SCIENTIFIC PAPERS
OF THE UNIVERSITY OF PARDUBICE
Series B
The Jan Perner Transport Faculty
5 (1999)

OPTIMALIZACE TARIFŮ – ČASOVÉ JÍZDENKY

Anna ČERNÁ

Fakulta managementu VŠE, Jindřichův Hradec

1. ÚVOD

Kdo má snahu optimalizovat dopravní obsluhu nějakého území veřejnou dopravou, nemůže ponechat bez povšimnutí ani otázku tarifů. Marně se bude snažit nabídnout spoje tam, kde se pohybují proudy cestujících, když tyto potenciální zákazníky odradí vysoká cena nabízené přepravní služby a podobně marné bude jeho snažení, když příliš levné jízdenky zvýší nároky na dotace nad únosnou míru.

V cenotvorbě přepravních služeb veřejné dopravy můžeme rozlišit tato základní rozhodnutí:

- jaká budou vzdálenostní tarifní pásma
- jaké skupiny cestujících tarifně rozlišovat
- jak volit pro danou skupinu a dané pásmo cenu jednoduché jízdenky (na jednu cestu)
- jakou zvolit množstevní slevu pro více cest předem vymezeného počtu, nebo délky
- jaké zavést jízdenky, nebo slevy na neomezený počet cest za vymezená časová období.

My si blíže všimneme posledního z uvedených rozhodnutí a omezíme ho na stanovení poměru ceny měsíční jízdenky k jízdence na jednu cestu v jednom tarifním pásmu. V této otázce lze pozorovat zajímavý rozdíl mezi situací v ČR a státech EU. U nás se tento poměr pohybuje v rozmezí 30-60, kdežto jinde bývá tento poměr podstatně nižší, často kolem 20-25. Je zřejmé, že obě tato řešení nemohou být stejně motivovaná.

U nás se obvykle používá takováto jednoduchá úvaha: měsíc má v průměru nejméně 20 pracovních dnů, což znamená nejméně 40 jednoduchých jízdenek na cestu do práce resp. školy a co potom v případě, když jsou jízdenky nepřestupní a potom cesty navíc kromě cest do práce. Tato úvaha však nejen není jediná možná, ale že může být i dosti zavádějící.

2. APOSTERIORNÍ ANALÝZA

Aposteriorně (zpětně) můžeme vhodnost cenového poměru posoudit následovně: je-li c_1 cena jednoduché a c_2 cena měsíční jízdenky, n_1 resp. n_2 počet těchto jízdenek, prodaných za měsíc a r celkový počet jízd za měsíc (všech cestujících, i těch, co jeli na jednoduchou i na měsíční jízdenku), pak $r - n_1$ je počet jízd, uskutečněných na měsíční jízdenky a $c = c_2 n_2 /(r - n_1)$ je tržba z jedné jízdy na měsíční jízdenku. Je zřejmé, že je-li $c_1 < c$, je cena měsíční jízdenky nastavena zdánlivě výhodně pro dopravce i donátora dotace. Jenže pozor, bylo by chybou domnívat se, že je to nastavení optimální a rovněž vztah $c < c_1$ nemusí nutně signalizovat, že je ta cena zvolena špatně. A to dokonce ani z hlediska optimalizace tržeb.

3. OPTIMALIZAČNÍ MODELY

Model optimalizace tržeb může být formulován různě. Jedna varianta předpokládá danou cenu c_1 jednoduché jízdenky a pro stanovení optimální (z hlediska tržeb) ceny měsíční jízdenky $c_2 = x$ vyžaduje tyto vstupní veličiny:

- $p(x)$ = pravděpodobnost toho, že si cestující koupí měsíční jízdenku za cenu x
- $f(x)$ = průměrný měsíční počet jízd cestujícího, jenž si nekoupil měsíční jízdenku za cenu x

Pak můžeme odhad měsíčních tržeb od jednoho cestujícího vyjádřit výrazem

- $a(x) = c_1 f(x)(1-p(x)) + xp(x)$

Tato hodnota jistě nenabude svého maxima v bodě $x = 0$, protože zřejmě $p(0) = 1$ (zadarmo si měsíční jízdenku vezme každý) a tedy $a(0)=0$. kdežto pro $x>0$ je i $a(x)>0$. Předpokládáme-li derivovatelnost funkcí p a f na celém oboru nezáporných reálných čísel, je pro bod maxima nutnou podmínkou, aby $a'(x)=0$, tj.

$$c_1 f'(x)(1-p(x)) - c_1 f(x)p'(x) + p(x) + xp'(x) = 0$$

což představuje (obecně nelineární) rovnici pro neznámou cenu x.

Praktická použitelnost tohoto modelu bude hodně záviset od možnosti vyjádření funkcí f a p v analytické podobě a to nebude snadné. Z těchto důvodů se zdá být vhodnějším model jiný, založený na předpokladu, že každý potenciální cestující má určitý odhad $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ počtu cest, které uskuteční za měsíc, ale ve skutečnosti pak uskuteční bk cest, kde $b \in (0, 1)$. Předpokládáme rovněž, že cestující se chová racionálně: stojí-li jednoduchá jízdenka c_1 a měsíční x, koupí si měsíční jízdenku jen tehdy, když $c_1 k > x$. Uvažujme jen taková čísla x, jež jsou celočíselnými násobky čísla c_1, tj. $x = c_1 y$ Označme $f(k)$ počet cestujících, kteří odhadují počet svých jízd za měsíc číslem k. Pak očekávaná tržba bude

$$a(y) = c_1 b(f(1)+2f(2)+...+yf(y))+c_1 y(f(y+1)+f(y+2)+...)$$

Vidíme, že v $a(y)$ můžeme vytknout c_1 a tedy velikost ceny c_1 neovlivní hodnotu z, ve které nabývá funkce a maxima. Proto můžeme pro jednoduchost předpokládat, že c_1=1. Jelikož y je přirozené číslo, není možné využití derivace, ale nutno si uvědomit, že funkce (vlastně posloupnost) $a(y)$ nabývá lokálního maxima v bodě z tehdy, je-li

$$a(z-1) < a(z) > a(z+1) \qquad \text{(M)}$$

Jelikož $a(0)=0$ a další hodnoty jsou kladné, zajímá nás zejména, kdy poprvé nastane pravá z uvedených nerovností. Máme

$$a(z) = b(f(1)+2f(2)+...+zf(z)) + z(f(z+1)+f(z+2)+...)$$

$$a(z+1) = b(f(1)+2f(2)+...+zf(z)+(z+1)f(z+1)) +(z+1)(f(z+2)+f(z+3)+...)$$

a tedy

$$a(z+1)-a(z) = b.(z+1)f(z+1)- zf(z+1)+f(z+2)+f(z+3)+... =$$

$$= b.(z+1)f(z+1)- (z+1)f(z+1)+f(z+1)+f(z+2)+f(z+3)+...$$

$$= (b-1)(z+1)f(z+1)+f(z+1)+f(z+2)+f(z+3)+...$$

z čehož plyne, že nerovnost

$$a(z) > a(z+1)$$

je ekvivalentní s

$$f(z+1)+f(z+2)+f(z+3)+... < (1-b)(z+1)f(z+1) \qquad \text{(N)}$$

Levá strana této nerovnosti představuje zřejmě nerostoucí funkci proměnné z. Kdyby pravá strana byla neklesající, měli bychom tyto možnosti:

- a) nerovnost neplatí pro žádné z (a pak není vhodné měsíční jízdenky zavádět, snížily by příjmy,
- b) nerovnost platí od nějakého z počínaje (a pak $c_1 z$ je optimální cenou měsíční jízdenky).
- Zdánlivá třetí možnost c): nerovnost platí pro všechny z, nemůže nastat, protože pro z=0 by znamenala $f(1) < (1-b)f(1)$, což je ve sporu s tím, že b a $f(1)$ jsou nezáporná čísla.

- Pokud pravá strana nerovnosti (N) není neklesající, může nastat ještě další možnost: složená nerovnost (M) může být splněna pro více, než jedno z. Pak musíme prověřit všechny lokální extrémy a určit, který je největší.
- V praxi se stává, že existují hodnoty z_1,z_2, takové, že vně množiny $Z = \langle z_1, z_2 \rangle$ je $f(z)=0$. Pak se při hledání optimální hodnoty nemusíme zdržovat s nerovnicemi (M) a (N). Stačí, když počítač vypočte konečný počet hodnot $a(z)$ pro $z \in Z$ a vybere to z, pro které je $a(z)$ největší.

4. ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY

Optimální hodnota z a jí odpovídající cena měsíční jízdenky $c_1 z$ je optimem ekonomickým. Někdy však může být vhodné jít i pod tuto hodnotu. Například v některých švédských městech jsme se setkali s hodnotami kolem z = 20 i méně. Zdůvodnění bylo takovéto: Tak výrazně levná měsíční jízdenka přiměje téměř každého zaměstnance, resp. žáka, aby si ji koupil. Když však už ji jednou má, říká si:„Proč ji nevyužít?“ a místo osobního auta se mnohem častěji rozhodne pro veřejnou dopravu, což pak městské orgány s radostí dotují, neboť se výrazně sníží nehodovost, kongesce, hluk, exhaláty a další nepříznivé důsledky individuálního motorismu. Žel, u nás je spíše tendence opačná, nepočítá se s existencí redukčního koeficientu b, na měsíční jízdenku se pohlíží jen jako na určitý typ množstevní slevy a její cena bývá zbytečně vysoká.

Lektoroval :Doc. RNDr. Antonín Tuzar, Csc.
Předloženo v březnu 2000.

Poznámka: Článek vznikl za podpory grantu GAČR 103/00/0443.

Resumé

OPTIMALIZACE TARIFŮ – ČASOVÉ JÍZDENKY

Anna ČERNÁ

Článek se zabývá optimalizací poměru $y = c_2/c_1$ ceny časové jízdenky c_2 na neomezený počet jízd a ceny c_1 jízdenky na jednu jízdu po stejné trase veřejné dopravy. Je popsán spojitý i diskrétní optimalizační model.

Summary

OPTIMIZATION OF FARES – TIME INTERVAL TICKETS

Anna ČERNÁ

The paper deals with the oprimization of the ratio y = c2/c1 where c1 is the price of one trip ticket and c2 is the price of a ticket for an unlimited number of trips on the same public transport route during the given time interval. A continuous and a discrete models are presented.