SCIENTIFIC PAPERS
OF THE UNIVERSITY OF PARDUBICE
Series B
The Jan Perner Transport Faculty
**7** (2001)

# POUŽITIE DISKRÉTNEHO PROCESU ZHROMAŽÏOVANIA S DVOMI TRIEDAMI PRIORÍT PRI RIADENÍ ŽELEZNIÈNEJ DOPRAVY PRI VÝLUKE KO¼AJE

Július REBO [a)], Ondrej BARTL [b)]

[a)] Katedra matematických metód, [b)] Katedra špeciálnych technológií,
Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita

## 1. Úvod

Bezpeènos• železniènej dopravy vyžaduje udržova• tra•ové ko¾aje sústavne v prevádzky schopnom stave. Preventívnu údržbu, ktorú je nutné z týchto dôvodov vykonáva•, môžeme rozdeli• na údržbu poèas prevádzky a údržbu, pri ktorej je potrebné prevádzku zastavi• alebo celkom preruši•.

Pri jednoko¾ajnej trati je niekedy nevyhnutné už pri opravách menšieho rozsahu dopravu úplne zastavi• a použi• náhradnú. Ak je tra• viacko¾ajová, je možné vylúèi• z dopravy jednu ko¾aj a po ko¾ajách, ktoré zostanú v prevádzke, sa dá vykonáva• preprava vlakov aj z uzavretého smeru. Takúto výluku trate (uzavretie) zvyèajne realizujeme medzi dvomi železniènými stanicami. Môžu však nasta• aj prípady, keï je nutné uzavretie viacerých nadväzujúcich medzistaniènených úsekov trate súèasne.

Organizáciu a plánovanie výluky ko¾aje komplikuje aj zloženie vlakovej dopravy. Riadenie dopravy cez uzavreté miesto musí dba• na prioritu jednotlivých druhov vlakov – osobná doprava (rýchliky, osobné vlaky) a nákladná doprava.

Pozornos• budeme venova• dvojko¾ajnej trati, pri ktorej budeme predpoklada• zavretie jednej ko¾aje a doprava sa bude vykonáva• po druhej ko¾aji pre oba smery. Úlohou je navrhnú• optimalizaèný model výluky jednej tra•ovej ko¾aje. Riešenie uvedenej úlohy známe z literatúry, napr. [1], vychádza z numerických metód riešenia a cyklických prepoètov pri optimalizácii d¾žky cyklu. V tomto príspevku ukážeme iný prístup k riešeniu a stanoveniu potrebných charakteristík systému. Naviac sa budeme zaobera• metódou rozdelenia kapacity zväzku vlakov v každom smere pod¾a priority ich dopravy.

## 2. Zostavenie analytického modelu výluky

Pripomeòme najskôr zostavenie matematického modelu výluky ko¾aje pri dvojko¾ajovej trati so zavedením potrebných údajov a vz•ahov. Samotné riešenie zostaveného modelu urobíme pomocou dvoch modelov, ktoré uvedieme v nasledujúcej èasti.

Predpokladajme, že je uzavretá èas• trate medzi dvomi stanicami $S_i$, $i$ = 1,2. Nech vlaky prichádzajúce do stanice v každom smere s intenzitou $\lambda_i$ vlakov za èasovú jednotku (budeme predpoklada• èasovú jednotku rovnú jednej hodine) podliehajú Poissonovmu rozdeleniu. Ï alej predpokladajme, že za prvý smer zvolíme ten, ktorého intenzita je väèšia, t.j. $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Vlaky v stanici, èakajúce na otvorenie prejazdu v ich smere, sú zoraï ované na odstavnej ko¾aji v poradí ich príchodu do stanice. Zatia¾ budeme predpoklada•, že odstavné ko¾aje majú dostatoènú kapacitu, aby prijali všetky vlaky vchádzajúce do stanice. Poèas uzavretia jedného smeru dochádza k obsluhe vlakov z druhého smeru, ktoré postupne opúš•ajú odstavné miesto a prechádzajú cez výlukový úsek trate. V závislosti od d¾žky prepúš•acieho intervalu a množstva èakajúcich vlakov je možné, že niektoré sa nestihnú obslúži• a zostávajú na odstavnej ko¾aji až do nasledujúceho uvo¾nenia smeru.

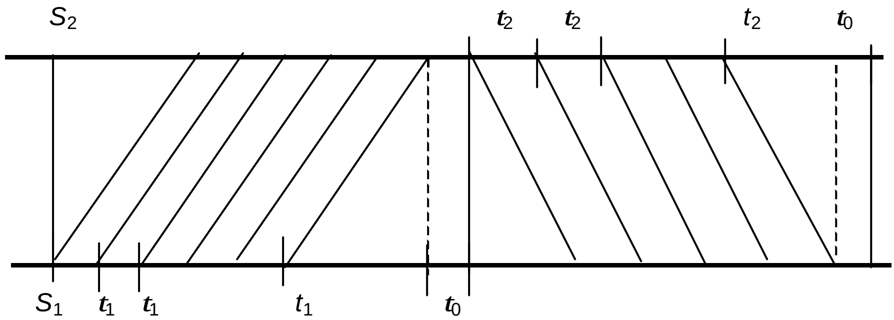
Pre jednoduchšie vytvorenie modelu predpokladajme, že doprava v oboch smeroch je organizovaná v cykloch pozostávajúcich z troch fáz:

- fáza prejazdu vlakov 1. smeru – trvanie fázy je $T_1$ hodín,
- fáza prejazdu vlakov 2. smeru – trvanie fázy je $T_2$ hodín,
- intervaly protismernej jazdy a výmena smeru – trvanie fázy je $T_0$ hodín.

Oznaème d¾žku trvania celého cyklu $T_c$. Prejazdy vlakov v každom smere organizujeme po skupinách (zväzkoch) urèitej ve¾kosti Mi a predpokladáme, že vlaky sa prepúš•ajú za sebou po uplynutí bezpeènostného intervalu d¾žky $\tau_i > 0$, prièom doba prejazdu celého úseku v jednom smere je $t_i > 0$ hodín. Potom pre jednotlivé smery dostaneme vyjadrenie trvania fázy prejazdu $T_i = (M_i - 1)$. D¾žka celého cyklu tak bude:

$$T_c = (M_1 - 1)\tau_1 + (M_2 - 1)\tau_2 + (t_1 + t_2 + 2\tau_0) = T_1 + T_2 + T_0\,, \tag{1}$$

kde $T_0 = t_1 + t_2 + 2t_0$ je súèet dvoch intervalov prejazdu v každom smere a dvoch bezpeènostných intervalov pri výmene smeru jazdy $t_0$. Uvedené èasové nadväznosti sú znázornené na *obr. 1*.




***Obr. 1*** *Rozlož enie èasov prejazdu*
***Fig. 1*** *Transit times decomposition*

Predpokladom vhodného rozdelenia doby cyklu $T_c$ medzi oba smery je dopravovanie vlakov cez výlukové miesto v skupinách o ve¾kosti $M_i$ vlakov. Vzh¾adom na celkové za•aženie systému je potrebné ve¾kos• skupiny korigova• v závislosti od dåžky prepúš•acieho intervalu (fázy prejazdu) $T_i$ pre príslušný smer pod¾a vz•ahu (1). Optimalizova• dåžku cyklu tak znamená tiež urèi• odpovedajúcu ve¾kos• zväzku $M_i$ pre príslušný smer vzh¾adom k danému kritériu, ktorého vo¾bou sa budeme zaobera• neskôr.

## Diskrétny model zhromaž ïovania

V nasledujúcich úvahách sa budeme zaobera• analytickým modelom zhromažïovania vlakov pre jeden smer jazdy a jeho riešením pod¾a [2], [4]. Z týchto dôvodov, pre zjednodušenie postupu, nebudeme používa• index smeru pre intenzitu vstupu vlakov do stanice ave¾kos• zväzku. Pri úvahách pre oba smery znovu zaèneme používa• oznaèenia pomocou indexov.

Na zaèiatku prepúš•acej fázy daného smeru pre *n*-tý cyklus sa celkový poèet vlakov skladá z náhodného poètu vlakov $Z^{[n-1]}$, ktoré zostali v stanici z predchádzajúceho ($n$ - 1) cyklu a z poètu vlakov $X_{Tc}$, ktoré poèas tohto cyklu vstúpili do stanice. Oznaème tento celkový poèet vlakov ako $S^{[n]}$ a nazvime ho stavom na konci cyklu. Pre celkový poèet vlakov potom z predchádzajúceho platí:

$$S^{[n]} = Z^{[n-1]} + X_{Tc} \ , \qquad (2)$$

kde náhodná premenná $X_{Tc}$ popisuje vstup vlakov prichádzajúcich poèas cyklu s predpokladaným Poissonovým rozdelením, t.j. s pravdepodobnos•ou:

$$\pi_k = \frac{(\lambda T_c)^k}{k!} e^{-\lambda T_c} ,$$

že poèas trvania cyklu $T_c$ vstúpi do stanice práve $k$ - vlakov. Náhodná premenná $Z^{[n\,-\,1]}$ vyjadrujúca zvyšok vlakov z predchádzajúceho cyklu je nezáporná náhodná premenná a môžeme ju struène vyjadri• vz•ahom $Z^{[n\,-\,1]} = max\{0, S^{[n\,-\,1]} - M\}$, kde $M$ udáva maximálnu ve¾kos• zväzku vlakov obsluhovaných v jednom smere.

Ak predpokladáme dostatoèný rozsah kapacity odstavnej ko¾aje, náhodná premenná $S^{[n]}$ môže nadobúda• hodnoty 0,1,2, ... s pravdepodobnos•ami $p_0^{[n]}$, $p_1^{[n]}$, $p_2^{[n]}$,..., t.j. $p_k^{[n]} = P\{S^{[n]} = k\}$.

Pravdepodobnosti stavov na konci $n$ - tého cyklu ($n$ = 1,2,...) môžeme pre jednotlivé stavy vyjadri• sústavou rovníc:

$$p_0^{[n]} = \left(p_0^{[n-1]} + p_1^{[n-1]} + \ldots + p_M^{[n-1]}\right)\pi_0 ,$$

$$p_k^{[n]} = \left(p_0^{[n-1]} + p_1^{[n-1]} + \ldots + p_M^{[n-1]}\right)\pi_k + p_{M+1}^{[n-1]}\pi_{k-1} + \ldots + p_{M+k}^{[n-1]}\pi_0 , k = 1,2,\ldots , \qquad (3)$$

za podmienok: $\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{[n]} = 1$ , $n$ = 0,1,2, ... .

Riešenie uvažovaného modelu zhromažïovania je súèas•ou riešenia praktickej úlohy riadenia dopravy pri výluke tra•ovej ko¾aje a z tohto poh¾adu nás zaujímajú dva okruhy problémov. Prvý sa týka odhadu èasu potrebného na ustálenie procesu zhromažïovania v tom zmysle, aby jeho charakteristiky neboli ovplyvòované vstupnými velièinami pri spustení do prevádzky a poradím prebiehajúceho cyklu. Druhým okruhom je samotné riešenie modelu v tzv. ustálenom režime, prièom predpokladáme, že takýto režim bude tvori• väèšiu èas• samotnej prevádzky.

V práci [4] sú podrobne spracované podmienky prechodu do ustáleného režimu. Tieto poznatky nám umožòujú ukáza•, že nutnou a postaèujúcou podmienkou prechodu do ustáleného režimu èinnosti je, aby hodnota $\lambda T_c$ priemerného poètu vlakov, ktoré vstúpia do stanice v jednom smere, bola menšia ako ve¾kos• $M$ (výstupná kapacita) zväzku vlakov odchádzajúcich zo stanice v danom smere. Èiže, aby pre hodnotu tzv. za•aženia systému $\rho$ platilo:

$$\rho = \frac{\lambda T_c}{M} < 1 . \qquad (4)$$

Druhým okruhom problémov sa budeme zaobera• osobitne v nasledujúcej èasti.

### Riešenie diskrétneho modelu zhromažïovania v stabilizovanom režime

Z predchádzajúcej kapitoly vyplýva, že za podmienok $\lambda_i T_C < M_i$, $i$ = 1,2..., pre oba smery, sa systém postupne stabilizuje, prièom existuje rozdelenie pravdepodobností stavov na konci cyklu nezávislé od poèiatoèných podmienok (poèet vlakov v stanici na zaèiatku výluky) a poradového èísla prebiehajúceho cyklu. Môžeme tak predpoklada• existenciu limít $\lim_{n \to \infty} p_k^{[n]} = p_k, k = 0,1,2,...$ a sústavu rovníc (3) prepísa• do tvaru:

$$p_0 = (p_0 + p_1 + ... + p_M)p_0 ,$$

$$p_k = (p_0 + p_1 + ... + p_M)p_k + p_{M+1}p_{k-1} + ... + p_{M+k}p_0, k = 1,2,... , \qquad (5)$$

spolu s podmienkou: $$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 .$$

Struène naèrtneme ï alší postup riešenia sústavy (5) pomocou vytvárajúcich funkcií vychádzajúci z [2], ktorého detaily sú uvedené v [4]. Oznaème:

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = e^{-lT_c(1-z)}, \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k .$$

Po vynásobení každej rovnice sústavy (5) odpovedajúcou mocninou $z^k$ a ï alších úpravách dostaneme:

$$F(z) = \frac{\Phi(z)\sum_{r=0}^{M-1}(z^M - z^r)p_r}{z^M - \Phi(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M-1}(z^M - z^r)p_r}{z^M e^{lT_c(1-z)} - 1} . \qquad (6)$$

Pomocou prvej derivácie vytvárajúcej funkcie (6) v bode $z$ = 1 odvodíme strednú hodnotu poètu vlakov $E(S)$ v stanici na konci cyklu. Tak dostaneme:

$$E(S) = \left.\frac{dF(z)}{dz}\right|_{z=1} = \frac{M - (M - lT_c)^2}{2(M - lT_c)} + \sum_{k=1}^{M-1}(1 - z_k)^{-1} , \qquad (7)$$

prièom praktické použitie (7) je viazané na výpoèet koreòov $z_k$, $k$ = 1,..., $M$ - $1$, charakteristickej rovnice $j(z) = z^M - e^{-rM(1-z)} = 0$ odvodenej z menovate¾a (6).

Numerický výpoèet koreòov charakteristickej rovnice $j(z) = 0$ je pomerne zložitý a stanovenie potrebných charakteristík sa zjednoduší použitím dostatoène presnej aproximácie výrazu:

$$\sum_{k=1}^{M-1}(1 - z_k)^{-1} ,$$

buï lineárnou alebo kvadratickou aproximáciou [4], [5].

Pre dosiahnutie prakticky použite¾ných výsledkov nám bude postaèova• aj lineárna aproximácia v tvare:

$$\sum_{k=1}^{M-1}(1 - z_k)^{-1} \approx a_1(M)r + a_0(M) ,$$

ktorej koeficienty závisia od hodnoty výstupnej kapacity zväzku pod¾a vz•ahov:

$$a_1(M) = 0{,}4045\,M - 0{,}6609 \quad \text{a} \quad a_0(M) = 0{,}525\,M - 0{,}5114\ . \tag{8}$$

Stredný poèet vlakov $E(S)$ vstanici na konci cyklu môžeme zo (7) pomocou (8) upravi• do tvaru:

$$E(S) = \frac{M - (M - \lambda T_c)^2}{2(M - \lambda T_c)} + \sum_{k=1}^{M-1} (1 - z_k)^{-1} \approx \frac{M - (M - \lambda T_c)^2}{2(M - \lambda T_c)} + a_1(M)\frac{\lambda T_c}{M} + a_0(M) \tag{9}$$

a strednú hodnotu zvyšku vlakov v stanici po ukonèení cyklu vyjadríme zo strednej hodnoty *E(S)* vz•ahom:

$$E(Z) = E(S) - \lambda T_c = \frac{M - \left(M^2 - (\lambda T_c)^2\right)}{2(M - \lambda T_c)} + a_1(M)\frac{\lambda T_c}{M} + a_0(M)\,. \tag{10}$$

Ï alšou dôležitou charakteristikou je stredná doba pobytu vlaku vstanici ktorá je funkciou $w = w(\lambda, T_c)$ a ktorú môžeme vyjadri• ako:

$$w = \frac{E(Z)}{\lambda} + \frac{T_c}{2}\,. \tag{11}$$

## Model zhromažïovania s prioritami

Použitie modelu s zhromažïovania s prioritami vychádza z práce [6]. V tomto prípade predpokladáme, že do stanice vstupujú dve nezávislé skupiny vlakov predstavujúce dva nezávislé vstupné toky vlakov podliehajúce Poissonovým rozdeleniam s intenzitami $\lambda_1$, $\lambda_2$. Vlaky 1. skupiny budú predstavova• požiadavky svyššou prioritou obsluhy ako vlaky 2. skupiny. Do prvej skupiny môžeme zaradi• napr. medzinárodné rýchliky, rýchliky a pod., do druhej skupiny napr. osobné vlaky, alebo priority budú zodpoveda• len deleniu na osobnú a nákladnú dopravu, prípadne zvolíme iné vhodné rozdelenie vlakov do tried priorít. Akumulácia prichádzajúcich vlakov do stanice sa uskutoèòuje na odstavných ko¾ajách pod¾a tried priorít. Obsluhu vlakov uskutoèòujeme jedným spoloèným zariadením s celkovou kapacitou $M$ vlakov. Pod¾a poètu vlakov 1. triedy priority je buï obslúžený celý zväzok $M_1$ vlakov, ak ich je zhromaždených viac ako $M_1$, alebo sú prepravené všetky èakajúce vlaky, ak ich je menej ako kapacita zväzku $M_1$ a zvyšok kapacity $M_1 = M - M_1$ sa doplní vlakmi 2. triedy priority. A to: buï sa doplní kapacita všetkými èakajúcimi vlakmi, ak ich je menej ako zvyšok nevyèerpanej kapacity $M_2$, alebo sa doplní kapacita až do jej vyèerpania a zvyšok vlakov èaká na ïalšiu obsluhu v nasledujúcom cykle.

Podmienka stabilizácie systému s prioritami je daná požiadavkou, aby pre vlaky každej triedy priority, ktoré poèas jedného intervalu dåžky $T$ vstúpia do systému, platila ekvivalentná podmienka (4). Tak dostaneme $\lambda_i T < M_i$, $i$ = 1,2. Koeficienty za•aženia pre podsystémy tried priorít sú:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1 T}{M_1} = \frac{\lambda_1 T}{M - M_2}\,, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2 T}{M_2}\,. \tag{12}$$

Stavy podsystémov definujeme ako poèet zhromaždených vlakov jednotlivých tried priorít astavy celého systému budú definované ako ich súèet. Z nezávislosti vstupných tokov ¾ahko odvodíme vytvárajúcu funkciu rozdelenia pravdepodobností stavov pre jeden smer. Nech

$$\pi_k^{[i]} = \frac{(\lambda_i T)^k}{k!} e^{-\lambda_i T}$$

sú pravdepodobnosti, že poèas jednej periódy vstúpi do systému práve $k$ vlakov $i$-tej triedy priority. Pravdepodobnosti stavu $S^{[i]}$ na konci periódy môžeme definova• v súlade s kap. 2.1 ako pravdepodobnosti $p_k^{[i]} = P\{S^{[i]} = k\}$, $i = 1{,}2$, ktoré sú vyjadrené sústavou rovníc ekvivalentnou sústave (5). Nech

$$\Phi^{[i]}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \pi_r^{[i]} z^r, \quad G^{[i]}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r^{[i]} z^r$$

oznaèujú vytvárajúce funkcie pravdepodobností vstupu elementov do systému a stavov elementov $i$-tej triedy priority na konci periódy. Pravdepodobnosti stavov jedného smeru môžeme vyjadri• v tvare:

$$p_k = P\{S = k\} = \sum_{i=0}^{k} P\left(S^{[1]} = k - i; S^{[2]} = i\right) = \sum_{i=0}^{k} p_{k-i}^{[1]} . p_i^{[2]}$$

a odpovedajúcu vytvárajúcu funkciu v tvare:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} p_{k-r}^{[1]} p_r^{[2]} z^k = G^{[1]}(z) G^{[2]}(z).$$

Stredný poèet vlakov jedného smeru na konci periódy získame obvyklým spôsobom, vypoèítaním 1. derivácie vytvárajúcej funkcie v bode $z = 1$. Dostaneme:

$$E(S) = \left.\frac{dG(z)}{dz}\right|_{z=1} = \left.\frac{d}{dz} G^{[1]}(z) . G^{[2]}(z)\right|_{z=1} = E\left(S^{[1]}\right) + E\left(S^{[2]}\right) \tag{13}$$

a stredné hodnoty $E\left(S^{[i]}\right)$ pre každú triedu priority dostaneme pomocou (8) a (9).

Strednú hodnotu zvyšku na konci periódy vyjadríme z (13) pomocou (10). Tak dostaneme:

$$E(Z) = E(S) - \lambda_1 T - \lambda_2 T = E\left(S^{[1]}\right) - \lambda_1 T + E\left(S^{[2]}\right) - \lambda_2 T = E\left(Z^{[1]}\right) + E\left(Z^{[2]}\right). \tag{14}$$

## Optimálne rozdelenie výstupnej kapacity zväzku pre triedy priorít

V tejto èasti sa budeme zaobera• úlohou rozdelenia celkovej výstupnej kapacity zväzku $M$ jedného smeru pre jednotlivé triedy priority pod¾a [6]. Ve¾kosti výstupných kapacít sú pre obe triedy priority diskrétne závislé a pod¾a úvodného predpokladu zviazané vz•ahom $M = M_1 + M_2$ pre výstupnú kapacitu zväzku príslušného smeru. Za kritérium optimálneho rozdelenia zoberieme strednú hodnotu zvyšku vlakov po uplynutí intervalu $T$. Budeme teda minimalizova• úèelovú funkciu

$$Z(T) = E\left(Z^{[1]}\right) + E\left(Z^{[2]}\right), \tag{15a}$$

prípadne s váhovými koeficientmi

$$Z(T) = q_1 E\left(Z^{[1]}\right) + q_2 E\left(Z^{[2]}\right), \tag{15b}$$

pri danej dåžke cyklu $T$.

Stredná hodnota zvyšku $E(Z^{[i]})$ prostredníctvom výrazu:

$$\sum_{k=0}^{M_i} \left(1 - z_k^{[i]}\right)^{-1}$$

závisí od koreòov charakteristickej rovnice pre za•aženia $r_i (i = 1,2)$ z (12), ktoré h¾adáme vhodnou numerickou metódou. Za strednú hodnotu $E(Z^{[i]})$ zvyšku vlakov $i$-tej triedy dosadíme (15) aproximácie (8) upravené pre kapacity $M_i$ ($i$ = 1,2 každej triedy priority.

Vzh¾adom k vzájomnej závislosti jednotlivých výstupných kapacít $M_i$ danej vz•ahom $M = M_1 + M_2$ a pri rešpektovaní podmienok stabilizácie systému $\lambda_i T < M_i (i = 1,2)$ nemôžeme hodnoty $M_1$, $M_2$ voli• ¾ubovo¾ne. Z prvej podmienky stabilizácie máme $\lambda_2 T < M - M_2$ a po úprave $M_2 < M - \lambda_1 T$, èo spolu s druhou podmienkou dáva vyjadrenie:

$$\lambda_2 T < M_2 < M - \lambda_1 T \ , \tag{16}$$

ktoré urèuje koneèný poèet celo èíselných hodnôt výstupnej kapacity $M_2$. Hodnota výstupnej kapacity $M_1$ prvej triedy priority je tak urèená jednoznaène. Postupným prepoètom vybranej kritériálnej funkcie (15a,b) nájdeme také rozdelenie kapacít, pre ktoré pri danej dåžke intervalu $T$ nadobúda kritériálna funkcia minimum.

*Poznámka*: Ak uvažujeme o rozdelení výstupnej kapacity pre každý smer jazdy do výstupných kapacít dvoch tried priority, potom podmienka (16) zapísaná pre $j$-ty smer je:

$$\lambda_{j2} T_C < M_{j2} < M_j - \lambda_{j1} T_C \ , \ j = 1,2 \ .$$

Praktické použitie ukážeme na príklade v nasledujúcej èasti príspevku.

## 3. Optimálna dåžka cyklu a rozdelenie kapacity zväzku

Pri zväèšovaní dåžky cyklu $T_c$ klesá súèet stredných hodnôt zvyškov z oboch smerov $E(Z^{[1]}) + E(Z^{[2]})$, pretože klesá relatívny podiel neproduktívneho èasu $T_0$ na celkovej dåžke cyklu. Pre optimalizáciu dåžky cyklu $T_c$ použijeme kritérium minima stredného pobytu vlaku pri èakaní na mieste výluky.

Strednú dobu pobytu vlaku pre jeden smer sme už vyjadrili vz•ahom (11). Ak uvažujme ïalej pobyt vlaku bez oh¾adu na smer, v ktorom vznikol, analogicky dostaneme vz•ah:

$$w(T_c, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{E\left(Z^{[1]}\right) + E\left(Z^{[2]}\right)}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{T_C}{2}, \tag{17}$$

ktorý použijeme pre optimalizáciu dåžky cyklu. Pod¾a (1) však èasy prejazdu $T_1$, $T_2$ pre príslušné smery závisia od ve¾kosti zväzkov každého smeru, preto pri optimalizácii ve¾kosti cyklu musíme prepoèíta• aj zodpovedajúce ve¾kosti zväzkov $M_1$, $M_2$. Algoritmus výpoètu optimálnej dåžky cyklu a pridelenia kapacity zväzkom rozdelíme do dvoch etáp:

**I. etapa – optimalizácia dåž ky cyklu.** Pod¾a použitej dåžky cyklu dostaneme s oh¾adom na podmienky stabilizácie systému ohranièenia pre kapacity zväzkov:

$$\lambda_1 T_c < M_1 < \frac{T_c\left(1-\lambda_2\tau_2\right)-T_0+\tau_1+\tau_2}{\tau_1}, \quad M_2=\left[\frac{T_c-T_0-\left(M_1-1\right)\tau_1}{\tau_2}\right]+1 . \qquad (18)$$

Pretože ve¾kosti zväzkov $M_1$, $M_2$ sú celé èísla, treba pre každú uvažovanú hodnotu dåžky cyklu $T_c$ vypoèíta• ohranièenia (18) a pre prípustné hodnoty $M_1$ a $M_2$ zisti• ve¾kos• optimalizaèného kritéria (17). Výsledky výpoètov je vhodné zostavova• do tabuliek, odkia¾ potom vyberieme dåžku cyklu $T_c$ a ve¾kosti zväzkov $M_1$, $M_2$ tak, aby sa minimalizoval stredný pobyt $w(T_c, \lambda_1, \lambda_2)$ na mieste výluky.

**II. etapa – optimálne rozdelenie kapacity zväzkov.** Po optimalizácii cyklu budeme pokraèova• v optimálnom rozdelení príslušných ve¾kostí zväzkov každého smeru pre jednotlivé triedy priority v každom smere pod¾a predchádzajúcej èasti. Ilustrujme súhrnne celkový postup na príklade.

**Príklad:** Nech $\lambda_1$ = 2,6 vl./hod. je intenzita vstupného toku v prvom smere, ktorá je rozdelená na intenzitu $\lambda_{11}$ = 1,1 vl./hod. u vlakov 1. triedy priority a $\lambda_{12}$ = 1,5 vl./hod. u vlakov 2. triedy priority. Podobne $\lambda_2$ = 2,0 vl./hod. je intenzita vstupu pre druhý smer rozdelená na intenzitu $\lambda_{21}$ = 1,3 vl./hod. u vlakov 1. triedy priority a $\lambda_{22}$ = 0,7 vl./hod. u vlakov 2. triedy priority. Ï alej majme intervaly následnej jazdy pre prvý smer $\tau_1$ = 0,08 hod., pre druhý smer $\tau_2$ = 0,15 hod. a intervaly protismernej jazdy pre oba smery $T_0$ = 0,4 hod.

I. etapa – optimalizácia cyklu a kapacita zväzku. Položme $T_c$ = 1,2 hod. Pod¾a (18) dostaneme, že $3{,}1 < M_1 < 8{,}3$, pre jednotlivé kapacity prepoèítame odpovedajúce hodnoty pre použité kritérium (17), prièom hviezdièkou oznaèíme optimálnu hodnotu. Postupne budeme upravova• hodnoty dåžky cyklu a vypoèítané hodnoty zostavíme do nasledujúcej tabu¾ky *tab. 1.*

Porovnaním optimálnych hodnôt (oznaèených hviezdièkou) pre jednotlivé dåžky cyklov vidíme, že optimálna dåžka cyklu vychádza $T_c$ = 1,0 hod. Optimálne ve¾kosti zväzkov pre jednotlivé smery sú uvedené v tabu¾ke príslušnom riadku, t.j. $M_1 = 4$, $M_2 = 3$. Vzh¾adom na zaokrúh¾ovanie výpoètov pri urèení ve¾kosti zväzku pre druhý smer dostaneme prepoètom, že príslušné doby prejazdu vlakových zväzkov v jednotlivých smeroch budú $T_1 = (M_1 - 1)\tau_1 = 3 \cdot 0{,}08 = 0{,}24$ hod. a $T_2$ = 0,3 hod. Pre dåžku cyklu potom dostaneme, že $T_c = (M_1 - 1)\tau_1 + (M_2 - 1)\tau_2 + T_0 = 0{,}94 \approx 1{,}0$ hod. Túto hodnotu môžeme pre ï alšie výpoèty ponecha• bez zmeny.

V druhej etape výpoètu rozdelíme ve¾kosti zväzkov pre jednotlivé triedy priority v každom smere. Postupova• budeme pod¾a predchádzajúcej èasti a za kriteriálnu funkciu zoberieme (15a).

***Tab. 1*** *Optimalizácia dåž ky cyklu*

***Tab. 1*** *Optimising of the length of cycle*

| $T_c$ = 1,2 hod | | | | 3,1 < $M_1$ < 8,3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | $M_2$ | $r_1$ | $r_2$ | $E(Z^{[1]})$ | $E(Z^{[2]})$ | w |
| 4 | 4 | 0,78 | 0,60 | 1,034 | 0,236 | 0,876 |
| 5 | 4 | 0,62 | 0,60 | 0,216 | 0,236 | 0,698* |
| 6 | 3 | 0,52 | 0,80 | 0,074 | 0,329 | 0,905 |
| 7 | 3 | 0,44 | 0,80 | 0,002 | 0,329 | 0,890 |
| $T_c$ = 1,0 hod | | | | 2,6 < $M_1$ < 6,6 | | |
| $M_1$ | $M_2$ | $r_1$ | $r_2$ | $E(Z^{[1]})$ | $E(Z^{[2]})$ | w |
| 3 | 3 | 0,87 | 0,67 | 2,700 | 0,500 | 1,190 |
| 4 | 3 | 0,65 | 0,67 | 0,354 | 0,500 | 0,680* |
| $T_c$ = 0,9 hod | | | | 2,3 < $M_1$ < 5,7 | | |
| $M_1$ | $M_2$ | $r_1$ | $r_2$ | $E(Z^{[1]})$ | $E(Z^{[2]})$ | w |
| 3 | 3 | 0,78 | 0,60 | 1,123 | 0,285 | 0,750* |
| 4 | 2 | 0,58 | 0,90 | 0,200 | 3,864 | 1,330 |
| 5 | 2 | 0,67 | 0,90 | 0,060 | 3,864 | 1,300 |

II. – etapa.

- Optimálne rozdelenie kapacity zväzku pre 1. smer: $l_{11}$ = 1,1, $l_{12}$ = 1,5, $M_1$ = 4. Potom pre ohranièenie kapacity vlakov druhej triedy pod¾a (16) máme 1,5 < $M_{12}$ < 2,9. Z ohranièenia ve¾kosti zväzku pre 2. triedu priority vidíme, že tabu¾ka bude ma• len jeden riadok, v ktorom v poslednom ståpci je hodnota úèelovej funkcie (15a).

***Tab. 2*** *Rozdelenie kapacity zväzku pre prvý smer*

***Fig. 2*** *Decomposition of the batch size for the first stream*

| $M_{11}$ | $M_{12}$ | $r_{11}$ | $r_{12}$ | $E(Z^{[11]})$ | $E(Z^{[12]})$ | $Z(T_c)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 0,55 | 0,75 | 0,250 | 0,985 | 1,235 |

- Optimálne rozdelenie zväzku pre 2. smer: $l_{21}$ = 1,3, $l_{22}$ = 0,7, $M_2$ = 3. Pre ohranièenie kapacity vlakov druhej triedy pod¾a (16) máme 0,7 < $M_{22}$ < 1,7, èiže $M_{22} = 1$. Výpoèet je zostavený do tabu¾ky, ktorá má znovu len jeden riadok.

*Tab. 3 Rozdelenie kapacity zväzku pre druhý smer*

***Fig. 3** Decomposition of the batch size for the second stream*

| $M_{21}$ | $M_{22}$ | $r_{21}$ | $r_{22}$ | $E(Z^{[21]})$ | $E(Z^{[22]})$ | $Z(T_c)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 0,65 | 0,70 | 0,491 | 0,816 | 1,310 |

Pre prvý smer sa teda celková kapacita $M_1 = 4$ rozdelí na $M_{11} = 2$ pre prvú triedu priority a $M_{12} = 2$ pre druhú triedu priority. Pre druhý smer máme nasledujúce hodnoty: $M_2 = 3$ a pre jednotlivé triedy priorít $M_{21} = 2$, $M_{22} = 1$.

## 4. Záver

Uvedený príspevok sa zaoberá možnos•ou analytického riešenia modelu riadenia dopravy pri výluke ko¾aje, pri ktorom je navrhnutý jednoduchý spôsob urèenia potrebných charakteristík modelu pomocou uvedenej lineárnej aproximácie strednej hodnoty stavu na konci cyklu. Doplnením vstupných údajov o rozdelení vlakov do tried priorít je algoritmus pre optimalizáciu dåžky cyklu upravený o spôsob optimálneho rozdelenia ve¾kosti výstupných zväzkov vlakov pre jednotlivé triedy priorít.

Výsledky získané touto metódou môžu vhodne doplni• údaje získavané použitím programových prostriedkov riadenia dopravy pri výluke ko¾aje, napr. [3], ktoré umožòujú modelova• rozdelenie do viacerých tried priorít s pridelením rôznych váhových koeficientov v kritériálnych funkciách.


## Poïakovanie

Táto práca bola podporovaná Vedeckou grantovou agentúrou Ministerstva školstva SR a Slovenskej akadémie vied v rámci grantového projektu è. 1/7211/20.

*Lektoroval: Doc. Ing. Josef Volek, CSc.*

Pøedloženo: v bøeznu 2002.


## Literatura


1. Brandalík, F., Kluvánek, P. *Operaèní analýza v ž eleznièní dopravì*. Alfa, Bratislava, 1984.
2. Èerný, J., Kluvánek, P. *Základy matematickej teórie dopravy*. Veda, Bratislava, 1991.
3. Luxová, M. *Zpracování výlukového grafikonu vlakové dopravy pomocí programu SENA*. Druhá vì decká konference „Efektivní doprava, cesta do Evropské unie“. DFJP Univerzita Pardubice, Pardubice, 1999. pp.489–492.
4. Rebo, J. *Diskrétne modely zhromaž ïovania*. Dizertaèná práca. Fakulta riadenia a informatiky Žilinskej univerzity, Žilina, 2001.
5. Rebo, J., Bartl, O. *Diskrétne modely zhromaž ïovania v dopravnej logistike*. Zaslané na uverejnenie v èasopise Horizonty dopravy.

6. Rebo, J. *The discrete process of storage with two priority classes*. Komunikácie/Communications – Scientific Letters of the University of Žilina, vol.2, 2000, No.4, pp.43–51.

**Resumé**

**POUŽITÍ DISKRÉTNÍHO PROCESU SHROMAŽÏOVÁNÍ SE DVÌMA TØÍDAMI PRIORIT PØI ØÍZENÍ ŽELEZNIÈNÍ DOPRAVY PØI VÝLUCE KOLEJE**

Július REBO, Ondrej BARTL

Èlánek se vìnuje problematice aplikace diskrétního procesu shromažïování pøi øízení železnièní dopravy pøi výluce koleje mezi dvìma stanicemi. Pøedpokládáme, že vlaky pøijíždìjící do stanice v každém smìru respektují Poissonove pravdìpodobnostní rozdìlení a jsou na odstavní koleji øazeny v poøadí jejich pøíchodu. V pøíspìvku dále uvádíme jednoduchý zpùsob aproximace støední hodnoty poètù vlakù v závislosti na velikosti obsluhovací kapacity a zatížení systému, který umožòuje jednodušší zpùsob získaní potøebných charakteristik procesu.

Optimální èasové øízení pøepravy pøes uzavøený úsek trati rozdìluje èasový cyklus pøejezdu vlakù mezi oba smìry tak, aby se minimalizoval celkový pobyt vlakù v stanici pro oba smìry. Vzhledem k rùznosti druhu vlakù pøicházejících do stanice, uvažujeme dále o jejich rozdìlení do dvou tøíd priorit a uvádíme metodu optimálního rozdìlení dané obslužní kapacity každého smìru pro tøídy priorit.

**Summary**

**AN APPLICATION OF THE DISCRETE ACCUMULATION PROCESS WITH TWO PRIORITY CLASSES TO RAILWAY TRAFFIC CONTROL IN THE TRACK CLOSURE CASE**

Július REBO, Ondrej BARTL

The paper is devoted to the application of the discrete accumulation process to railway traffic control in case of a track closure between two stations. Trains are supposed to arrive into either station according to a Poisson process and wait on the corresponding sidetrack in the order of their arrivals. While one direction is closed, trains in the other direction are passing through the closure sector in groups and vice versa. Hence, the railway traffic during a track closure is organised in a cycle. The discrete accumulation process has been used to model the evolution of the traffic situation in this case. A simple approximation for the expected number of trains waiting in the station is presented in the paper, which permits to obtain performance measures of the accumulation process easily.

Optimal traffic control in the track closure case depends on the appropriate division of the cycle length between two opposite directions. The technique for determining the sizes of train groups in each direction to minimise the expected waiting time of a train is described.

Since trains are not homogeneous, two priority classes are considered with respect to the preference of trains in service. A model of the discrete accumulation process with two priority classes has been employed to work out the method for finding the best portion of the direction group size for each train priority class.

## Zusammenfassung

### DIE BENUTZUNG DES DISKRETEN PROZESS DER VERSAMMLUNG MIT ZWEI KLASSEN DER PRIORITÄTEN BEI DER LEITUNG DES EISENBAHNVERKEHRS BEI DEM AUSSCHNEIDEN DES GLEISES

Július REBO, Ondrej BARTL

Der Artikel beschäftigt sich mit Problematik der Aplikation des diskreten Prozess der Versammlung bei der Leitung des Eisenbahnverkehrs bei dem Asschneiden des Gleises zwischen zwei Bahnhofen. Wir setzen voraus, dass die Züge, die in den Bahnhof in jeder Richtung fahren, der Poisson-Teilung unterstellt und in der Reienfolge der Ankuft geordnet sind. In diesem Beitrag nennen wir einfache Weise von Aproximation des Mittelwertes der Zügeanzahl, die von der Grösse der Bedienungkapacität und des Belastungssystems abhängig sind und es ermöglicht die leichtere Weise des Erwebens notwedigen Charakteristik des Prozesses.

Die optimale Zeitleitung des Verkehrs durch das verschlossene Gebiet der Strecke teilt den Zeitzyklus des Zügeüberganges zwischen beide Richtungen so, dass sich Aufenthalt der Zügen in dem Bahnhof für beide Richtungen minimalisiert.Unter Zugtype auf verscheidene Zugarten, die in den Bahnhof fahren, beabsichtigen wir weiter ihre Verteilungen in zwei Klassen der Prioritätet und wir geben die Methode der optimalen Verteilung bestimmter Kapazität Bedienung in jeder Richtung für Klassen der Prioritäten.