SCIENTIFIC PAPERS
OF THE UNIVERSITY OF PARDUBICE
Series B
The Jan Perner Transport Faculty
7 (2001)

OPTIMALIZAÈNÉ MODELY TVORBY GRAFIKONU VLAKOVEJ DOPRAVY

Štefan PEŠKO

Katedra matematických metód, Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita

1. Úvod

Plánovanie vlakovej dopravy vyžaduje riešenie viacerých optimalizaèných úloh. Špecifickou úlohou je tvorba grafikonu vlakovej dopravy, ïalej len GVD, pri ktorej sa h¾adá bezkonfliktový cestovný poriadok vlakov v železniènej sieti. Pre túto úlohu je charakteristické množstvo záväzných predpisov, ktoré v záujme bezpeènosti prevádzky obmedzujú prípustné množiny grafikonov.

Zdroje k problematike sú pomerne chudobné, nako¾ko sa jedná o komerèné projekty. Výnimkou je práca [1], ktorá sa venuje pravidelným intervalovým grafikonom, kde všetky vlaky majú odchody v pravidelných intervaloch a rovnaké doby jazdy na zhodných tra•ových úsekoch železniènej siete. Autori ukázali, že takýto grafikon možno modelova• ako riešenie úlohy lineárneho programovania. Komerèným grafikonom s nepravidelnou èasovou polohou spojov sa už taká publicita nevenuje, i keï vedú na algoritmicky •ažké kombinatorické úlohy. Princípy riešenia sú utajované.

Prakticky úspešné zvládnutie tvorby výlukového GVD na tra•ovom úseku už predstavuje zaujímavú optimalizaènú úlohu, ktorou sme sa zaoberali v prácach [3] a [2]. Ukázalo sa totiž, že tvorba GVD na viacko¾ajnej trati je uspokojivo riešite¾ná pomocou tvorby GVD na jednej tra•ovej ko¾aji. Teoretické výsledky našli uplatnenie pri tvorbe systému SENA vyvíjaného na ŽU pre potreby najskôr Èeských dráh [6] a neskôr aj pre Železnice Slovenskej republiky [7]. Systém umožòuje využi• bežný osobný poèítaè a jeho grafické schopnosti na zobrazenie GVD na tra•ových úsekoch a vstaniciach železniènej siete. Riešenie simuláciou [8] umožòuje posúvanie trás vlakov pri minimalizácii meškania a narušenia vlakov. Súèas•ou systému sa stali aj naše algoritmy na h¾adanie a riešenie konfliktov GVD v uzloch a úsekoch siete.

Ïalej prezentujeme optimalizaèné úlohy tvorby niektorých elementárnych typov GVD [9], ktoré patria do triedy NP -•ažkých úloh. Pre tieto úlohy nie je reálne oèakáva• nájdenie optimálneho GVD v polynomiálnom èase a preto je potrebné vyvíja• heuristické algoritmy poskytujúce suboptimálne GVD v prijate¾nom - polynomiálnom èase. Aj keï sú riešenia nasledujúcich elementárnych úloh len ve¾mi zjednodušeným modelom reálnych GVD, umožòujú štúdium základných problémov ich tvorby.

2. *Výlukový grafikon vlakovej dopravy*

Základná úloha tvorby výlukového GVD na tra•ovom úseku, medzi dvoma susednými uzlami A a B, železniènej siete - ïalej len $VGVD(A,B)$ je formulovaná nasledovne:

Je daná množina spojov reprezentujúca platný cestovný poriadok vlakov na tra•ovom úseku AB v èase výluky. Je známa matica èasových odstupov W medzi spojmi. Nekonfliktný (prípustný) GVD - vznikne èasovým posunom spojov, ktorý na jedinej pojazdnej ko¾aji dodržuje jednak minimálny odstup vlakov jednak maximálne prípustné meškanie vlakov. H¾adá sa prípustný GVD minimalizujúci ocenené meškania vlakov v cie¾ových uzloch.

Všetky ïalej uvádzané èasové údaje sa v železniènej doprave udávajú v polminútach ako technologickej èasovej jednotke.

Majme koneènú množinu prirodzených èísel $N = \{1,2,...n\}$. *Množinou spojov* nazveme množinu $S = \{s_i : i \in N\}$, kde spoj s_i je urèený usporiadanou 8-ticou údajov:

$$s_i = \left(v^i, m_o^i, m_p^i, t_o^i, t_p^i, d_o^i, d_p^i, d_{max}^i\right), \tag{1}$$

kde:

v^i .... èíslo vlaku,

m_o^i a m_p^i .... uzol (stanica) odchodu a príchodu spoja,

t_o^i .... èas pravidelného odchodu z uzla odchodu,

t_p^i .... èas pravidelného príchodu do uzla príchodu,

d_o^i a d_p^i .... doba pobytu v uzle odchodu a príchodu,

d_{max}^i .... maximálna prípustná doba meškania vlaku.

V prípade spojov s_i na tra•ovom úseku AB sú zrejme $m_o^i, m_p^i \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$.

Prípustným meškaním spojov rozumieme množinu $\mathrm{t} = \{\mathrm{t}(s) : s \in \mathrm{S}\}$, kde meškanie spoja $\mathrm{t}(s)$ je urèené usporiadanou dvojicou:

$$\mathrm{t}(s) = (\mathrm{t}_o, \mathrm{t}_p), \mathrm{t}_o \leq \mathrm{t}_p, \mathrm{t}_p \in \{0,1,...d_{max}\}, \qquad (2)$$

kde:

t_o .... doba meškania spoja s pri odchode z m_o,

t_p .... doba meškania spoja s pri príchode do m_p.

Pre jednoduchšie vyjadrovanie hovoríme o meškaní spoja aj v prípade, keï $\mathrm{t}_o = \mathrm{t}_p = 0$.

Bez ujmy na všeobecnosti budeme ï alej predpoklada•, že množina spojov S je lexikograficky usporiadaná pod¾a pravidelného odchodu spojov a èísla vlakov. Potom nám index spoja umožòuje zisti• aj radenie vlakov na tra•ovom úseku. Èíslami vlakov môžeme kódova• prioritu vlakov, napr. tak, že vlak z menším èíslom vlaku má väèšiu prioritu. Èíslo vlaku nám tiež umožòuje sledova• èasovú polohu vlaku na jeho trase, v uzloch železniènej siete. Staèí vybra• spoje s daným èíslom vlaku a usporiada• ich pod¾a èas pravidelného odchodu v uzle odchodu.

Nech $w_{i,j}$ je *doba minimálnych odstupov* medzi spojmi s_i a s_j na (jedinej) pojazdnej ko¾aji. Spoj s_j môže *nekonfliktne nadviaza•* na spoj s_i, èo znaèíme pomocou relácie následnosti $s_i \mathrm{p}\, s_j$, keï platí:

$$t_p^i + w_{ij} \leq t_o^j. \qquad (3)$$

Takto môžeme ve¾mi jednoducho overi• dodržanie minimálnych technologických odstupov vlakov na úseku i v uzloch, ak vlaky nemeškajú. Ak však v dôsledku výluky tra•ovej ko¾aje zostane len jedna pojazdná tra•ová ko¾aj, vznikne potreba prípustne zmeška• niektorý vlak.

Zmeškaný spoj s_i s meškaním $\mathrm{t}\left(s_i\right)$ budeme znaèi• $s_i\left(\mathrm{t}\right)$. Spoj $s_j\left(\mathrm{t}\right)$ môže nekonfliktne nadviaza• na spoj $s_i\left(\mathrm{t}\right)$, èo znaèíme pomocou reláciu následnosti $s_i\left(\mathrm{t}\right) \mathrm{p}\ s_j\left(\mathrm{t}\right)$, keï platí:

$$t_p^i + \hat{\rho}_p^i + w_{ij} \leq t_o^j + \hat{\rho}_o^j. \tag{4}$$

Ak podmienka (3) resp. (4) nie je dodržaná, dochádza ku konfliktu spojov, èo znaèíme $s_i \circ s_j$ resp. $s_i\left(\mathrm{t}\right) \circ s_j\left(\mathrm{t}\right)$.

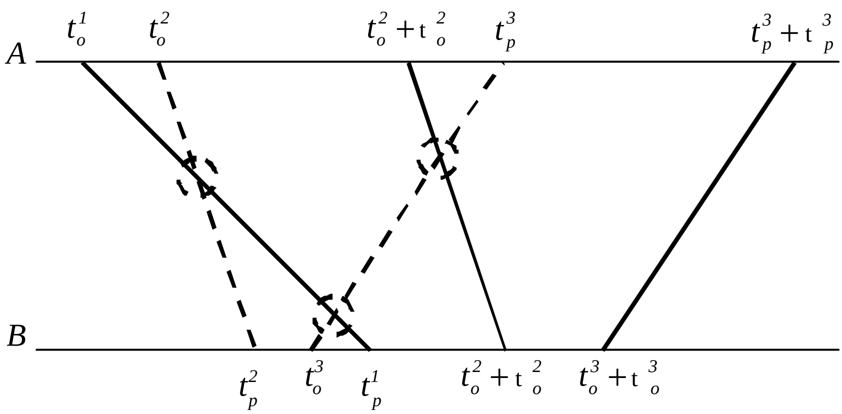
Množina prípustných výlukových grafikonov R je tvorená permutáciami množiny indexov spojov pre ktoré existujú prípustne zmeškané spoje tak, že všetky jej následné dvojice sú nekonfliktné, t.j.:

$$\mathrm{R} = \left\{ \mathrm{p} \in \Pi\left(\mathrm{N}\right) : \exists \mathrm{t} \in \mathrm{t},\ s_{\mathrm{p}(1)}\left(\mathrm{t}\right) \mathrm{p}\ s_{\mathrm{p}(2)}\left(\mathrm{t}\right) \mathrm{p} \ldots \mathrm{p}\ s_{\mathrm{p}(n)}\left(\mathrm{t}\right) \right\}, \tag{5}$$

ktoré zabezpeèujú na pojazdnej ko¾aji dodržiavanie minimálnych odstupov vlakov pri tolerovanom meškaní spojov.

Príklad 1. Zadná zrážka vlakov v^1, v^2 na tra•ovom úseku AB s pravidelnými spojmi $s_1 = \left(v^1, A, t_o^1, B, t_p^1, \ldots\right)$ a $s_2 = \left(v^2, A, t_o^2, B, t_p^2, \ldots\right)$ je zobrazená bodkovaným kolieskom na *obr. 1*. Zmeškaním rýchlejšieho no neskoršieho vlaku v^2 o dobu $\mathrm{t}_o^2 = \mathrm{t}_p^2$ sme odstránili konflikt $s_1 \circ s_2$. Pre vlak v^1 je $\mathrm{t}_o^1 = \mathrm{t}_p^1 = 0$. Potom máme $s_1\left(\mathrm{t}\right) \mathrm{p}\ s_2\left(\mathrm{t}\right)$. Tretí vlak v^3 so spojom $s_3 = \left(v^3, B, t_o^3, A, t_p^3, \ldots\right)$ by mal èelné zrážku s vlakom v^1 a neskôr aj so zmeškaným spojom $s_2\left(\mathrm{t}\right)$ vlaku v^2. Jeho zmeškaním o dobu $\mathrm{t}_o^3 = \mathrm{t}_p^3$ sme odstránili aj tieto konflikty a tak máme $s_1\left(\mathrm{t}\right) \mathrm{p}\ s_2\left(\mathrm{t}\right) \mathrm{p}\ s_3\left(\mathrm{t}\right)$ - so zmeškanými spojmi zobrazenými plnými èiarami. Nemusí to by• však jediné prípustné riešenie.

Samotný výpoèet matice odstupov spojov $\mathrm{W} = \left(w_{ij}\right)$ typu $n \times n$ je v skutoènosti algoritmicky netriviálny problém, o èom sa mohli presvedèi• autori systému SENA. Je tvorená z následných medziobdobí, stanièných intervalov a ïalších technologických èasov. Vo¾ba prípustných meškaní spojov urèená vz•ahom (2) zabezpeèuje, že vlaky nemôžu jazdi• na skrátené jazdné doby, aj keï vlaková cesta takúto jazdu pripúš•a. V systéme SENA si jej zavedenie vyžiadalo rozšíri• definíciu spoja (1) o ïalší údaj - skrátená doba jazdy spoja, ktorý však nemal podstatný vplyv na algoritmickú zložitos• h¾adania prípustných výlukových grafikonov.



Obr. 1 ***Riešenie zadnej a èelnej zrážky vlakov pri výluke***

Fig. 1 *Solution of the reverse and frontal conflict of trains*

Na ocenenie výlukového grafikonu potrebujeme ohodnotenie $c_{ij}(\tau)$ následnosti nekonfliktných spojov $s_1(\tau)\ \mathrm{p}\ s_2(\tau)$.

Cenou výlukového grafikonu $\mathcal{R}_{\tau^*}$ pri radení spojov $\pi \in \Pi(\mathcal{N})$ rozumieme èíslo:

$$f(\mathcal{R}_{\tau^*}) = \min_{\tau \in \mathrm{T}} \sum_{k=1}^{n-1} c_{\pi(k),\pi(k+1)}(\tau). \tag{6}$$

Optimálnym výlukovým grafikonom $\mathcal{R}^*$ rozumieme riešenie optimalizaènej úlohy:

$$f(\mathcal{R}^*_{\tau^*}) = \min\left\{ f(\mathcal{R}_\tau) : \mathcal{R}_\tau \in \mathcal{R}, \tau \in \mathrm{T} \right\}. \tag{7}$$

Vyèíslenie cie¾ovej funkcie (6) vyžaduje vzh¾adom na vzájomné ovplyvòovanie meškaní spojov riešenie optimalizaènej úlohy pre každú vo¾bu radenia spojov v rozvrhu. Úlohu $\mathrm{VGVD}(A,B)$ tak môžeme formulova• a rieši• ako úlohu obchodného cestujúceho s nelineárnou cie¾ovou funkciou:

$$\min f(\mathcal{R}_\tau) = \min\left\{ \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{N}} c_{ij}(\tau). \sum_{k \in \mathcal{N} - \{n\}} y_{ik}.y_{j,k+1} \right\}, \tag{8}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} y_{ik} = 1 \quad \forall k \in \mathcal{N}, \tag{9}$$

$$\sum_{k \in \mathcal{N}} y_{ik} = 1 \quad \forall i \in \mathcal{N}, \tag{10}$$

$$y_{ik} \in \{0,1\} \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall j \in \mathcal{N}. \tag{11}$$

Premenné tejto nelineárnej úlohy bivalentného programovania interpretujeme ako v úlohe $QTSP$, ak $y_{ik}=1$ potom $p(k)=i$ a spoj s_i bude ma• v rozvrhu poradie k .

V práci [5] sa experimentovalo s ohodnotením $c_{ij}(t)$ následných spojov v tvare:

$$c_{ij}(t)=\begin{cases} q_{ij}+r_i\left(t_o^i+t_p^i\right) & \text{ak } s_i(t) \text{ p } s_i(t) \\ \infty & \text{ak } s_i(t) \text{ º } s_i(t) \end{cases}, \tag{12}$$

kde:

q_{ij} ....penalizácia následnosti spojov s_i p s_j ,

r_i ....penalizácia jednej polminúty meškania spoja spoja s_i .

V penalizácii q_{ij} sú v systéme SENA zoh¾adnené najmä radenia vlakov pod¾a druhu (IC, R, Os, atd.), ale aj technologické obmedzenia zabezpeèovacích zariadení.

3. Grafikon na dvojko¾ajovom úseku

Úloha tvorby GVD na dvojko¾ajovom tra•ovom úseku, medzi dvoma susednými uzlami A a B , železniènej siete - ï alej len $GVD(A,B)$ - je formulovaná nasledovne:

Je daná množina spojov reprezentujúca platný cestovný poriadok vlakov na tra•ovom úseku AB *v sledovanom období. Je známa trojindexová matica èasových odstupov* W *pre 1. a 2. tra•ovú ko¾aj medzi spojmi. Nekonfliktný (prípustný) GVD - vznikne èasovým posunom spojov alebo zmenou tra•ovej ko¾aje vlaku, ktorý na oboch ko¾ajách dodržuje jednak minimálny odstup vlakov jednak maximálne prípustné meškanie vlakov. H¾adá sa prípustný GVD minimalizujúci ocenené meškania vlakov v cie¾ových uzloch.*

Na rozdiel od úlohy $VGVD(A,B)$ tu máme k dispozícii dve ko¾aje, èo vedie k potrebe rozšíri• definíciu spoja.

Majme koneènú množinu prirodzených èísel $N=\{1,2,...,n\}$. *Množinou spojov* nazveme množinu $S=\{s_i : i\in N\}$, kde *spoj* s_i je urèený usporiadanou 9-ticou údajov:

$$s_i=\left\{v^i, m_o^i, m_p^i, t_o^i, t_p^i, d_o^i, d_p^i, d_{max}^i, k_t^i\right\}, \tag{13}$$

kde:

v^i .... èíslo vlaku,

m_o^i a m_p^i .... uzol (stanica) odchodu a príchodu spoja,

t_o^i .... èas pravidelného odchodu z uzla odchodu,

t_p^i .... èas pravidelného príchodu do uzla príchodu,

d_o^i a d_p^i .... doba pobytu v uzle odchodu a príchodu,

d_{max}^i .... maximálna prípustná doba meškania vlaku,

k_t^i .... pravidelne pojazdná tra•ová ko¾aj.

V prípade spojov s_i na dvojko¾ajovom tra•ovom úseku je zrejme $k_t^i \in \{1,2\}$.

Prípustným meškaním spojov rozumieme množinu $\tau = \{\tau(s) : s \in S\}$, kde meškanie spoja $\tau(s)$ je urèené usporiadanou trojicou:

$$\tau(s) = \left(\tau_{ï}, \tau_p, k_\tau\right), \quad \tau_{ï} \le \tau_p, \quad \tau_p \in \{0,1,\ldots,d_{max}\}, \quad k_\tau \in \{1,2\}, \qquad (14)$$

kde:

τ_o .... doba meškania spoja s pri odchode z m_o,

τ_p .... doba meškania spoja s pri príchode do m_p,

k_τ .... tra•ová ko¾aj meškajúceho spoja s.

Pojem prípustného meškania (2) bolo potrebné zmeni•, nako¾ko zmena pravidelne jazdenej ko¾aje je technologicky èasto spojená s meškaním pri odchode resp. príchode vlaku. Pre jednoduchšie vyjadrovanie budeme hovori• o meškaní spoja aj v prípade, keï $\tau_o = \tau_p = 0$.

Nech w_{ijk} je *doba minimálnych odstupov* medzi spojmi s_i a s_j na spoloènej tra•ovej ko¾aji k, $\left(k_\tau^i = k_\tau^j\right)$. Ï alej budeme indexy vynecháva• a písa• len k.

Zmeškaný spoj $s_j(\tau)$ môže nekonfliktne nadviaza• na spoj $s_i(\tau)$, èo znaèíme pomocou reláciu následnosti $s_i(\tau)$ p $s_j(\tau)$, keï platí:

$$t_p^i + \tau_p^i + w_{ijk} \le t_o^j + \tau_o^i. \qquad (15)$$

Na ocenenie prípustného grafikonu potrebujeme ohodnotenie $c_{ijk}(\mathrm{t})$ následnosti nekonfliktných spojov $s_i(\mathrm{t})$ p $s_j(\mathrm{t})$ na spoloènej ko¾aji k. Grafikony sú tu opä• urèené radením spojov.

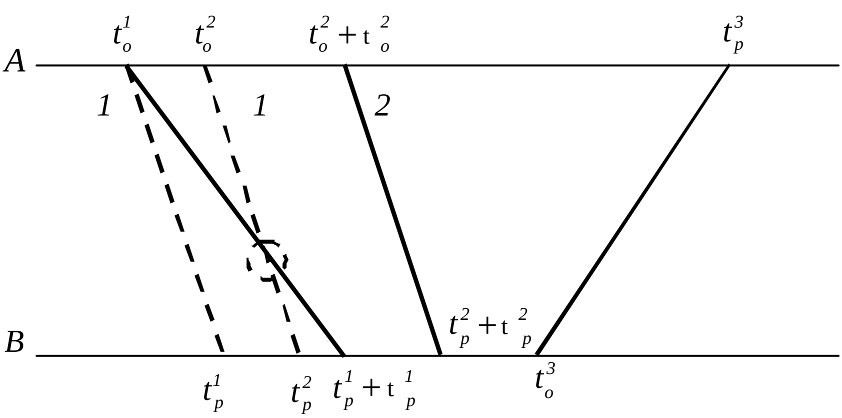
Cenou grafikonu R_{t^*} pri *radení spojov* $\mathrm{p} \in \Pi(\mathrm{N})$ rozumieme èíslo:

$$f\left(R_{\mathrm{t}^*}\right) \min_{\mathrm{t} \in \mathrm{t}} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{q=p+1}^{n} c_{\mathrm{p}(p),\mathrm{p}(q)}(\mathrm{t}) \prod_{l=p+1}^{q-1} \mathrm{c}\left(s_{\mathrm{p}(p)}(\mathrm{t}) \,{}^{\mathrm{o}}\, s_{\mathrm{p}(l)}(\mathrm{t})\right). \tag{16}$$

Optimálnym grafikonom R^* rozumieme riešenie rozvrhovacej úlohy:

$$f\left(\mathrm{R}^*_{\mathrm{t}^*}\right) = \min\left\{ f\left(\mathrm{R}_{\mathrm{t}}\right) : \mathrm{R}_{\mathrm{t}} \in \mathrm{R}, \mathrm{t} \in \mathrm{t} \right\}. \tag{17}$$

Vyèíslenie cie¾ovej funkcie vyžaduje okrem výpoètu meškaní spojov aj rozhodnutie o priradení tra•ových ko¾ají, èo vedie na riešenie úlohy optimálneho rozkladu množiny spojov do dvoch tra•ových ko¾ají. Súèin charakteristických funkcií konfliktných nadväzností spojov v cie¾ovej funkcii (16) slúži na výber bezprostredne nadväzujúceho spoja $s_{\mathrm{p}(q)}(\mathrm{t})$ na spoj $s_{\mathrm{p}(p)}(\mathrm{t})$ pre spoloènú ko¾aj k_{t} rozvrhu.



***Obr. 2** Riešenie zadnej zrážky vlakov na dvojko¾ajnej trati*

***Fig. 2** Solution of the reverse conflict of trains on two rail of track*

Príklad ***2.*** *Zadná zrážka vlakov* v^1 *a* v^2 *na tra•ovom úseku* AB *s pravidelným spojom* $s_1 = \left(v^1, A, t_o^1, B, t_p^1, \ldots, 1\right)$ *a spojom* $s_2 = \left(v^2, A, t_o^2, B, t_p^2, \ldots, 1\right)$ *je zobrazená prièom vlak* v^2 *má meškanie* $\mathrm{t}(s_1) = \left(0, \mathrm{t}_p^1, 1\right)$ *je zobrazená bodkovaným kolieskom na* ***obr. 2****.*

Zmenou tra•ovej ko¾aje v^2 *z 1 na 2 dôjde aj k meškaniu spoja* $t\left(s_2\right)=\left(t\,^2_p, t\,^2_p, 2\right)$ *a tak sme odstránili konflikt* $s_{1(t)}$ ° $s_{2(t)}$. *Tretí vlak* v^3 *so spojom* $s_3=\left(v^3, B, t^3_o, B, t^3_p, \ldots, 2\right)$ *nie je konfliktný so spojom* $s_2(t)$ *a tak formálne položíme* $s_3(t)=(0,0,2)$. *Dostali sme jedno nekonfliktné riešenie* $s_1(t)$ p $s_2(t)$ p $s_3(t)$ *so spojmi zobrazenými plnými èiarami.*

Na rozdiel od riešenie výlukového $\mathrm{VGVD}(A,B)$ tu máme ešte jeden stupeò vo¾nosti spoèívajúci vo vo¾be vhodnej tra•ovej ko¾aje. V prípade, ak zmena ko¾aje nie je penalizovaná, je cena optimálneho výlukového grafikonu najmenej rovná cene optimálneho dvojko¾ajového grafikonu. Je prirodzené požadova• zachovanie tejto vlastnosti aj pre suboptimálne grafikony.

Úlohu $\mathrm{GVD}(A,B)$ tak môžeme formulova• a rieši• ako relaxovanú úlohu $\mathrm{VGVD}(A,B)$, kde sme požiadavku jedinej pojazdnej ko¾aje nahradili ponukou dvoch tra•ových ko¾ají:

$$\min f\left(\mathrm{R}_t\right)=\min_{t\in \mathrm{t}}\left\{\sum_{i\in \mathrm{N}}\sum_{j\in \mathrm{N}}\left(c_{ij1}(t).z_i.z_j+c_{ij2}(t).(1-z_i)(1-z_j)\right).\right.$$

$$\left. .\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=p+1}^{n} y_{ip}.y_{jq}.\prod_{l=p+1}^{q-1}\mathrm{c}\left(z_i\neq z_l\right)\right\}, \tag{18}$$

$$\sum_{i\in \boldsymbol{N}} y_{ik}=1 \qquad \forall k\in \mathrm{N}\ , \tag{19}$$

$$\sum_{k\in \boldsymbol{N}} y_{ik}=1 \qquad \forall i\in \mathrm{N}\ , \tag{20}$$

$$z_i, y_{ik}\in\{0,1\} \qquad \forall i\in \mathrm{N}\ , \forall k\in \mathrm{N}\ . \tag{21}$$

Premenné y_{ik}, analogicky ako v úlohe $\mathrm{VGVD}(A,B)$, rozhodujú o radení spojov na tra•ovom úseku. Premenná z_i rozhoduje o priradení ko¾aje kspoju s_i. Ak $z_i=1$, potom je tra•ová ko¾aj $k^i_t=1$, ak $z_i=0$, potom je tra•ová ko¾aj $k^i_t=2$.

4. Grafikon vlakovej dopravy v sieti

Úloha tvorby GVD v železniènej sieti G - ï alej len $\mathrm{GVD}(G)$ - je formulovaná nasledovne:

Je daná množina spojov reprezentujúca platný cestovný poriadok vlakov na pojazdných ko¾ajách dopravnej cesty vlakov v sledovanom období. Železnièná sie• je reprezentovaná vrcholovo ohodnoteným digrafom $G=(V,H,w)$*, ktorého množina vrcholov* V *je tvorená tra•ovými a staniènými ko¾ajami, množina hrán* V *incidentnými ko¾ajami a vrcholovým ohodnotením* w *minimálnych èasových odstupov medzi nadväzujúcimi spojmi vlakov. Nekonfliktný (prípustný) GVD - vznikne èasovým posunom spojov alebo zmenou ko¾aje vlakov, ktorý na ko¾ajach dodržuje jednak minimálny odstup vlakov jednak maximálne prípustné meškanie vlakov. H¾adá sa prípustný GVD minimalizujúci ocenené meškania vlakov v cie¾ových staniciach vlakoch.*

Na rozdiel len od dvoch tra•ových ko¾ají úlohy $\mathrm{GVD}(A,B)$ tu uvažujeme s ko¾ajami na úsekoch (tra•ové) a v uzloch (stanièné), èo opä• vedie k potrebe doplni• údaje v definícii spoja.

Majme koneènú množinu prirodzených èísel $\mathrm{N} =\{1,2,...n\}$. Množinou spojov nazveme množinu $\mathrm{S} =\{s_i : i\in \mathrm{N}\}$, kde spoj s_i je urèený usporiadanou 10-ticou údajov:

$$s_i=\left(v^i ,m^i_o,m^i_p ,t^i_o,t^i_p,d^i_o,d^i_p,d^i_{max} ,k^i_t ,K^i_t\right), \tag{22}$$

kde:

v^i .... èíslo vlaku,

m^i_o a m^i_p .... uzol (stanica) odchodu a príchodu spoja,

t^i_o .... èas pravidelného odchodu z uzla odchodu,

t^i_p .... èas pravidelného príchodu do uzla príchodu,

d^i_o a d^i_p .... doba pobytu v uzle odchodu a príchodu,

d^i_{max} .... maximálna prípustná doba meškania vlaku,

k^i_t .... pravidelne pojazdná ko¾aj,

K^i_t .... množina prípustných pojazdých ko¾ají.

V prípade spojov s_i na ko¾aji je zrejme $k^i_t\in K^i_t$.

Železnièná sie• je modelovaná vrcholovo ohodnoteným digrafom $G=(V,H,w)$, kde:

V .... koneèná množina ko¾ají $V=\{k_1,k_2,...,k_n\}$,

H .... množina ko¾ají so spoloèným zhlavím $H=\{h_1,h_2,...,h_M\}$,

w .... doba minimálnych odstupov spojov na ko¾aji; $w(s_i,s_j,k)$ je minimálna doba, ak na ko¾aji $k \in V$ po spoji $s_i \in$ S bezprostredne nasleduje spoj $s_j \in$ S .

Prípustným meškaním spojov rozumieme množinu t $=\{$t $(s): s \in$ S $\}$, kde *meškanie spoja* t (s) je urèené usporiadanou trojicou:

$$\text{t}\,(s)=\left(\text{t}_{\,ï},\text{t}_{\,p},k_{\text{t}}\right),\text{t}_{\,ï} \le \text{t}_{\,p},\text{t}_{\,o},\text{t}_{\,p} \in \{0,1,...,d_{max}\},k_{\text{t}} \in K_t, \qquad (23)$$

kde:

t $_ï$ .... doba meškania spoja s pri odchode z m_o,

t $_p$ .... doba meškania spoja s pri príchode do m_p,

k_{t} .... pojazdná ko¾aj meškajúceho spoja s.

Zmeškaný spoj $s_j(\text{t})$ môže nekonfliktne nadviaza• na spoj $s_i(\text{t})$, èo znaèíme pomocou reláciu následnosti $s_i(\text{t})$ p $s_j(\text{t})$, keï je dodržaná doba minimálneho odstupu spojov s_i, s_j na spoloènej ko¾aji k ve¾kosti $w_{ijk} = w(s_i,s_j\,k)$, t.j.:

$$t_p^i + \text{t}_{\,p}^{\,i} + w_{ijk} \le t_o^j + \text{t}_{\,o}^{\,i}. \qquad (24)$$

Príklad ***3.*** *Na* ***obr. 3*** *máme príklad prípustného grafikonu na trati ABC modelovanej digrafom* $G=(V,H,w)$*, kde:*

$$V=\{k_1,k_2,...k_{11}\},$$

$$H=\{(k_1,k_3),(k_3,k_1),(k_2,k_9),(k_9,k_4),(k_4,k_{10}),(k_{10},k_8),...,(k_7,k_{11}),(k_{11},k_7)\},$$

prièom:

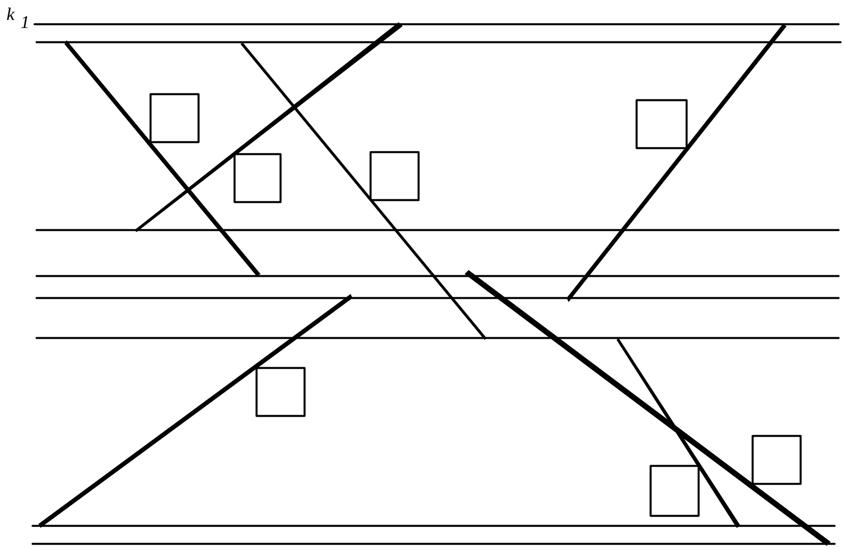
k_1,k_2 .... *sú stanièné ko¾aje v stanici A,*

k_3, k_4, k_5, k_6 .... *sú staniène ko¾aje v stanici B,*

k_7, k_8................................. *sú staniène ko¾aje v stanici C,*

k_9 .... *je jediná pojazdná tra•ová ko¾aj na úseku AB,*

k_{10}, k_{11}............................. *sú tra•ové ko¾aje pojazdné v oboch smeroch na úseku BC.*



Obr. 3 *Prípustný grafikon na trati ABC*
Fig. 3 *Feasible train-scheduling on the track ABC*

V štvorcoch dotýkajúcich sa spojov sú zobrazené èísla vlakov. Predpokladá sa pojazdnos• kolají v oboch smeroch. Za pozornos• stojí, že vlaky v^1 *a* v^4 *nie sú na trati BC konfliktné, nako¾ko jazdia v zhodnom smere a èase ale po rôznych tra•ových ko¾ajách* k_{10} *a* k_{11}*.*

Na ocenenie prípustného grafikonu potrebujeme ohodnotenie $c_{ijk}(t)$ následnosti nekonfliktných spojov $s_i(t)$ p $s_j(t)$ na spoloènej ko¾aji k_t . Optimálny grafikon je aj tu urèený optimálnym radením indexov množiny spojov $p^{*} \in \Pi(N)$ ako v modeli $GVD(A,B)$. Definície ceny grafikonu a optimálneho grafikonu ostávajú bezo zmeny. Zložitos• siete sa tu prejaví len v riešení nelineárnej rozvrhovacej úlohy (16).

Vývoj systému SENA [7] viedol k ve¾mi komplexnej cie¾ovej funkcie $f(R_t)$, ktorá zoh¾adòuje - konfliktné paralelné jazdy na susedných ko¾ajách, možná konflikty nastupujúcich a vystupujúcich cestujúcich s prechádzajúcimi vlakmi pri neexistencii podchodu, prioritu stanièných ko¾ají pre požadovaný smer jazdy, atï .

5. Metódy a otvorené problémy

Principiálny rozdiel optimalizaèných úloh je tu len vo vyèíslení $f\left(\mathrm{R}_t\right)$ *- cie¾ových funkcií:*

- -úloha lineárneho programovania pre ,
- -úloha dynamického programovania pre ,
- -•ažká úloha celoèíselného programovania pre ,

h¾adajúcich optimálne riešenie pri fixovanom radení spojov grafikonu.

Skutoènos•, že prezentované optimalizaèné úlohy možno chápa• aj ako špeciálne modifikácie úlohy obchodného cestujúceho, nám umožòujú upravova• [9] heuristické metódy pre úlohu obchodného cestujúceho.

- *Metóda èiastoèných súètov.*

  Postupná tvorba lacnejšieho grafikonu umožòuje h¾ada• príslušne relaxované (èiastoèné) grafikony uvažovaných úloh tak, aby boli splnené požadované èiastoèné súèty metódy. Metódu možno odporúèa• len pre podúlohy s ve¾mi malým poètom spojov . Ani v prípade ve¾mi ostrých obmedzujúcich podmienok následnosti spojov však nemôžeme vylúèi• dramatický rast poètu riadkov tabu¾ky èiastoèných riešení.

- *Pyramídová metóda.*

  Doteraz bola skúmaná modifikovaná multipyramidová verzia metódy, [5], pre úlohu s ve¾mi povzbudivými výsledkami. Poèítaèové experimenty ukázali, že aj v prípadoch ocenení všeobecnými (nie Mongeho) maticami je tento princíp (polynomiálneho h¾adania exaktného riešenia v exponenciálnom okolí prípustného riešenia) prekvapujúco efektívny.

- *Metóda perturbaènej schémy.*

  Táto univerzálna metóda bola aplikovaná [3] v poèiatoèných etapách riešenia úlohy . Jej kvalita je závislá od použitej heuristiky h¾adania testovaného radenia spojov. Pre svoju nepredvídate¾nú dobu výpoètu však nie je v systéme SENA odporúèaná pri operatívnom riešení konfliktov grafikonu.

- *Metóda zakázaného preh¾adávania (tabu search).*

  Táto metaheuristika zatia¾ ešte nebola overovaná na žiadnej z prezentovaných úloh. Oèakávame však uspokojivé výsledky najmä pri kombinácie metódy zakázaného preh¾adávania s metódami typu pyramídovej metódy.

- *Dekompozièné metódy.*

  Dekompozièná metóda založená na metóde kåzavých permutácii bola testovaná v systéme SENA pri riešení úlohy $\boxed{\qquad\qquad}$. Poèítaèové experimenty ukázali, že je prirodzené chápa• koordinaènú úlohou ako úlohu h¾adajúcu radenie spojov pri priemerných meškaniach a príslušné dekomponované úlohy medzi uzlami siete $\boxed{\quad}$ ako úlohy $\boxed{\qquad\qquad}$. Otvoreným zostáva problém vypoèítaného vedenia dopravnej cesty v ko¾ajisku staníc, ktorý by mohol prinies• zaujímavé výsledky.

Z h¾adiska teórie sú tu otvorené najmä otázky odhadov aproximaèného pomeru prezentovaných metód aj pre prakticky nerealistické inštancie úloh. Ich štúdium by mohlo prinies• neskoršie aplikovate¾né poznatky.

Lektoroval: Doc. Ing. Josef Volek, CSc.

Pøedloženo: v bøeznu 2002.

Literatura

1. Migom, A., Valert, W. *A Sequential Route-building Algorithm Employing a Generalised Savins Criterion*. Rail International, No 2, 1981, pp.71-79.
2. Šotek, K., Peško, Š., Virdzek, O. *Uplatnenie personálneho poèítaèa pri tvorbe modelu grafikonu vlakovej dopravy na dvojko¾ajnom tra•ovom úseku*. Železnièná technika, No.2, NADAS, 1990, pp.56-57.
3. Peško, Š. *Optimalizácia výlukového grafikonu vlakovej dopravy*. ŽEL'95, Zborník prednášok, VŠDS, Žilina, 1995, pp.85-91.
4. Šotek, K. *Optimalizace výlukové èinnosti pomocí simulaèního modelu*. Scientific Papers of the University of Pardubice, Series B, The Jan Perner Transport faculty 3, 1997, pp.147-151.
5. Potoèiar, M. *Optimalizácia výlukového grafikonu*. Diplomová práca, FRI-ŽU, Žilina, 2001.
6. Šotek, K., Bachratý, H., Greiner, K., Tavaè, V. *New Modules for System SENA*. 8th International Symposium ŽEL'2001, Žilina, ŽVS, 2001, pp.251-256. ISBN 80-7135-055-9.
7. Šotek, K., Bachratý, H., Tavaè, V. *Transport Line Control Model*. 8th International Conference MOSMIC'2001, Sú¾ov, EDIS ŽU, 2001, pp.111-115. ISBN 80-7100-883-4.
8. Šotek, K., Bachratý, H. *Simulaèní model železnièní dopravy v IS SENA*. Mezinárodní konference informaèních technologií v dopravì , INFOTRANS, Pardubice, 2002, pp.47-48. ISBN 80-7194-419-8.

9. Peško, Š. *Optimalizácia NP-•ažkých dopravných rozvrhov*. Habilitaèná práca, FRI-ŽU, Žilina, 2002.

Resumé

OPTIMALIZAÈNÉ MODELY TVORBY GRAFIKONU

Štefan PEŠKO

V príspevku zoznamujeme s poznatkami riešite¾ov grafikonu vlakovej dopravy GVD pre komerèný systém SENA v rokoch 1988-2000. Analyzujeme tri základné optimalizaèné modely tvorby GVD. Formulujeme nové otvorené problémy súvisiace s kvalitou aplikovaných metód.

Summary

OPTIMISATION OF MODELS OF THE TRAIN-SHEDULING

Štefan PEŠKO

The experiences from years 1988-2000 of solving a time train-scheduling problem for the commercial railroad system SENA are presented. Three simple models of optimatization are given. The several open questions of quality of applied methods are formulated.

Zusammenfassung

OPTIMALISIERUNGSMODELLE IN DER BILDUNG DES BILDFAHRPLANES

Štefan PEŠKO

Die Planung des Zugverkehrs verlangt die Lösung mehrerer Optimalisationsaufgaben zusammen. Die spezifische Aufgabe ist die Bildung des Bildfahrplanes (weiter nur BFP), die den konfliktlosen Fahrplan im Eisenbahnnetz sucht. Diese Aufgabe ist dadurch gekennzeichnet, dass sie ganz grosse Menge der verbindlichen Vorschriften in Betracht ziehen muss. Wegen der Sicherheit beschränken sie die zulässigen Mengen der Bildfahrpläne.

In diesem Beitrag befassen wir uns mit den Löser- erfahrungen des kommerziellen Systems unter dem Namen SENA aus den Jahren 1988-2000. Drei grundlegende Optimalisationsmodelle der BFP werden der Analyse unterzogen, die man so formulieren kann:

- Der Ausschlussbildfahrplan des Zugverkehrs. Es wird eine Menge der Verbindugen gegeben, die den gültigen Zugfahrplan im Streckenabschnitt in der Zeit des Ausschlusses darstellt. Die Matrix der Zeitspanne zwischen der Verbindungen ist bekannt.

  Der konfliktlose BFP entsteht durch Zeitverzörgerung der Verbindungen, der auf einem freiem Streckengleis einerseits den minimalen Zugabstand andertseits die maximal zulässige Zugverspätungen einhaltet.

- Der Bildfahrplan auf dem doppelgleisigen Streckenabschnitt. Es wird ein Menge der Verbindungen gegeben, die den gültigen Zugfahrplan im Streckenabschnitt im verfolgten Zeitraum darstellt. Die Drei-Index-Matrix der Zeitabstände für das 1. und 2. Gleis ist bekannt.

  Der konfliktlose BFP entsteht durch Zeitverzörgerung der Verbindungen oder durch die Änderung des Streckengleises, der auf beiden Gleisen einerseits den minimalen Zugabstand anderseits maximal zulässige Zugverspätung einhaltet.

- Der Bildfahrplan des Zugverkehrs im Eisenbahnnetz. Es wird eine Menge der Verbindungen gegeben, die den gültigen Fahrplan auf den Fahrgleisen des Verkehrsweges im verfolgten Zeitraum darstellt. Das Eisenbahnnetz wird durch den eckbewerteten Digraph dargestellt, dessen Menge der Ecken mit Strecken- und Bahnhofgleisen gebildet wird. Die Menge der Kanten ist mit den inzidenten Gleisen gebildet und durch minimalen Zei tabständen der angebundenen Zügen bewertet.

  Der konfliktlose BFP entsteht durch Zeitverzörgerung der Verbindungen oder durch die Änderung der Zuggleise, der auf den Gleisen einerseits den minimalen Zugabstand andertseits maximal zulässige Zugverspätung einhaltet.

In den durch den Apparat der Graphlehre und mathematischen Programmierung analysierten oben genannten eingeführten Modellen wird den konfliktlosen (zulässigen) BFP gesucht, der die bewertete Zugverspätung in den Zielbahnhöfen minimalisiert. Der grundsätzliche Unterschied besteht nur bei der Festlegung der zugehörigen kriteriallen Funktionen. Es ist bewiesen, das es sich hier um schwere kombinatorische Aufgaben handelt, für die wir nicht den optimalen BFP in der polymionallen Zeit finden können und deswegen ist es nötig, solche heuristischen Algorithmen zu entwickeln, um sie den suboptimalen BFP in zulässigen - polynomiallen Zeit gewähren zu können.

Wie auch die Lösungen der eingeführten elementaren Aufgaben nur sehr vereinfaches Modell des realen BFPs darstellen, ermöglichen sie das Studium der Grundprobleme dessen Bildung.

Am Ende diese Beitrages befassen wir uns mit der Analyse der Möglichkeit von fünf urkundlichen Methoden, mit denen wir die reichhaltigen praktischen Erfahrungen bei der Lösung -schweren Rundverkehrsprobleme gewonnen haben. Wir führen kurz die entstandenen offenen Probleme an, deren Studium solche Erkenntnise bringen könnten, die man später anwenden kann.