SCIENTIFIC PAPERS
OF THE UNIVERSITY OF PARDUBICE
Series B
The Jan Perner Transport Faculty
10 (2004)

OPTIMALIZÁCIA KAPACITY ZHROMAŽĎOVACIEHO PRIESTORU PRE DISKRÉTNY PROCES ZHROMAŽĎOVANIA

Július REBO[a], Ondrej BARTL[b]

[a] Katedra matematických metód, [b] Katedra softvérových technológií
Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita

1. Úvod

Dopravné elementy sa spravidla neprepravujú jednotlivo, ale v určitých miestach sa z nich vytvárajú súpravy alebo dávky, ktoré vstupujú do dopravnej siete. Hlavným dôvodom je, že preprava viacerých elementov súčasne je z ekonomického hľadiska lacnejšia ako preprava elementov po jednom. Z tohto pohľadu je teda vždy potrebné zhromaždiť (naakumulovať) určitý počet elementov na prepravu. Dôsledkom procesu zhromažďovania elementov je spomalenie ich prepravy, čo výrazne ovplyvňuje ekonomiku dopravy.

Dopravný element sa pri svojej preprave aspoň raz dostane do procesu zhromažďovania, kedy neproduktívne stojí. Veľkosť časovej straty z neproduktívneho prestoja závisí aj od toho, ako dlho pred ukončením zhromažďovania sa element do akumulačného procesu dostal. Podľa spôsobu ukončenia procesu zhromažďovania môžeme v zásade hovoriť o zhromažďovaní na množstvo alebo o zhromažďovaní na čas.

Zhromažďovanie na množstvo alebo *m*-zhromažďovanie prebieha dovtedy, kým sa nedosiahne vopred stanovená hranica veľkosti súpravy alebo dávky, ktorá môže byť určená napr. celkovou hmotnosťou, počtom elementov, dĺžkou ap. Ak je vopred určená doba trvania – resp. okamih ukončenia – procesu zhromažďovania, ide o zhromažďovanie na čas alebo t-zhromažďovanie. V oboch prípadoch sa pritom jedná o poskytovanie skupinovej obsluhy, ktorej veľkosť je podmienená kapacitou súpravy alebo dávky vyčlenenej na spoločnú prepravu naraz.

Charakteristickým rysom väčšiny procesov zhromažďovania je náhodný charakter príchodov zhromažďovaných elementov na miesto ich akumulácie pred prepravou. Hľadaniu ciest, ako poskytovanie prepravných služieb efektívne prispôsobiť vznikajúcim požiadavkám na prepravu, sa venovalo viacero autorov. Problém sa skúmal najmä z hľadiska potrieb železničnej nákladnej dopravy, a to z viacerých uhlov pohľadu a s použitím rôznych matematických postupov. Stručný prehľad modelov a prístupov je napr. v [4]. V súvislosti s t-zhromažďovaním existuje niekoľko dostatočne známych „spojitých“ modelov zhromažďovania, keď množstvo prichádzajúcich elementov za časový úsek sa popisuje spojitou náhodnou veličinou a samotné zhromažďovanie končí uplynutím daného časového intervalu. Spojité modely zhromažďovania na čas sa uplatňujú napríklad v systémoch pravidelnej osobnej či nákladnej dopravy [1], ale aj pri riadení čerpania a prepúš-ťania vody z priehradných nádrží [2]. Modely zhromažďovania na množstvo sa využívajú najmä v niektorých špeciálnejších systémoch prepravy nákladov (spojité modely) alebo osôb (diskrétne modely), prípadne v postupoch kombinujúcich m- a t-zhromažďovanie.

S rastom počtu firiem zaoberajúcich sa prepravou zásielok kusového, paletového či kontajnerového charakteru sa stáva aktuálnou potreba vyvíjať postupy na určovanie optimálneho riadenia diskrétneho procesu t-zhromažďovania, prípadne na návrh jeho optimálnych kapacitných parametrov. Pod pojmom diskrétny proces t-zhromažďovania rozumieme taký proces zhromažďovania na čas, keď množstvo prichádzajúcich elementov za časový úsek sa popisuje nezápornými číselnými hodnotami z konečnej, príp. nekonečnej množiny celých čísiel.

V ďalšom texte bude predstavený prístup k riešeniu problému optimalizácie kapacity zhromažďovacieho priestoru v diskrétnom procese zhromažďovania na čas s aplikačným zameraním na kontajnerovú dopravu.

2. Zostavenie modelu diskrétneho procesu zhromažďovania na čas

Pre zostavenie matematického modelu diskrétneho procesu zhromažďovania na čas zavedieme najprv potrebné pojmy a vzťahy. Potom ukážeme dva prístupy k modelovaniu činnosti diskrétneho systému t-zhromažďovania.

Ako už bolo povedané, elementy prichádzajúce na miesto, odkiaľ ich treba prepraviť ďalej, sú určitú dobu zhromažďované (a teda aj skladované) vo vyhradenom priestore a po jej uplynutí sa naložia a odvážajú na miesto určenia. Proces príchodu elementov do systému t-zhromažďovania – tak ako v každom inom obslužnom systéme – výrazne ovplyvňuje jeho celkové charakteristiky. Predpokladajme pri tom, že elementy vstupujúce do systému sú homogénne, vzájomne zameniteľné (napr. kontajnery štandardných rozmerov). Budeme sa zaoberať len takým prípadom, keď vstupný prúd elementov do systému tvorí Poissonov proces $\{X(t), t \geq 0\}$ s intenzitou λ > 0. Počet elementov, ktoré prídu za dobu T, reprezentovaný náhodnou veličinou $X(T)$ bude mať Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti s pravdepodobnosťami $\pi_r(T) = P\{X(T) = r\} = \frac{(\lambda T)^r}{r!} e^{-\lambda T}$ $(r = 0,1,2,...)$ a strednou hodnotou $\lambda T < +\infty$ elementov.

Činnosť systému *t*-zhromažďovania je možné rozdeliť na fázu akumulácie elementov a na fázu uvoľnenia nazhromaždených elementov na prepravu. Fáza akumulácie je obdobie, kedy systém prijíma elementy na vstupe, kým fáza uvoľnenia je akt odvozu elementov z miesta ich zhromažďovania, čo je vlastne poskytnutie obsluhy dávke čakajúcich elementov. Veľkosť dávky býva spravidla obmedzená určitým počtom M elementov, ktoré môžno odviezť naraz.

Predpokladajme, že cyklus akumulácie a uvoľňovania elementov sa periodicky opakuje až do skončenia činnosti systému. Časový interval medzi dvomi po sebe nasledujúcimi uvoľneniami dávok elementov na prepravu nazveme *periódou zhromažďovania*. Trvanie n-tej periódy označíme symbolom T_n. Ďalej sa budeme zaoberať len takým prípadom, keď trvanie všetkých periód je rovnaké, t.j. $T_n = T$, $n = 1,2,...$. Dĺžka periódy zhromažďovania by mala byť taká, aby sa minimalizovali náklady spojené s prepravou elementov a ich čakaním na odvoz (s prípadným zahrnutím nákladov manipulácie s elementmi na mieste zhromažďovania). Optimalizácia dĺžky periódy zhromažďovania [3,4] umožňuje organizovať činnosť systémov zhromažďovania tak, aby bola ekonomicky efektívna.

Obsluha zhromaždených elementov prebieha po skupinách s určitým počtom elementov. Predpokladáme, že po ukončení fázy akumulácie je systém schopný obslúžiť najviac $M \geq 1$ elementov. Hodnotu M budeme nazývať *kapacitou obsluhy*. Kapacita obsluhy umožňuje obslúžiť buď všetky zhromaždené elementy, ak ich celkový počet nepresiahne M, alebo práve M elementov, ak ich celkový počet je väčší ako M. V prvom prípade systém začína nasledujúcu fázu akumulácie s prázdnym zhromažďovacím priestorom, v druhom prípade zvyšné neobslúžené elementy čakajú počas celej nasledujúcej fázy akumulácie na poskytnutie obsluhy.

Maximálny počet elementov, ktorý sa môže nachádzať v zhromažďovacom priestore, označíme symbolom K a nazveme *kapacitou zhromažďovacieho priestoru*. Budeme predpokladať, že $M \leq K$. Ak je na začiatku periódy akumulácie systém prázdny, tak počas fázy akumulácie môže prijať najviac K elementov. Hodnota rozdielu $K - M$ udáva maximálny počet elementov, ktoré ako neobslúžené zostávajú čakať v systéme do nasledujúcej obsluhy. Ak v priebehu fázy akumulácie dosiahne počet zhromaždených elementov kapacitu K, je vstup ďalších elementov do systému zakázaný. V takom prípade hovoríme o *odmietnutí* alebo *strate* elementu. Strata elementu je vo väčšine prípadov len fiktívna, nakoľko element, ktorý má odmietnutý vstup do zhromažďovacieho priestoru, spravidla zostane čakať niekde mimo a môže spôsobovať komplikácie tým, že blokuje príjazdové cesty, alebo je uložený na nejaké dočasné miesto a neskôr, po odvoze elementov, je premiestnený do zhromažďovacieho priestoru. Takto vznikajú zbytočné ekonomické straty, pretože dochádza k nadbytočnej manipulácii, ktorá vyžaduje určitý čas a zvyšuje náklady na skladovanie. Ak priestorové možnosti umožňujú skladovať dostatočne veľký počet elementov (a nedochádza teda k odmietaniu ich vstupu), môžeme predpokladať, že hodnota K nadobúda ľubovoľne veľkú hodnotu $(K \to +\infty)$. Vtedy hovoríme o modeli zhromažďovania s neobmedzeným zhromažďovacím priestorom.

V praxi očakávame, že zhromažďovanie elementov a ich obsluha budú prebiehať dlhodobo a bez prerušení. Pri tomto spôsobe činnosti systému *t*-zhromažďovania predpokladáme, že sa postupne stráca vplyv poradia prebiehajúcej periódy a počiatočných podmienok, pri ktorých systém začínal svoju činnosť. Doba postupnej stabilizácie, určená počtom periód a ich dĺžkou, je ovplyvnená parametrami systému, ktorých vzájomnú väzbu vyjadruje *koeficient zaťaženia* $\rho = \dfrac{\lambda T}{M}$.

Model zhromažďovania na čas s neobmedzeným zhromažďovacím priestorom

Vychádzajúc z predošlej časti, predpokladajme rovnakú dĺžku $T > 0$ trvania periódy zhromažďovania. Ďalej predpokladajme, že M je celé kladné číslo a priestor vyhradený na akumulovanie prichádzajúcich elementov má dostatočne veľkú kapacitu na prijatie ľubovoľného množstva elementov, takže jeho kapacita K je neobmedzená.

Stavom systému t-zhromažďovania na konci n-tej periódy zhromažďovania, $n \in N = \{1,2,...\}$, ktorý označíme symbolom S_n, budeme rozumieť množstvo nazhromaždených elementov v okamihu ukončenia n-tej periódy tesne pred ich uvoľnením na prepravu. Symbolom A_n označíme veľkosť dávky elementov odoslaných na prepravu na konci n-tej periódy a symbolom X_n počet elementov prichádzajúcich do systému počas n-tej periódy. Neodvezený zvyšok elementov, ktorý zostane v zhromažďovacom priestore po uvoľnení dávky elementov na prepravu na konci n-tej periódy, označíme ako Z_n. Situáciu a dianie v systéme *t*-zhromažďovania na začiatku jeho činnosti budú odrážať veličiny S_0, A_0, Z_0. Množina možných hodnôt stavu systému pri neobmedzenej kapacite zhromažďovacieho priestoru je množina $I = \{0,1,2,...\}$. Keďže kapacita obsluhy nedovoľuje odviezť viac ako M elementov, platí pre veľkosť dávky uvoľnenej na prepravu vzťah $A_n = \min\{S_n, M\}$, $n \in N_0 = \{0,1,2,...\}$. Neodvezený zvyšok elementov je potom pre $n \in N_0$ daný predpisom $Z_n = S_n - A_n = S_n - \min\{S_n, M\} = \max\{0, S_n - M\}$. Správanie sa systému *t*-zhromažďovania popisuje prechodová rovnica

$$S_n = S_{n-1} - A_{n-1} + X_n = Z_{n-1} + X_n = \max\{0, S_{n-1} - M\} + X_n, \quad n \in N. \qquad (1)$$

Počet X_n elementov, čo prídu do systému počas n-tej periódy, je náhodný. Vzhľadom na vlastnosti Poissonovho procesu (stacionárnosť, nezávislé prírastky) je pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej veličiny X_n pre každé $n \in N = \{1,2,...\}$ dané pravdepodobnosťami $P\{X_n = r\} = P\{X(nT) - X((n-1)T) = r\} = P\{X(T) = r\} = \pi_r(T)$, $r \in \{0,1,2,...\}$, kde $T > 0$.

Stochastický charakter príchodu elementov spôsobuje, že veličiny S_n, A_n, Z_n, $n \in N_0$, sú náhodné veličiny. Vývoj systému *t*-zhromažďovania v čase reprezentuje náhodný proces $\{S_n, n \in N_0\}$, ktorý je Markovovým reťazcom s diskrétnym časom so stacionárnymi pravdepodobnosťami prechodu $p_{i,j} = P\{S_n = j | S_{n-1} = i\}, i, j \in I, n \in N$, v tvare:

$$p_{i,j} = \begin{cases} \pi_j(T), & i \le M, j \ge 0, \\ 0, & i > M, j < i - M, \\ \pi_{j-i+M}(T), & i > M, j \ge i - M. \end{cases} \tag{2}$$

To, že náhodný proces $\{S_n, n \in N_0\}$ má Markovovu vlastnosť

$$P\{S_n = j | S_{n-1} = i, S_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, S_1 = i_1, S_0 = i_0\} = P\{S_n = j | S_{n-1} = i\}, \forall j, i, i_{n-2}, \ldots, i_1, i_0 \in I, \forall n \in N,$$

vyplýva z prechodovej rovnice (1) a vlastností Poissonovho procesu príchodu elementov. Keďže stavy procesu $\{S_n, n \in N_0\}$ nadobúdajú hodnoty z diskrétnej množiny *I*, pričom časová množina, na ktorej sa sleduje vývoj procesu, je diskrétna množina N_0 a pravdepodobnosti prechodu sú stacionárne, je náhodný proces $\{S_n, n \in N_0\}$ homogénnym Markovovým reťazcom s diskrétnym časom.

Označme symbolom $p_j^{[n]}$ pravdepodobnosť, že stav systému na konci *n*-tej periódy zhromažďovania nadobúda hodnotu *j*, teda $p_j^{[n]} = P\{S_n = j\}, j \in I, n \in N_0$, pričom pravdepodobnostné rozdelenie hodnôt počiatočného stavu S_0 je známe a za bežných okolností je dané pravdepodobnosťami $p_0^{[0]} = 1$, $p_j^{[0]} = 0, j \ge 1$. Na základe vety o úplnej pravdepodobnosti možno pravdepodobnosti $p_j^{[n]}$ počítať podľa rekurentného vzťahu

$$p_j^{[n]} \equiv P\{S_n = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{S_n = j | S_{n-1} = i\} P\{S_{n-1} = i\} \equiv \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,j} p_i^{[n-1]}, j \in I = \{0,1,2,\ldots\}, n \in N.$$

Za predpokladu, že koeficient zaťaženia je menší ako 1, t.j. $\rho = (\lambda T)/M < 1$, systém *t*-zhromažďovania s neobmedzeným zhromažďovacím priestorom sa postupne stabilizuje a existuje preň limitné rozdelenie hodnôt pravdepodobností stavu $p_j = \lim_{n \to \infty} p_j^{[n]}, j \in I$, nezávislé od počiatočných podmienok (dôkaz je v [3]).

Použijúc skrátený zápis π_j miesto $\pi_j(T)$ pre $j = 0,1,2,\ldots$, môžeme tieto pravdepodobnosti vyjadriť sústavou rovníc v tvare

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1, \quad p_0 = \pi_0 \sum_{i=0}^{M} p_i, \quad p_j = \pi_j \sum_{i=0}^{M} p_i + \sum_{k=1}^{j} \pi_{j-k} p_{M+k}, \; j = 1,2,\ldots . \tag{3}$$

Úvodná rovnica $p_0 + p_1 + p_2 + \ldots = 1$ v sústave (3) vyjadruje podmienku, ktorú hľadané čísla $p_j, j \in I$, musia spĺňať, aby boli pravdepodobnosťami. Pre úplnosť veľmi stručne predstavíme bežne používaný postup riešenia sústavy (3) pomocou vytvárajúcich funkcií

$\Phi(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j z^j = e^{-\lambda T(1-z)}$, $F(z)=\sum_{j=0}^{\infty}p_j z^j$ podľa [1], ktorého detaily sú v [3]. Ak každú rovnicu sústavy (3) okrem úvodnej rovnice vynásobíme odpovedajúcou mocninou z^j, po úpravách dostaneme

$$F(z)=\frac{\Phi(z)\sum_{r=0}^{M-1}\left(z^M-z^r\right)p_r}{z^M-\Phi(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M-1}\left(z^M-z^r\right)p_r}{z^M e^{\lambda T(1-z)}-1}. \tag{4}$$

Derivovaním vytvárajúcej funkcie (4) v bode $z=1$ odvodíme strednú hodnotu počtu elementov $E(S)$ v systéme na konci periódy zhromažďovania, ktorá je jednou z charakteristík činnosti systému *t*-zhromažďovania v stabilizovanom režime. Tak dostaneme

$$E(S)=\sum_{j=0}^{\infty}jp_j=\left.\frac{dF(z)}{dz}\right|_{z=1}=\frac{M-(M-\lambda T)^2}{2(M-\lambda T)}+\sum_{k=1}^{M-1}\left(1-z_k\right)^{-1}, \tag{5}$$

pričom praktické použitie (5) je viazané na výpočet koreňov $z_k, k=1,\dots,M-1$, charakteristickej rovnice $\varphi(z)=z^M-e^{-\rho M(1-z)}=0$ odvodenej z menovateľa zlomku v (4).

Numerický výpočet koreňov charakteristickej rovnice $\varphi(z)=0$ je pomerne náročný na presnosť. Stanovenie potrebných charakteristík činnosti systému *t*-zhromažďovania sa zjednoduší použitím dostatočne presnej aproximácie výrazu $\sum_{k=1}^{M-1}\left(1-z_k\right)^{-1}$ lineárnou alebo kvadratickou funkciou zaťaženia systému ρ podľa [3, 4]. Pre dosiahnutie prakticky použiteľných výsledkov nám bude postačovať aj lineárna aproximácia tohto výrazu v tvare $\sum_{k=1}^{M-1}\left(1-z_k\right)^{-1}\approx a_1(M)\rho+a_0(M)$, ktorej koeficienty závisia od hodnoty kapacity obsluhy M podľa vzťahov

$$a_1(M)=0{,}4045M-0{,}6609 \quad \text{a} \quad a_0(M)=0{,}525M-0{,}5114\,. \tag{6}$$

Strednú hodnotu $E(S)$ počtu elementov v systéme na konci periódy zhromažďovania môžeme potom získať z (5) s využitím lineárnej aproximácie a koeficientov (6) v tvare

$$E(S)=\frac{M-(M-\lambda T)^2}{2(M-\lambda T)}+\sum_{k=1}^{M-1}\left(1-z_k\right)^{-1}\approx\frac{M-(M-\lambda T)^2}{2(M-\lambda T)}+a_1(M)\frac{\lambda T}{M}+a_0(M). \tag{7}$$

Stredná hodnota $E(Z)$ zvyšku elementov po odvoze na konci periódy zhromažďovania bude (v stabilizovanom režime činnosti systému) daná vzťahom

$$E(Z)=E(S)-E(X(T))=E(S)-\lambda T=\frac{M-\left(M^2-(\lambda T)^2\right)}{2(M-\lambda T)}+a_1(M)\frac{\lambda T}{M}+a_0(M). \tag{8}$$

Model zhromažďovania na čas s obmedzeným zhromažďovacím priestorom

Model diskrétneho procesu *t*-zhromažďovania s neobmedzeným akumulačným priestorom možno použiť na popis činnosti systému *t*-zhromažďovania vtedy, ak je kapacita zhromažďovacieho priestoru dostatočne veľká na skladovanie značného počtu prepravovaných elementov. V opačnom prípade treba prikročiť k vytvoreniu modelu diskrétneho procesu *t*-zhromažďovania s obmedzeným akumulačným priestorom, ktorého kapacita bude $K < +\infty$ elementov. Ostatné parametre modelu (kapacita obsluhy, dĺžka periódy zhromažďovania, proces príchodu elementov) zostanú zhodné s modelom, kde akumulačný priestor nie je obmedzený. Je prirodzené uvažovať, že kapacita zhromažďovacieho priestoru *K* je aspoň taká veľká ako kapacita obsluhy *M*, teda $K \geq M \geq 1$. Každý element, prichádzajúci k miestu zhromažďovania v situácii, keď je akumulačný priestor celkom zaplnený, bude odmietnutý. Pri zachovaní označenia a významu veličín popisujúcich činnosť systému *t*-zhromažďovania môžeme potom množinu hodnôt stavu systému špecifikovať ako množinu $I_K = \{0,1,\ldots,K\}$. Správanie sa systému vyhovuje prechodovej rovnici

$$S_n = \min\{S_{n-1} - A_{n-1} + X_n, K\} = \min\{Z_{n-1} + X_n, K\} = \min\{\max\{0, S_{n-1} - M\} + X_n, K\}, n \in N. \quad (9)$$

Vývoj systému v čase je reprezentovaný náhodným procesom $\{S_n, n \in N_0\}$, ktorý je Markovovým reťazcom s diskrétnym časom so stacionárnymi pravdepodobnosťami prechodu. Z prechodovej rovnice (9) a vlastností Poissonovho procesu príchodu elementov vyplýva, že náhodný proces $\{S_n, n \in N_0\}$ má Markovovu vlastnosť a vzhľadom na stacionárnosť pravdepodobností prechodu a diskrétny charakter stavovej množiny I_K a časovej množiny N_0, ide o homogénny Markovov reťazec s diskrétnym časom. Použijúc skrátené zápisy π_j miesto $\pi_j(T)$ pre $j = 0,1,2,\ldots$, a R_L miesto $R_L(T) = \sum_{j=L}^{\infty} \pi_j(T)$ pre $M \leq L \leq K$, môžeme vyjadriť maticu ***P*** pravdepodobností prechodu takto

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots & \pi_{K-2} & \pi_{K-1} & R_K \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots & \pi_{K-2} & \pi_{K-1} & R_K \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots & \pi_{K-2} & \pi_{K-1} & R_K \\ 0 & \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_{K-3} & \pi_{K-2} & R_{K-1} \\ 0 & 0 & \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{K-4} & \pi_{K-3} & R_{K-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \pi_{M-2} & \pi_{M-1} & R_M \end{pmatrix}.$$

Matica ***P***, v ktorej sme vyznačili pravdepodobnosti prechodu pre prechody zo stavov 0, 1, …, *M*, *M*+1, *M*+2, …, *K* do stavov 0, 1, 2, 3, …, *K*–2, *K*–1, *K* je štvorcovou maticou (*K*+1)-ho rádu.

Označme symbolom $p_j^{[n]}$ pravdepodobnosť, že stav systému na konci n-tej periódy zhromažďovania nadobúda hodnotu j, teda $p_j^{[n]} = P\{S_n = j\}, j \in I_K, n \in N_0$, pričom rozdelenie pravdepodobnosti hodnoty počiatočného stavu S_0 je známe. Na základe vety (napr. v [5]) pre homogénne Markovove reťazce s diskrétnym časom, ktoré majú konečnú stavovú množinu, možno predpokladať existenciu limít $p_j = \lim_{n \to \infty} p_j^{[n]}, j \in I_K$, pre pravdepodobnosti jednotlivých možných hodnôt stavu reťazca.

Limitným prechodom rekurentného vzťahu

$$p_j^{[n]} \equiv P\{S_n = j\} = \sum_{i=0}^{K} P\{S_n = j | S_{n-1} = i\} P\{S_{n-1} = i\} \equiv \sum_{i=0}^{K} p_{i,j} p_i^{[n-1]}, j \in I_K = \{0,1,\ldots,K\}, n \in N,$$

dostaneme nasledujúcu sústavu lineárnych algebraických rovníc pre limitné pravdepodobnosti $p_j, j \in I_K$, hodnôt stavu systému t-zhromažďovania s obmedzeným zhromažďovacím priestorom:

$$\left.\begin{aligned}
&p_0 = \pi_0 \sum_{i=0}^{M} p_i, \\
&p_j = \pi_j \sum_{i=0}^{M} p_i + \sum_{k=1}^{j} \pi_{j-k} p_{M+k}, \quad j = 1,2,\ldots,K-M, \\
&p_j = \pi_j \sum_{i=0}^{M} p_i + \sum_{k=1}^{K-M} \pi_{j-k} p_{M+k}, \quad j = K-M+1, K-M+2,\ldots,K-2,K-1, \\
&p_K = R_K \sum_{i=0}^{M} p_i + \sum_{k=1}^{K-M} R_{K-k} p_{M+k}, \\
&1 = \sum_{j=0}^{K} p_j.
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Posledná rovnica sústavy (10) vyjadruje podmienku, ktorú hľadané čísla $p_j, j \in I_K$, musia spĺňať, aby boli pravdepodobnosťami. Riešenie sústavy (10) – významne ovplyvnené hodnotami parametrov M a K – je detailne popísané v [3] (str. 65 – 84). Získané hodnoty pravdepodobností stavu systému (v stabilizovanom režime jeho činnosti) sú však len v číselnom vyjadrení a základné charakteristiky činnosti systému t-zhromažďovania s obmedzeným akumulačným priestorom musíme počítať iba pomocou jednoduchých, nižšie uvedených vzorcov bez možnosti hlbšej analýzy závislosti ich hodnôt od vstupných parametrov systému.

Strednú hodnotu $E(S)$ počtu elementov v systéme pred odvozom na konci periódy zhromažďovania môžeme dostať zo vzťahu

$$E(S) = \sum_{j=0}^{K} j p_j \qquad (11)$$

a strednú hodnotu $E(Z)$ zvyšku elementov v systéme po odvoze na konci periódy zhromažďovania môžeme vyjadriť vzťahom

$$E(Z)=\sum_{j=M}^{K}(j-M)p_j\ . \qquad (12)$$

3. Optimálna kapacita zhromažďovacieho priestoru

Ak máme možnosť ovplyvniť priestorové riešenie miesta zhromažďovania dopravných elementov, môžeme pri návrhu kapacity *K* zhromažďovacieho priestoru použiť dva prístupy. Prvý vychádza z toho, že činnosť systému *t*-zhromažďovania bude modelovaná diskrétnym procesom zhromažďovania na čas s obmedzeným zhromažďovacím priestorom, kým druhý predpokladá modelovanie diskrétnym procesom zhromažďovania na čas s neobmedzeným zhromažďovacím priestorom. V prvom prípade sa snažíme znížiť riziko odmietania prichádzajúcich elementov z dôvodu zaplnenia zhromažďovacieho priestoru, v druhom prípade chceme dosiahnuť prijateľnú zhodu medzi použitým modelom s neobmedzeným zhromažďovacím priestorom a reálnym systémom s konečnou kapacitou zhromažďovacieho priestoru.

Kapacita vzhľadom na pravdepodobnosť odmietnutia

Kapacita *K* zhromažďovacieho priestoru je daná maximálnym počtom dopravných elementov, ktoré v ňom možno skladovať. Ak aktuálny počet elementov v zhromažďovacom priestore dosiahne hodnotu *K*, sú všetky ďalšie prichádzajúce elementy odmietnuté. Nech t_K označuje dobu od začiatku periódy zhromažďovania po okamih, keď v zhromažďovacom priestore bude *K* elementov. Pri perióde zhromažďovania o dĺžke *T* dôjde k odmietnutiu nových elementov vtedy, keď $t_K < T$. Pravdepodobnosť odmietnutia prichádzajúceho elementu p_{odm} je teda pravdepodobnosť $P\{t_K < T\}$. Nech veličina *S* reprezentuje stav systému *t*-zhromažďovania (daný počtom čakajúcich elementov) pred odvozom elementov na konci periódy zhromažďovania v stabilizovanom režime činnosti systému. Potom zrejme platí rovnosť $P\{S=K\}=P\{t_K \le T\}$. Keďže veličina t_K je spojitá náhodná veličina, môžeme písať $p_{\text{odm}}=P\{t_K<T\}=P\{t_K\le T\}=P\{S=K\}\equiv p_K$. Budeme požadovať, aby pravdepodobnosť odmietnutia neprekročila zvolenú kritickú úroveň p_{krit}. To znamená, že kapacita *K* musí spĺňať vzťah $p_K \le p_{\text{krit}}$. Za optimálnu kapacitu K_{opt} zhromažďovacieho priestoru budeme považovať najmenšiu kapacitu *K*, ktorá je aspoň taká veľká ako kapacita obsluhy *M* a vyhovuje vyššie uvedenému pravdepodobnostnému optimalizačnému kritériu, čiže

$$K_{\text{opt}}=\min\{K\in N : K\ge M, p_K \le p_{\text{krit}}\},$$

kde symbol N označuje množinu celých kladných čísiel, t.j. $N=\{1,2,\ldots\}$. K určeniu optimálnej kapacity zhromažďovacieho priestoru musíme tak zostaviť modely diskrétneho procesu zhromažďovania na čas s obmedzenou kapacitou zhromažďovacieho priestoru pre rôzne veľkosti kapacity K od hodnoty *M* až po hodnotu, kedy sa prvýkrát splní požiadavka $p_K \le p_{\text{krit}}$, takže $K=K_{\text{opt}} \Leftrightarrow (p_K \le p_{\text{krit}} \wedge p_{K-1} > p_{\text{krit}})$.

V nasledujúcich tabuľkách sú uvedené optimálne hodnoty kapacity zhromažďovacieho priestoru *K* pre niektoré hodnoty *M* a zaťaženia ρ. Za kritickú úroveň pravdepodobnosti odmietnutia boli zvolené hodnoty $p_{\mathrm{krit}} = 0{,}05$, resp. $p_{\mathrm{krit}} = 0{,}01$, čo pre praktické použitie obyčajne postačuje. Tabuľky ukazujú, že nároky na veľkosť kapacity zhromažďovacieho priestoru sa zväčšujú s rastom hodnoty zaťaženia systému a sú vyššie pri nižšej kritickej úrovni pravdepodobnosti odmietnutia.

Tab. 1 *Optimálne kapacity pre* p_{krit} = 0,05

Fig. 1 *Optimal capacities for* p_{krit} = 0,05

	***M* = 1**		***M* = 4**		***M* = 7**		***M* = 10**	
	K_{opt}	p_K	K_{opt}	p_K	K_{opt}	p_K	K_{opt}	p_K
ρ = 0,1	2	0,0051	4	0,0008	7	0,0000	10	0,0000
ρ = 0,2	2	0,0209	4	0,0091	7	0,0006	10	0,0000
ρ = 0,4	3	0,0182	5	0,0251	7	0,0244	10	0,0083
ρ = 0,6	4	0,0265	6	0,0491	9	0,0328	12	0,0216
ρ = 0,8	6	0,0376	9	0,0438	12	0,0436	15	0,0376

Tab. 2 *Optimálne kapacity pre* p_{krit} = 0,01

Fig. 2 *Optimal capacities for* p_{krit} = 0,01

	***M* = 1**		***M* = 4**		***M* = 7**		***M* = 10**	
	K_{opt}	p_K	K_{opt}	p_K	K_{opt}	p_K	K_{opt}	p_K
ρ = 0,1	2	0,0051	4	0,0008	7	0,0000	10	0,0000
ρ = 0,2	3	0,0018	4	0,0091	7	0,0006	10	0,0000
ρ = 0,4	4	0,0037	6	0,0069	8	0,0083	10	0,0083
ρ = 0,6	6	0,0039	8	0,0082	11	0,0062	14	0,0046
ρ = 0,8	9	0,0098	13	0,0075	16	0,0076	19	0,0071

Kapacita vzhľadom na zhodu medzi modelom a realitou

K riešeniu problému optimalizácie dĺžky periódy zhromažďovania [3,4] potrebujeme poznať hodnoty charakteristík činnosti systému *t*-zhromažďovania v závislosti od hodnôt parametrov systému λ, *T*, *M*, resp. ρ. Takéto vyjadrenie hodnôt charakteristík poskytuje len model diskrétneho procesu zhromažďovania na čas s neobmedzeným zhromažďovacím priestorom. V reálnom systéme *t*-zhromažďovania s obmedzeným zhromažďovacím priestorom chceme navrhnúť takú kapacitu *K* zhromažďovacieho priestoru, aby zhoda medzi reálnym systémom a modelom s neobmedzeným zhromažďovacím priestorom bola čo najväčšia. Na to môžeme použiť kritérium absolútnej hodnoty rozdielu charakteristík získaných z modelu s neobmedzeným akumulačným priestorom a z modelu s obmedzeným akumulačným priestorom. Ako charakteristiku využijeme strednú hodnotu stavu systému (v stabilizovanom režime jeho činnosti). Budeme požadovať, aby absolútna hodnota rozdielu neprekročila určitú úroveň ε. Nech $E(S^\infty)$ označuje strednú hodnotu stavu systému pri neobmedzenom zhromažďovacom priestore a $E(S^K)$ strednú hodnotu stavu systému pri obmedzenom zhromažďovacom priestore s kapacitou K. Potom môžeme považovať model s neobmedzeným akumulačným priestorom za dostatočne presnú aproximáciu reálneho systému s obmedzeným akumulačným priestorom, ak platí $\left|E(S^\infty) - E(S^K)\right| \le \varepsilon$. Za vhodnú veľkosť zhromažďovacieho priestoru, teda za optimálnu kapacitu K_{opt} zhromažďovacieho priestoru, zoberieme najmenšie $K \ge M$ spĺňajúce rozdielové optimalizačné kritérium, t.j.

$$K_{\text{opt}} = \min\left\{K \in N : K \ge M, \left|E(S^\infty) - E(S^K)\right| \le \varepsilon\right\}, \text{ kde } N = \{1,2,\ldots\}.$$

Pre presnosť aproximácie $\varepsilon = 0{,}01$ sú hodnoty K_{opt} uvedené v nasledujúcej tabuľke.

***Tab. 3** Optimálne kapacity pre kritérium* $\left|E(S^\infty) - E(S^K)\right| \le 0{,}01$

***Fig. 3** Optimal capacities for the criterion* $\left|E(S^\infty) - E(S^K)\right| \le 0{,}01$

M / ρ \ ***K***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
ρ = *0,05*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ρ = *0,1*	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ρ = *0,2*	2	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ρ = *0,3*	3	4	4	5	6	6	7	8	9	10	11	12
ρ = *0,4*	4	5	5	6	7	7	8	9	10	10	11	12
ρ = *0,5*	5	6	7	7	8	9	10	11	11	12	13	14
ρ = *0,6*	7	8	8	9	10	11	12	13	13	14	15	16
ρ = *0,7*	10	11	12	12	14	14	15	16	17	17	18	19
ρ = *0,8*	17	18	19	20	20	21	22	23	23	24	25	26
ρ = *0,9*	>30	>30	>30	>30	>30	>30	>30	>30	>30	>30	>30	>30

Poďakovanie

Táto práca bola podporovaná Vedeckou grantovou agentúrou Ministerstva školstva Slovenskej republiky a Slovenskej akadémie vied grantom č. 1/0498/03.

Lektoroval: Doc. Ing. Josef Volek, CSc.
Předloženo: 20.2.2005

Literatúra

1. ČERNÝ J., KLUVÁNEK P. *Základy matematickej teórie dopravy*, Veda, Bratislava, (1991).
2. MORAN P. A. P. *The Theory of Storage*, Methuen, London, (1953).
3. REBO J. *Diskrétne modely zhromažďovania*, (Dizertačná práca), Fakulta riadenia a informatiky Žilinskej univerzity, Žilina, (2001).
4. REBO J., BARTL O. *Diskrétne modely zhromažďovania v dopravnej logistike, Horizonty dopravy*, č. 2/2002, str. 12 – 15.
5. RÉNYI A. *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha, (1972).

Resumé

OPTIMALIZÁCIA KAPACITY ZHROMAŽĎOVACIEHO PRIESTORU PRE DISKRÉTNY PROCES ZHROMAŽĎOVANIA

Július REBO, Ondrej BARTL

V článku je analyzovaný diskrétny proces zhromažďovania dopravných elementov pred prepravou, keď doba zhromažďovania je pevne stanovená ako perióda zhromažďovania *T*. Pri Poissonovom procese príchodu elementov na miesto zhromažďovania možno vývoj akumulačného procesu reprezentovať homogénnym Markovovým reťazcom s diskrétnym časom. Príslušný matematický model je popísaný ako pre prípad neobmedzenej, tak aj obmedzenej kapacity zhromažďovacieho priestoru. Model umožňuje získať charakteristiky činnosti akumulačného procesu v závislosti od jeho parametrov pri nekonečnej kapacite akumulačného priestoru, resp. v numerickej podobe pri konečnej akumulačnej kapacite.

V reálnych podmienkach je kapacita zhromažďovacieho priestoru konečná, čo vedie k odmietaniu nových elementov, keď je akumulačný priestor zaplnený. Článok rozoberá dve možnosti určenia optimálnej konečnej kapacity zhromažďovacieho priestoru. V prvej ide o dosiahnutie prijateľnej úrovne pravdepodobnosti odmietnutia prichádzajúcich elementov a v druhej o dosiahnutie prijateľnej zhody medzi modelom s nekonečnou akumulačnou kapacitou a reálnym systémom s konečnou kapacitou akumulačného priestoru. Model s neobmedzeným zhromažďovacím priestorom možno potom využiť pri hľadaní optimálnej dĺžky periódy zhromažďovania.

Summary

OPTIMIZATION OF THE ACCUMULATION SPACE CAPACITY FOR THE DISCRETE ACCUMULATION PROCESS

Július REBO, Ondrej BARTL

Transport elements (e.g. containers) are usually transported in groups, because batch transportation is more effective than individual one. It requires gathering elements on an accumulation site in order to form groups that are then transported as batches of elements. The accumulation process for a particular batch can be stopped either if a given amount of elements is gathered (mass accumulation or *m*-accumulation), or if a given time interval is elapsed (time accumulation or *t*-accumulation). As elements are counted in pieces, the accumulation process is discrete.

The discrete *t*-accumulation process is analysed in the paper for two alternatives of the size of the accumulation site: one with an unlimited accumulation capacity and the other with a limited

accumulation capacity *K*. Transport elements arrive to the accumulation site at random points of time and the Poisson process with rate λ is supposed to describe the arrival stream of elements. A batch of gathered elements is released for transport as soon as the time interval *T* (called the accumulation period) has elapsed since a previous transport. The size of a batch of elements to be transported is finite, limited by the service capacity *M*. The number of elements waiting on the accumulation site before the transport of an accumulated batch at the end of the accumulation period is called the state of the accumulation system. A method to find out the limiting system state probabilities as well as the expectation of the system state is briefly described for the case with an unlimited accumulation capacity. The method, based on the employment of the probability generating function and a proper approximation of the resulting expression for the expected value of the system state, enables us to get performance measures of the accumulation system in the form of a function of system parameters λ, *T*, *M*. In the case of a limited accumulation capacity, the way to obtain the limiting probabilities and system performance measures is represented by numerical calculation, where no formula-like relationship with system parameters exists.

A model of the discrete *t*-accumulation process with an infinite accumulation capacity can be used when the real accumulation site has enough space to accept all arriving transport elements. But, if the real accumulation space is limited then the model with a finite accumulation capacity must be used. In this case, new elements are rejected as non-accepted if they arrive when the accumulation site is filled up to its capacity by waiting elements. We want to find a proper value of the accumulation capacity that reduces the risk of rejection. As the rejection probability can be calculated from the model with a finite accumulation capacity for any value of the capacity, we are able to determine an optimal accumulation capacity as the least capacity value when the corresponding rejection probability does not exceed a pre-specified critical value of the rejection probability.

If we want to optimize the duration of an accumulation period, we need a model with an infinite accumulation capacity, where the performance measures of the accumulation system are expressed in terms of the system parameters λ, *T*, *M*. In this case, we want to find the value of a finite accumulation capacity in the real system that ensures good agreement between an infinite capacity model and the real system. Here, the criterion of the absolute value of the difference between the expectation of the system state in an infinite capacity model and a finite capacity model is used to determine a proper capacity value. The least accumulation capacity such that the above-mentioned difference does not exceed a pre-specified value ε is considered to be a desired optimal accumulation capacity.

The results of illustrative calculations of optimal accumulation capacities are summarized in the tables for both the rejection probability criterion and the difference criterion.

Zusammenfassung

OPTIMIERUNG DER KAPAZITÄT DES AKKUMULATIONSRAUMS FÜR DEN DISKRETEN AKKUMULATIONSPROZESS

Július REBO, Ondrej BARTL

Im Artikel ist der diskrete Akkumulationsprozess der Verkehrselemente vor dem Transport analysiert, falls die Akkumulationszeit als eine Akkumulationsperiode *T* festgestellt ist. Beim Poissonschen Prozess der Ankünfte der Elemente auf den Akkumulationsplatz kann die Entwicklung des Akkumulationsprozesses mit einer homogenen Markowschen Kette mit diskreter Zeit dargestellt sein. Das dazugehörige mathematische Modell ist für den Fall einer unbeschränkten sowie einer beschränkten Kapazität des Akkumulationsraums beschrieben. Das Modell ermöglicht die Charakteristiken der Tätigkeit des Akkumulationsprozesses in der Abhängigkeit von seinen Parametern bei einer unendlichen Kapazität des Akkumulationsraums, bzw. in der numerischen Form bei einer endlichen Akkumulationskapazität, zu erweben.

In realen Bedingungen wird die Kapazität des Akkumulationsraums endlich. Das führt zur Ablehnung neuer Elemente, wenn der Akkumulationsraum ganz belegt ist. Der Artikel analysiert

zwei Möglichkeiten der Ermittlung der optimalen endlichen Kapazität des Akkumulationsraums. Es geht um die Erreichung eines annehmbaren Niveaus der Verlustwahrscheinlichkeit in der ersten Möglichkeit und um die Erreichung der annehmbaren Übereinstimmung zwischen dem Modell mit einer unendlichen Akkumulationskapazität und dem realen System mit einer endlichen Kapazität des Akkumulationsraums in der zweiten Möglichkeit. Das Modell mit einem unbeschränkten Akkumulationsraum kann bei der Suche der optimalen Dauer der Akkumulationsperiode verwenden sein.