer;
    pom:string;
begin
pom:='abcdefghijklmnoprstu';
for i:=1 to 10 do StringGrid1.Cells[i,0]:='Kritérium '+pom[i];
StringGrid1.ColCount:=UpDown1.Position;
end;
procedure TForm1.UpDown2Click(Sender: TObject; Button: TUDBtnType);
begin

```

```

StringGrid1.RowCount:=UpDown2.Position;
end;
procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
begin
ShowMessage('Metoda Weighted Sum Approach (WSA)+'+#13+'je metodou vicekriteriálního
hodnocení projektů.'+#13+'Je založena na konstrukci lineární funkce
užitku.'+#13+'Jednotlivé varianty projektů je potom možné'+#13+'uspořádat podle
těchto klesajících hodnot.');
```

```

end;
procedure TForm1.StringGrid1Enter(Sender: TObject);
var pom:string;
    i:integer;
begin
with StringGrid1 do begin
Cells[0,1]:='Váhy';
pom:='ABCDEFGHIJKLMNPRSTU';
for i:=1 to 15 do Cells[0,i+1]:='Projekt '+pom[i];
pom:='abcdefghijklmnoprstu';
for i:=1 to 10 do Cells[i,0]:='Kritérium '+pom[i];
end;
end;
end.

```

Závěr

Uvedená hodnotící metoda má široké použití zejména při hodnocení teoretických a praktických rozhodovacích dopravních (samozřejmě nejenom dopravních) problémů, kde je potřeba vybírat mezi více variantami podle různých, často protichůdných kritérií.

Lektoroval: Doc. Ing. Jozef Strišš, CSc.

Předloženo: 19.03.2003

Literatura

1. ANDERSON, D. R., SWEENEY, D. J., WILLIAMS, T. A. *An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making*. West Publ., Minneapolis, 1994.
2. JABLONSKÝ, J. *Operační výzkum, kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování*. Professional Publishing, Praha 2002. ISBN 80-86419-23-1.
3. JABLONSKÝ, J. *Operační výzkum*. VŠE, Praha 2001. ISBN 80-245-0162-7.
4. KAMPF, R. *Finanční aspekty rozvoje silniční infrastruktury*. Disertační práce. Univerzita Pardubice DFJP 2003.

Resumé

VÍCEKRITERIÁLNÍ ROZHODOVÁNÍ - METODA WSA

Rudolf Kampf

V reálných rozhodovacích situacích se rozhoduje zpravidla podle několika rozhodovacích kritérií. Tato kritéria nejsou zpravidla ve vzájemném souladu, tzn. varianta, která je nejlépe hodnocena podle jednoho kritéria, nebývá nejlépe hodnocena podle kritéria jiného.

Cílem uvedeného článku je řešení vícekritériálních rozhodovacích úloh pomocí metody WSA s počítačovou podporou. Pro počítačovou podporu praktické aplikace metody WSA byl použit vizuální programovací jazyk Delphi.

Zusammenfassung

MEHRKRITERIEN ENTSCHEIDUNSAUFGABEN - WSA-METHODE

Rudolf Kampf

In realen entscheidenden Situationen wird in der Regel nach mehrere Entscheidungskriterien wird. Diese Kriterien sind nicht in der Regel in gegenseitige Harmonie, d.h. die Variante, die am gestern nach einem Kriterium aber nicht am besten nach dem anderen Kriterium bewertet.

Ziel der Beitrag ist die Lösung der mehrkriterien Entscheidungsaufgaben durch WSA - Methode mit Rechnungsunterstützung, mit Benutzung der Programmiersprache Delphi.

Summary

MULTICRITERIA DECISION – WSA METHOD

Rudolf Kampf

In decision-making situations we have to take into account several optimization criteria. These criteria are often in anticoincidence, i.e. a variant which is assessed as the best by one criteria is not assessed so by another one. The goal of multicriteria decision problem is to solve this conflict. Particular goal can then be the choice of one variant, which will be the base for the final decision. If we have set the list of the possible variants we solve the so-called problem of multicriteria ratings of variants (MRV).

The domain of application of MRV can be wide-ranging. The reason is also that the formulation of the problem of this type is essentially comprehensible for everyone. The article shows some examples concerning the infrastructure projects [4]:

- choice of plan for road infrastructure. The variants are possible routes; the criteria could be e.g. the price of lands, expenses for construction, impact on environment, etc.
- choice of appropriate way of financing of road infrastructure. The variants are different financing sources. The criteria could be e.g. interests, expenses of obtaining recourses, time for paying interest, payment conditions, etc.
- tender for provider of the road infrastructure. The variants are candidates. The criteria are price, time and way of delivery, complementary services i.e. opportunity to complain, guaranty, etc.

The aim of the article is to solve the problem of multicriteria decision by means of method WSA using computer support. For the practical application of the method WSA the visual language DELPHI has been used.

The method of Weighted Sum Approach (WSA) is a method of multicriteria ratings of variants (of projects) and the core is a construction of the linear function of profit. For the practical application we use the above-mentioned facts for ratings of the variant of road infrastructure projects. The projects will be sorted by decreasing direction of the values of profit function.

As a computer support of practical application of method WSA we have used visual programming language Delphi.

In the program application we can select, using the arrows, at least two projects and two criteria for ratings. At most we can select 13 projects and 9 criteria. Number of project and criteria can be greater, and can be adjust in the source code.

As a illustration, the article shows the following example (*Fig.1*). We rate the individual infrastructure projects from A to F by means of these criteria¹ [4]:

- the price of project (the criterium for minimalization – 0.3208),
- time of construction (the criterium for minimalization – 0.1167),
- impact on environment (the criterium for minimalization – 0.1731),
- transport capacity (the criterium for maximalization – 0.3272),
- returnability of inserted resources (the criterium for maximalization –0.0622).

The method WSA rates the profit of individual project at the scale from 0 to 1. The value of the worst variant is zero, for the best it is one and for the rest it is between these two numbers. Therefore, according the method WSA, in our example, the best project is F followed by A, E, B, D and the worst is project C (*Fig. 2*).

The mentioned rating method is in particular appropriate for the ratings of theoretical and practical transport (and of course not only) decision-problems, where we need to choose among several variants according to different (sometimes opposite) criteria.

¹ The mentioned values are not real. They serve only as an illustration of calculation of profits for individual variant (of projects) by means of method WSA using computer support.