

**UNIVERZITA PARDUBICE
FAKULTA CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ
KATEDRA CHEMICKÉHO INŽENÝRSTVÍ**

**DUTÉ VLÁKNO S PORÉZNÍ STĚNOU:
STUDIUM HYDRODYNAMICKÉHO
CHOVÁNÍ A KOLÁČOVÉ FILTRACE**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**AUTOR PRÁCE: Lenka Škrobánková
VEDOUCÍ PRÁCE: Ing. Petr Doleček, CSc.**

2006

**UNIVERSITY OF PARDUBICE
FACULTY OF CHEMICAL TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF CHEMICAL ENGINEERING**

**HOLLOW FIBRE WITH POROUS
WALLS: STUDY OF HYDRODYNAMIC
PERFORMANCE AND DEAD-END
FILTRATION**

THESIS

**AUTHOR: Lenka Škrobánková
SUPERVISOR: Ing. Petr Doleček, CSc.**

2006

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 12. 05. 2006

Lenka Škrobánková

Abstrakt

Tato práce popisuje matematický model mikrofiltrace v dead-end režimu membránou z dutého vlákna s homogenní porézní stěnou. Model může být použit pro suspenzi v newtonské kapalině. Další část práce se zabývá návrhem experimentálního zařízení k ověření matematického modelu ustáleného laminárního toku čisté newtonské kapaliny dutým vláknem za isothermních podmínek a provedením experimentálních měření.

Byla provedena literární rešerše možností využití dutých vláken při mikrofiltracích a ultrafiltracích vodných roztoků. Také byla provedena rešerše matematického modelování mikrofiltrace dutým vláknem v dead-end režimu.

Byl vytvořen kompletní matematický model dead-end mikrofiltrace. Model sestává z bilance růstu koláče, proudění kapaliny koláčem, proudění kapaliny porézní stěnou vlákna a toku kapaliny dutým vnitřkem vlákna. Matematický model byl řešen numerickou metodou sítí. Tato numerická metoda byla implementována v prostředí Microsoft Excel. Numerickými experimenty byly sledovány vlivy parametrů modelu na usazování a odpor koláče, tlakovou ztrátu uvnitř vlákna, lokální průtok permeátu při filtraci.

Experimentální měření byla provedena na navrženém experimentálním zařízení.

Naměřená experimentální data vyhovovala matematickému modelu ustáleného laminárního toku čisté newtonské kapaliny uvnitř vlákna. Výtok z vlákna vzrůstal jen do určité limitní délky, po překročení této délky zůstal konstantní.

Abstract

This work describes mathematical model of dead-end microfiltration through hollow fibre membrane with uniformly porous walls. Model can be used for suspension in Newtonian fluid. Next part of this work describes module design for experimental verification of mathematical model of isothermal laminar steady-state pure Newtonian fluid flow through hollow fibre with uniformly porous walls and the results of experiments.

Literature search has been done for possibilities of usage of hollow fibre in microfiltration and ultrafiltration processes. The second part of literature search has been engaged in ways of mathematical modeling of dead-end microfiltration and ultrafiltration for hollow fibre membrane.

Complete mathematical model of dead-end microfiltration have been created. Mathematical model has been created from balance of solid phase equation, Darcy's law for flow in a filter cake, Darcy's law for flow in porous walls of membrane and flow of fluid inside hollow fibre membrane. Mathematical model has been solved numerically by finite difference method. This numerical procedure has been implemented in Microsoft Excel. The influence of model parameters on cake deposition and resistance, pressure drop inside hollow fibre membrane and the rate of local flow of filtrate during filtration has been observed.

Experimental measurements have been executed on designed apparatus.

Results of experimental measurements correspond to mathematical model of isothermal laminar steady-state pure Newtonian fluid flow through hollow fibre. The permeate discharge from the fibre grows to certain hollow fibre length and then is nearly constant.

Na tomto místě bych chtěla poděkovat Ing. Petru Dolečkovi, CSc za odborné vedení, cenné rady a pomoc při zpracování této diplomové práce. Také bych chtěla poděkovat své rodině za podporu při studiu.

Obsah

1	Úvod	9
2	Literární rešerše.....	11
2.1.	<i>Obecné vlastnosti dutých vláken</i>	<i>11</i>
2.2.	<i>Druhy membránových tlakových operací.....</i>	<i>12</i>
2.3.	<i>Matematické modelování dead-end mikrofiltrace</i>	<i>16</i>
3	Matematický model koláčové dead-end filtrace.....	28
3.1.	<i>Předpoklady</i>	<i>28</i>
3.2.	<i>Geometrie vlákna</i>	<i>28</i>
3.3.	<i>Růst koláče</i>	<i>29</i>
3.4.	<i>Proudění kapaliny koláčem (odpor vrstvy koláče)</i>	<i>29</i>
3.5.	<i>Proudění kapaliny porézní stěnou vlákna (odpor stěny vlákna).....</i>	<i>30</i>
3.6.	<i>Tok kapaliny dutým vnitřkem vlákna</i>	<i>30</i>
3.7.	<i>Výsledný matematický model v rozměrném tvaru.....</i>	<i>31</i>
3.8.	<i>Postup řešení matematického modelu</i>	<i>32</i>
3.9.	<i>Matematický model v bezrozměrném tvaru pro filtraci za konst. tlak. rozdílu.....</i>	<i>33</i>
3.10.	<i>Matematický model v bezrozměrném tvaru pro filtraci za konst. rychlosti</i>	<i>34</i>
3.11.	<i>Numerické řešení matematického modelu</i>	<i>35</i>
3.12.	<i>Numerické experimenty</i>	<i>38</i>
4	Zjednodušený model proudění čisté kapaliny dutým vláknem s porézními stěnami [2]	49
4.1.	<i>Stanovení parametrů modelu z experimentů</i>	<i>51</i>
5	Experimentální část	52
5.1.	<i>Návrh experimentálního zařízení</i>	<i>52</i>
5.2.	<i>Použité chemikálie.....</i>	<i>53</i>
5.3.	<i>Nákres součástí zařízení a experimentálního zařízení.....</i>	<i>54</i>
5.4.	<i>Popis funkce zařízení a problémy vzniklé při jeho chodu.....</i>	<i>56</i>
5.5.	<i>Naměřená data a grafické znázornění naměřených dat</i>	<i>58</i>
5.6.	<i>Vyhodnocení parametrů modelu z experimentů</i>	<i>69</i>
5.7.	<i>Diskuse a doporučení</i>	<i>74</i>
6	Závěr	76
7	Dodatek.....	78
8	Literatura	79
9	Seznam obrázků	81
10	Seznam tabulek	82
11	Seznam symbolů.....	83

1 Úvod

V relativně krátkém čase bylo civilizací životní prostředí do značné míry zdevastováno a s tím i zhoršena kvalita vody v přírodě. Znečištění vod je značné a starší konvenční metody již nestačí k likvidaci tohoto povětšinou organického znečištění. Proto nastupují nové a účinnější technologie. Bezesporu jednou z těchto technologií je mikrofiltrace. Mikrofiltrace je membránová separační technologie jež používá polopropustnou membránu k selektivnímu zadržení částic o průměru od 0,05 do 10 μm . Tento membránový proces je dobře přizpůsoben náročným požadavkům na odstranění rozptýlených částic, mikroorganismů a patogenů, jako je např. Giardia a Cryptosporidium, z vody a je to bezpečný a ekonomicky efektivní proces, který odstraňuje obtíže starších metod, avšak přináší i problémy nové.

Jedním z problémů je zanášení povrchu membrány v průběhu procesu. To způsobuje zvýšení trans-membránového tlaku s rostoucím množstvím usazených částic na povrchu membrány během mikrofiltrace. Je proto důležité tento jev zkoumat a naučit se předvídat tyto změny transmembránového tlaku. Pak je možné také předvídat potenciálně možné úspory a zefektivnění daného procesu.

Mikrofiltrační membrány mají různé geometrické tvary. Jsou to především membrány ploché, trubkové, spirálně vinuté, dutá vlákna a keramické vícekanálové membrány. Uvedeme si podrobněji pouze dutá vlákna.

Mikrofiltrační systém může být provozován ve dvou konfiguracích, a to buď jako dead-end nebo cross-flow. U Cross-flow filtrace filtrovaná kapalina proudí tangenciálně k povrchu vlákna, což může přispívat k lepšímu odmyváání filtračního koláče. V případě dead-end filtrace filtrovaná kapalina protéká přes porézní stěnu a vytéká ústím vláken. Pokud by se filtrovala suspenze v opačném směru, filtrační koláč by se vytvořil na vnitřní stěně vlákna a vlákno by se po čase ucpalo. Čištění zpětným obrácením toku by bylo obtížné. Dead-end filtraci lze provádět dvěma způsoby. Buď je jeden konec vlákna zaslepený a filtrát je odsáván druhým otevřeným koncem, nebo je filtrát odsáván z obou konců vláken. V prvním případě je nulový tok filtrátu u zaslepeného konce v axiálním směru, ve druhém případě je nulový tok filtrátu ve středu vlákna. Hnací silou procesu je rozdíl tlaku vně a uvnitř vlákna. Filtraci lze provádět dvěma způsoby, za konstantní rychlosti filtrace a za konstantního tlakového rozdílu. Při filtraci za konstantní rychlosti toku filtrátu vláknem vzrůstá hnací síla (rozdíl tlaků) během

filtrace s časem. U filtrace za konstantního tlakového rozdílu klesá průtok filtrátu uvnitř vlákna s vzrůstající dobou filtrace. V prvních fázích filtrace při relativně velké hydrodynamické propustnosti membrány je průtok filtrátu vláknem velký. Dochází tak k poměrně velké tlakové ztrátě samotným tokem kapaliny uvnitř vlákna. Lokální hnací síla je pak velmi rozdílná po délce vlákna. Největší je v blízkosti otevřeného konce vlákna, kde je průtok filtrátu také největší. S rostoucím koláčem na povrchu vlákna se zvyšuje odpor proti toku nástřiku koláčem a následně stěnou dutého vlákna, dojde k poklesu toku permeátu ve vlákně. Tato práce se bude zabývat pouze uspořádáním dead-end.

Cílem této práce je vytvořit matematický model mikrofiltrace suspenze v newtonské kapalině při dead-end uspořádání a na základě numerických experimentů ověřit platnost výše uvedených kvalitativních úvah. Dalším cílem je sestavení experimentálního zařízení k ověření matematického modelu ustáleného laminárního proudění newtonské nestlačitelné tekutiny dutým vláknem s porézní stěnou. Dále na daném zařízení provést experimentální měření. Matematický model dead-end mikrofiltrace dutým vláknem má sloužit k předpovědi transmembránových změn tlaku během filtrace a k optimalizaci provozních parametrů.

2 Literární rešerše

2.1. Obecné vlastnosti dutých vláken

Tato forma membrán našla široké uplatnění v mikrofiltraci a reverzní osmóze při desalinaci mořské vody. Dutá vlákna jsou polymerní membrány vyráběné například z polysulfonu, acetátu celulózy, polyamidu, polypropylenu, polytetrafluorethylénu, triacetátu celulózy a dalších. Jako ostatní polymerní membrány, i dutá vlákna nalezneme ve standardních provedeních, a to jako symetrické, asymetrické a kompozitní. Dutá vlákna můžeme charakterizovat jako válcové trubice, v nichž je vysoký poměr délky vlákna ku jeho průměru. Tento poměr nabízí vysokou povrchovou plochu na jednotku objemu, velkou mechanickou pevnost a schopnost vydržet zpětný proplach i v malých modulech. Díky tomuto vysokému měrnému povrchu, je možné dutá vlákna využívat v procesech, kde se malá hnací síla nahrazuje velkou stykovou plochou. V dutých vláknech nedochází k zadržování kapaliny. Ale při toku permeátu nebo nástřiku vnitřkem vlákna, dochází k velké tlakové ztrátě. Charakter toku dutým vláknem je obvykle laminární.

Dutá vlákna se vyrábí s vnitřními průměry v rozmezí od 0,2 až 1 mm. Důležitou vlastností dutých vláken je pórovitost jejich stěn [21]. Rozsah pokrytí membránového povrchu póry by měl být nejméně okolo 20% z celkové plochy. V průměru bývá okolo 70%. Díky svému malému vnitřnímu průměru vykazují dutá vlákna vysoké hodnoty stříhového napětí v kapalině tekoucí uvnitř vlákna. U vnitřní stěny vlákna jsou v rozmezí 4000 s^{-1} až 14000 s^{-1} . Proto není vhodné filtrovat dutými vlákny živé buňky, protože by mohlo dojít k jejich usmrcení (mechanickému poškození).

Nejčastěji mají membránové moduly s dutými vlákny konfiguraci ponořených svazků vláken do nádrže s nástřikem nebo konfiguraci utěsněných svazků vláken ve válcovitém modulu. Utěsněné membránové moduly s dutými vlákny jsou nejčastěji realizovány v dead-end modu za konstantního transmembránového tlakového rozdílu, zatímco volně ponořené membrány jsou používány obvykle v modu konstantního toku permeátu vytvořeném sacím čerpadlem.

Nástřik je možné filtrovat skrz dutá vlákna dvěma způsoby. V prvním případě je tok nástřiku veden do středu vlákna a permeát prochází pod tlakem z vlákna ven. Filtrační koláč se ukládá na vnitřní straně vlákna. Ve druhém případě je nástřik veden z vnější strany do vnitřku dutého vlákna a koláč se vytváří na vnější stěně vlákna. Permeát pak odchází středem

vlákna k jeho konci. První případ nese sebou nežádoucí jev, kterým je akumulace látek na vnitřním povrchu membrány, což vede nakonec k jeho ucpaní. Také následné čištění vnitřního povrchu u tohoto uspořádání je pracné. Jednou z častých technik používaných k čištění dutých vláken od koláče akumulovaného na vnějším povrchu vláken, je metoda periodického obrácení toku, tzv. zpětný proplach. Zpětný tok permeátu skrz membránu zvedá koláč a tím dochází k obnovování povrchu membrány. Účinnost čištění zpětným proplachem však postupně klesá a čas od času musíme vlákna vyčistit chemicky. Mechanické čištění není možné, kvůli velmi malému průřezu.

2.2. Druhy membránových tlakových operací

Membránové tlakové procesy rozdělujeme na mikrofiltraci, ultrafiltraci, nanofiltraci a reverzní osmózu.

2.2.1. Mikrofiltrace

Mikrofiltrace je tlakový membránový proces, kterým je možné odstranit z roztoku částice o velikosti 20 nm až 10 μm . U mikrofiltrace je zanedbatelný osmotický tlak, tok membránou je přímoúměrný použitému tlaku. Praktické výkony membrán (flux) při běžných provozních tlacích 0,2-0,6 MPa bývá v stovkách $\text{l}/(\text{h}\cdot\text{m}^2)$. V případě mikrofiltrace lze použít membrány symetrické i asymetrické, polymerní, keramické.

2.2.1.1. Aplikace dutých vláken k stabilizaci a čištění nebezpečných průmyslových odpadních vod ve spojení s bioreaktorem, [8,10,11,19]:

Mnoho podniků zpracovávajících průmyslové odpadní vody dosud používá proces aktivovaného kalu k stabilizaci odpadních vod s vysokým podílem organických látek. V klasickém biologickém čištění odpadních vod se uplatňují biochemické procesy, podmíněné činností aerobních mikroorganismů, které rozkládají organické látky obsažené ve vodě oxidačními procesy za přítomnosti molekulárního kyslíku. Produkty rozkladu jsou CO_2 , H_2O , často NH_3 a další látky. Přebytek nerozložené hmoty vytváří vyvločkovanou suspenzní hmotu, aktivovaný kal, jež je dále separován. Mnoho organických průmyslových vod včetně z potravinářských, petrochemických, farmaceutických procesů, je nutné tímto procesem zpracovávat. Vznikají značná množství kalu, který je třeba odvodnit.

Dále je nutné určité procento aktivovaného kalu recirkulovat zpět k udržení jednotné populace mikroorganismů v aerační nádrži. Nejlépe by bylo minimalizovat množství odpadního kalu, k čemuž se s výhodou používá bioreaktorů s membránami z dutých vláken.

Tyto reaktory, tzv. HFMR, dovolují pružně kontrolovat poměr přívodu nástříku k danému množství mikroorganismů, a tím je prakticky eliminován přebytek tuhých částic a nevzniká téměř žádný odpadní kal. Kvalita permeátu výrazně převyšuje požadavky na kvalitu vypouštěných odpadních vod, avšak cena je výrazně vyšší než u klasických technologií. Výhody jsou v kompaktní instalaci, v úplném odstranění pevných látek z odtoku, v desinfekci odtoku, v odstranění CHSK, možnosti vysokého zatížení, nízké až téměř nulové produkci kalu, bytlnění kalu není problémem.

2.2.1.2. Využití dutých vláken při úpravě pitné vody [3,5,12]

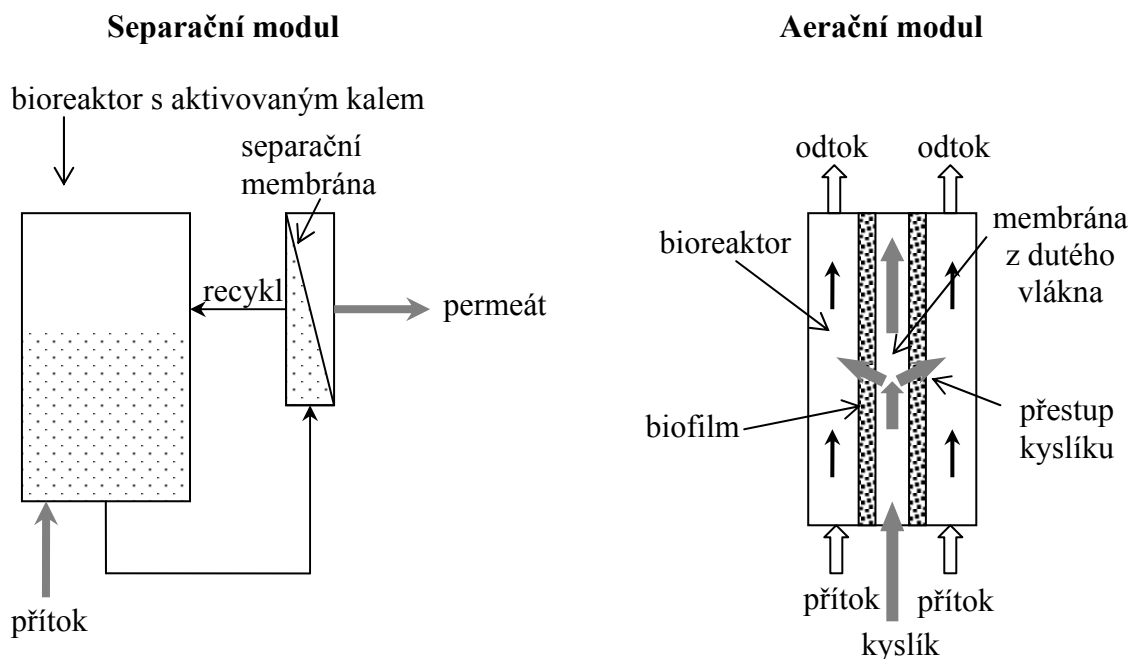
Protože samočisticí schopnost řek a jiných vodních zdrojů je v dnešní době značně omezená, je potřeba vodu upravovat před vpuštěním do domácností. Hlavním důvodem proč se začala používat dutá vlákna k úpravě pitné vody je existence odolných parazitických prvoků a jejich cyst (např. Giardia) vůči chemickým desinfekčním prostředkům. Na dutém vlákně dochází téměř k 100% zachycení kvasinek a koliformních bakterií. K velice dobrému odstranění z těchto vod dochází i u manganu, dále u železa, částečně i hliníku. Hořčík, křemík a vápník membrány propouští v značném množství. Voda se nejprve vede na předřazené čisticí filtry, kde se odloučí písek a jiné mechanické částice. Poté je voda vedena k vyčištění do membránového modulu s dutými vlákny. Nakonec je voda ještě dále upravována chemickými činidly, např. chlórem.

2.2.1.3. Zpracování odpadní vody z potravinářského průmyslu spojením MF modulu s dutými vlákny a bioreaktoru [4]

Jsou to vody z pivovarnictví, mlékárenství, cukrovarů, z výroby bramborového škrobu a další. Do těchto odpadních vod zahrnujeme vody z mytí cisteren, z konví, z mytí nádrží, odstředivek, pasterů atd. a chladicí vody. Opět je zde využíváno spojení reaktoru s biomasou v suspenzi se separací mikrofiltrací nebo ultrafiltrací. Membrána separuje odpadní vodu do dvou proudů, vyčištěný proud, který může být vypouštěn a koncentrovaný, který obsahuje většinu znečištění. Odpadní voda z potravinářského průmyslu je velmi zakalená a bohatá na živiny, proto po přivedení suspenze do bioreaktoru mají mikroorganismy uvnitř dostatek živin. Ponořené membrány jsou využívány ve dvou konfiguracích. Jako externí membrány mimo bioreaktor nebo jsou přímo v bioreaktoru. V externí konfiguraci moduly jsou ponořeny v separační nádrži a čerpadlo je využito k dodávce aktivovaného kalu, který má být filtrován.

Aerační reaktory využívají membrány z dutých vláken, které mohou dopravovat plyn, nejčastěji kyslík. Takto dodáváme kyslík přímo mikroorganismům a vytváříme tak výhodné

podmínky pro jejich život. Na vnější straně membrány se vytvoří biofilm, kterému ze strany membrány dodáváme kyslík a z druhé strany živiny z odpadní vody. Plyn prostupuje membránou bez tvorby bublin.



Obrázek 1: Separáčnı́ a aerační modul

2.2.1.4. Čištění nemocniční odpadní vody [1].

U této odpadní vody jde především o odstranění sloučenin dusíku, NH_4^+ iontů, zákalu a organických látek a bakterií. Opět je využito spojení bioreaktoru s membránovým modulem obsahujícím dutá vlákna. Účinnost odstranění zákalu se pohybuje okolo 83-93%. Vyčištěná voda je bez zápachu a barvy.

Membránový modul s dutými vlákny je ponořen přímo do bioreaktoru, ze spodu nádrže je přiváděn kyslík a biomasa uvnitř nádrže je recirkulována přes membrány. K oddělení biomasy dojde přímo v bioreaktoru, tudíž biomasa se nikam neodvádí a nedochází proto k zvýšené produkci kalu. Snižují se také náklady na energii, jež by byla spjata s případnou recirkulací roztoku do externího membránového modulu a zpět biomasy do bioreaktoru.

Nemocniční odpadní voda je čerpána z napájecí nádrže do bioreaktoru. Vyčištěná voda odchází pomocí sacího čerpadla ven. Vyčištěná voda má vynikající kvalitu.

2.2.1.5. Použití mikrofiltračních membrán k předzpracování mořské vody před reverzní osmózou [9]

Protože v některých oblastech světa není dostatek zásob sladké vody, nastala nutnost tuto potřebu doplňovat z vody mořské. Jelikož při konzumaci mořské vody dochází k dehydrataci organismu, musí být mořská voda zbavena většiny solí. Protože póry mikrofiltračních membrán jsou relativně velké, není možné mořskou vodu pomocí nich odsolit. Naopak, kdybychom chtěli mořskou vodu přímo odsolovat na reverzně osmotických membránách, došlo by k jejich okamžitému zanešení. Proto se nejprve mořská voda vede k předčištění na mikrofiltrační zařízení s dutými vlákny. Duté vlákno může být například z polyvinyl-fluoridu (PVDF). Filtrace se provádí z vnějšího prostoru do vnitřku vláken. PVDF vlákno je dobře přizpůsobeno k tomu, aby vydrželo velmi častý zpětný proplach a občasné chemické čištění. Toto vlákno je také odolné proti oxidaci. Mořská voda je touto mikrofiltrační jednotkou dostatečně předčištěna.

2.2.2. Ultrafiltrace

Dokáže zadržet částice o velikosti od 5 do 100 nm. U ultrafiltrace je rovněž zanedbatelný osmotický tlak [17], tok membránou je přímoúměrný použitému tlaku, praktické výkony membrán [23] při běžných provozních tlacích 0,2-0,6 MPa bývají v desítkách až stovkách l/(h.m²). Pro ultrafiltraci se používají hlavně membrány asymetrické, polymerní a keramické. Využívá se např. v potravinářském průmyslu k získávání škrobu, zahušťování ovocných šťáv, čištění odpadních vod vznikajících při zpracování ryb, při čištění povrchových vod, vod z domácností [20, 22] a vod ze zvířecích farem [24].

2.2.3. Nanofiltrace

Je další tlakem řízený membránový separační proces, jenž umí zachytit částice o velikosti od 1nm po 10 nm. Nanofiltrační membrány jsou polymerní, asymetrické, kompozitní. V poslední době se objevila i membrána s keramickým nosičem s nanofiltrační funkcí. Ta je zajištěna polymerní separační vrstvou Nafion [17]. Dominantním mechanismem zachycování při nanofiltraci není síťový efekt, založený na velikosti molekul a otvorů v membráně, ale většinou jiné síly – adsorpční aktivita rozpuštěné látky vůči membráně, elektrický náboj membrány a molekul rozpuštěné látky. Nanofiltrační membrány mohou oddělovat organické látky od nízkomolekulárních anorganických látek, jako jsou barviva od solí, dvojmocné soli od NaCl apod., soli od kyselin (např. CuSO₄ od H₂SO₄). Nanofiltrační membrány se používají při výrobě čisté vody pro chemický, farmaceutický a potravinářský průmysl a při zpracování odpadních vod.

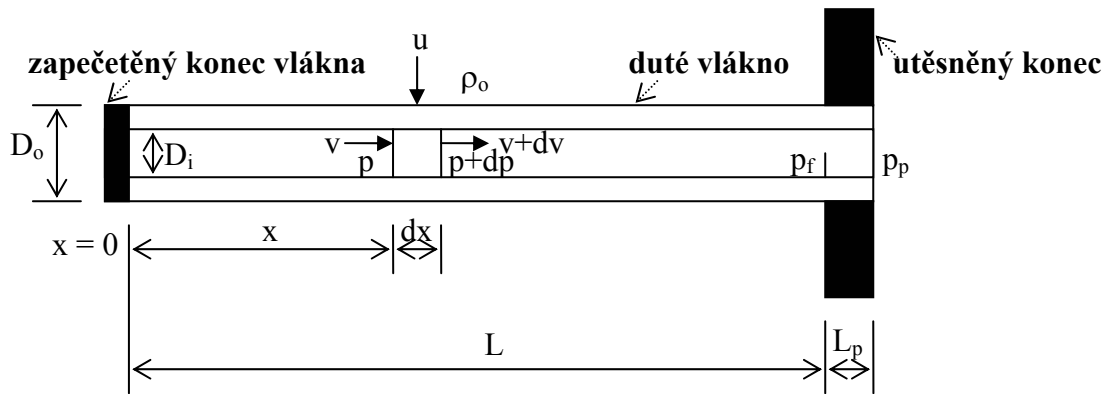
2.2.4. Reverzní osmóza

U reverzní osmózy působí proti procesu osmotický tlak [17]. Tok membránou je přímoúměrný rozdílu vyvozeného a osmotického tlaku, praktické výkony membrán při běžných provozních tlacích 2-3 MPa bývají v desítkách až jednotkách l/(h.m²). Membrány se používají asymetrické a kompozitní [18]. V současné době RO membrány se dostávají pod tlaky 10 bar, a to při zachování vysoké rejekce na roztok NaCl 99%. Jsou to tzv. nízkotlaké RO membrány. Změnila se struktura koncové separační vrstvy, jež je v rozmezí své tloušťky kolem 0,4 μm hluboce zvlněná a podobá se částečně protuberancím slunečnímu povrchu. Tím se dosáhlo zdvojení separační plochy a zvýšení výkonu, nebo-li při stejném výkonu je umožněno snížit pracovní tlak. Tento drsný povrch nevykazuje vyšší sklony k zanášení, protože prostůrky v povrchu membrány jsou dostatečně malé vzhledem k částicím zanášejícím membránu.

2.3. Matematické modelování dead-end mikrofiltrace

Při dead-end mikrofiltraci se ukládají částice na povrchu membrány a tím brání další filtraci. Tento jev je nutné matematicky popsat, aby bylo možné předpovědět tlakovou ztrátu a zanášení membrány v průběhu filtrace.

Model Hwang-Mook Lee, Chung-Hak Lee, Kun Yong Chung a Sangho Lee [13] se zabývá modelováním usazování částic na stěně vlákna. Z jejich modelu lze určit změny transmembránového tlaku způsobené postupným zanášením vlákna. Modelové vlákno charakterizuje vnitřním a vnějším průměrem, délkou vlákna a délkou neporézní části vlákna. Jeden konec vlákna je pevně uzavřen pryskyřicí, druhý konec je utěsněn jen z vnější strany, viz obrázek 2.



Obrázek 2: Modelová představa filtrace dutým vláknem podle Hwang-Mook Leeho

Permeát je odváděn z otevřeného konce vlákna. Při modelování rychlosti toku filtrátu dutým vláknem vychází z energetické bilance a z Hagen-Poiseuille rovnice

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = (p + dp) + \frac{\rho(v + dv)^2}{2} + \frac{32\mu v}{D_i^2} dx, \quad (2.1)$$

kde p je tlak, D_i je vnitřní průměr dutého vlákna, g je gravitační zrychlení, ρ je hustota kapaliny, μ je viskozita kapaliny a x je vzdálenost od uzavřeného konce vlákna. V této rovnici člen $[\rho.(dv)^2/2]$ je zanedbatelný. Dělením rovnice (2.1) dx získávají gradient tlaku ve směru x

$$\frac{dp}{dx} = -\rho v \frac{dv}{dx} - \frac{32\mu v}{D_i^2}. \quad (2.2)$$

Snížení rychlosti toku kapaliny ve směru x po projití stěnou membrány získávají z bilance hmoty toku kapaliny stěnou vlákna a jeho úpravou

$$\frac{\pi}{4} D_i^2 \cdot (v + dv) - \frac{\pi}{4} D_i^2 \cdot v = \pi \cdot D_o \cdot J \cdot dx, \quad (2.3)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{4D_o \cdot J}{D_i^2} = a_1 \cdot J, \quad (2.4)$$

kde J je tok permeátu a D_o je vnější průměr vlákna.

Spojením rovnic (2.2) a (2.4) a po zanedbání členu $(\rho \cdot D_o \cdot J / 8\mu)$ je získána diferenciální rovnice pro výpočet tlakové ztráty v dutém vlákně

$$\frac{dp}{dx} = \frac{32\mu \cdot v}{D_i^2} \cdot \left(-\frac{\rho \cdot D_o \cdot J}{8\mu} - 1 \right) \doteq -\frac{32\mu \cdot v}{D_i^2} = -a_2 \cdot v \quad (2.5)$$

Tok permeátu stěnou membrány vyjadřují Darcyho zákonem

$$J = k(p_o - p), \quad (2.6)$$

kde k je hydrodynamická propustnost membrány a p_o je atmosférický tlak.

Model uvažuje snižování objemu pórů s postupným usazováním částic do stěny pórů. Bilance usazených částic v pórech je vyjádřena diferenciálním snížením poloměru póru s diferenciálním zaplněním póru částicemi.

$$N^* \cdot (-2\pi r \cdot dr) \cdot l = C \cdot dV_F, \quad (2.7)$$

kde r je poloměr zmenšujícího se póru, N^* je celkový počet pórů stejné velikosti, l je délka póru, C je objemová koncentrace částic na jednotku objemu filtrátu a V_F je objem filtrátu. Po integraci

$$N^* \cdot \pi \cdot (r_o^2 - r^2) \cdot l = C \cdot V_F. \quad (2.8)$$

Hagen-Poiseuilleovu rovnici použili k vyjádření průtoku permeátu póry

$$Q_o = N^* \cdot \frac{\pi \cdot r_o^4 \cdot p}{8 \cdot \mu \cdot l}. \quad (2.9)$$

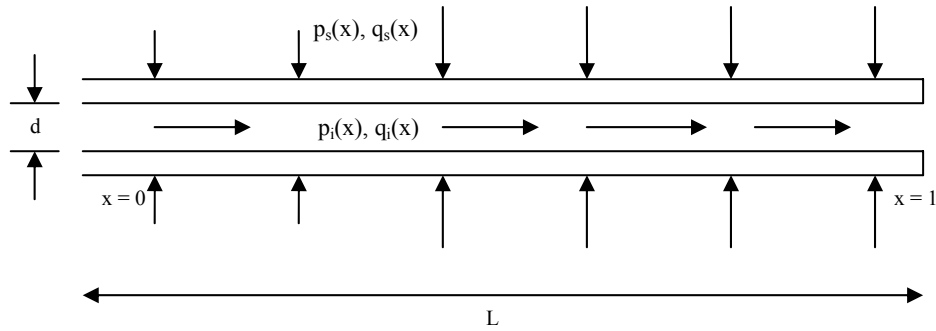
Pro proměnný průtok (a flux) poté platí

$$\frac{Q}{Q_o} = \left(\frac{r}{r_o}\right)^4 = \left(1 - \frac{K_{sb} \cdot V_F}{2}\right)^2 = \frac{J}{J_o}, \quad (2.10)$$

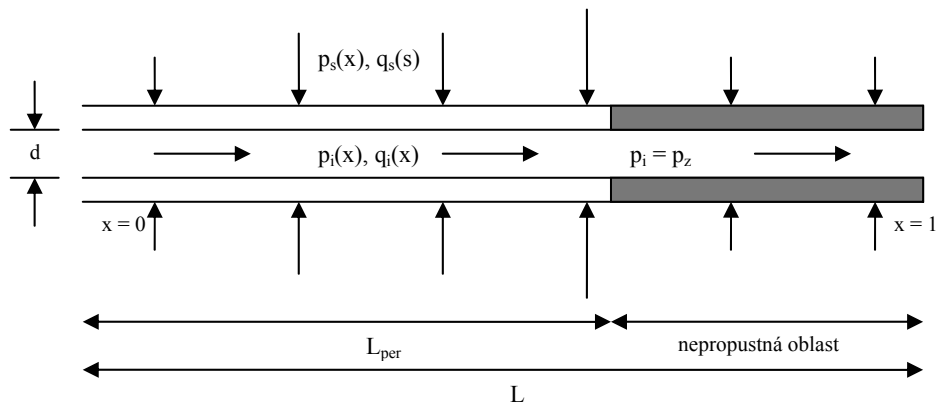
kde Q je průtok, Q_o je počáteční průtok, J je intenzita toku permeátu, J_o je počáteční intenzita toku permeátu, r_o je počáteční poloměr póru a $K_{sb} = 2C/\pi \cdot l \cdot N^* \cdot r_o^2$ je standardní konstanta blokování pórů. Rovnice (2.10) je hlavní modelová rovnice.

Dalším zajímavým modelem mikrofiltrace je model Carrola [6,7]. Carrollův model filtrace vychází z modelu sériově řazených odporů ve spojení s rovnicí Hagen-Poiseuilleovou. Dále uvažuje, že vytvořený koláč může být jak stlačitelný, tak i nestlačitelný. Pomocí svého modelu zkoumá jaký vliv má délka vlákna, průměr vlákna a propustnost membrány na snižování intenzity toku v průběhu filtrace. Vliv těchto parametrů vlákna na filtraci odvodil z rychlosti zanášení vláken během mikrofiltrace.

Pokud je filtrována čistá voda, lze průtok permeátu vyřešit analyticky.



Obrázek 3: Model filtrace ½ dutého vlákna bez zanášení, Carroll



Obrázek 4: Model filtrace ½ dutého vlákna se zanášením, Carroll

Kombinováním příspěvku odporu koláče a tlaku řídicího filtraci vytvořil model snižování toku pro dutá vlákna. Při modelování symetricky od středu k oběma otevřeným koncům uvažoval pouze ½ vlákna. Model sériově řazených odporů bere za základ k výpočtu intenzity toku nástřiku koláčem a membránou q_s

$$\frac{1}{\pi \cdot d} \cdot \frac{dq_s(x, t)}{dx} = \frac{p_b - p_i(x, t)}{r_m + r_d(x, t)}, \quad (2.11)$$

kde r_m je hydraulický odpor membrány a r_d je hydraulický odpor usazených částic, p_b vnější tlak. Průtok permeátu uvnitř vlákna aproximuje Hagen-Poiseuille rovnicí:

$$-\frac{dp_i(x, t)}{dx} = \frac{128\eta}{\pi d^4} \cdot q_i(x, t), \quad (2.12)$$

kde η je viskozita kapaliny. V modelu vychází z předpokladu, že diferenciální změna průtoku permeátu uvnitř dutého vlákna je rovna diferenciální změně průtoku nástřiku membránou

$$\frac{dq_i(x, t)}{dx} = \frac{dq_s(x, t)}{dx}. \quad (2.13)$$

Dosazením rovnice (2.12) a (2.13) do rovnice (2.11) získal obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu:

$$-\frac{d^2 p_i(x, t)}{dx^2} = \frac{128\eta}{d^3} \frac{p_b - p_i(x, t)}{r_m + r_d(x, t)}, \quad (2.14)$$

za okrajových podmínek $p_i(L, t) = 0$, a $dp_i(0, t)/dx = 0$. Profil hmotnosti koláče získává integrací průtoku nástřiku v časovém rozmezí od 0 až do t z rovnice (2.11)

$$\frac{dm_s(x, t)}{dx} = c_b \int_0^t \frac{dq_s(x, \tau)}{dx} d\tau, \quad (2.15)$$

kde c_b je více koncentrovaná fáze částic. Profil tlaku uvnitř vlákna daný rovnicí (2.14) se převede pomocí bezrozměrných vztahů $X = x/L$, $T = t/t_f$ (bezrozměrná doba filtrace), $P(X, T) = 1 - p_i(x, t)/p_b$ a $R(X, T) = r_d(x, t)/r_m$ na bezrozměrný výraz

$$\frac{d^2 P(X, T)}{dX^2} = \frac{1}{N_m} \cdot \frac{P(X, T)}{1 + R(X, T)}. \quad (2.16)$$

Okrajovými podmínkami jsou $P(1, T) = 1$ a $dP(0, T)/dX = 0$; $N_m = (r_m \cdot d^3) / (128 \eta L^2)$ je bezrozměrné číslo, které je určitou charakteristikou membrán z dutých vláken. Odvozuje bezrozměrný tok permeátu, bezrozměrný přírůstek hmoty koláče.

$$Q(T) = \int_0^1 \frac{P(X, T)}{1 + R(X, T)} dX = \int_0^1 Q(X, T) dX \quad (2.17)$$

$$M(T) = \int_0^1 \int_0^T Q(X, \tau) d\tau dX = \int_0^1 M(X, T) dX. \quad (2.18)$$

Hydraulický odpor stlačeného koláče je vyjádřen jako množství usazeného koláče násobené specifickým odporem $\alpha(x, t)$:

$$r_d(x, t) = \frac{\alpha(x, t)}{\pi \cdot d} \cdot \frac{dm_s(x, t)}{dx}. \quad (2.19)$$

Stlačitelnost koláče včleňuje do specifického odporu pomocí koeficientu stlačitelnosti β , který koriguje tlakovou ztrátu, a indexu stlačitelnosti i

$$\alpha(x, t) = \alpha_o \{1 + \beta [p_b - p_s(x, t)]\}^i, \quad (2.20)$$

kde p_s je tlak nástřiku.

Po úpravách získává konečný vztah pro tlakovou ztrátu

$$\begin{aligned}
 P(X,T) - N_m \frac{d^2 P(X,T)}{dX^2} &= \\
 &= N_m \frac{d^2 P(X,T)}{dX^2} N_d \int_0^T N_m \frac{d^2 P(X,\tau)}{dX^2} \cdot d\tau \cdot \left\{ 1 + \beta \cdot p_b \left[P(X,T) - N_m \frac{d^2 P(X,T)}{dX^2} \right] \right\}^i
 \end{aligned} \quad (2.21)$$

s podmínkou $P(1,T) = 1$, a $dP(0,T)/dX = 0$. Kde $N_d = (c_b \cdot t_f \cdot \alpha_o \cdot p_b) / r_m^2$ je bezrozměrné číslo udávající charakteristický odpor koláče. Integrovaný tok permeátu a hmoty koláče jsou dány rovnicemi (2.17) a (2.18). Model řešil numericky metodou konečných diferencí. Tok permeátu a množství koláče jsou pak vypočteny z časového průběhu profilu tlakové ztráty.

Pro filtraci čisté vody existuje analytické řešení a profil toku permeátu je dán rovnicí

$$q_i(x) = k \cdot p_s \cdot d^2 \sqrt{\frac{\pi}{128 \cdot \eta}} \cdot \frac{\sinh\left\{\sqrt{128 \eta / \pi} (k \cdot L' \cdot x / d^2)\right\}}{\cosh\left\{\sqrt{128 \eta / \pi} (k \cdot L' / d^2)\right\}}. \quad (2.22)$$

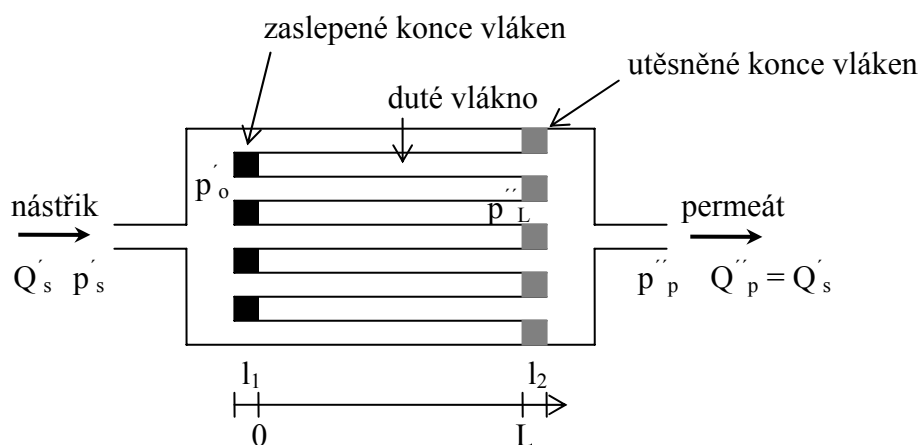
Průtok permeátu je závislý na členu $\sqrt{128 \eta / \pi} (k \cdot L' / d^2)$. Tedy tok ve vláknu závisí na propustnosti membrány, délce vlákna, jeho průměru a viskozitě filtrované kapaliny.

Carroll uvažoval, že při filtraci za konstantní rychlosti je nutné k udržení stálého průtoku zvyšovat tlak, a ten může koláč na membráně stlačovat. Proto do svého modelu zahrnuje stlačitelnost koláče. U mírně stlačitelného koláče tok je nejvyšší zpočátku u otevřeného konce vlákna. Po delším čase se vnější povrch dutého vlákna u otevřeného konce zanese a hlavní intenzita toku se posunuje směrem ke středu vlákna, přičemž intenzita toku pozvolna stále klesá. U velmi stlačitelného koláče je profil toku obdobný jako u mírně stlačitelného koláče. Pouze pokles toku je pomalejší se vzrůstající stlačitelností koláče.

Modelováním dead-end ultrafiltrace a optimalizací uspořádání modulu s dutými vlákny se zabývali Christophe Serra, M. Clinton, P. Moulin [16]. Rozvíjí několik modelů zaměřených na předpověď rychlosti toku permeátu za účelem maximalizace procesu. Ve svých studiích prokázali, že rychlost toku je limitována tlakovou ztrátou, jež se vyvíjí uvnitř vlákna a ta posléze snižuje hnací sílu. V modelu uvažují nejen podélnou ztrátu tlaku uvnitř vláken, ale také podél svazku vláken. Model má analytické řešení, je-li filtrována čistá voda. V případě filtrace suspenze, model uvažuje zanášení membrány ukládáním částic na jejím povrchu. Tok z vnější strany do vnitřní poskytuje větší filtrační povrch a i větší povrch k

ukládání částic, koláč vzniká tenčí a představuje nižší odpor. Tlaková ztráta se vyvíjí pozvolněji.

Dále předpokládají, že rychlost nástřiku a rychlost toku permeátu jsou stejné ($Q'_s = Q''_p = Q_f$). Výstup permeátu a vstup nástřiku jsou v opačných koncích modulu. Vlákná jsou zaslepena ve vstupním konci pryskyřičnou ucpávkou délky l_1 a na výstupním konci jsou otevřená, ale pryskyřičí jsou zapečetěny mezery mezi vlákny. Tato pryskyřičná zátka má délku l_2 . Prostředek vlákna mezi zátkou 1 a 2 je délky L a je plně využíván k filtraci. Axiální osa z začíná v uzavřeném levém konci vlákna a pokračuje až k otevřenému druhému konci. Tlak u prvního zapečetěného konce vlákna je p'_o a tlak uvnitř vlákna na druhém konci je p''_L . Tlak přitékajícího nástřiku je p'_s a tlak vytékajícího permeátu je p''_p . Protože ve svazku nedochází k radiálnímu toku kapaliny, neuvažují radiální tlakovou ztrátu. Předpokládají, že vlákna jsou všechna stejného průměru, neohebná, nedeformovatelná, rovnoměrně rozmístěná a pracují za izotermních podmínek.



Obrázek 5: Schéma modulu Christophe Serry

Axiální ztrátu tlaku ve svazku vypočítávají ze semi-analytického modelu Sparrowa a Loefflera, který byl vytvořen k výpočtu tlakové ztráty laminárního toku neohebnými, rovnoměrně rozmístěnými válečky. Tito autoři uvažují, buď uspořádání dutých vláken ve svazku do trojúhelníku, nebo do čtverce.

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -\frac{8 \cdot \eta \cdot g(\epsilon)}{\pi \cdot \epsilon \cdot d_m^2 \cdot d_h \cdot d_e} \cdot Q', \quad (2.23)$$

kde parametr g je funkcí ϵ , což je porozita svazku vláken (zlomek objemu modulu přístupny pro tok nástřiku) a charakterizuje geometrické uspořádání, p' je tlak působící na svazek zvnějšku, η je viskozita vody, d_e je vnější průměr vlákna, d_m je vnitřní průměr obalu, d_h je hydraulický průměr mezer ve svazku, který je dán vztahem:

$$d_h = \frac{\epsilon \cdot d_e}{d_e / d_m + (1 - \epsilon)}. \quad (2.24)$$

Z bilance hmoty toku stěnou vláken

$$\frac{\partial Q'}{\partial z} = -n \cdot \pi \cdot d_e \cdot J, \quad (2.25)$$

kde J je objemový průtok permeátu skrz vlákno vztažený na jednotku vnějšího povrchu, n je celkový počet vláken ve svazku.

Tlakovou ztrátu uvnitř dutého vlákna aproximovali Hagen-Poiseuille rovnicí:

$$\frac{\partial p''}{\partial z} = -\frac{128\eta}{\pi \cdot d_i^4} Q'', \quad (2.26)$$

kde p'' je tlak ve vlákně, d_i je vnitřní průměr vlákna a Q'' rychlost toku uvnitř vlákna.

Z celkové bilance toku vody

$$Q'_s = Q'_p = Q' + nQ'' = Q_f. \quad (2.27)$$

V pozici $z = 0$ je tlak nad vlákny $p'(0) = p'_o$ a jakmile jsou vlákna zanešená, průtok uvnitř vlákna je nulový: $Q'' = 0$. V pozici $z = L$ je tlak uvnitř vlákna je $p''(L) = p''_L$. Je-li vytvořený koláč na povrchu vláken již velký, rychlost toku po povrchu vláken je nulová, $Q' = 0$.

Opět vyšli z představy modelu sériově řazených odporů při výpočtu objemového průtoku permeátu stěnou membrány a koláčem. Objemový průtok filtrátu v jakékoli pozici je dán vztahem

$$J = \frac{p' - p''}{\eta \cdot (R_m + R_d)}, \quad (2.28)$$

kde R_m je hydraulický odpor čisté membrány, R_d je hydraulický odpor vytvořeného filtračního koláče. Odpor koláče $R_d = \alpha \cdot m$, kde α je specifický odpor (m/kg). Hydraulický odpor membrány dávají do souvislosti s hydraulickým koeficientem propustnosti L_p následujícím vztahem $R_m = (\eta \cdot L_p)^{-1}$.

Zatímco R_m je hodnota známá, téměř konstantní, L_p je hodnota teplotně závislá. Opět je zde uvažována stlačitelnost koláče stejným způsobem jako v práci Carrola. Pro nestlačitelný koláč, specifický odpor je konstantní, zatímco pro stlačitelný koláč α vykazuje lineární vzrůst s tlakovou ztrátou v koláči podle vztahu

$$\alpha = \alpha^o (1 + \beta \delta p_d), \quad (2.29)$$

kde β je stlačitelnost koláče (Pa^{-1}). Tlaková ztráta v koláči je definována

$$\delta p_d = (p' - p'') \frac{R_d}{R_m + R_d}. \quad (2.30)$$

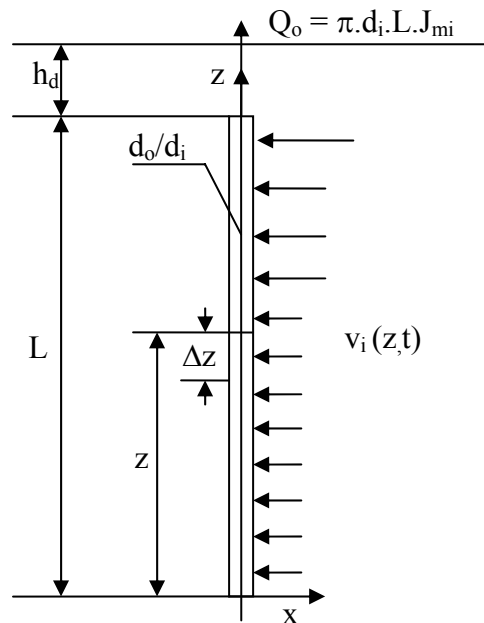
Finální vztah pro usazování koláče na vláknech je dán touto rovnicí

$$\frac{\partial m}{\partial t} = c_s \cdot J \frac{\phi_d}{\phi_d - \phi_s} \approx c_s \cdot J, \quad (2.31)$$

kde c_s je koncentrace tuhých částic v nástřiku, ϕ_d je objem frakce tuhých částic v nánosu a ϕ_s je objem frakce tuhých částic v nastříkované suspenzi. Pro zředěný suspenzní nástřik uvažují přibližný výraz na pravé straně rovnice. Model byl řešen numericky.

Matematickým modelováním dead-end mikrofiltrace za konstantního toku se zabývali i Chang, Fane a Waite [15]. Matematický model vytvořili pro filtraci za konstantního toku dutým vláknem kombinováním Hagen-Poiseuille rovnice, standardní rovnice filtrace a teorie sériově řazených odporů k výpočtu toku filtrátu koláčem a stěnou membrány. Odpor koláče dávají do souvislosti s jeho strukturou. Strukturu koláče určují aplikováním bilance rovnováhy sil působících na částičky ve vrstvách koláče v kombinaci s předpokladem, že stabilní vrstva vzniká tehdy, má-li pravidelnou, geometricky souměrnou podobu s co nejnižší

energií. V modelu předpokládají částčky o stejné velikosti. Hlavní rozdíl mezi tímto modelem a modelem Carrola a Serry je ten, že přímá korelace mezi odporem koláče a koloidními vlastnostmi usazených částic je začleněna do modelu závislosti interakcí částice-částice.



Obrázek 6: Schéma jednoho ponořeného dutého vlákna, Chang

Modelové vlákno je uloženo vertikálně do zásobní nádrže a je ponořeno do hloubky h_d . Vlákno charakterizuje vnitřní/vnější průměr d_i/d_o a jeho délka L . Rychlost konstantního průtoku permeátu je $Q_o = \pi \cdot d_i \cdot L \cdot J_{mi}$, kde J_{mi} je průměrná intenzita toku permeátu, z je délková souřadnice měřená od zaslepeného konce vlákna a $v_i(z, t)$ představuje radiální rychlost v ose vlákna uvnitř rozhraní povrch-kapalina závislou na souřadnici z a čase. Tlak uvnitř vlákna v ose z je funkcí času a může být vyjádřen jako součet hydrostatického tlaku a tlakové ztráty

$$P_i(z, t) = p_i(z, t) + \rho \cdot g(h_d + L - z), \quad (2.32)$$

kde p_i je tlaková ztráta rozvinutého toku kapaliny.

Tok permeátu uvnitř opět popisují Hagen-Poiseuille rovnicí:

$$\frac{\partial p_i(z, t)}{\partial z} = -\frac{128\mu}{\pi \cdot d_i^4} Q(z, t), \quad (2.33)$$

kde μ je viskozita kapaliny a $Q(z,t)$ je rychlost toku permeátu skrz vlákno v ose z a v čase t . V modelu nesmí chybět bilance hmoty, z níž vypočítávají průtok permeátu vláknem

$$Q(z,t) = -\int_0^z v_i(z,t) \cdot \pi \cdot d_i \cdot dz . \quad (2.34)$$

Pro $z = L$, rovnice udává průměrný tok permeátu

$$Q_o = -\int_0^L v_i(z,t) \cdot \pi \cdot d_i \cdot dz = J_{mi} \cdot \pi \cdot d_i \cdot L \quad (2.35)$$

K filtraci je využívána střední hodnota povrchu vlákna, jež je vypočtena z vnitřní povrchové plochy dutého vlákna vyjádřené vztahem $A_i = 2\pi \cdot r_i \cdot L$ a vnější povrchové plochy dané vztahem $A_o(z,t) = \int 2\pi(r_o + L_c(z,t))dz$, kde L_c je tloušťka koláče

$$A_{mf}(t) = \pi \int_0^L (r_i + r_o + L_c(z,t)) dz . \quad (2.36)$$

Průměrný flux v místě z a v čase t vyjadřují modelem sériově řazených odporů

$$J_{mf}(z,t) = \frac{\Delta P(z,t)}{\mu(R_{mf} + R_c(z,t))} = \frac{-p_i(z,t)}{\mu(R_{mf} + R_c(z,t))} , \quad (2.37)$$

kde R_{mf} je odpor membrány a $R_c(z,t)$ je odpor koláče. Neobvykle je v této práci uvažována i radiální rychlost permeátu dutým vláknem, která je definována vztahem

$$v_i(z,t) = -J_{mf} \frac{r_i + r_o + L_c(z,t)}{2r_i} = -J_{mf} \cdot \beta_{zt} = \frac{p_i(z,t) \beta_{zt}}{\mu(R_{mf} + R_c(z,t))} . \quad (2.38)$$

Základní rovnicí modelu je rovnice (2.33). Model byl řešen numerickou metodou konečných diferencí.

Zajímavou prací, která spojuje model cross-flow filtrace a dead-end filtrace je práce Renbi Baie, H.F. Leowa [14]. Tato studie zkoumá mikrofiltraci polydisperzní suspenze cylindrickou membránou a následně membránou z dutých vláken. Tok permeátu vyjadřují upraveným modelem sériově řazených odporů. Částice v toku permeátu rozdělují na ty, které

nemohou prostoupit skrz stěnu membrány a na ty, které mohou. Zlomek částic, které mohou prostoupit skrz stěnu, dále rozdělují na ty, které zůstanou na povrchu dutých vláken a na ty, které prostoupí skrz dutá vlákna a nachází se v toku permeátu. Na závěr získávají rovnice pro velikost částic, které se usadí na stěně membrán či nikoliv.

2.3.1. Shrnutí

Matematické modelování mikrofiltrace vychází u všech autorů z vyjádření toku kapaliny uvnitř dutého vlákna pomocí Hagen-Poiseuille rovnice. K vyjádření proudění kapaliny koláčem a stěnou membrány využívají Darcyho zákon (model sériově řazených odporů) a k vyjádření hmoty usazených částic na stěně membrány bilanci hmoty v diferenciálním tvaru. Mírně odlišnou prací je práce Hwang-Mook Leeho. Ve své práci uvažuje usazování částic v přímo v pórech.

Analytické řešení je možné pouze tehdy, uvažuje-li se ideální případ, kdy nedochází k zanášení dutých vláken. V modelu není uvažována bilance hmoty usazeného koláče.

Pokud však je filtrována suspenze, není již možné analytické řešení a používají se numerické metody. Používána je numerická metoda konečných diferencí k řešení rovnice pro ztrátu tlaku v dutém vláknu a pro rovnice vyjadřující průtok permeátu ve vláknu. K vyřešení časové závislosti usazeného koláče na membráně Serra použil Runge-Kuttovu metodu.

3 Matematický model koláčové dead-end filtrace

3.1. Předpoklady

- modelování osamocené homogenního vlákna po celé délce (modelování svazku vláken by bylo složitější vlivem vzájemného ovlivňování samotných vláken)
- suspenze v newtonské kapalině
- nestlačitelný koláč

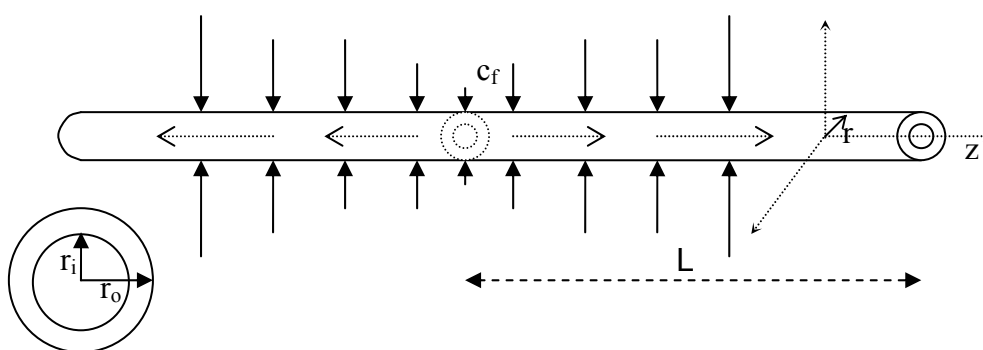
Model se skládá ze tří částí:

- a. proudění filtrátu koláčem a s tím spojený růst koláče
- b. proudění filtrátu porézní stěnou vlákna
- c. proudění filtrátu dutým vnitřkem vlákna

Proudění suspenze vně koláče je pomalé, a proto jsou tlakové gradienty zanedbatelné a suspenzi lze považovat za nepohyblivou.

3.2. Geometrie vlákna

Vlákno má vnitřní poloměr r_i a vnější poloměr r_o . Kapalina vtéká zvenčí dovnitř vlákna a poté odtéká k bližšímu konci vlákna. V modelu stačí tedy uvažovat jednu polovinu vlákna (symetrie). Délka poloviny vlákna je L , axiální vzdálenost je měřena od středu vlákna.



Obrázek 7: Schéma toku tekutiny dutým vláknem symetricky od středu k oběma otevřeným koncům

3.3. Růst koláče

Koncentrace suspenze (nástříku) je c_f a je vyjádřena v kilogramech tuhé fáze na jednotku objemu filtrátu. Porozita koláče je ε , hustota tuhé fáze ρ_s . Bilancován byl přírůstek hmotnosti tuhé fáze v koláči na délce dz vlákna za dobu $d\tau$. Za tuto dobu se poloměr vnějšího povrchu koláče r_c zvýší o dr_c .

$$dA_c \cdot dz \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \rho_s = J_l \cdot dz \cdot d\tau \cdot c_f, \quad (3.1)$$

kde J_l je lokální (na souřadnici z závislá) hodnota průtoku filtrátu na jednotku délky vlákna ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$). Z bilance (3.1) je získána parciální derivace, protože A_c závisí na čase τ , ale i na vzdálenosti z od středu vlákna,

$$\frac{\partial A_c}{\partial \tau} = \frac{J_l \cdot c_f}{(1 - \varepsilon) \rho_s}. \quad (3.2)$$

3.4. Proudění kapaliny koláčem (odpor vrstvy koláče)

Proudění porézní vrstvou koláče je popsáno Darcyho zákonem:

$$u_r = -\frac{J_l}{2\pi r} = -\frac{k_c}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (3.3)$$

kde u_r je mimovrstvová rychlost kapaliny v daném místě koláče (r, z), k_c je permeabilita koláče a je konstantní, μ je dynamická viskozita kapaliny (filtrátu). $\frac{\partial p}{\partial r}$ je gradient tlaku v daném místě koláče. Separací proměnných bylo získáno

$$J_l \frac{dr}{r} = \frac{2\pi k_c}{\mu} dp. \quad (3.4)$$

Integrací od vnějšího povrchu vlákna (r_o) až po vnější povrch koláče (r_c) bylo získáno

$$J_l \ln\left(\frac{r_c}{r_o}\right) = \frac{2\pi k_c}{\mu} (p_c - p_o). \quad (3.5)$$

Po zavedení celkového odporu koláče

$$R_c = \frac{\ln\left(\frac{r_c}{r_o}\right)}{2\pi k_c} = \frac{\ln\left(\frac{A_c}{A_o}\right)}{4\pi k_c}. \quad (3.6)$$

Poté průtok filtrátu na jednotku délky vlákna

$$J_l = \frac{p_c - p_o}{\mu R_c}. \quad (3.7)$$

3.5. Proudění kapaliny porézní stěnou vlákna (odpor stěny vlákna)

Pro průtok filtrátu J_l porézní stěnou vlákna lze psát vztah analogický vztahu (3.7)

$$J_l = \frac{p_o - p_i}{\mu R_m}, \quad (3.8)$$

kde p_i je tlak uvnitř dutého vlákna (závislý na čase τ a souřadnici z , ale nezávislý na r). R_m je celkový odpor porézní stěny vlákna a je po celé délce vlákna neproměnný. Kombinací vztahů (3.7) a (3.8) dostaneme pro průtok permeátu na jednotku délky

$$J_l = \frac{p_c - p_i}{\mu(R_m + R_c)}. \quad (3.9)$$

Přitom p_c je tlak na vnějším povrchu koláče (na nástřikové straně), který je po délce konstantní (u vodorovného vlákna).

3.6. Tok kapaliny dutým vnitřkem vlákna

Přírůstek objemového průtoku filtrátu na délce dz je vyjádřen následovně

$$J_l \cdot dz = dQ, \quad J_l = \frac{\partial Q}{\partial z}. \quad (3.10)$$

Protože filtrát protéká z vnější strany dovnitř a v dutině vlákna teče v kladném směru z , tlakovou ztrátu uvnitř vlákna vyjádříme zjednodušeně podle Hagen-Poiseuilleova zákona pro tok trubkou kruhového průřezu

$$Q = -\frac{\pi d_i^4}{128\mu} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial z}, \quad (3.11)$$

p_i závisí na z a na čase τ , proto je ve vztahu (3.11) parciální derivace. Kombinací (3.10) a (3.11) je získán vztah pro výpočet lokálního průtoku filtrátu na jednotku délky vlákna,

$$J_l = -\frac{\pi d_i^4}{128\mu} \frac{\partial^2 p_i}{\partial z^2}, \quad (3.12)$$

kde $d_i = 2 \cdot r_i$ je vnitřní průměr vlákna.

3.7. Výsledný matematický model v rozměrném tvaru

Rovnice tvořící matematický model byly získány z rovnic (3.6), (3.9), (3.12) a (3.2):

- pro odpor koláče (rovnice totožná s rovnicí (3.6))

$$R_c = \frac{\ln\left(\frac{A_c}{A_o}\right)}{4\pi k_c} \quad (3.13)$$

- pro tlak (kombinací rovnic (3.9) a (3.12))

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial z^2} = -\frac{128}{\pi d_i^4} \frac{p_c - p_i}{(R_m + R_c)} \quad (3.14)$$

- pro průtok filtrátu na jednotku délky (rovnice totožná s rovnicí (3.9))

$$J_l = \frac{p_c - p_i}{\mu(R_m + R_c)} \quad (3.15)$$

- pro poloměr vnějšího povrchu koláče (rovnice totožná s rovnicí (3.2))

$$\frac{\partial A_c}{\partial \tau} = \frac{J_l \cdot c_f}{(1 - \varepsilon)\rho_s} \quad (3.16)$$

Matematický model daný rovnicemi (3.13) až (3.16) je doplněn počátečními a okrajovými podmínkami.

Na počátku ($\tau = 0$) je tloušťka koláče nulová ($A_c = A_o$) a tedy i odpor koláče je nulový ($R_c = 0$) a průtok J_l závisí jen na odporu stěny vlákna. Rovnice (3.14) vyžaduje dvě okrajové podmínky.

První z nich vychází ze symetrie toku vzhledem ke středu vlákna ($z = 0$). Kapalina v každé polovině teče k bližšímu konci a tedy ve středu vlákna $Q(z = 0) = 0$ a z rovnice (3.11) pak plyne

$$\frac{\partial p_i}{\partial z}(z = 0) = 0 \quad (3.17)$$

Druhá okrajová podmínka pro rovnicí (3.14) závisí na způsobu provádění filtrace: za konstantní rychlosti filtrace nebo za konstantního tlakového rozdílu.

Filtrace za konstantní rychlosti filtrace

Při tomto způsobu provádění filtrace je zadáný a s časem neproměnný výtok filtrátu na konci vlákna $Q(z = L) = Q_L$. S rostoucí tloušťkou koláče přitom roste hnací síla procesu, rozdíl tlaků $p_c - p_{iL}$. Tento způsob filtrace lze realizovat tak, že buďto odsáváme objemovým čerpadlem filtrát na straně výtoku. Přitom jsme omezeni minimální možnou hodnotou podtlaku na sání čerpadla, která je teoreticky dána tenzí par filtrátu a prakticky též konstrukcí (těsností čerpadla). Nebo v druhém případě vtlačujeme suspenzi objemovým čerpadlem do uzavřeného prostoru, ve kterém je vlákno umístěno. Tady by bylo možné dosáhnout větší hnací síly (není tu omezení dané tenzí par, ale omezení dané konstrukcí čerpadla zůstává).

Filtrace za konstantního tlakového rozdílu

Při tomto způsobu provádění filtrace je zadáný a konstantní tlak $p_{iL} = p_i(z = L)$ a tlak p_c . S časem roste tloušťka koláče i jeho odpor a tedy klesá výtok filtrátu Q_L z vlákna.

3.8. Postup řešení matematického modelu

Zadávanými parametry modelu jsou $c_f, \mu, \varepsilon, \rho_s, k_c, d_i, A_o, R_m$.

K tomu ještě přistupují v závislosti na způsobu filtrace:

- za konstantního tlakového rozdílu: p_c, p_{iL}
- za konstantní rychlosti filtrace: Q_L, p_c nebo Q_L, p_{iL}

Rovnice matematického modelu vzhledem k jejich nelinearitě nebude možné řešit analyticky, ale bude nutné použít vhodnou numerickou metodu (např. metodu sítí). Soustava parciálních diferenciálních rovnic je v podstatě parabolická, tzn. že bude hledáno řešení postupně od jedné časové vrstvy k následující. Hledané veličiny jsou p_i, J_i, R_c, A_c . Všechny jsou funkcí z a τ .

3.8.1. Strategie řešení při filtraci za konstantního tlakového rozdílu

Známé jsou hodnoty průřezu A_c v nějakém čase τ pro všechny hodnoty z (axiální profil A_c) a chceme vypočítat profily ostatních veličin v tomto čase a profil A_c v čase $\tau + d\tau$.

Z rovnice (3.13) budou vypočteny hodnoty odporu koláče R_c .

Z rovnice (3.14) s okrajovými podmínkami $\partial p_i / \partial z(z = 0) = 0$ a $p_i(z = L) = p_{iL}$ je získán profil tlaku.

Z rovnice (3.15) dostaneme J_i .

Z rovnice (3.16) dostaneme nový profil A_c .

Takto popsáný postup je vlastně explicitní schéma výpočtu. Pro zvýšení stability výpočtu se může ukázat potřebné použít schéma implicitního nebo Crank-Nicholsonova typu.

3.8.2. Strategie řešení při filtraci za konstantní rychlosti filtrace

Pro tento způsob provádění filtrace není známá jedna z hodnot p_{iL} a p_c , ale je známá hodnota Q_L . Může být použit postup výpočtu jako v případě filtrace za konstantního tlakového rozdílu s tím, že pro každou časovou vrstvu je hledána taková hodnota p_{iL} při známém p_c (nebo hodnota p_c při známém p_{iL}), aby vypočtený výtok z vlákna

$$Q(z = L) = \int_0^L J_l \cdot dz \quad (3.18)$$

byl roven zadané hodnotě Q_L . Podrobnosti jsou uvedeny u modelu v bezrozměrném tvaru.

3.9. Matematický model v bezrozměrném tvaru pro filtraci za konst. tlak. rozdílu

Matematický model může být výhodné převést do bezrozměrného tvaru. Tím se obvykle sníží počet parametrů určujících chování modelu.

Zavedeny byly bezrozměrné veličiny

$$z_B = z / L \quad (3.19)$$

$$\tau_B = \frac{c_f \cdot (p_c - p_{iL})}{\mu \cdot R_m \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \rho_s \cdot A_o} \cdot \tau \quad (3.20)$$

$$p_{iB} = \frac{p_c - p_i}{p_c - p_{iL}} \quad (3.21)$$

$$A_{cB} = A_c / A_o \quad (3.22)$$

$$R_{cB} = R_c / R_m \quad (3.23)$$

$$J_{lB} = \frac{\mu \cdot R_m}{p_c - p_{iL}} \cdot J_l \quad (3.24)$$

Vyjádří-li se ze vztahů (3.19) až (3.24) rozměrové veličiny pomocí bezrozměrných a dosadí-li se do modelu (3.13) až (3.16) jsou získány rovnice

$$R_{cB} = \frac{\ln A_{cB}}{4\pi k_c R_m} = \alpha \cdot \ln A_{cB} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial^2 p_{iB}}{\partial z_B^2} = \frac{128L^2}{\pi d_i^4 R_m} \frac{p_{iB}}{1 + R_{cB}} = \beta \frac{p_{iB}}{1 + R_{cB}} \quad (3.26)$$

$$J_{iB} = \frac{p_{iB}}{1 + R_{cB}} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial A_{cB}}{\partial \tau_B} = J_{iB} \quad (3.28)$$

S počáteční podmínkou $r_{cB}(\tau_B = 0)$ a okrajovými podmínkami $p_{iB}(z_B = 1) = 1$,

$$\frac{\partial p_{iB}}{\partial z}(z_B = 0) = 0. \quad (3.29)$$

Model v bezrozměrném tvaru obsahuje pouze dva parametry

$$\alpha = \frac{1}{4\pi k_c R_m}, \quad \beta = \frac{128L^2}{\pi d_i^4 R_m} \quad (3.30a,b)$$

3.10. Matematický model v bezrozměrném tvaru pro filtraci za konst. rychlosti

Bezrozměrné veličiny z_B , p_{iB} , A_{cB} a R_{cB} byly zavedeny vztahy (3.19), (3.21)-(3.23) jako v předchozí části. Bezrozměrné veličiny τ_B a J_{iB} byly zavedeny odlišným způsobem

$$\tau_B = \frac{c_f Q_L}{LA_o \cdot (1 - \varepsilon) \rho_s} \cdot \tau \quad (3.31)$$

$$J_{iB} = \frac{L}{Q_L} J_l \quad (3.32)$$

Bezrozměrný tvar modelu pak zahrnuje rovnice

$$R_{cB} = \frac{\ln A_{cB}}{4\pi k_c R_m} = \alpha \ln A_{cB} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2 p_{iB}}{\partial z_B^2} = \frac{128L^2}{\pi d_i^4 R_m} \frac{p_{iB}}{1 + R_{cB}} = \beta \frac{p_{iB}}{1 + R_{cB}} \quad (3.34)$$

$$J_{iB} = \frac{L(p_c - p_{iL})}{\mu R_m Q_L} \frac{p_{iB}}{1 + R_{cB}} = \gamma \frac{p_{iB}}{1 + R_{cB}} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial A_{cB}}{\partial \tau_B} = J_{iB} \quad (3.36)$$

S počáteční podmínkou $r_{cB}(\tau_B = 0) = 1$ a okrajovými podmínkami $p_{iB}(z_B = 1) = 1$,
 $\frac{\partial p_{iB}}{\partial z_B}(z_B = 0) = 0$.

Od předchozí části se liší pouze rovnice (3.35), která obsahuje bezrozměrnou veličinu

$$\gamma = \frac{L(p_c - p_{iL})}{\mu R_m Q_L}. \quad (3.37)$$

Hodnota γ v každém okamžiku je určována z podmínky $\int_0^L J_I \cdot dz = Q_L$ a v bezrozměrném tvaru

$$\int_0^1 J_{IB} \cdot dz_B = 1. \quad (3.38)$$

Z toho, po dosazení z (3.35), dostaneme

$$\gamma = \frac{1}{\int_0^1 \frac{p_{iB}}{1 + R_{cB}} dz_B}. \quad (3.39)$$

V každé časové vrstvě na základě známého profilu A_{cB} je spočteno R_{cB} z rovnice (3.33), potom p_{iB} z rovnice (3.34) s okrajovými podmínkami (3.29), γ z rovnice (3.39), J_{IB} z rovnice (3.35) a nakonec nový profil A_{cB} z rovnice (3.36).

Model v bezrozměrném tvaru opět obsahuje pouze dva parametry α , β (3.30a,b) (veličina γ není parametr, počítá se a je funkcí času).

3.11. Numerické řešení matematického modelu

Řešení lze provést v Excelu nebo Pascalu (Delphi).

Vstupními parametry jsou α , β . K výpočtům je nutné zvolit přírůstky h_z , h_τ (kroky) proměnných z_B , τ_B . Krok $h_z = 1/N_z$ je určen tak, aby bezrozměrná délka vlákna byla rozdělena na celý počet (N_z) stejných dílků. V dalším textu určují indexy (i , j) v závorce polohu uzlu v dvojrozměrné síti. Index (i) patří k délkové souřadnici, index (j) k časové souřadnici. Index (i) se mění od 0 do N_z , v čase $\tau_B = 0$ je (j) = 0.

Diskretizací parciální diferenciální rovnice parabolického typu $\frac{\partial^2 p_{iB}}{\partial z_B^2} = \beta \frac{p_{iB}}{1 + R_{cB}}$
 (3.26) (resp. (3.34)) je získána rovnice

$$\frac{p_{iB}^{(i-1,j)} - 2p_{iB}^{(i,j)} + p_{iB}^{(i+1,j)}}{h_z^2} = \beta \frac{p_{iB}^{(i,j)}}{1 + R_{cB}^{(i,j)}} \quad (3.40)$$

K diskretizaci byla použita náhrada druhé derivace centrální formulí.

$$\frac{\partial^2 p_{iB}}{\partial z_B^2} \cong \frac{p_{iB}^{(i-1,j)} - 2p_{iB}^{(i,j)} + p_{iB}^{(i+1,j)}}{h_z^2} \quad (3.41)$$

Rovnice (3.40) byla upravena na tvar vhodný pro iterační způsob řešení:

$$p_{iB}^{(i,j)} = \frac{(p_{iB}^{(i-1,j)} + p_{iB}^{(i+1,j)})}{2 + \frac{\beta h_z^2}{1 + R_{cB}^{(i,j)}}} \quad (i = 1, \dots, N_z - 1) \quad (3.42)$$

$$p_{iB}^{(0,j)} = \frac{2p_{iB}^{(1,j)}}{2 + \frac{\beta h_z^2}{1 + R_{cB}^{(0,j)}}} \quad (i = 0) \quad (3.43)$$

Diskretizací rovnice (3.28) (resp.(3.36)) dostaneme

$$A_{cB}^{(i,j+1)} = A_{cB}^{(i,j)} + \frac{h_\tau}{2} [J_{iB}^{(i,j)} + J_{iB}^{(i,j+1)}], \quad (3.44)$$

což je náhrada Crank-Nicholsonova typu.

3.11.1. Postup výpočtu

Je předpokládáno, že na základě předchozího řešení jsou známy hodnoty $A_{cB}^{(i,j)}$ v časové vrstvě určené indexem (j) a jsou dále dopočítávány veličiny, $R_{cB}^{(i,j)}$, $p_{iB}^{(i,j)}$, $J_{iB}^{(i,j)}$, a hodnoty $A_{cB}^{(i,j+1)}$ ve vrstvě následující s indexem ($j+1$).

1. známe $A_{cB}^{(i,j)}$
2. $R_{cB}^{(i,j)} = \alpha \ln A_{cB}^{(i,j)} \quad (i = 0, \dots, N_z)$
3. $p_{iB}^{(i,j)}$ je řešeno iteračně pomocí vztahů (3.42), (3.43) a $p_{iB}^{(N_z,j)} = 1$
4. $\gamma = \frac{1}{\int_0^1 \frac{p_{iB}}{1 + R_{cB}} dz_B}$ v případě provádění filtrace za konstantní rychlosti
 $\gamma = 1$ v případě provádění filtrace za konstantního tlakového rozdílu

pozn.: Integrál se vypočte např. Simpsonovým pravidlem (N_z potom musí být sudé)

$$\int_0^1 \frac{p_{iB}}{1 + R_{cB}} dz_B \approx \frac{h_z}{3} \sum_{i=0}^{N_z} c_i \frac{p_{iB}^{(i,j)}}{1 + R_{cB}^{(i,j)}},$$

kde $c_i = 1$ pro $i = 0$ a $i = N_z$,
 $c_i = 4$ pro $i = 1, 3, \dots, N_z-1$,
 $c_i = 2$ pro $i = 2, 4, \dots, N_z-2$.

$$5. \quad J_{iB}^{(i,j)} = \gamma \frac{p_{iB}^{(i,j)}}{1 + R_{cB}^{(i,j)}} \quad (i = 0, \dots, N_z)$$

$$6. \quad A_{cB}^{(i,j+1)} = A_{cB}^{(i,j)} + \frac{h_\tau}{2} [J_{iB}^{(i,j)} + J_{iB}^{(i,j+1)}] \quad (i = 0, \dots, N_z),$$

přítom $J_{iB}^{(i,j+1)}$ se počítá ze vztahů 2. až 4. pro index $(j+1)$.

3.11.2. Další počítané veličiny

Pokles objemové filtrační rychlosti Q_L s časem při filtraci za konstantního tlakového rozdílu:

$$Q_L = \int_0^L J_1 \cdot dz = \frac{(p_c - p_{iL})L}{\mu \cdot R_m} \int_0^1 J_{iB} \cdot dz_B = \frac{(p_c - p_{iL})L}{\mu \cdot R_m} \int_0^1 \frac{p_{iB}}{1 + R_{cB}} \cdot dz_B \quad (3.45)$$

$$\frac{Q_L}{Q_{Lo}} = \frac{\left[\int_0^1 \frac{p_{iB}}{1 + R_{cB}} \cdot dz_B \right]_\tau}{\left[\int_0^1 p_{iB} \cdot dz_B \right]_{\tau=0}} \quad (3.46)$$

Růst hnačí síly $p_c - p_{iL}$ s časem při filtraci za konstantní rychlosti filtrace:

$$\frac{(p_c - p_{iL})_\tau}{(p_c - p_{iL})_{\tau=0}} = \frac{\gamma}{\gamma_o} = \frac{\left[\int_0^1 p_{iB} \cdot dz_B \right]_{\tau=0}}{\left[\int_0^1 \frac{p_{iB}}{1 + R_{cB}} \cdot dz_B \right]_\tau} \quad (3.47)$$

3.11.3. Výpočet celkového objemu filtrátu

Celkový objem filtrátu v čase τ dostaneme integrací výtoku z vlákna

$$V = \int_0^\tau Q_L \cdot d\tau = \int_0^\tau \int_0^L J_1 \cdot dz \cdot d\tau \quad (3.48)$$

V případě konstantní rychlosti filtrace nezávisí Q_L na čase. Rozměrový čas můžeme dále vyjádřit pomocí bezrozměrného s použitím vztahu (3.31)

$$V = Q_L \cdot \tau = Q_L \cdot \frac{L \cdot A_o \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \rho_s}{c_f \cdot Q_L} \cdot \tau_B, \quad V_B = \frac{V \cdot c_f}{L \cdot A_o \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \rho_s} = \tau_B \quad (3.49)$$

V tomto případě je tedy bezrozměrný objem roven bezrozměrnému času.

V případě konstantního tlakového rozdílu

$$V = \int_0^{\tau_B} \int_0^1 \frac{p_c - p_{iL}}{\mu R_m} \cdot J_{iB} \cdot L \cdot dz_B \cdot \frac{\mu R_m \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \rho_s \cdot A_o}{c_f \cdot (p_c - p_{iL})} \cdot d\tau_B \quad (3.50)$$

Po částečném vykrácení a převedení zbývajících členů na levou stranu dostaneme

$$V_B = \frac{V \cdot c_f}{(1 - \varepsilon) \cdot \rho_s \cdot A_o \cdot L} = \int_0^{\tau_B} \int_0^1 J_{iB} \cdot dz_B \cdot d\tau_B \quad (3.51)$$

Integrály v posledním vztahu lze pro obě souřadnice počítat lichoběžníkovým pravidlem, které je stejného řádu chyby (druhého řádu) jako Crank-Nicholsonovo schéma.

3.12. Numerické experimenty

3.12.1. Porovnání tvaru profilů pro oba režimy filtrace při stejném nafiltrovaném objemu

Při stejném nafiltrovaném objemu je stejná i celková hmotnost koláče. Proto byly porovnávány oba režimy filtrace a profily veličin A_{cB} , R_{cB} a p_{iB} (jestli mají stejný tvar).

Zvolenému objemu V odpovídá bezrozměrný objem $V_B = \frac{V \cdot c_f}{L \cdot A_o \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \rho_s}$.

Pro konstantní rychlost filtrace $\tau_{B(KRF)} = V_B$.

Pro konstantní tlakový rozdíl dostáváme $V_B = \int_0^{\tau_{B(KTR)}} \int_0^1 J_{iB} \cdot dz_B \cdot d\tau_B$.

Pro zvolené V_B byly určeny bezrozměrné časy filtrace $\tau_{B(KRF)}$ a $\tau_{B(KTR)}$ a pro tyto bezrozměrné časy byly porovnány vypočtené profily.

Zvolené V_B : $V_B = 2$

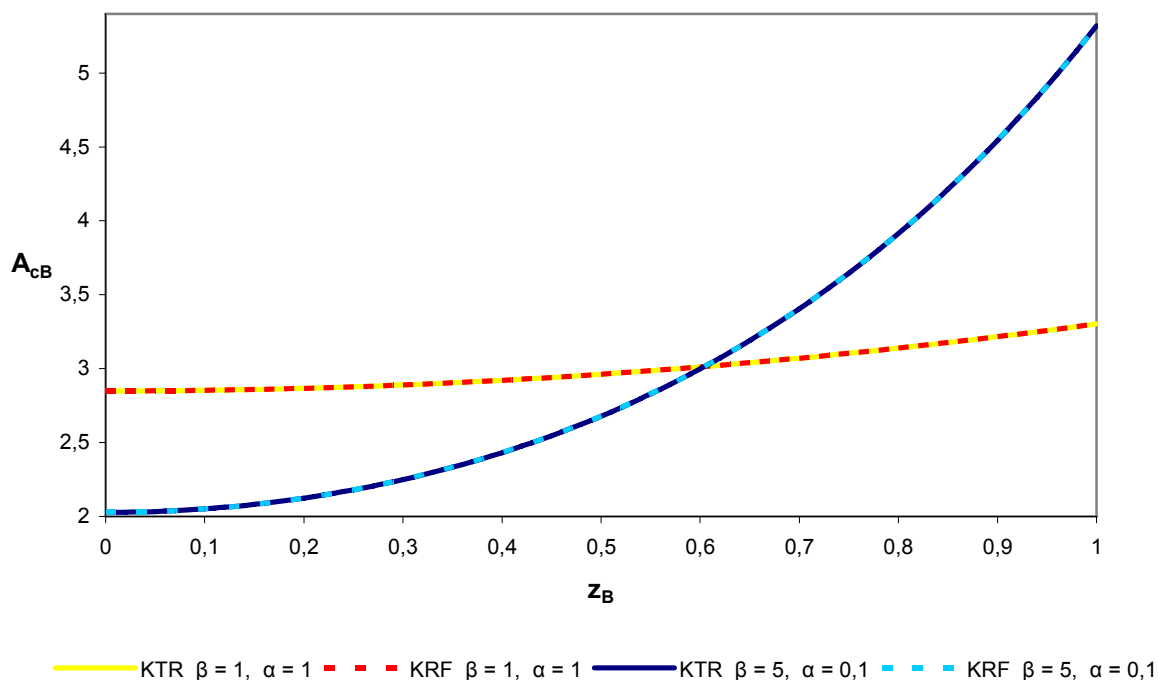
Tabulka 1: Přehled zvolených kombinací α, β k porovnání profilů A_{cB}, R_{cB}, p_{iB} pro oba způsoby filtrace

V_B	α	β	$h_z=1/N_z$	h_τ	$\tau_{B(KRF)}$	$\tau_{B(KTR)}$
2	1	1	0,01	0,1		3,945
2	1	1	0,01	0,1	2	
2	0,1	5	0,01	0,1		4,776
2	0,1	5	0,01	0,1	2	

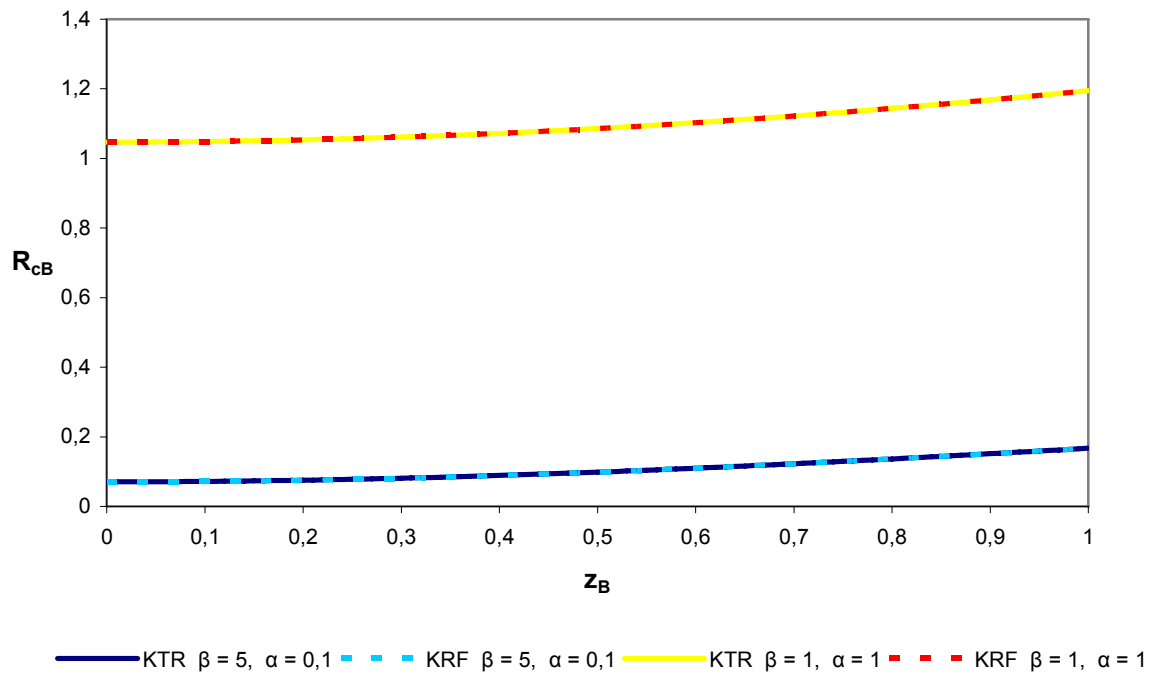
Tabulka 2: Přehled zvolených kombinací α, β k porovnání profilů normovaného fluxu pro oba způsoby filtrace

V_B	α	β	h_z	h_τ	$\tau_{B(KRF)}$	$\tau_{B(KTR)}$
2	10	1	0,016667	0,1		15,615
2	10	1	0,016667	0,1	2	
2	1	5	0,016667	0,1		6,257
2	1	5	0,016667	0,1	2	

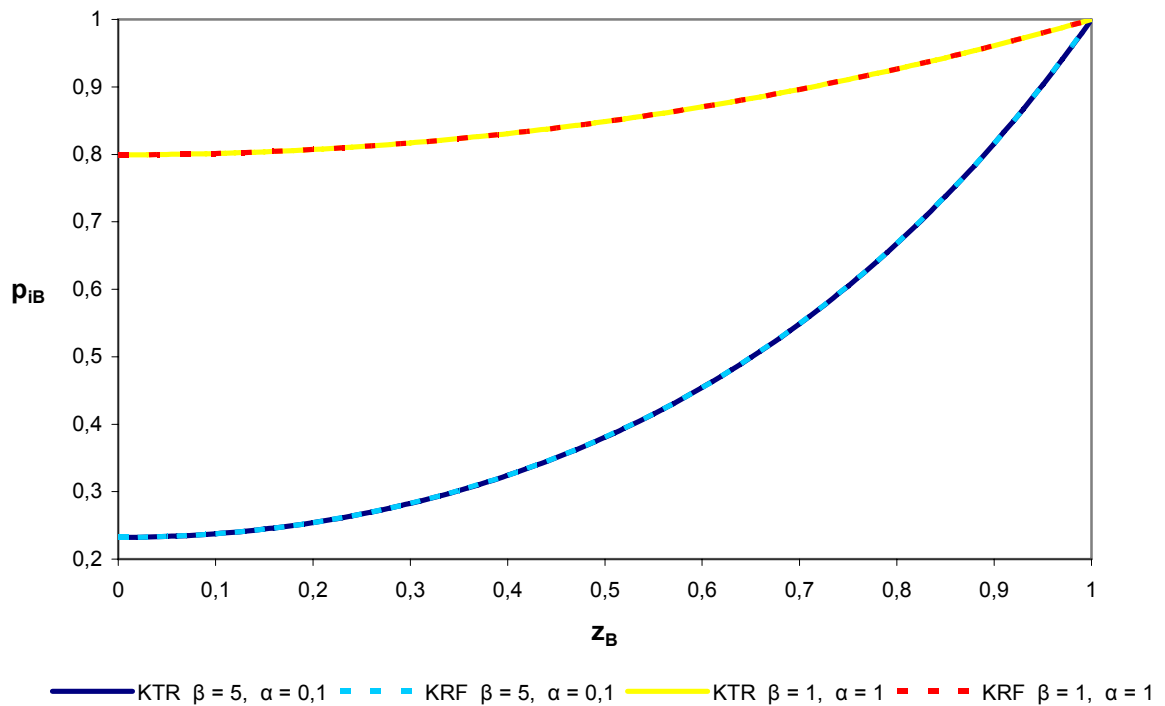
Vypočtené profily A_{cB}, R_{cB}, p_{iB} pro dané parametry α, β pro oba způsoby filtrace, dělení $N = 100$:



Obrázek 8: Profil usazeného koláče po celé délce vlákna pro oba způsoby filtrace za KTR i KRF



Obrázek 9: Profil rozmístění odporu koláče po délce vlákna pro oba způsoby filtrace za KTR i KRF



Obrázek 10: Profil průběhu tlakové ztráty po délce vlákna pro oba způsoby filtrace za KTR i KRF

Profily A_{cB} , R_{cB} i p_{iB} jsou pro oba režimy filtrace při stejném nafiltrovaném objemu stejné.

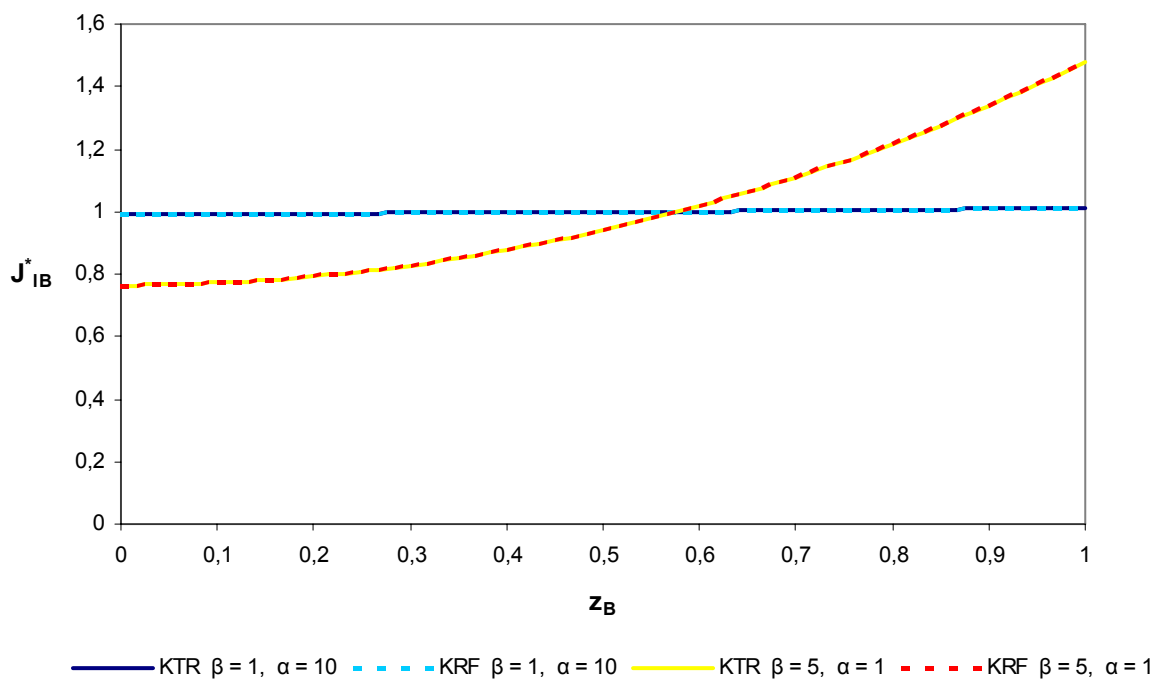
Porovnány byly i profily normovaného fluxu (vztaženého na jeho průměrnou hodnotu).

$$J_{iB}^* = \frac{J_i}{Q_L / L}, \quad \text{kde } Q_L = \int_0^L J_i \cdot dz. \quad (3.52)$$

Pro konstantní rychlost filtrace je $J_{iB}^* = J_{iB}$, zatímco pro konstantní tlakový rozdíl

$$J_{iB}^* = \frac{\frac{p_c - p_{iL}}{\mu R_m} J_{iB}}{\int_0^L J_i \cdot (dz / L)} = \frac{J_{iB}}{\int_0^1 J_{iB} \cdot dz_B}. \quad (3.53)$$

Porovnáním normovaného fluxu pro oba typy filtrace bylo zjištěno, že vypočtené profily jsou si sobě rovny.



Obrázek 11: Profil normovaného fluxu po délce vlákna pro oba způsoby filtrace za KTR i KRF

3.12.2. Vliv délkového a časového kroku na přesnost řešení

Pro jeden režim filtrace byly zvoleny parametry α, β a konečný časový krok τ_B (např. takový, kdy klesne průtok na polovinu nebo tlakový rozdíl vzroste dvakrát). Zvolen byl dvojnásobný vzrůst tlakového rozdílu a filtrace za konstantní rychlosti filtrace. Byly vypočteny V_B pro několik kombinací délkového a časového kroku a porovnány výsledky.

Tabulka 3: Přehled vypočtených hodnot V_B pro zvolenou kombinaci $\alpha = 1, \beta = 5$ k porovnání profilů A_{CB}, R_{CB}, p_{iB} pro filtraci za konstantní rychlosti filtrace

$\tau_{B(KRF)} = V_B$	h_z	N	h_τ	Rel.odch. V_B od V_B při nejjemnějším dělení h_z pro jednotlivá h_τ (%)	Rel.odch. V_B od V_B při nejjemnějším dělení h_τ pro jednotlivá h_z (%)	Rel odch. V_B od V_B při nejjemnějším dělení h_τ i h_z (%)
6,451870	0,1	10	0,01	-0,80398	0	-0,80398
6,490982	0,05	20	0,01	-0,20264	0	-0,20264
6,500782	0,025	40	0,01	-0,05197	0	-0,05197
6,502597	0,01667	60	0,01	-0,02406	0	-0,02406
6,503227	0,0125	80	0,01	-0,01438	0	-0,01438
6,504162	0,01	100	0,01	0	0	0
6,451826	0,1	10	0,1	-0,79433	-0,00068	-0,80465
6,490937	0,05	20	0,1	-0,19294	-0,00069	-0,20333
6,500740	0,025	40	0,1	-0,04221	-0,00065	-0,05261
6,502539	0,01667	60	0,1	-0,01455	-0,00089	-0,02495
6,503212	0,0125	80	0,1	-0,00420	-0,00023	-0,01461
6,503485	0,01	100	0,1	0	-0,01041	-0,01041
6,456027	0,1	10	1	-0,78484	0,064431	-0,74006
6,494699	0,05	20	1	-0,19053	0,057264	-0,14549
6,504385	0,025	40	1	-0,04168	0,055424	0,003429
6,506178	0,01667	60	1	-0,01412	0,05507	0,030996
6,506806	0,0125	80	1	-0,00447	0,055034	0,040651
6,507097	0,01	100	1	0	0,045125	0,045125
7,551299	0,1	10	10	-0,48795	17,04047	16,09949
7,579330	0,05	20	10	-0,11855	16,76708	16,53046
7,586358	0,025	40	10	-0,02593	16,69916	16,63852
7,587660	0,01667	60	10	-0,00878	16,68661	16,65853
7,588116	0,0125	80	10	-0,00277	16,68232	16,66554
7,588326	0,01	100	10	0	16,66877	16,66877

Při zvolených jednotlivých časových krocích h_τ je relativní odchylka vypočteného bezrozměrného času pro nejhrubější délkové dělení 10 cca 0,8 % vzhledem k nejjemnějšímu dělení 100. Vliv délkového kroku na přesnost řešení je malý.

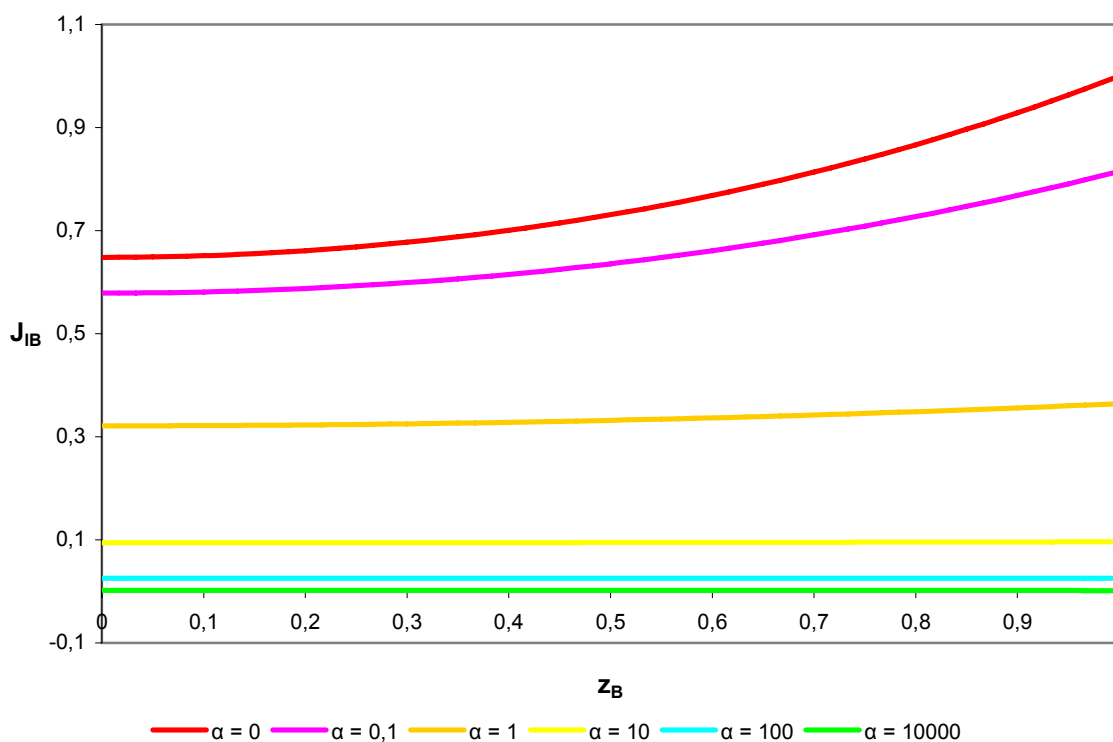
Pro velmi hrubé časové kroky 10 a více jsou hodnoty již zatíženy velkou chybou. Chyba je až 17 % u dělení $h_\tau = 10$ vzhledem k nejjemnějšímu časovému kroku 0,01. Vliv časového kroku je výrazný na přesnost řešení. Vhodná jsou dělení nižší.

3.12.3. Parametrické výpočty

Pro různé kombinace α , β (nulová hodnota parametru, malá hodnota, střední hodnota a velká hodnota) byly provedeny výpočty. Byl zkoumán vliv na charakter řešení, především na nerovnoměrnost filtrace po délce vlákna.

Zvoleno bylo dělení 60, časový krok 0,1 a filtrace za konstantního tlakového rozdílu.

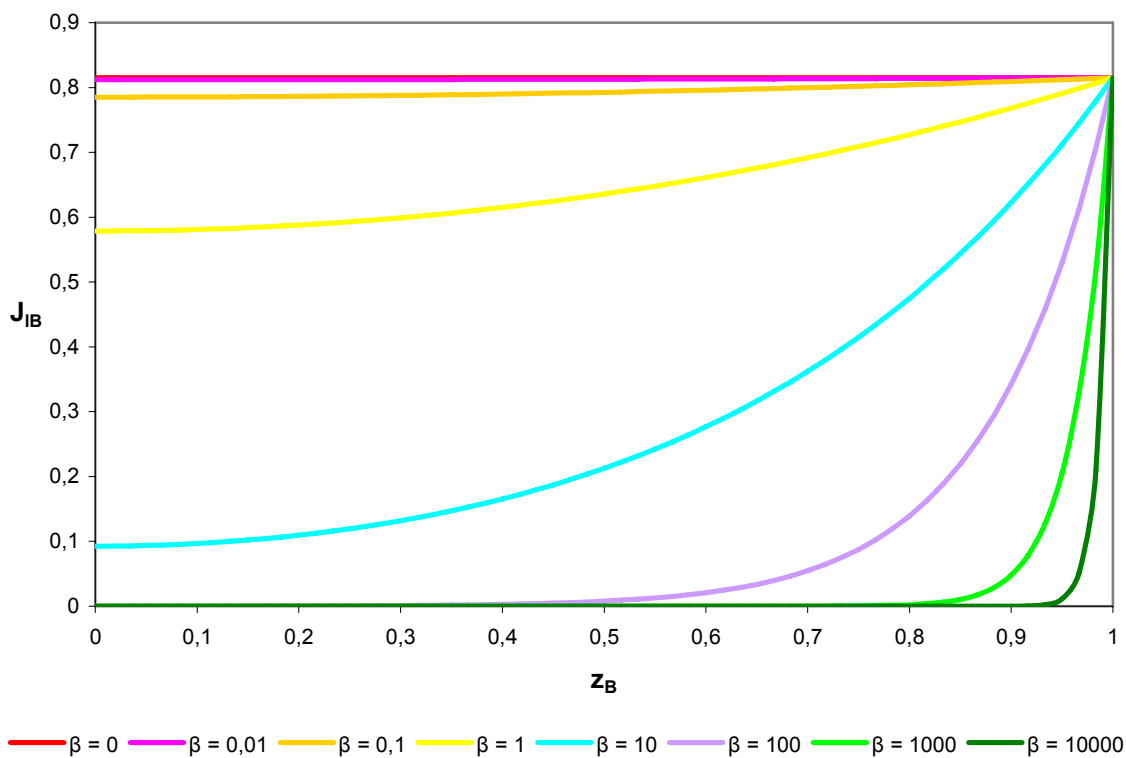
a) vliv α , $\beta = \text{konst.} = 1$:



Obrázek 12: Zkoumání změny tvaru profilů průtoku filtrátu po délce vlákna při proměnném parametru α , $\beta = 1$

Z grafu je vidět, že parametr α vypovídá o propustnosti koláče. Je-li $\alpha = 0$, je propustnost toku největší. Koláč na membráně je zcela propustný, odpor koláče je nulový. S rostoucím α vzrůstá odpor koláče. Při $\alpha = 10000$ je již tok minimální. Vytvořený koláč na membráně je téměř nepropustný a průtok permeátu se blíží 0.

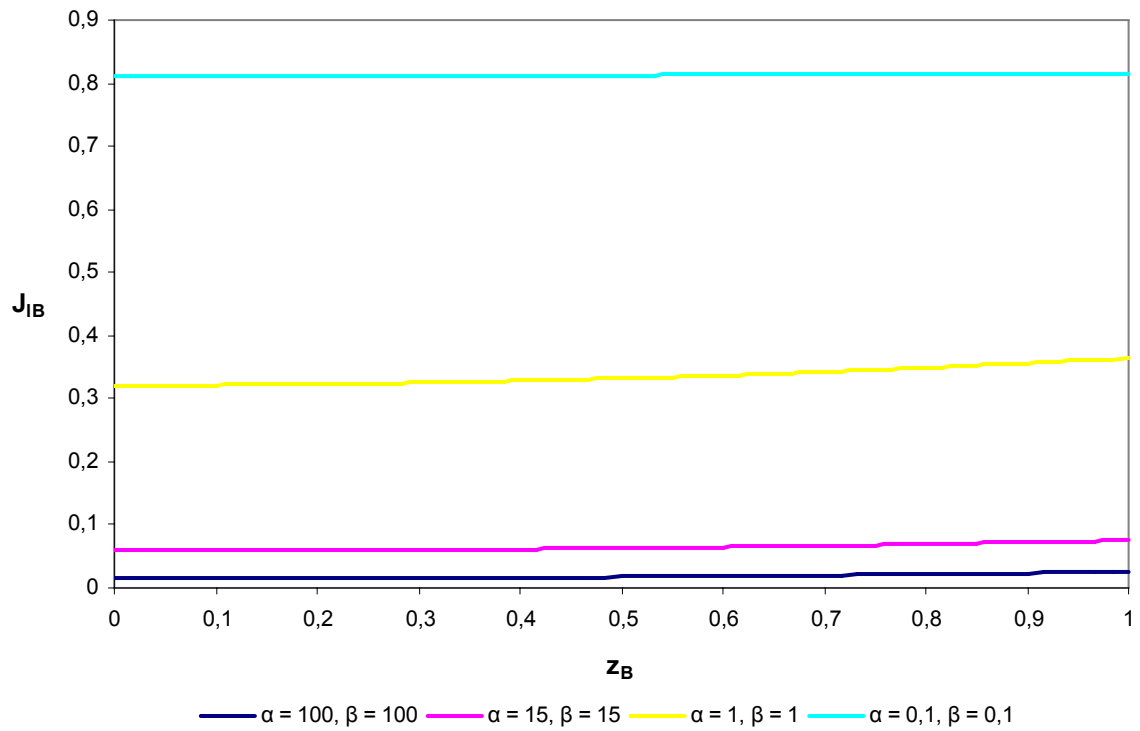
b) vliv β , $\alpha = \text{konst.} = 0,1$:



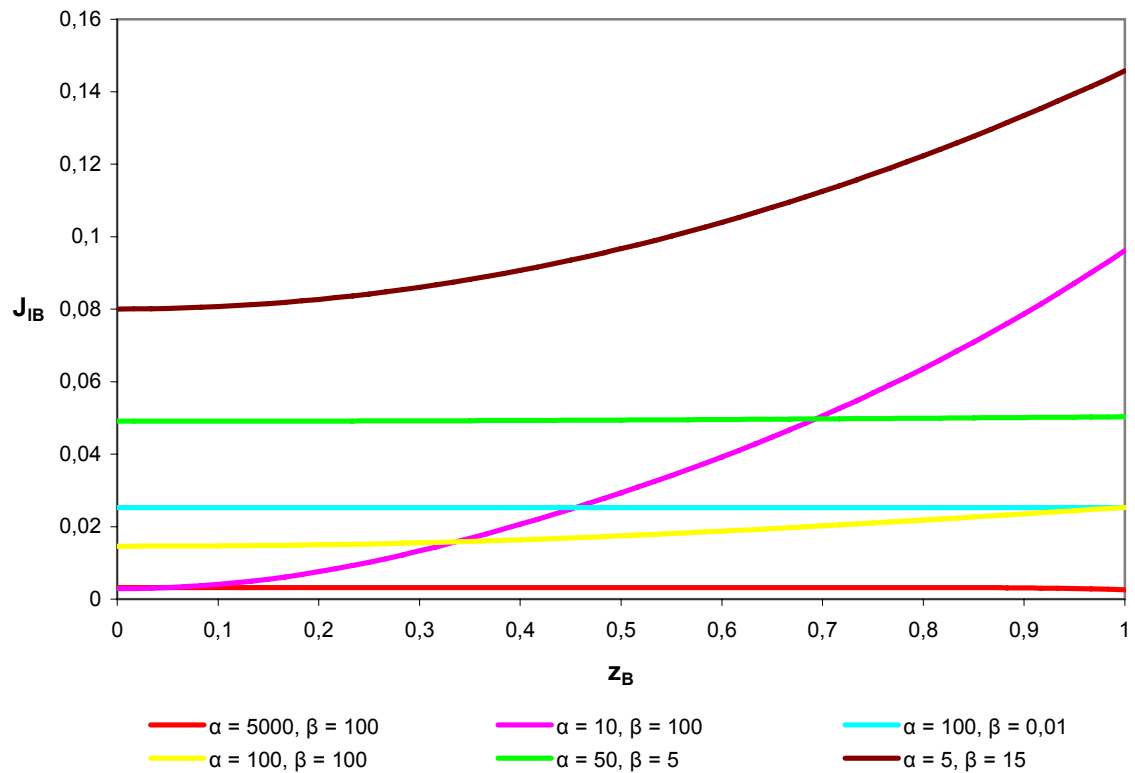
Obrázek 13: Zkoumání změny tvaru profilů průtoku filtrátu po délce vlákna při proměnném parametru β , $\alpha = 0,1$

Je-li β nulové, hydraulický odpor membrány je velký a tlaková ztráta v dutině vlákna je zanedbatelná. Kapalina je filtrována rovnoměrně po celé délce vlákna. S rostoucím β vzniká velká tlaková ztráta ve vláknu, odpor membrány je menší. Tok permeátu probíhá prakticky jen u otevřeného konce vlákna, kde je hnací síla (rozdíl tlaků) největší. Vláknem je tak propustné, že veškerý nástřík proteče jen koncem vlákna.

Je-li α i β stejné, průběh toku permeátu vlákem je rovnoměrnější po celé délce a s rostoucími hodnotami α i β průtok stěnou vlákna klesá.



Obrázek 14: Ukázka profilů průtoku filtrátu po délce vlákna při stejných parametrech α i β



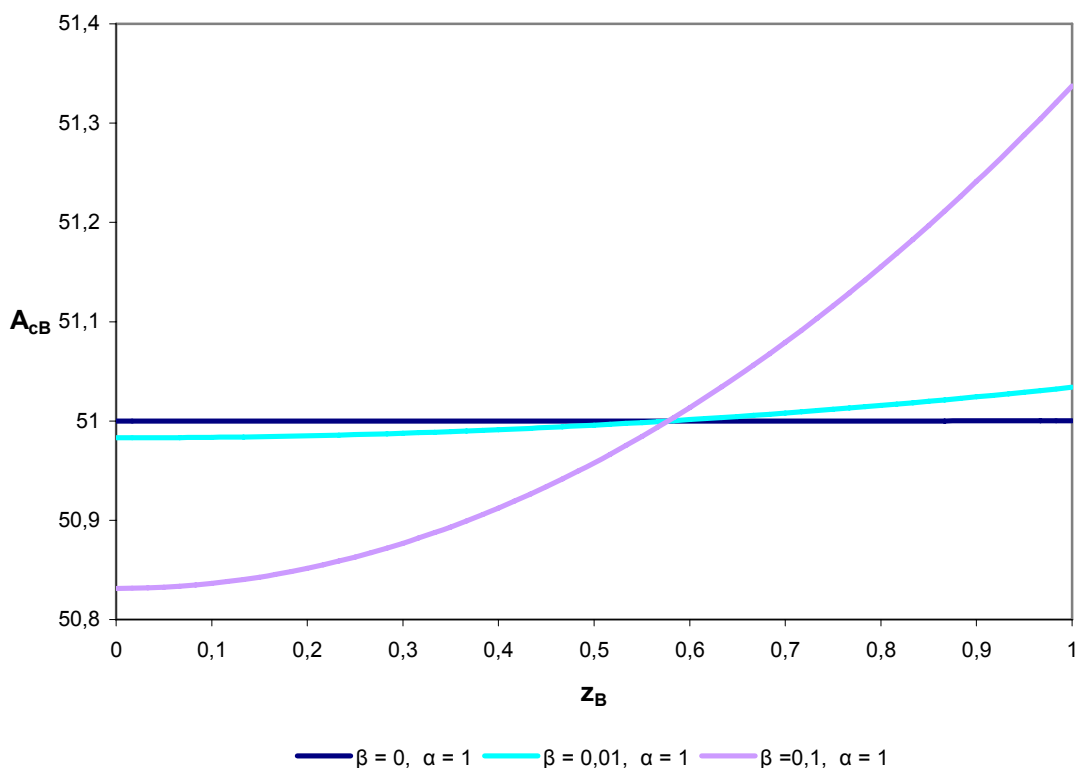
Obrázek 15: Ukázka profilů průtoku filtrátu po délce vlákna při různých parametrech α i β

3.12.4. Délková nerovnoměrnost rozdělení koláče v porovnání s případem, kdy je zanedbatelná tlaková ztráta v dutině vlákna

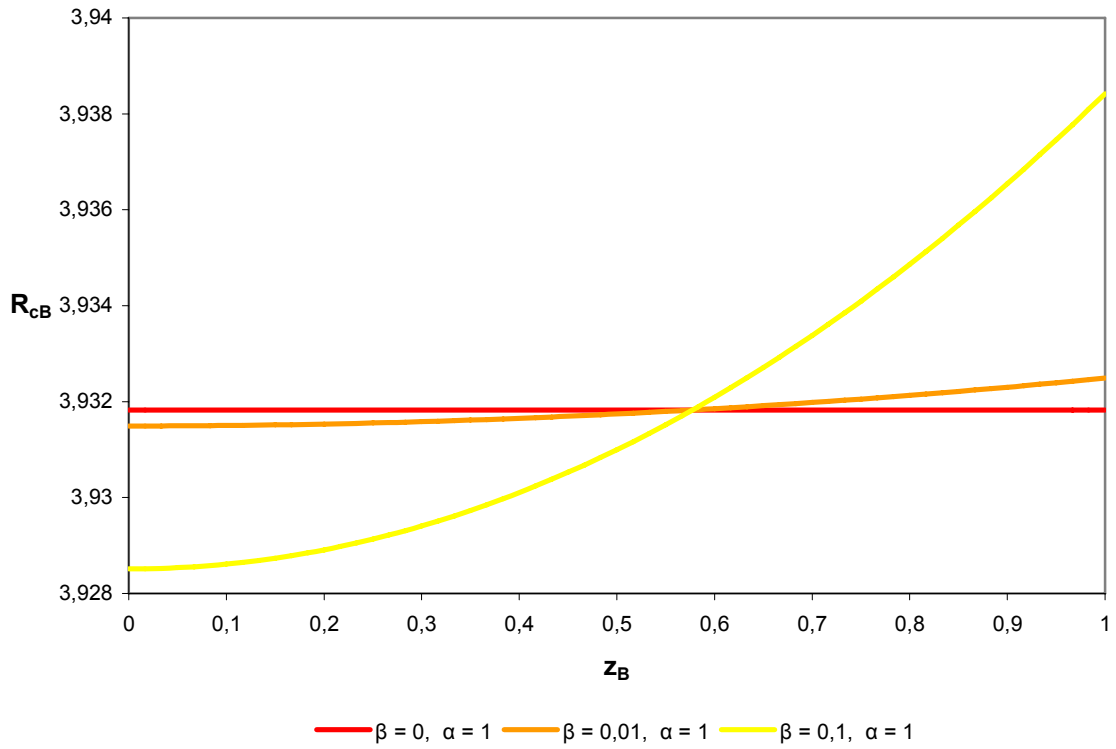
Pro stejný nafiltrovaný objem V_B byly porovnány profily vypočtených veličin s případem, kdy je zanedbatelná tlaková ztráta v dutině vlákna ($\beta = 0$). V případě $\beta = 0$ jsou profily všech veličin konstantní (nezávislé na z_B), ale závisí na čase (kromě p_{iB} , který je stále roven 1).

Pro srovnávání bylo zvoleno dělení délky vlákna na 60 dílů, časový krok 0,1 a filtrace za konstantní rychlosti. Zvolený nafiltrovaný bezrozměrný objem V_B je 50.

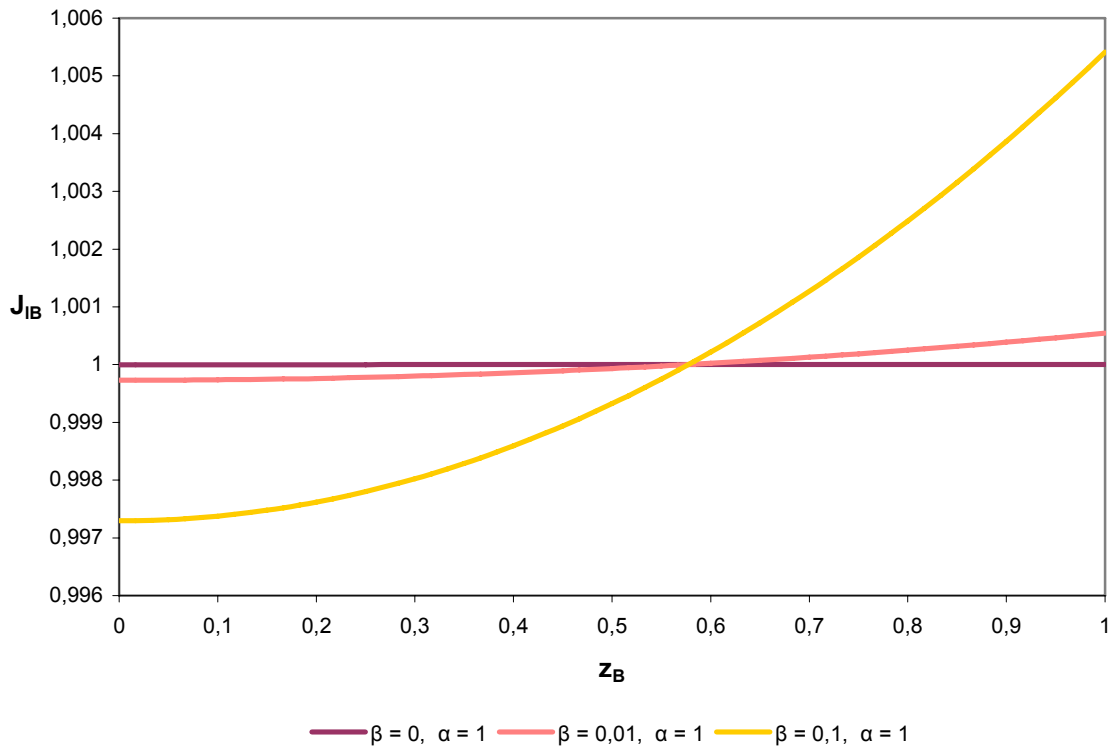
Při $\beta = 0$ je hydraulický odpor vlákna velký a filtrace se děje po celé délce vlákna rovnoměrně, a také ukládání koláče na vláknech je stejné po celé délce vlákna. S rostoucím β je vlákno propustnější, a proto se hlavní intenzita toku posunuje směrem k otevřenému konci dutého vlákna. Částice se začnou ukládat nejprve na povrchu vlákna v blízkosti otevřeného konce, neboť tam je tok nejintenzivnější. Pozvolna, jak se povrch vlákna v blízkosti otevřeného konce zanáší, posunuje se intenzita toku více k druhému konci vlákna. U bezrozměrného odporu koláče a toku permeátu platí analogie.



Obrázek 16: Ukázka profilů usazeného koláče po délce vlákna při $\beta = 0$ a $\beta > 0$

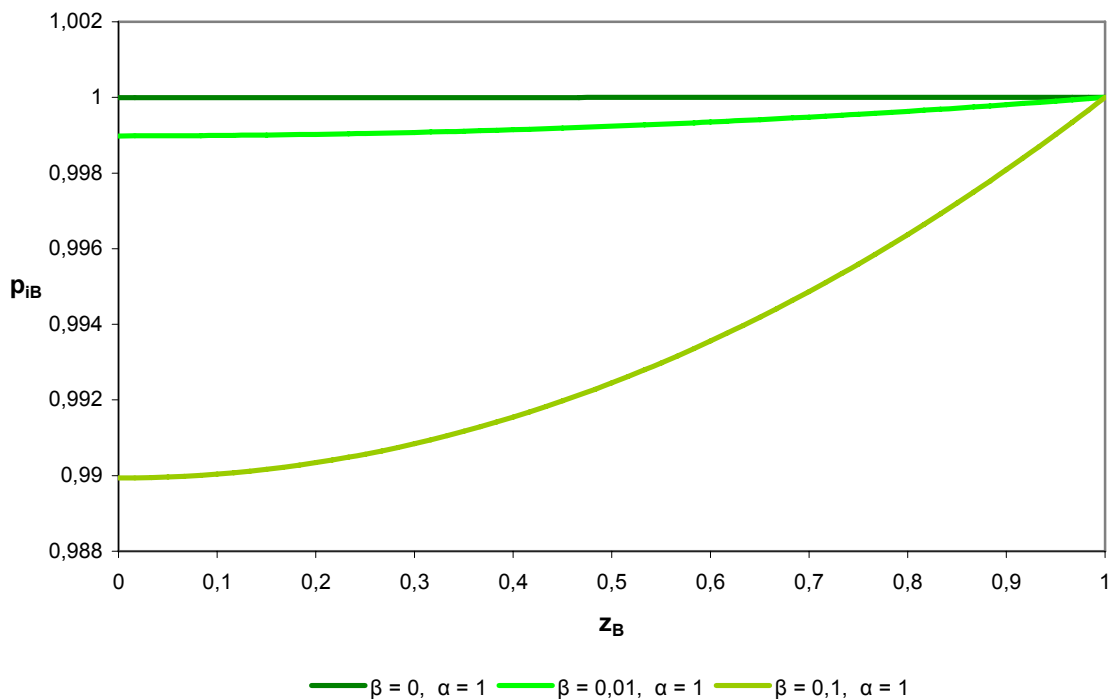


Obrázek 17: Ukázka profilů odporu koláče po délce vlákna při $\beta = 0$ a $\beta > 0$



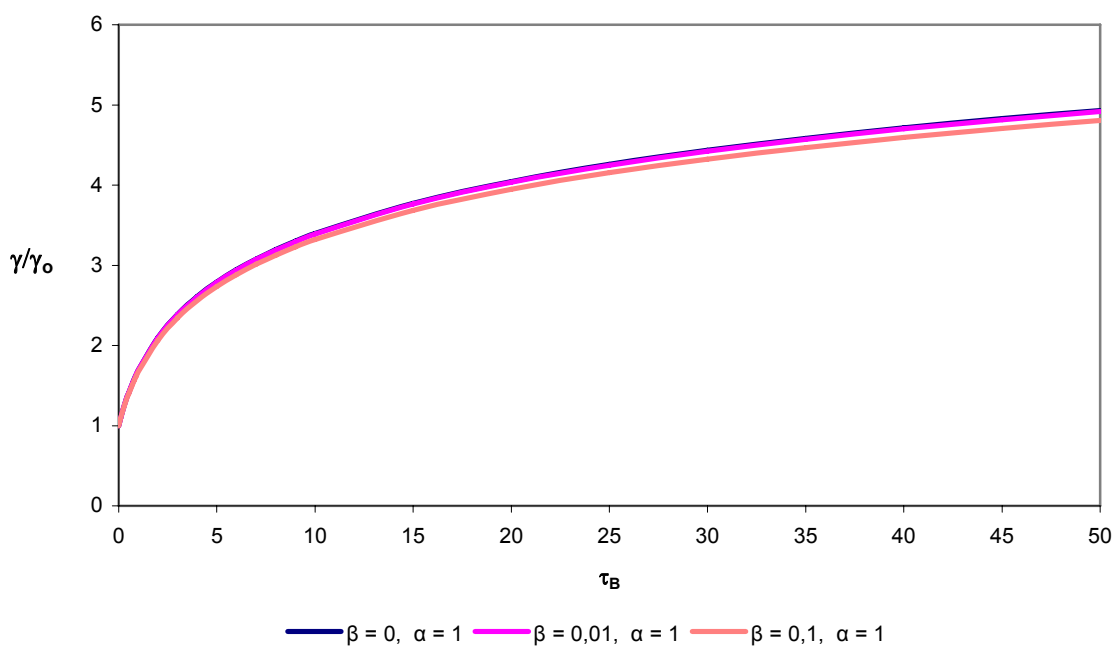
Obrázek 18: Ukázka profilů toku filtrátu po délce vlákna při $\beta = 0$ a $\beta > 0$

Tlaková ztráta u vyšších hodnot β je vyšší, v důsledku nerovnoměrnosti průtoku vláknem vlivem nižšího hydraulického odporu vlákna. V případě $\beta = 0$ je tlaková ztráta ve vlákně zanedbatelná.



Obrázek 19: Ukázka profilů tlakové ztráty ve vlákně a po jeho délce při $\beta = 0$ a $\beta > 0$

Růst rozdílu tlakové ztráty je pozvolnější u vyšších hodnot β .



Obrázek 20: Ukázka růstu tlakové ztráty ve vlákně podél jeho délky při $\beta = 0$ a $\beta > 0$

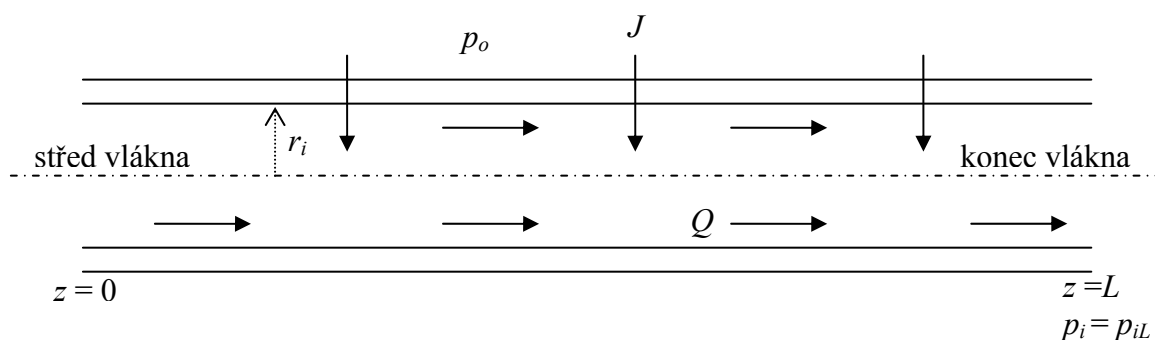
4 Zjednodušený model proudění čisté kapaliny dutým vláknem s porézními stěnami [2]

Specifikace:

Ustálené, laminární, izotermní proudění nestlačitelné, newtonské kapaliny uvnitř dutého vlákna s homogenně porézními stěnami.

Zjednodušující předpoklady:

1. Tlak na vnější straně vlákna je po celé délce vlákna konstantní a je znám.
2. Profil axiální složky rychlosti (ve směru osy vlákna) je ve všech průřezích vlákna parabolický (podle Hagen-Poiseuilleova zákona), avšak s proměnnou velikostí průtoku.
3. Radiální změny tlaku jsou zanedbatelné.



Obrázek 21: Model vlákna, zjednodušený model proudění čisté kapaliny

z	vzdálenost od středu vlákna, [m]
L	délka poloviny vlákna, [m]
r_i	vnitřní poloměr vlákna, [m]
p_i	průměrný tlak uvnitř vlákna v místě z , [Pa]
p_o	tlak na vnější straně vlákna (po celé délce stejný), [Pa]
p_{iL}	tlak na otevřeném (výstupním) konci vlákna, [Pa]
J	flux permeátu v místě z , [$\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$]
Q	objemový průtok permeátu v místě z , [m^3/s]

Objemová bilance kapaliny mezi místy z a $z + dz$:

$$Q(z + dz) = Q(z) + J \cdot 2\pi r_i \cdot dz \quad (4.1)$$

$$\frac{dQ}{dz} = 2\pi r_i J \quad (4.2)$$

Podle Hagen-Poiseuilleova zákona je

$$Q = -\frac{\pi r_i^4}{8\mu} \frac{dp_i}{dz} \quad (4.3)$$

a podle Darcyho zákona

$$J = \frac{K}{\mu} (p_o - p_i), \quad (4.4)$$

kde μ je dynamická viskozita permeátu, [Pa.s] a K permeabilita porézní stěny vlákna, [m].

Ze vztahů (4.3) a (4.4) dosadíme do (4.2)

$$\frac{d^2 p_i}{dz^2} = -\frac{16K}{r_i^3} (p_o - p_i) \quad (4.5)$$

Okrajové podmínky jsou $Q(z=0) = 0$ a podle vztahu (4.3) potom

$$\frac{dp_i}{dz} = 0 \quad (4.6)$$

$$p(z=L) = p_{il}. \quad (4.7)$$

Řešením lineární diferenciální rovnice (4.5) s okrajovými podmínkami (4.6) a (4.7) je

$$p = p_o - (p_o - p_{il}) \frac{\cosh(\sqrt{\beta} \cdot z / L)}{\cosh(\sqrt{\beta})}, \quad (4.8)$$

kde bezrozměrný parametr

$$\sqrt{\beta} = \frac{4L}{r_i} \sqrt{\frac{K}{r_i}}. \quad (4.9)$$

Pro tlak ve středu vlákna ($z=0$) dostaneme

$$p_{io} = p_o - \frac{(p_o - p_{il})}{\cosh(\sqrt{\beta})}. \quad (4.10)$$

Pro rostoucí délku vlákna ($L \rightarrow \infty$, $\sqrt{\beta} \rightarrow \infty$) se tlak p_{io} blíží hodnotě p_o .

První a druhá derivace tlaku jsou

$$\frac{dp_i}{dz} = -(p_o - p_{il}) \frac{\sqrt{\beta}}{L} \frac{\sinh(\sqrt{\beta} \cdot z / L)}{\cosh(\sqrt{\beta})} \quad (4.11)$$

$$\frac{d^2 p_i}{dz^2} = -(p_o - p_{iL}) \left(\frac{\sqrt{\beta}}{L} \right)^2 \frac{\cosh(\sqrt{\beta} \cdot z / L)}{\cosh(\sqrt{\beta})}. \quad (4.12)$$

Jestliže je $p_{iL} < p_o$, potom je pro $0 \leq z \leq L$: $\frac{dp_i}{dz} \leq 0$, $\frac{d^2 p_i}{dz^2} < 0$. To znamená, že $p_i(z)$ je funkce klesající a konkávní.

Kombinací vztahů (4.3) a (4.11) dostaneme pro objemový průtok vláknem

$$Q(z) = \frac{\pi \cdot r_i^4 \cdot \sqrt{\beta}}{8 \cdot \mu \cdot L} \cdot (p_o - p_{iL}) \frac{\sinh(\sqrt{\beta} \cdot z / L)}{\cosh(\sqrt{\beta})}. \quad (4.13)$$

Pro celkový objemový průtok permeátu dutým vláknem platí

$$Q_L = Q(z = L) = \frac{\pi \cdot r_i^4 \cdot \sqrt{\beta}}{8 \cdot \mu \cdot L} \cdot (p_o - p_{iL}) \tanh(\sqrt{\beta}) \quad (4.14)$$

4.1. Stanovení parametrů modelu z experimentů

Vnitřní průměr vlákna ($2 \cdot r_i$) a permeabilita stěny K se nezávislým měřením stanoví obtížně. Pro jejich určení použijeme vztah (4.14). Proměříme výtoky permeátu z vlákna pro různé hodnoty tlakové difference $p_o - p_{iL}$ a různé délky L .

Závislost (4.14) přepíšeme do tvaru

$$Q(L) = A \cdot \frac{(p_o - p_{iL})}{\mu} \tanh(a \cdot L), \quad (4.15)$$

kde

$$A = \frac{\pi r_i^3}{2} \sqrt{\frac{K}{r_i}}, \quad a = \frac{4}{r_i} \sqrt{\frac{K}{r_i}} \quad (4.16)$$

Hodnoty konstant A , a určíme metodou nejmenších čtverců z naměřené závislosti (4.15). Pro poměr konstant A/a platí

$$\frac{A}{a} = \frac{\pi r_i^4}{8} \Rightarrow r_i = \sqrt[4]{\frac{8}{\pi} \frac{A}{a}} \quad (4.17)$$

a pro jejich součin $A \cdot a$ platí

$$A \cdot a = 2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot K \Rightarrow K = \frac{A \cdot a}{2 \pi r_i} = \frac{1}{2 \pi r_i \cdot R_m} \quad (4.18)$$

5 Experimentální část

5.1. Návrh experimentálního zařízení

Úkolem bylo navrhnout mikrofiltrační jednotku, v níž se nebudou dutá vlákna ovlivňovat, a zároveň v ní bude probíhat proces dead-end filtrace, to znamená musela být zajištěna dostatečně velká hnací síla procesu, tj. rozdíl tlaku nad a uvnitř membrány.

Aby zařízení bylo, co nejjednodušeji sestavitelné, bylo rozhodnuto udělat otevřenou nádobu, v níž vnější tlak bude roven atmosférickému tlaku. Hnací síla procesu bude dána velikostí podtlaku, který bude umět čerpadlo vyvinout za dostatečně malých průtoků. Tím bude splněn i předpoklad laminárního proudění uvnitř vláken. Podtlak je omezen tenzí páry vody, která je 2,34 kPa při 20°C. Avšak za tak velkého podtlaku mikrofiltraci z důvodu vylučování vzduchu z vody ani není možné vést. Malé průtoky a dostatečně velký a stálý podtlak mělo poskytovat objemové membránové čerpadlo. Skutečnost byla jiná. Stálého průtoku čerpadlo nedosáhlo, a i podtlak značně kolísal. Proto se vyzkoušela možnost zapojení vývěvy s regulačním ventilem na principu přísávání vzduchu. Vývěva udržovala stálý podtlak dobře a i průtok byl plynulý.

Pro splnění předpokladu osamocené vlákna, byla snaha použít, co nejméně vláken, a umístit je co nejdále od sebe. Vlákna se použilo více než 1, aby průtok permeátu nebyl příliš malý. Do nerezového plechu o rozměrech 12 x 8,8 cm bylo vyvrtáno 18 otvorů. 6 otvorů bylo vyvrtáno v rozích většího pravidelného šestiúhelníku (tvar benzenového jádra), otvory byly od sebe vzdálené 1,25 cm, a 6 děr bylo vyvrtáno do středu hran většího pravidelného šestiúhelníku. Zbývajících šest děr bylo vyvrtáno do rohů menšího pravidelného šestiúhelníku, osově souměrného s větším šestiúhelníkem. Takto byly vyrobeny dva nosné a posuvné protilehlé kusy pro dutá vlákna. Na jeden z nich byla přivařena nosná hřídelka a malý pomocný kolík. Nosná hřídelka sloužila k uchycení těsnícího kolečka ze silikónového kaučuku. Tento materiál byl vybrán k utěsnění dutých vláken, tj. oddělení filtrované destilované vody od prostoru do nějž vytékal permeát z vláken. Vlákna byla tímto těsněním prošita jehlou. Silikónový kaučuk o tloušťce 5 mm má tu vynikající vlastnost, že otvor vzniklý po jehle kolem vlákna dokonale utěsní, tzv. zacelí. Poté bylo vytvořeno kovové přítlačné kolečko, které mělo za úkol dokonale přitlačit silikon k dílu s otvory. Do tohoto přítlačného kolečka muselo být také vyvrtáno 18 otvorů. Aby přítlačné kolečko se neposunovalo, a vyvrtané díry vždy souhlasily s dírami na nosném dílu s hřídelkou, byl tam

proto navařen již zmíněný pomocný kolík. Pro tento kolík byl tudíž vyvrtán i 1 otvor na přítlačném kolečku. K vytvoření otvoru, do nějž má vytékat permeát byl navržen měkký těsnicí kroužek o tloušťce 3 mm. K němu byl přiložen poslední kruhový, nerezový, plechový přítlačný díl se dvěma vývody. Poté již byla hřídelka utěsněna malým těsnicím kroužkem s přítlačným kotoučem a vše bylo pevně staženo matkou s podložkou. Protože, zde bylo zvoleno utažení dílů ze středu, vznikal tak velký tlak na střed, přičemž okrajové části se mírně odchlípovaly. Na hřídelku byl proto použit větší těsnicí kroužek a větší přítlačný kotouč. Protože silikónový kaučuk je spíše tvrdší materiál, nedokonale utěsňoval prostor mezi ním a přítlačným kusem s otvory. Mezi tyto dva kusy byl vložen kroužek z měkkého polymeru, který tuto netěsnost odstranil. Těsnění vyhovovalo až do přetlaku 250 kPa. Při překročení 250kPa se měkké těsnění vyhrězlo. Měření však byla prováděna při podtlaku přibližně 60 kPa, při kterém těsnění plně vyhovovalo.

Dalším důležitým požadavkem na zařízení bylo, aby bylo možné snadno zkracovat délku vláken. V dílnách byl proto vyroben z nerezového plechu obdélníkový kus, který měl podélně vyřezány v sobě drážky, v nichž se nosné díly posunovaly k sobě. Maximální délka vláken byla omezena zásobní nádrží na vodu, kterou byl truhlík dlouhý 1 m. Nejdelší délka natažených vláken byla 70 cm. Zkrácení vláken probíhalo po 5 cm. Nejkratší měřenou délkou byla délka 5 cm.

5.2. Použité chemikálie

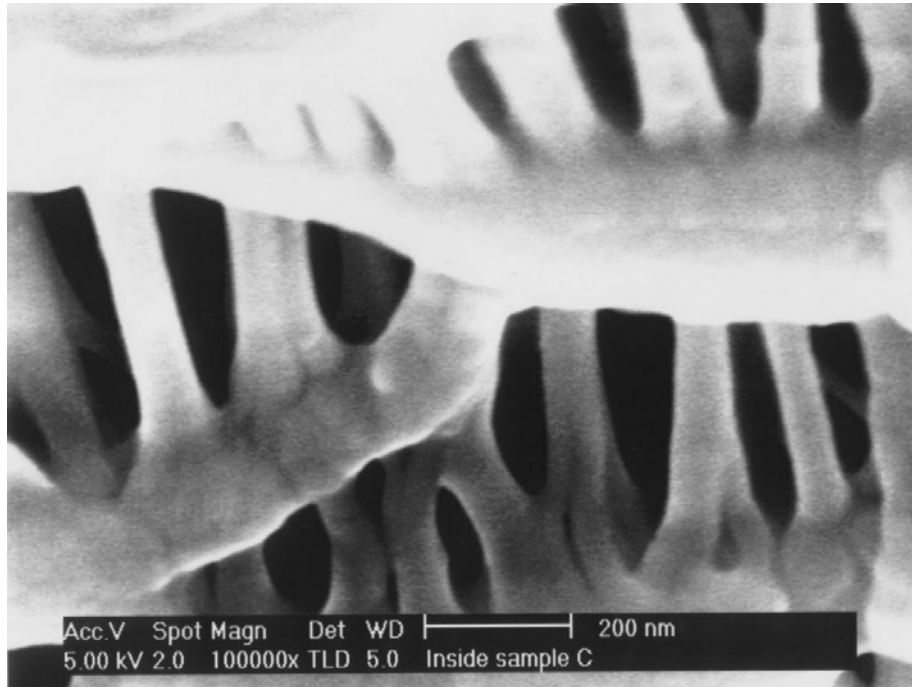
- destilovaná voda
- etanol

K filtraci byla používána destilovaná voda, proto, aby zanášení dutých vláken bylo, co nejmenší. Etanol byl používán k aktivaci dutých vláken.

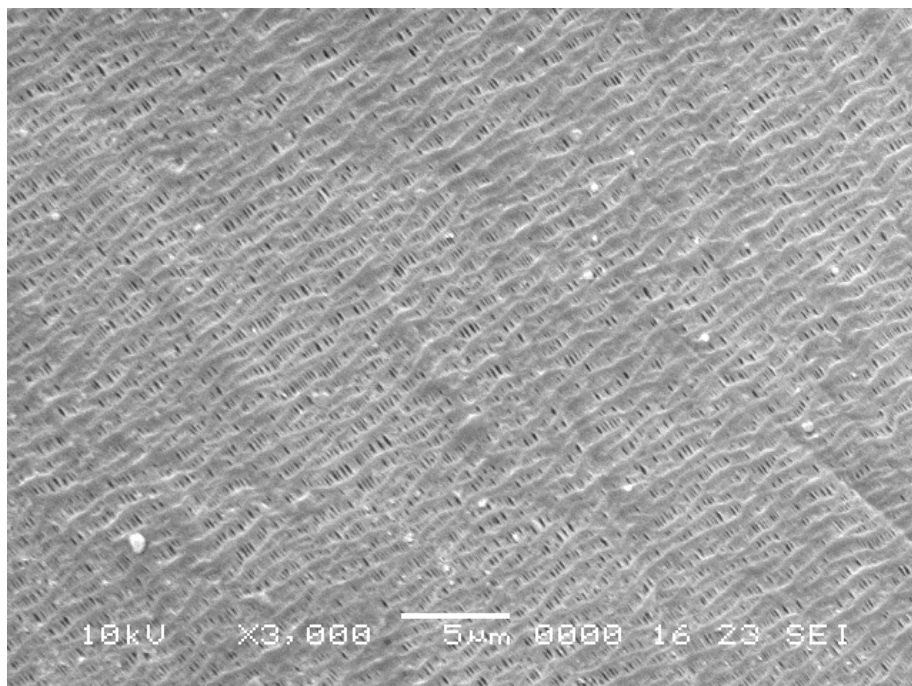
5.3. Náskres součástí zařízení a experimentálního zařízení

Součásti:

- membrány z dutých vláken

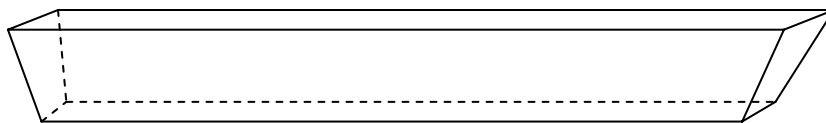


Obrázek 22: Pohled na vnitřní pórovitou strukturu dutého vlákna

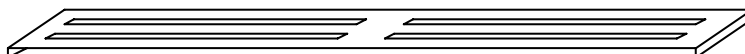


Obrázek 23: Pohled na vnější povrch dutého vlákna

- truhlík:



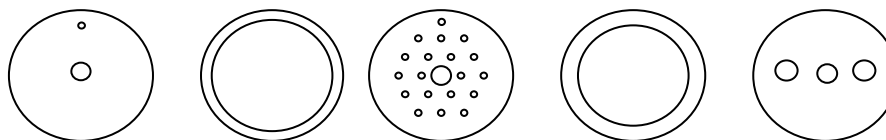
- nerezový plechový obdélníkový díl sloužící k posouvání napínacích dílů vláken



- dva protilehlé kusy k natažení a utěsnění vláken



- silikon-kaučukové těsnění (tloušťky 5 mm), měkký těsnící kroužek, plechové přitlačné kolečko, měkký širší těsnící kroužek, uzavírací díl s dvěma vývody

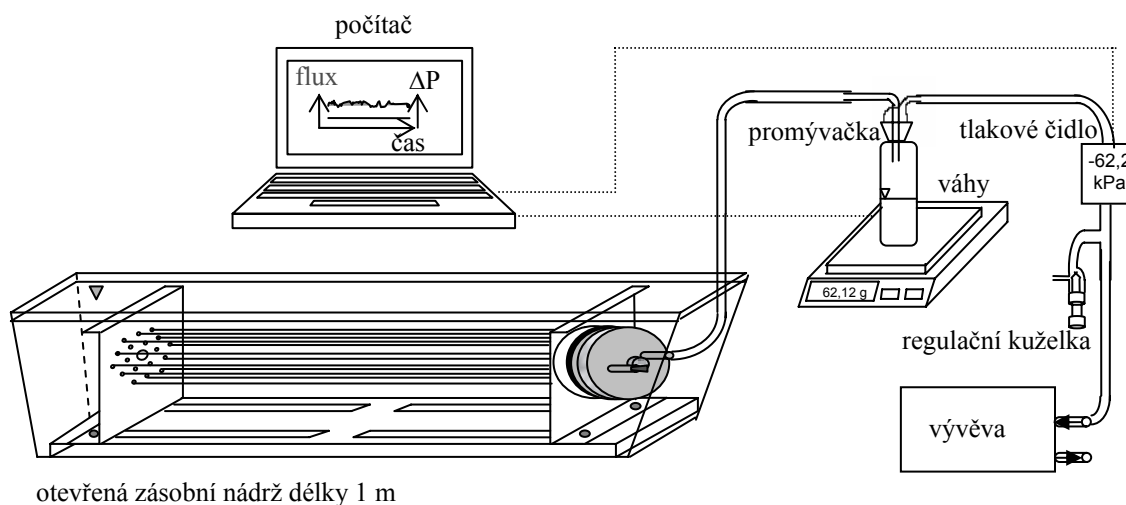


- promývačka, váhy, regulační ventil (přisávání vzduchu), vývěva, tlakové čidlo, počítač, objemové čerpadlo, dutá vlákna, malé těsnění pro hřídel, přitlačný kotouč pro utěsnění hřídele, malá podložka s matkou

Pomůcky:

- jehla, pinzeta plochá, pinzeta se zoubky, klíč 10, nůžky

Celkové uspořádání experimentálního zařízení:

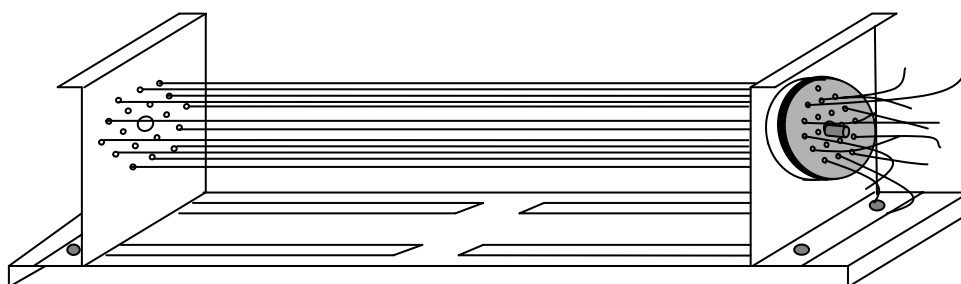


Obrázek 24: Aparatura

5.4. Popis funkce zařízení a problémy vzniklé při jeho chodu

5.4.1. Sestavení zařízení

Dutá vlákna byla vystřižena ze zakoupeného modulu o délce vláken 1,6 m. Poté byla sestavena ocelová konstrukce. Na posuvný díl byly upevněny co nejdále od sebe (tj 70cm) dva protilehlé napínací díly s provrtanými otvory pro vlákna. Na hřídelku jednoho z napínacích dílů bylo nasazeno silikon kaučukové těsnění, poté měkký těsnící kroužek a přítlačný kroužek s vyvrtanými otvory pro vlákna. Dutá vlákna byla navlečena na jehlu a protažena silikon-kaučukovým těsněním směrem k straně, na níž byla navrtána nosná hřídelka. Druhý konec vlákna byl protažen otvorem v protilehlém napínacím dílu a otvorem sousedícím. Tento konec byl navlečen také na jehlu a protažen druhým protilehlým otvorem za pomoci pinzety se zoubky. Vlákno natažené ve tvaru písmene U, bylo dotaženo, a přecházející konce vláken (viz obrázek č.25) byly ustřiženy tak, aby je bylo možné při následujících zkráceních vláken zachytit plochou pinzetou a povytáhnout. Tímto způsobem byla natažena všechna vlákna. Celkový počet otvorů byl 18. Původně se prošívalo 9 vláken. Kvůli snazší manipulaci nakonec bylo prošíváno pouze vláken 6, a to po vnějším obvodu vyvrtaných děr. Vzniklo tak celkem dvanáct půvláken o délce 70 cm.



Obrázek 25: Našití dutých vláken

Poté bylo nasazeno druhé těsnění o šířce 3 mm. Na tento těsnící kroužek byl nasazen poslední díl se dvěma vývody. Jeden vývod sloužil k zavodňování cely. Postupně se zjistilo, že je zbytečný, protože byla používána k sání vývěva. Proto byl tento otvor zadělán zátkou a dále nepoužíván. Druhý vývod sloužil k odvodu permeátu do promývačky umístěné na elektronických vahách.



Obrázek 26: Utěsnění dutých vláken

5.4.2. Aktivace vláken etanolem

Protože, povrchové napětí vzduchu v pórech vůči vodě je vysoké ($\gamma_{\text{H}_2\text{O}}^{20^\circ\text{C}} = 72,6 \text{ mN}\cdot\text{m}^{-1}$) tak, že by voda těmito póry neprošla, je nutné vzduch z pórů vypudit. Používá se etanol, který má nižší povrchové napětí ve vzduchu než voda ($\gamma_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}}^{20^\circ\text{C}} = 22,3 \text{ mN}\cdot\text{m}^{-1}$) a vzduch z pórů vypudí. Proto byla vlákna smáčena 24h v 100% etanolu. Avšak doba našívání vláken do silikonového kaučuku je poměrně dlouhá, etanol z vláken vytéká a do pórů se opět dostane vzduch. Proto bylo prováděno protlačování etanolu přetlakem do vláken pomocí objemového membránového čerpadla přibližně 5 minut. Etanol proudil vnitřkem vláken a vytékal ven do truhlíku. Jakmile byla vlákna dokonale aktivována, etanol byl rychle oklepán z konstrukce a vlákna byla co nejrychleji ponořena do destilované vody. Ihned byla spuštěna vývěva, která odsála etanol zevnitř vláken a vlákna se začala filtrovat destilovaná voda. Poté byl proces zastaven, a připravil se program k snímání přírůstků kapaliny na vahách během mikrofiltrace. Po spuštění programu byla vývěva opět spuštěna.

5.4.3. Samotný proces mikrofiltrace dutými vlákny

Mikrofiltrace destilované vody byla prováděna zpočátku při podtlaku 85 kPa. Za tohoto podtlaku se z destilované vody vylučovalo značné množství vzduchu a bohužel již v dutých vláknech. Měření bylo tímto rušeno a vytvořený matematický model toku kapaliny dutým vláknem by nebyl ověřen. Proto se zkoušelo vodu odplyňovat v ultrazvuku 30 minut. Bezvýsledně. Ultrazvuk destilovanou vodu odplyňoval minimálně. Proto se zkoušelo filtrovat převařenou vodu. V převařené vodě při podtlaku 85 kPa bylo vyloučených bublin značně méně. Při snížení podtlaku na cca 60 kPa a při mikrofiltraci převařené vody se dosáhlo stálého průtoku a tvorba bublin vymizela.

5.4.4. Další řešené problémy

Bylo nutné dobře utěsnit všechny hadice a to i hadice na tlakovém čidle a použít nerezové součásti zařízení. Šrouby, matice a podložky byly pozinkované a podléhaly značně korozi.

5.5. Naměřená data a grafické znázornění naměřených dat

Počítačem byla snímána hodnota hmotnosti filtrátu na elektronických vahách po 30 s. Z přírůstků hmotnosti byl vypočítáván flux pro zadanou hodnotu hustoty vody a povrch vláken. Následně byl vypočítáván výtok z vlákna Q_L .

$$\text{flux} = (m_2 - m_1) \cdot 1000 / (S \cdot \rho \cdot t) \quad [\text{l} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{h}^{-1}], \quad (5.1)$$

$$Q_{Lexp} = \text{flux} \cdot S / (1000 \cdot 12 \cdot 3600) \quad [\text{m}^3/\text{s}], \quad (5.2)$$

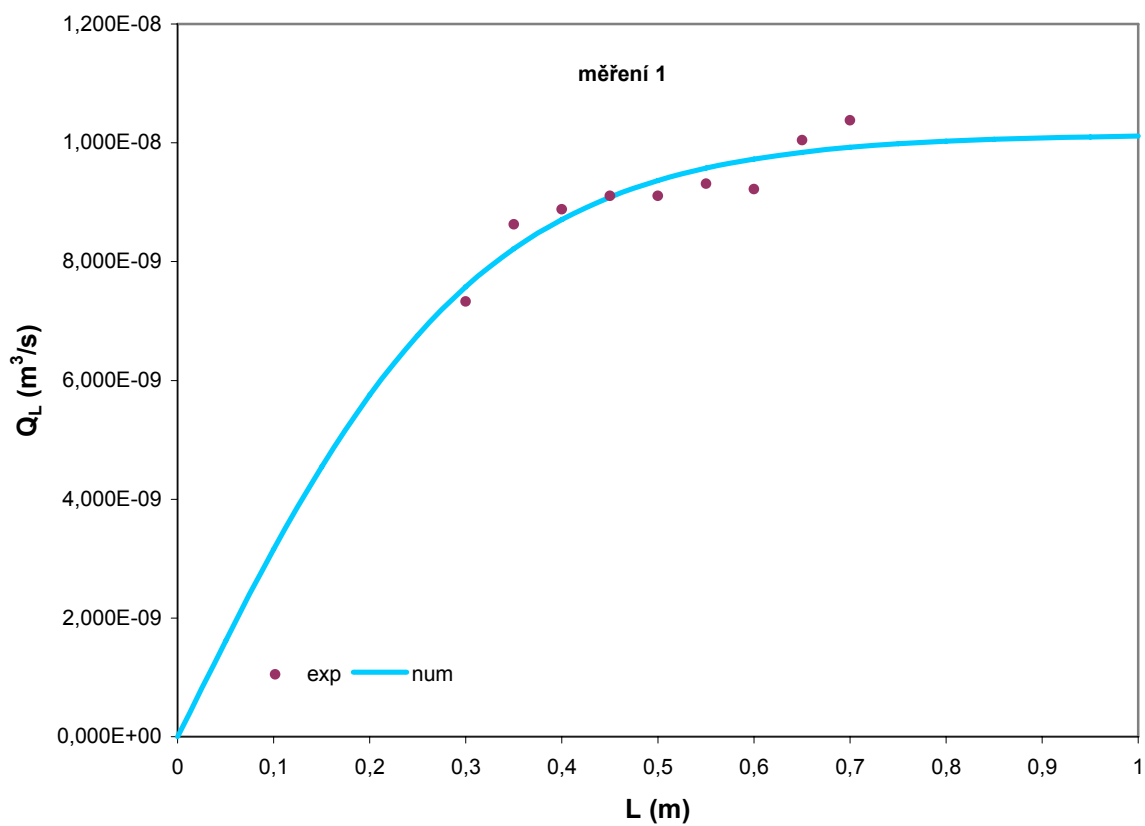
kde rozdíl $m_2 - m_1$ představuje přírůstek hmotnosti permeátu na vahách (kg), S povrch všech vláken o aktuální dané délce v m^2 a $t(h)$ časový interval po kterém byla odečtena aktuální hodnota hmotnosti filtrátu na vahách, ρ je hustota vody ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$).

V následujících tabulkách jsou uvedena experimentální naměřená data a pod nimi je vždy grafické znázornění experimentálních dat a dat vypočtených ze zjednodušeného numerického modelu (viz kap.4).

Dále bylo provedeno měření závislosti změny výtoku permeátu z vlákna dané délky při proměnné hnací síle (ΔP), která by podle použitého modelu měla být lineární.

Tabulka 4: Přehled naměřených hodnot fluxů a $Q_{L,exp}$ pro měření 1

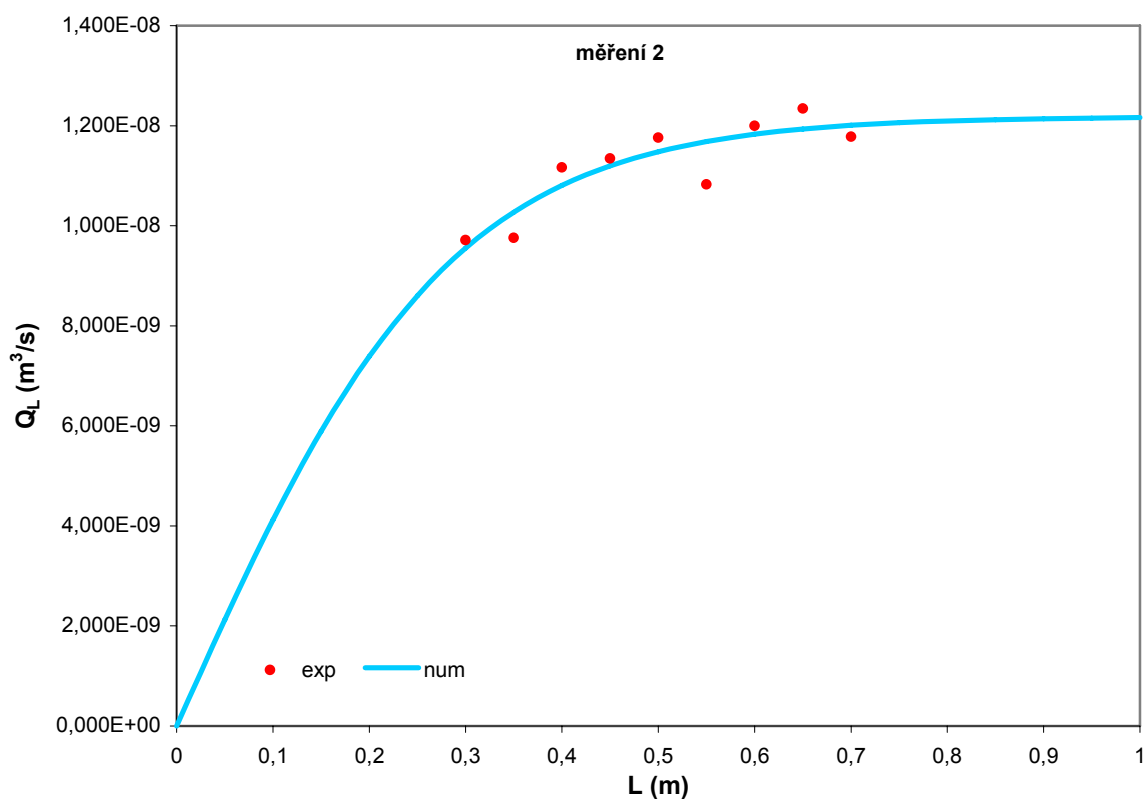
Měření 1	L (m)	flux ($l \cdot m^{-2} \cdot h^{-1}$)	podtlak (kPa)	$Q_{L,exp}$ (m^3/s)	$Q_{L,vyp}$ (m^3/s)
$t = 21,2 \text{ } ^\circ\text{C}$ $\mu = 9,7314 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ $\rho = 997,9 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$	0,7	54,80	-62,19	1,038E-08	9,922E-09
	0,65	57,13	-62,12	1,005E-08	9,829E-09
	0,6	56,80	-62,21	9,220E-09	9,729E-09
	0,55	62,59	-62,28	9,314E-09	9,585E-09
	0,5	67,31	-62,21	9,104E-09	9,366E-09
	0,45	74,81	-62,17	9,107E-09	9,079E-09
	0,4	82,07	-62,14	8,881E-09	8,701E-09
	0,35	91,13	-62,17	8,628E-09	8,212E-09
	0,3	90,28	-62,18	7,327E-09	7,574E-09



Obrázek 27: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 1

Tabulka 5: Přehled naměřených hodnot fluxů a $Q_{L,exp}$ pro měření 2

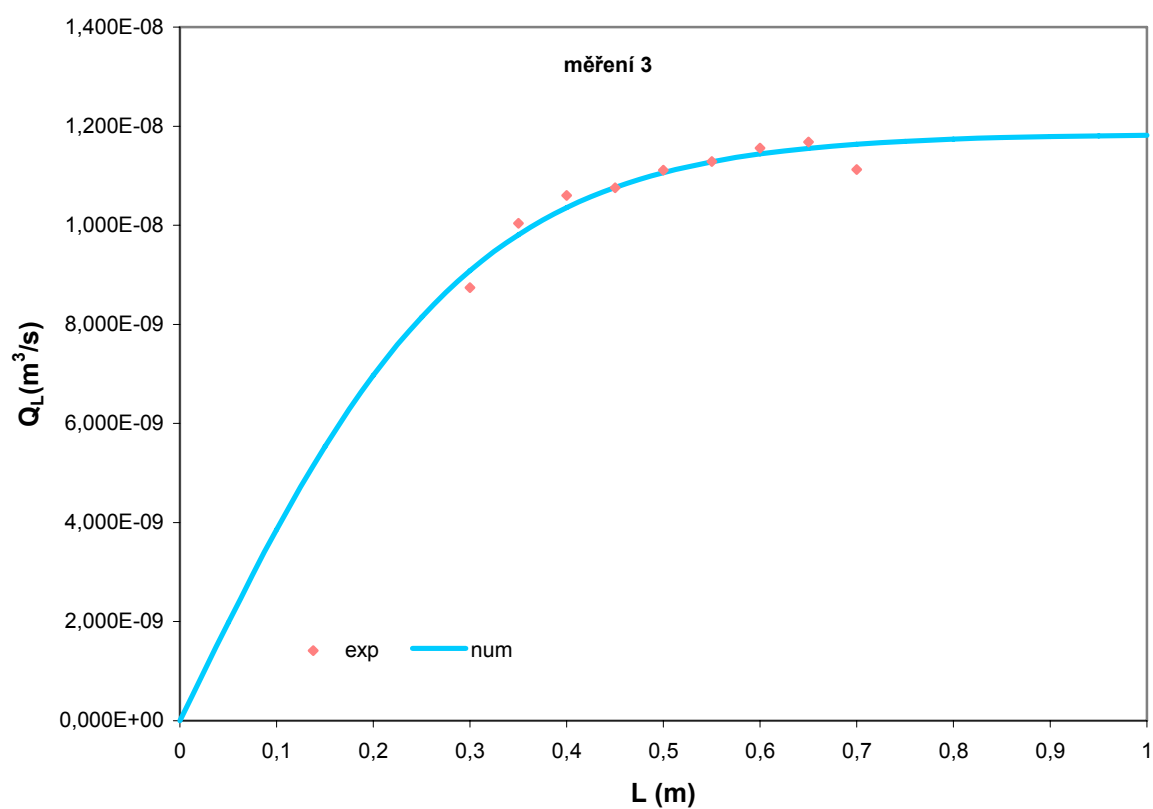
Měření 2	L (m)	flux ($l \cdot m^{-2} \cdot h^{-1}$)	podtlak (kPa)	$Q_{L,exp}$ (m^3/s)	$Q_{L,vyp}$ (m^3/s)
$t = 21,5 \text{ } ^\circ\text{C}$ $\mu = 9,6615 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ $\rho = 997,8 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$	0,7	62,21	-62,06	1,178E-08	1,198E-08
	0,65	70,20	-62,18	1,234E-08	1,193E-08
	0,6	73,92	-62,15	1,200E-08	1,182E-08
	0,55	72,76	-62,16	1,083E-08	1,168E-08
	0,5	86,94	-62,11	1,176E-08	1,147E-08
	0,45	93,20	-62,17	1,135E-08	1,119E-08
	0,4	103,19	-62,12	1,117E-08	1,079E-08
	0,35	103,04	-62,28	9,755E-09	1,028E-08
	0,3	119,66	-62,12	9,711E-09	9,540E-09



Obrázek 28: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 2

Tabulka 6: Přehled naměřených hodnot fluxů a $Q_{L,exp}$ pro měření 3

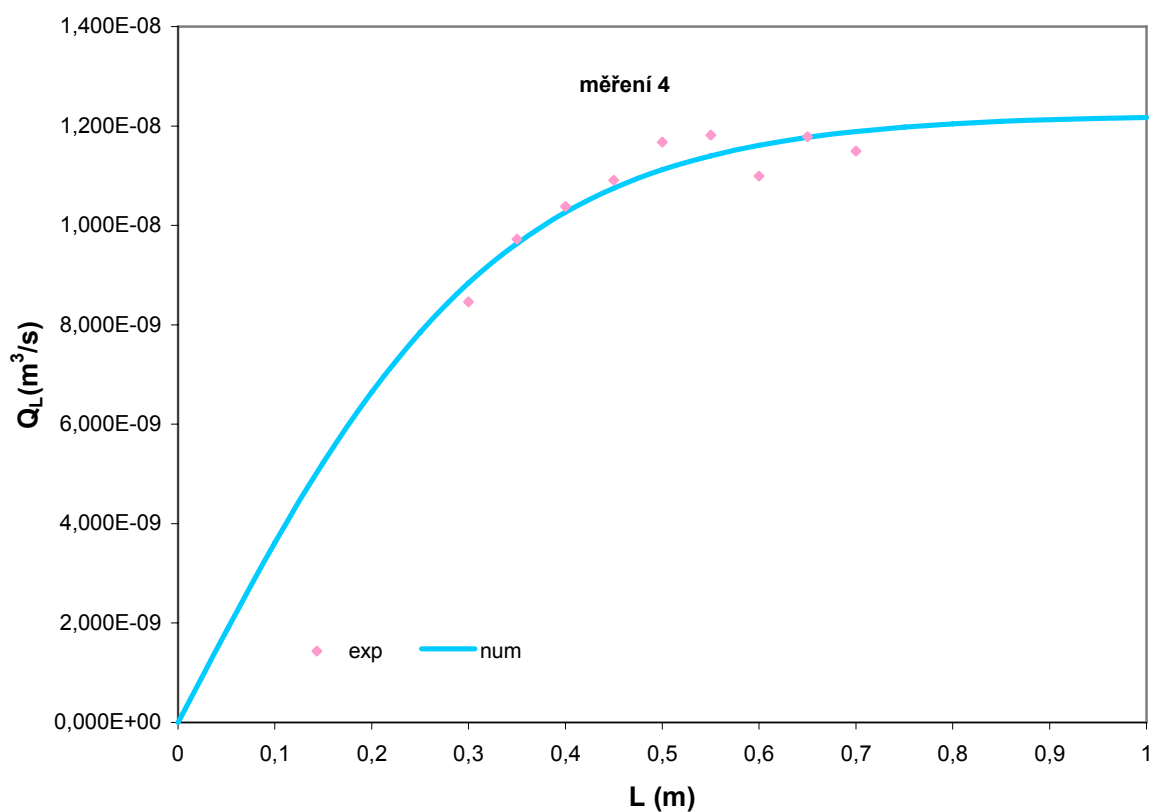
Měření 3	L (m)	flux ($l \cdot m^{-2} \cdot h^{-1}$)	podtlak (kPa)	$Q_{L,exp}$ (m^3/s)	$Q_{L,vyp}$ (m^3/s)
$t = 18,5 \text{ } ^\circ\text{C}$ $\mu = 1,0403 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ $\rho = 998,4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$	0,7	58,76	-62,10	1,113E-08	1,162E-08
	0,65	66,43	-62,16	1,168E-08	1,155E-08
	0,6	71,21	-62,16	1,156E-08	1,143E-08
	0,55	75,87	-62,18	1,129E-08	1,128E-08
	0,5	82,16	-62,16	1,111E-08	1,105E-08
	0,45	88,37	-62,14	1,076E-08	1,075E-08
	0,4	97,97	-62,18	1,060E-08	1,035E-08
	0,35	106,03	-62,10	1,004E-08	9,792E-09
	0,3	107,71	-62,22	8,741E-09	9,087E-09



Obrázek 29: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 3

Tabulka 7: Přehled naměřených hodnot fluxů a $Q_{L,exp}$ pro měření 4

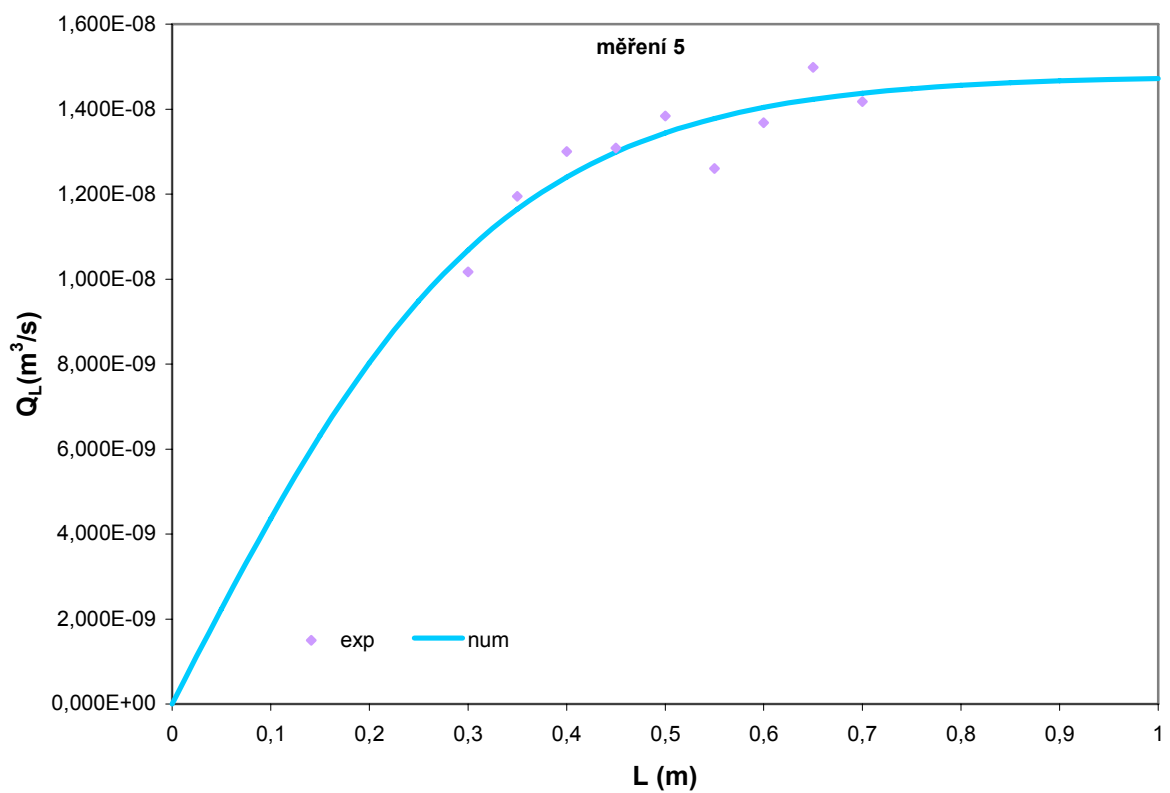
Měření 4	L (m)	flux ($l \cdot m^{-2} \cdot h^{-1}$)	podtlak (kPa)	$Q_{L,exp}$ (m^3/s)	$Q_{L,vyp}$ (m^3/s)
$t = 18,5 \text{ } ^\circ\text{C}$ $\mu = 1,0403 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ $\rho = 998,4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$	0,7	60,70	-62,10	1,150E-08	1,187E-08
	0,65	67,01	-62,24	1,178E-08	1,178E-08
	0,6	67,71	-62,23	1,099E-08	1,162E-08
	0,55	79,41	-62,14	1,182E-08	1,139E-08
	0,5	86,33	-62,22	1,168E-08	1,112E-08
	0,45	89,63	-62,12	1,091E-08	1,073E-08
	0,4	95,90	-62,23	1,038E-08	1,027E-08
	0,35	102,74	-62,16	9,727E-09	9,630E-09
	0,3	104,24	-62,17	8,459E-09	8,837E-09



Obrázek 30: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 4

Tabulka 8: Přehled naměřených hodnot fluxů a $Q_{L,exp}$ pro měření 5

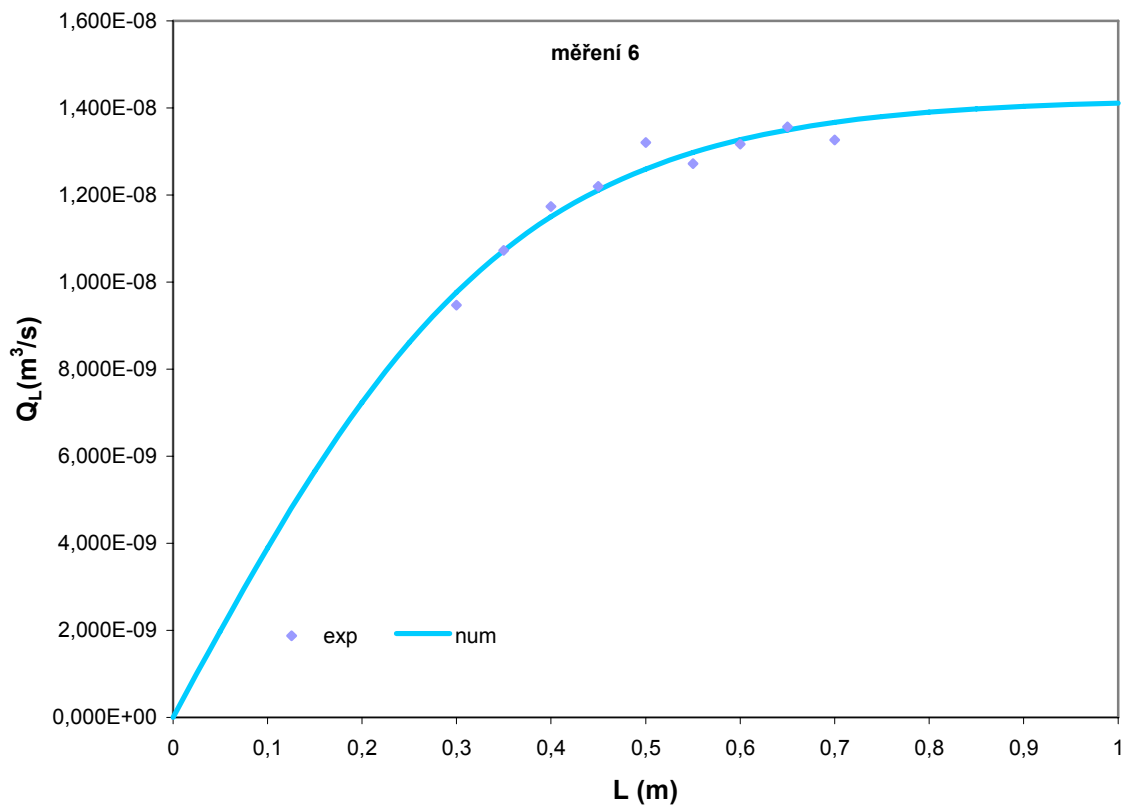
Měření 5	L (m)	flux ($l \cdot m^{-2} \cdot h^{-1}$)	podtlak (kPa)	$Q_{L,exp}$ (m^3/s)	$Q_{L,vyp}$ (m^3/s)
$t = 19,2 \text{ } ^\circ\text{C}$ $\mu = 1,02216 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ $\rho = 998,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	0,7	74,85	-62,06	1,418E-08	1,434E-08
	0,65	85,23	-62,14	1,499E-08	1,422E-08
	0,6	84,27	-62,14	1,368E-08	1,402E-08
	0,55	84,72	-62,18	1,261E-08	1,378E-08
	0,5	102,32	-62,23	1,384E-08	1,345E-08
	0,45	107,46	-62,16	1,308E-08	1,298E-08
	0,4	120,14	-62,24	1,300E-08	1,241E-08
	0,35	126,20	-62,09	1,195E-08	1,162E-08
	0,3	125,35	-62,11	1,017E-08	1,067E-08



Obrázek 31: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 5

Tabulka 9: Přehled naměřených hodnot fluxů a $Q_{L,exp}$ pro měření 6

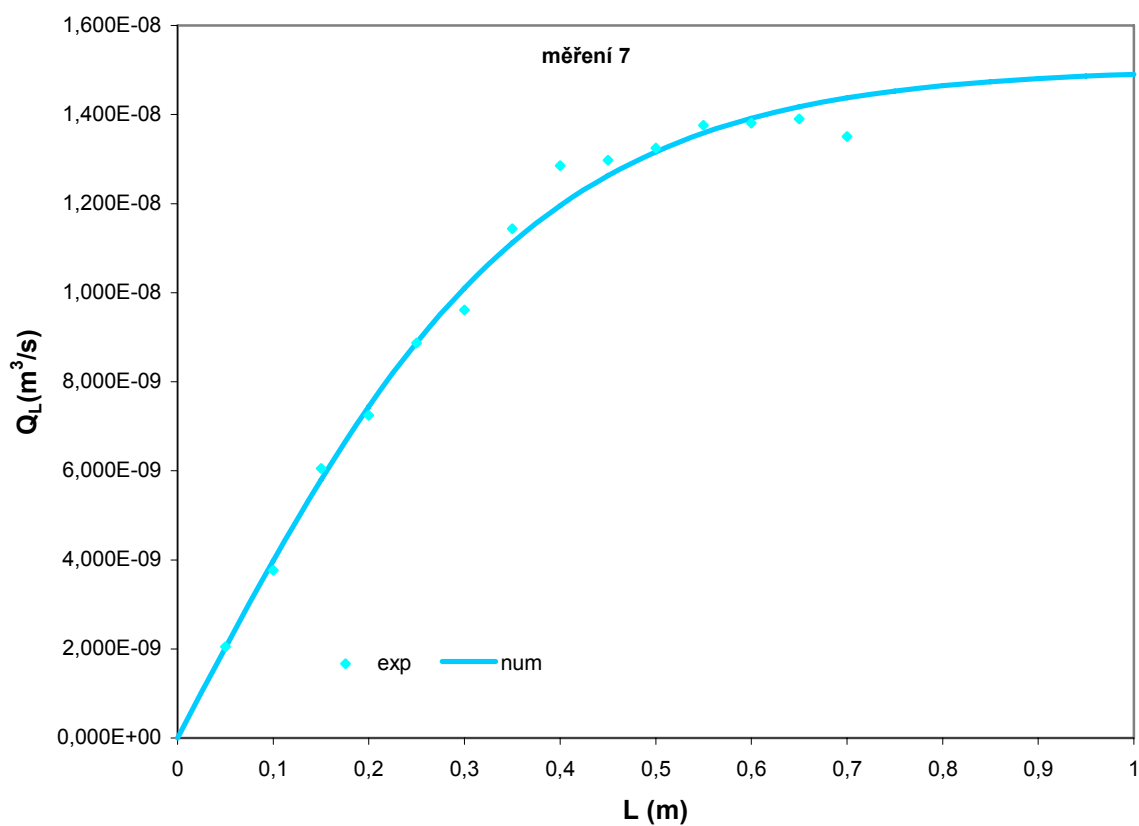
Měření 6	L (m)	flux ($l \cdot m^{-2} \cdot h^{-1}$)	podtlak (kPa)	$Q_{L,exp}$ (m^3/s)	$Q_{L,vyp}$ (m^3/s)
$t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ $\mu = 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot s$ $\rho = 998,2 \text{ kg} \cdot m^{-3}$	0,7	70,04	-62,13	1,326E-08	1,365E-08
	0,65	77,14	-62,16	1,356E-08	1,349E-08
	0,6	81,14	-62,14	1,317E-08	1,326E-08
	0,55	85,47	-62,16	1,272E-08	1,297E-08
	0,5	97,63	-62,17	1,321E-08	1,259E-08
	0,45	100,22	-62,17	1,220E-08	1,211E-08
	0,4	108,45	-62,18	1,174E-08	1,149E-08
	0,35	113,31	-62,24	1,073E-08	1,073E-08
	0,3	116,71	-62,20	9,472E-09	9,767E-09



Obrázek 32: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 6

Tabulka 10: Přehled naměřených hodnot fluxů a $Q_{L,exp}$ pro měření 7

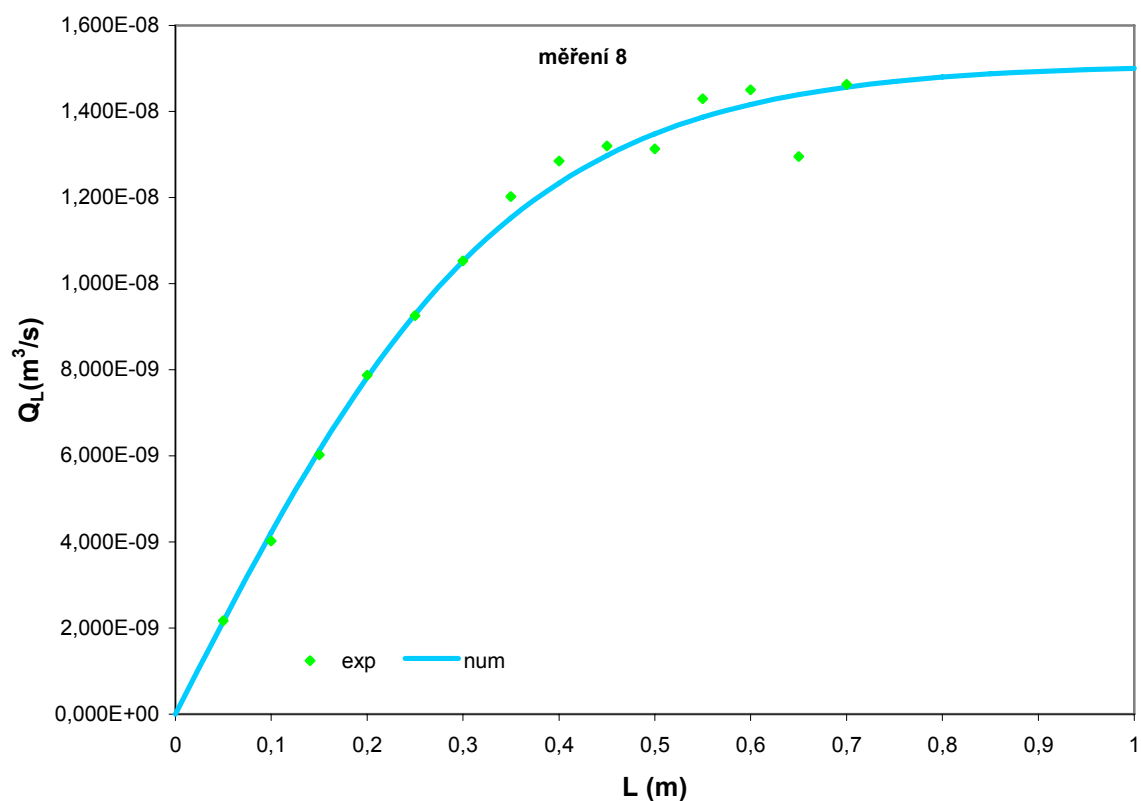
Měření 7	L (m)	flux ($l \cdot m^{-2} \cdot h^{-1}$)	podtlak (kPa)	$Q_{L,exp}$ (m^3/s)	$Q_{L,vyp}$ (m^3/s)
$t = 23 \text{ } ^\circ\text{C}$ $\mu = 9,321 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ $\rho = 997,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	0,7	71,34	-62,13	1,351E-08	1,436E-08
	0,65	79,07	-62,12	1,390E-08	1,416E-08
	0,6	85,05	-62,17	1,380E-08	1,391E-08
	0,55	92,45	-62,15	1,376E-08	1,358E-08
	0,5	97,96	-62,13	1,325E-08	1,315E-08
	0,45	106,57	-62,19	1,297E-08	1,263E-08
	0,4	118,75	-62,16	1,285E-08	1,195E-08
	0,35	120,79	-62,10	1,144E-08	1,110E-08
	0,3	118,45	-62,08	9,613E-09	1,008E-08
	0,25	131,10	-62,16	8,868E-09	8,870E-09
	0,2	133,99	-62,14	7,248E-09	7,434E-09
	0,15	149,19	-62,21	6,054E-09	5,803E-09
	0,1	139,18	-62,12	3,766E-09	3,976E-09
	0,05	151,48	-62,16	2,048E-09	2,026E-09



Obrázek 33: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 7

Tabulka 11: Přehled naměřených hodnot fluxů a $Q_{L,exp}$ pro měření 8

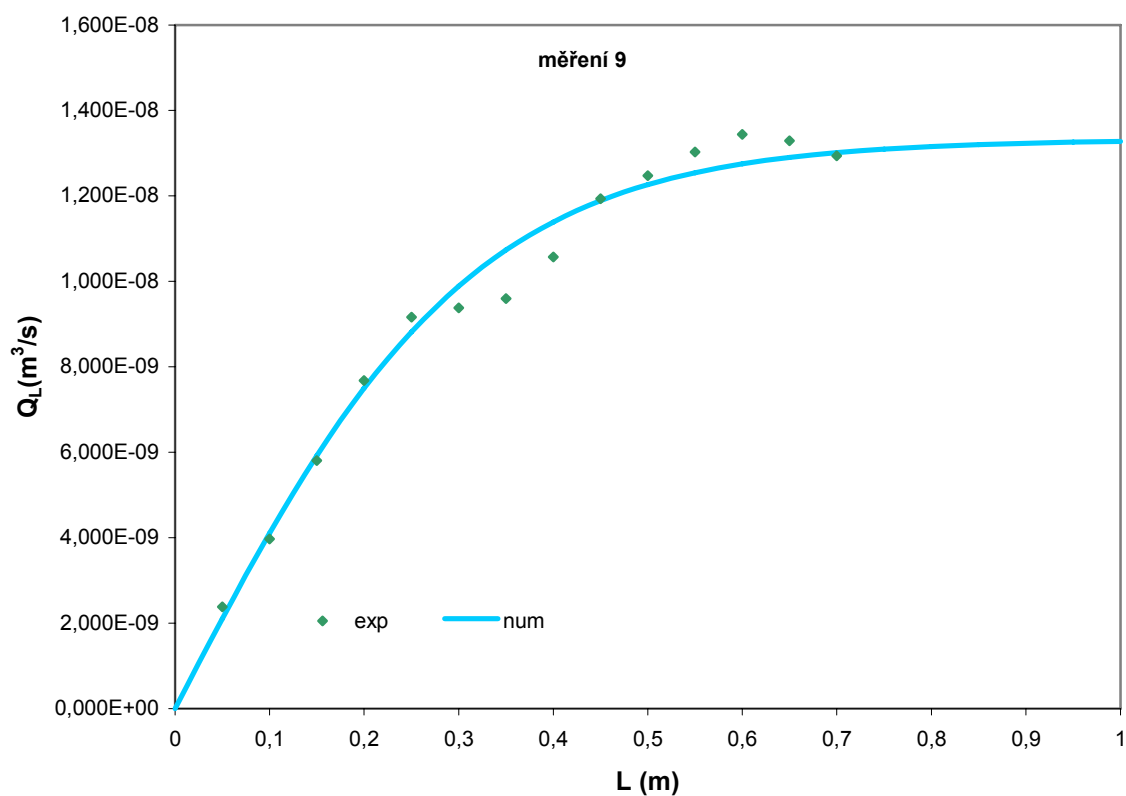
Měření 8	L (m)	flux ($l \cdot m^{-2} \cdot h^{-1}$)	podtlak (kPa)	$Q_{L,exp}$ (m^3/s)	$Q_{L,vyp}$ (m^3/s)
$t = 20,8 \text{ } ^\circ\text{C}$ $\mu = 9,8264 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ $\rho = 998 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$	0,7	77,25	-62,19	1,463E-08	1,456E-08
	0,65	73,64	-62,18	1,295E-08	1,439E-08
	0,6	89,37	-62,17	1,451E-08	1,416E-08
	0,55	96,07	-62,19	1,429E-08	1,386E-08
	0,5	97,09	-62,24	1,313E-08	1,349E-08
	0,45	108,41	-62,24	1,320E-08	1,299E-08
	0,4	118,75	-62,26	1,285E-08	1,235E-08
	0,35	127,02	-62,19	1,203E-08	1,152E-08
	0,3	129,70	-62,16	1,053E-08	1,051E-08
	0,25	136,88	-62,17	9,258E-09	9,284E-09
	0,2	145,58	-62,17	7,875E-09	7,819E-09
	0,15	148,35	-62,15	6,020E-09	6,119E-09
	0,1	148,63	-62,16	4,022E-09	4,213E-09
	0,05	160,71	-62,21	2,173E-09	2,151E-09



Obrázek 34: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 8

Tabulka 12: Přehled naměřených hodnot fluxů a $Q_{L,exp}$ pro měření 9

Měření 9	L (m)	flux ($l \cdot m^{-2} \cdot h^{-1}$)	podtlak (kPa)	$Q_{L,exp}$ (m^3/s)	$Q_{L,vyp}$ (m^3/s)
$t = 20,5 \text{ } ^\circ\text{C}$ $\mu = 9,899 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ $\rho = 998,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	0,7	68,32	-62,11	1,294E-08	1,299E-08
	0,65	75,56	-62,15	1,329E-08	1,289E-08
	0,6	82,81	-62,16	1,344E-08	1,274E-08
	0,55	87,52	-62,22	1,302E-08	1,254E-08
	0,5	92,20	-62,18	1,247E-08	1,226E-08
	0,45	98,03	-62,12	1,193E-08	1,187E-08
	0,4	97,52	-62,16	1,057E-08	1,138E-08
	0,35	101,12	-62,20	9,594E-09	1,073E-08
	0,3	115,55	-62,16	9,378E-09	9,881E-09
	0,25	135,42	-62,17	9,160E-09	8,813E-09
	0,2	141,91	-62,19	7,677E-09	7,497E-09
	0,15	143,07	-62,19	5,806E-09	5,920E-09
	0,1	146,70	-62,19	3,970E-09	4,105E-09
	0,05	176,06	-62,13	2,380E-09	2,101E-09



Obrázek 35: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 9

Závislosti výtoku kapaliny z vlákna na tlaku:

Tabulka 13: Závislost výtoku kapaliny z vlákna na tlaku pro délku $L = 0,3\text{m}$

L = 0,3 m		
podtlak (kPa)	flux ($\text{l}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{h}^{-1}$)	$Q_{L\text{exp}}$ (m^3/s)
-49,94	78	6,299E-09
-62,17	104	8,459E-09
-69,88	108	8,772E-09
Vynechaná hodnota: odchýlená		
-80,00	115	9,334E-09

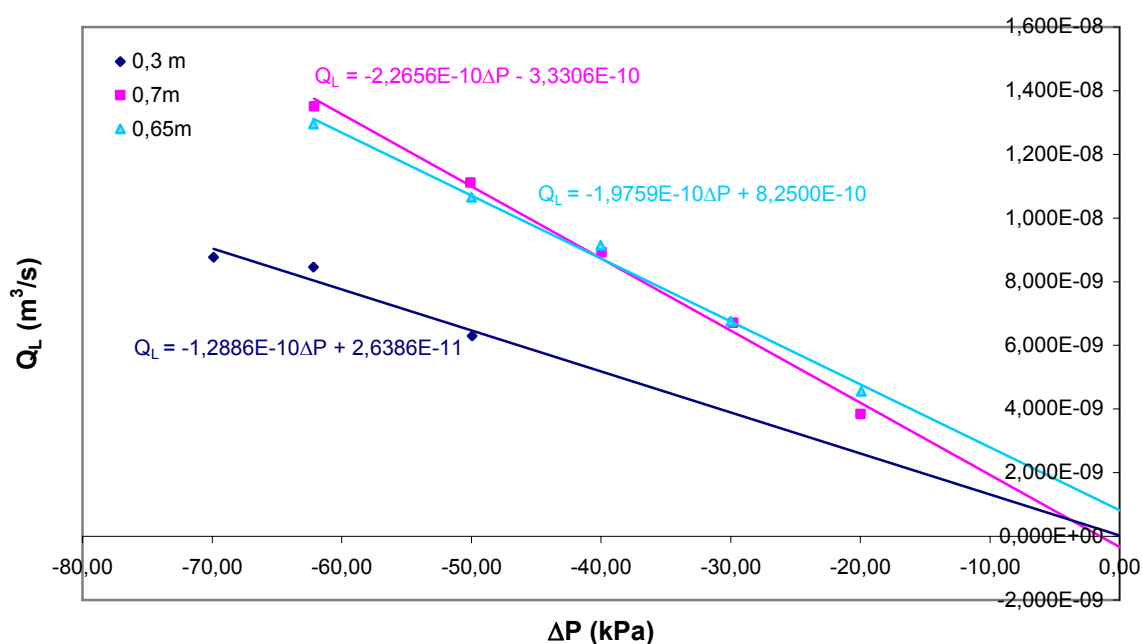
Tabulka 14: Závislost výtoku kapaliny z vlákna na tlaku pro délku $L = 0,65\text{m}$

L = 0,65 m		
podtlak (kPa)	flux ($\text{l}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{h}^{-1}$)	$Q_{L\text{exp}}$ (m^3/s)
-19,92	25,92	4,557E-09
-30,00	38,42	6,755E-09
-40,03	52,02	9,147E-09
-49,99	60,59	1,065E-08
-62,18	73,64	1,295E-08

Tabulka 15: Závislost výtoku kapaliny z vlákna na tlaku pro délku $L = 0,7\text{m}$

L = 0,7 m		
podtlak (kPa)	flux ($\text{l}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{h}^{-1}$)	$Q_{L\text{exp}}$ (m^3/s)
-19,98	20,27	3,839E-09
-29,79	35,41	6,705E-09
-39,96	47,10	8,919E-09
-50,07	58,68	1,111E-08
-62,13	71,34	1,351E-08

Grafické znázornění:



Obrázek 36: Lineární závislost velikosti výtoku z vlákna na hnací síle (ΔP)

Experimenty bylo ověřeno, že hodnota výtoku permeátu z vlákna vzrůstá s tlakem lineárně. Odchyly od trendu křivek do nulové hodnoty jsou způsobeny experimentálními chybami.

5.6. Vyhodnocení parametrů modelu z experimentů

Vnitřní průměr vlákna ($2R$) a především permeabilita stěny K se nezávislým měřením stanovují obtížně. Pro jejich stanovení byl použit vztah pro výtok jedním vláknem (viz kap.4)

$$Q_L = Q(z = L) = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\sqrt{\beta}}{L} (P_o - P_{iL}) \tanh(\sqrt{\beta}), \quad (5.3)$$

kde parametr $\sqrt{\beta} = \frac{4L}{R} \sqrt{\frac{K}{R}}$, μ je dynamická viskozita kapaliny, $P_o - P_{iL}$ je rozdíl tlaku na vnější straně vlákna a tlaku na výtoku z vlákna a K permeabilita porézní stěny vlákna (m),

$$K = \frac{1}{2\pi R \cdot R_m}.$$

Vztah (5.3) byl dále upraven na tvar

$$\frac{Q_L \cdot \mu}{P_o - P_{iL}} = A \cdot \tanh(aL), \quad (5.4)$$

kde $a = \frac{4}{R} \sqrt{\frac{K}{R}}$ a $A = \frac{\pi R^4}{8} a$.

Vztah (5.4) lze psát

$$y = A \cdot x, \quad (5.5)$$

kde $y = \frac{Q_L \cdot \mu}{P_o - P_{iL}}$ a $x = \tanh(aL)$.

Pro danou hodnotu a byl nejlepší odhad parametru A určen lineární regresi (metodou nejmenších čtverců) z experimentálních dat.

5.6.1. Odvození vztahu pro odhad parametru A

Odhad parametru A byl určen metodou nejmenších čtverců tak, že byl minimalizován součet čtverců odchylek mezi naměřenými hodnotami a hodnotami vypočtenými z modelu (5.5).

$$\min_A S(A) = \min_A \sum_i (y_i - Ax_i)^2 \quad (5.6)$$

Podmínka pro minimum S jako funkce proměnné A je

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0 \quad (5.7)$$

Derivováním rovnice (5.6) byl získán vztah

$$\frac{\partial}{\partial A} \left[\sum_i (y_i - Ax_i)^2 \right] = \sum_i 2(y_i - Ax_i)(-x_i) = -2 \sum_i (y_i - Ax_i)x_i \quad (5.8)$$

Položením derivace rovno nule, je získán vztah pro nejlepší odhad \hat{A}

$$\sum_i (y_i - \hat{A}x_i)x_i = 0 \text{ a dále } \sum_i y_i x_i - \hat{A} \sum_i x_i^2 = 0 \quad (5.9)$$

$$\hat{A} = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} \quad (5.10)$$

Tento odhad \hat{A} je však jen podmíněně nejlepší (pro danou hodnotu a). Nejlepší odhad obou parametrů \hat{A} , a (ve smyslu metody nejmenších čtverců) dostaneme tak, že minimalizujeme součet čtverců odchylek jako funkci proměnné a následujícím způsobem

$$\min_a S(a) = \min_a \sum_i (y_i - \hat{A}x_i)^2 \quad (5.11)$$

kde hodnota \hat{A} je dána vztahem (5.10) (a je tedy funkcí a prostřednictvím proměnných x_i).

Nakonec z nejlepších odhadů a , A získáme poloměr dutého vlákna a permeabilitu membrány.

$$R = \sqrt[4]{\frac{8A}{\pi a}}, \quad K = \frac{a^2 R^3}{16}. \quad (5.12)$$

5.6.2. Vyhodnocené parametry modelu z experimentálních dat

Tabulka 16: Výtoky permeátu z vlákna z exp. měření a vypočtená z numerického modelu pro měření 1, 2, 3

L [m]	$Q_{L1 \text{ exp}}$ (m^3/s)	$Q_{L1 \text{ vyp}}$ (m^3/s)	$Q_{L2 \text{ exp}}$ (m^3/s)	$Q_{L2 \text{ vyp}}$ (m^3/s)	$Q_{L3 \text{ exp}}$ (m^3/s)	$Q_{L3 \text{ vyp}}$ (m^3/s)
0		0		0		0
0,05		1,619E-09		2,122E-09		1,981E-09
0,1		3,157E-09		4,119E-09		3,854E-09
0,15		4,550E-09		5,893E-09		5,534E-09
0,2		5,757E-09		7,392E-09		6,970E-09
0,25		6,763E-09		8,605E-09		8,149E-09
0,3	7,327E-09	7,576E-09	9,711E-09	9,552E-09	8,741E-09	9,085E-09
0,35	8,628E-09	8,216E-09	9,755E-09	1,027E-08	1,004E-08	9,808E-09
0,4	8,881E-09	8,709E-09	1,083E-08	1,081E-08	1,060E-08	1,035E-08
0,45	9,104E-09	9,084E-09	1,117E-08	1,120E-08	1,076E-08	1,076E-08
0,5	9,107E-09	9,365E-09	1,135E-08	1,148E-08	1,111E-08	1,106E-08
0,55	9,220E-09	9,573E-09	1,176E-08	1,169E-08	1,113E-08	1,128E-08
0,6	9,314E-09	9,727E-09	1,178E-08	1,183E-08	1,129E-08	1,144E-08
0,65	1,005E-08	9,841E-09	1,200E-08	1,193E-08	1,156E-08	1,155E-08
0,7	1,038E-08	9,923E-09	1,234E-08	1,201E-08	1,168E-08	1,164E-08
0,75		9,984E-09		1,206E-08		1,170E-08
0,8		1,003E-08		1,210E-08		1,174E-08
0,85		1,006E-08		1,212E-08		1,177E-08
0,9		1,008E-08		1,214E-08		1,179E-08
0,95		1,010E-08		1,215E-08		1,181E-08
1		1,011E-08		1,216E-08		1,182E-08
A	1,587E-16		1,892E-16		1,981E-16	
a	3,219		3,519		3,377	
ΔP	62,2	kPa	62,2	kPa	62,2	kPa
R	1,059E-04	m	1,082E-04	m	1,106E-04	m
K	7,682E-13	m	9,797E-13	m	9,629E-13	m

Tabulka 17: Výtoky permeátu z vlákna z exp. měření a vypočtená z numerického modelu pro měření 4, 5, 6

L [m]	$Q_{L4 \text{ exp}}$ (m^3/s)	$Q_{L4 \text{ vyp}}$ (m^3/s)	$Q_{L5 \text{ exp}}$ (m^3/s)	$Q_{L5 \text{ vyp}}$ (m^3/s)	$Q_{L6 \text{ exp}}$ (m^3/s)	$Q_{L6 \text{ vyp}}$ (m^3/s)
0		0		0		0
0,05		1,849E-09		2,232E-09		1,983E-09
0,1		3,615E-09		4,365E-09		3,890E-09
0,15		5,230E-09		6,316E-09		5,657E-09
0,2		6,648E-09		8,030E-09		7,238E-09
0,25		7,852E-09		9,485E-09		8,610E-09
0,3	8,459E-09	8,842E-09	1,017E-08	1,068E-08	9,472E-09	9,768E-09
0,35	9,727E-09	9,637E-09	1,195E-08	1,164E-08	1,073E-08	1,072E-08
0,4	1,038E-08	1,026E-08	1,261E-08	1,240E-08	1,174E-08	1,150E-08
0,45	1,091E-08	1,075E-08	1,300E-08	1,299E-08	1,220E-08	1,211E-08
0,5	1,099E-08	1,112E-08	1,308E-08	1,344E-08	1,272E-08	1,260E-08
0,55	1,150E-08	1,140E-08	1,368E-08	1,378E-08	1,317E-08	1,298E-08
0,6	1,168E-08	1,161E-08	1,384E-08	1,404E-08	1,321E-08	1,327E-08
0,65	1,178E-08	1,177E-08	1,418E-08	1,423E-08	1,326E-08	1,350E-08
0,7	1,182E-08	1,189E-08	1,499E-08	1,437E-08	1,356E-08	1,367E-08
0,75		1,198E-08		1,448E-08		1,380E-08
0,8		1,204E-08		1,456E-08		1,390E-08
0,85		1,209E-08		1,462E-08		1,398E-08
0,9		1,213E-08		1,466E-08		1,404E-08
0,95		1,215E-08		1,470E-08		1,408E-08
1		1,217E-08		1,472E-08		1,411E-08
A	2,045E-16		2,430E-16		2,290E-16	
a	3,047		3,043		2,808	
ΔP	62,2	kPa	62,2	kPa	62,2	kPa
R	1,143E-04	m	1,194E-04	m	1,200E-04	m
K	8,674E-13	m	9,853E-13	m	8,526E-13	m

Tabulka 18: Výtoky permeátu z vlákna z exp. měření a vypočtená z numerického modelu pro měření 7, 8, 9

L [m]	Q_{L7}^{exp} (m^3/s)	Q_{L7}^{vyp} (m^3/s)	Q_{L8}^{exp} (m^3/s)	Q_{L8}^{vyp} (m^3/s)	Q_{L9}^{exp} (m^3/s)	Q_{L9}^{vyp} (m^3/s)
0		0		0		0
0,05	2,048E-09	2,027E-09	2,173E-09	2,151E-09	2,380E-09	2,104E-09
0,1	3,766E-09	3,981E-09	4,022E-09	4,216E-09	3,970E-09	4,105E-09
0,15	6,054E-09	5,801E-09	6,020E-09	6,124E-09	5,806E-09	5,921E-09
0,2	7,248E-09	7,441E-09	7,875E-09	7,823E-09	7,677E-09	7,498E-09
0,25	8,868E-09	8,876E-09	9,258E-09	9,289E-09	9,160E-09	8,818E-09
0,3	9,613E-09	1,010E-08	1,053E-08	1,052E-08	9,378E-09	9,887E-09
0,35	1,144E-08	1,112E-08	1,203E-08	1,153E-08	9,594E-09	1,073E-08
0,4	1,285E-08	1,195E-08	1,285E-08	1,234E-08	1,057E-08	1,139E-08
0,45	1,297E-08	1,263E-08	1,320E-08	1,298E-08	1,193E-08	1,189E-08
0,5	1,325E-08	1,316E-08	1,313E-08	1,348E-08	1,247E-08	1,226E-08
0,55	1,376E-08	1,359E-08	1,429E-08	1,387E-08	1,302E-08	1,254E-08
0,6	1,380E-08	1,392E-08	1,451E-08	1,417E-08	1,344E-08	1,275E-08
0,65	1,390E-08	1,417E-08	1,295E-08	1,439E-08	1,329E-08	1,290E-08
0,7	1,351E-08	1,437E-08	1,463E-08	1,457E-08	1,294E-08	1,301E-08
0,75		1,453E-08		1,470E-08		1,310E-08
0,8		1,465E-08		1,480E-08		1,316E-08
0,85		1,474E-08		1,487E-08		1,320E-08
0,9		1,481E-08		1,493E-08		1,323E-08
0,95		1,486E-08		1,497E-08		1,326E-08
1		1,490E-08		1,501E-08		1,327E-08
A	2,253E-16		2,386E-16		2,119E-16	
a	2,713		2,868		3,186	
ΔP	62,2	kPa	62,2	kPa	62,2	kPa
R	1,206E-04	m	1,206E-04	m	1,141E-04	m
K	8,067E-13	m	9,026E-13	m	9,421E-13	m

$R_{stř}$	0,000115	m	směrodatná odchylka R	5,691E-06	sm.odch./Rstř	4,96 %
$K_{stř}$	8,964E-13	m	směrodatná odchylka K	7,799E-14	sm.odch./Kstř	8,70 %

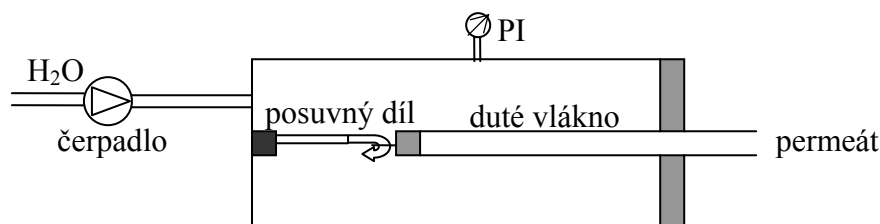
5.7. Diskuse a doporučení

Zjednodušený matematický model toku kapaliny dutým vláknem dobře prokládal naměřená experimentální data. Výrobce stanovená hodnota vnitřního poloměru dutého vlákna byla 0,12 mm. Z experimentálních dat, pomocí zjednodušeného modelu toku kapaliny vláknem, byla stanovena hodnota vnitřního poloměru dutého vlákna 0,115 mm. Relativní chyba od výrobcem uváděné hodnoty je 4,48 %. Hodnotu permeability membrány výrobce neuvádí. Z experimentálních dat byla stanovena hodnota permeability dutých vláken $8,964 \cdot 10^{-13}$ m.

Z experimentálních výsledků je patrné, že při kratších délkách roste průtok vláknou lineárně s délkou, zatímco při vyšších délkách je nárůst pomalejší. Výtok permeátu z vlákna při zvýšení délky vlákna z 0,1 m na 0,2 m vzroste přibližně 1,8 krát, při zvýšení délky vlákna z 0,2 m na 0,4 m vzroste přibližně 1,5 krát a z 0,4 na 0,8 vzroste přibližně 1,2 krát.

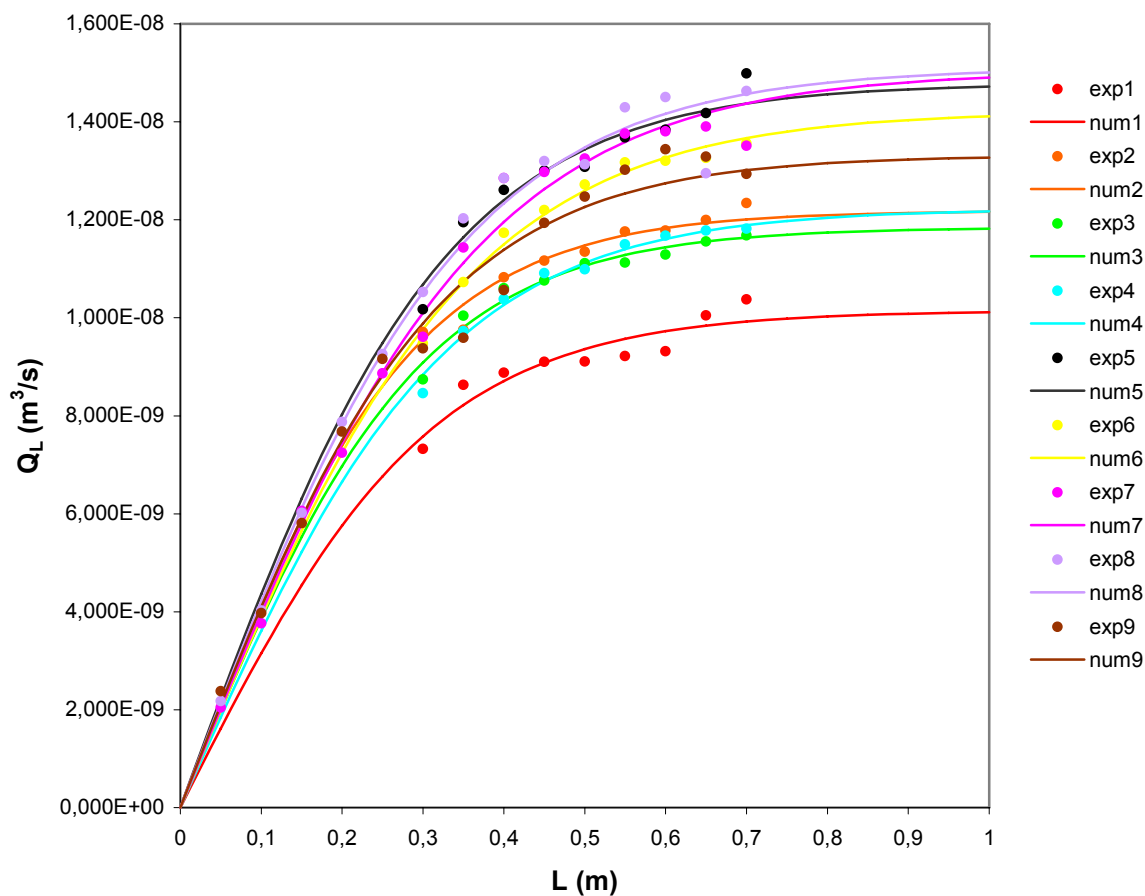
Proto je lépe mít více kratších vláken, než méně delších, i když filtrační plocha je stejná. Maximální délka vlákna by měla být cca 0,6 m. Přibližně u této hodnoty končí znatelný růst výtoku permeátu z vlákna vzhledem k růstu délky vlákna.

Experimentální měření navrhuji ověřit na zařízení postaveném na principu tlakové nádoby pouze s jedním vláknem. Vláknem by mělo být uchyceno na posuvném principu, aby ho bylo možné zkracovat. Voda by byla vtlačována objemovým čerpadlem do uzavřeného prostoru s nataženým vláknem. Při tomto uspořádání by bylo možné dosáhnout větší hnací síly (nebylo by tu omezení dané tenzí par, ale pouze omezení dané konstrukcí čerpadla). Vláknem uvnitř tlakové nádoby by mělo být na jednom konci vlákna dobře utěsněno od okolní kapaliny, ale takovým způsobem, aby se dalo těsnění snadno rozebírat a vláknem zkracovat. Druhý konec vlákna by byl otevřený a utěsněný od okolí z vnější strany. Vytékající permeát by byl jímán do nádoby, v které by byl pozorován jeho přírůstek s časem. Viz obrázek 37.



Obrázek 37: Schéma nového typu experimentálního zařízení

Celkové grafické srovnání naměřených a vypočtených dat:



Obrázek 38: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, všechna měření

První měření byla zatížena větší experimentální chybou, protože duté vlákno bylo prošito silikon-kaučukovým těsněním, a celé jím bylo následně protaženo. Takto se mohlo vlákno více poškodit, než když se protahovaly silikon-kaučukovým těsněním oba konce dutého vlákna zvlášť.

6 Závěr

Výsledkem této diplomové práce je vytvoření matematického modelu dead-end filtrace suspenze v newtonské kapalině membránou z dutého vlákna, návrh experimentálního zařízení k ověření matematického modelu pro ustálený laminární tok newtonské nestlačitelné tekutiny dutým vláknem, a provedení experimentálních měření.

Diplomovou práci tvoří tři části. V první, úvodní části je vypracována literární rešerše zabývající se využitím membrán z dutých vláken při mikrofiltraci a ultrafiltraci vodných roztoků. Dále byla vytvořena rešerše způsobů matematického modelování mikrofiltrace a ultrafiltrace v režimu dead-end pro membrány z dutých vláken.

Obsahem druhé části je sestavení kompletního matematického modelu dead-end mikrofiltrace pro membránu z dutých vláken. Matematický model byl řešen metodou sítí. K diskretizaci diferenciální rovnice druhého řádu změny tlaku v dutině vlákna byla použita náhrada druhé derivace centrální formulí. Při diskretizaci rovnice diferenciální změny růstu koláče bylo použito Crank-Nicholsonovo schéma. Numerická metoda byla implementována v Microsoft Excel.

Numerickými experimenty byly sledovány vlivy jednotlivých parametrů modelu na propustnost vytvořeného koláče na povrchu membrány a hydrodynamickou propustnost membrány. Dead-end filtrace lze provádět dvěma způsoby, proto byla zkoumána filtrace za konstantní rychlosti a filtrace za konstantního tlakového rozdílu. Permeabilita usazeného koláče a hydrodynamická permeabilita dutého vlákna velmi ovlivňují rychlost toku filtrátu membránou. Při nízké hydrodynamické permeabilitě membrány probíhá filtrace v celém vlákně. Při vysokých hodnotách hydrodynamické propustnosti membrány veškerý nástřík proteče otevřeným koncem vlákna, a ve zbývající části vlákna vzniká neaktivní část. Situace se mění, pokud koláč na membráně je špatně propustný, pak i při velké hydrodynamické propustnosti membrány se hlavní intenzita toku přesouvá od otevřeného konce vlákna směrem k jeho středu s probíhající filtrace a postupným zanášením konců vlákna. Neaktivní část v okolí středu vlákna postupně mizí.

Ve třetí části bylo vytvořeno experimentální zařízení k ověření matematického modelu ustáleného laminárního toku kapaliny membránou z dutého vlákna za izotermních podmínek. Na vytvořeném zařízení byly provedeny experimentální měření. Z experimentálních dat pomocí zjednodušeného modelu toku kapaliny membránou z dutého vlákna byla získána

hydrodynamická propustnost a vnitřní poloměr dutého vlákna. Relativní odchylka mezi vnitřním poloměrem udávaným výrobcem a vypočteným je 4%. Experimenty byla také ověřena lineární závislost výtoku permeátu z vlákna se zvětšujícím se rozdílem tlaků (hnací síly). Z experimentálních měření bylo ověřeno, že výtok z vlákna roste se zvětšující se délkou vlákna, ale jen do určité limitní hodnoty. Po překročení této limitní délky vlákna je výtok permeátu z vlákna již konstantní a vytváří se neaktivní části.

Do budoucna doporučuji ověřit experimentální měření na jiném typu zařízení. Měla by být provedena experimentální ověření výsledků matematického modelu dead-end mikrofiltrace pro suspenzi v newtonské tekutině.

7 Dodatek

8 Literatura

1. Wen X., Ding H., Huang X., Liu R.: Treatment of hospital wastewater using a submerged membrane bioreactor, *Process Biochemistry* 39, 1427 – 1431 (2004)
2. Kinčl J.: Proudění newtonské kapaliny dutým vláknem s porézními stěnami, diplomová práce, Univerzita Pardubice (2005)
3. Kaiya Y., Itoh Y., Fujita Y., Takizawad S.: Study on fouling materials in the membrane treatment process for potable water, *Desalination* 106, 71 – 77 (1996)
4. Katayon S., Megat Mohd Noor M.J., Ahmad J., Abdul Ghani L.A., Nagaoka H., Aya H.: Effect of mixed liquor suspended solid concentrations on membrane bioreactor efficiency for treatment of food industry wastewater, *Desalination* 167, 153 – 158 (2004)
5. Seo G.T., Moon C.D., Chang S.W., Lee S.H.: Long term operation of high concentration powdered activated carbon membrane bio-reactor for advanced water treatment, *Water Science and Technology* Vol 50 No 8, 81 – 87 (2004)
6. Carroll T.: The effect of cake and fiber properties on flux declines in hollow-fiber microfiltration membranes, *Journal of Membrane Science* 189, 167-178 (2001)
7. Carroll T.: Axial features in the fouling of hollow-fiber membranes, *Journal of Membrane Science* 168, 203-212 (2000)
8. Delgado S., Díaz F., Villarroel R., Vera L., Diáz R., Elmaleh S.: Influence of biologically treated wastewater quality on filtration through a hollow-fiber membrane, *Desalination* 146, 459 – 462 (2002)
9. Vial D., Doussau G.: The use of microfiltration membranes for seawater pre-treatment prior to reverse osmosis membranes, *Desalination* 153, 141 – 147 (2002)
10. Benítez J., Rodríguez A., Malaver R.: Stabilization and dewatering of wastewater using hollow fiber membranes, *Pergamon Wat. Res. Vol. 29. No. 10*, 2281 – 2286 (1995)
11. Renbi B., Leow H.F.: Microfiltration of activated sludge wastewater – the effect of system operations parameters, *Separation and Purification Technology* 29, 189 – 198 (2002)
12. Hrubá M.: Využití membránové mikrofiltrace (ultrafiltrace) při úpravě vody, bakalářská práce, Univerzita Pardubice (2004)

13. Lee H.M, Lee C.H.H., Chung K.Y., Lee S.: Prediction Model for Transmembrane Pressure in a Submerged Hollow-Fiber Microfiltration Membrane, *Separation Science and Technology* Vol. 39 No. 8, 1833 – 1856 (2004)
14. Bai R., Leow H.F.: Modeling and experimental study of microfiltration using a composite module, *Journal of Membrane Science* 204, 359 – 377 (2002)
15. Chang S., Fane A.G., Waite T.D.: Analysis of constant permeate flow filtration using dead-end hollow fibers membranes, *Journal of Membrane Science* (2005)
16. Serra Ch., Clinton M., Moulin P., Rouch J.Ch., Aptel P.: Dead-end ultrafiltration in hollow fiber modules: Module design and process simulation, *Journal of Membrane Science* 145, 159 – 172 (1998)
17. Přidal J.: Separační membrány a jejich průmyslové využití – dnešní trendy a vybrané moderní aplikace, *Chemické listy* 93, 432 – 440 (1999)
18. Polasek V., Talo S., Sharif T.: Conversion from hollow fiber to spiral technology in large seawater RO systems – process design and economics, *Desalination* 156, 239 – 247 (2003)
19. Suarez J.A., Veza J.M.: Dead-end microfiltration as advanced treatment for wastewater, *Desalination* 127, 47 – 58 (2000)
20. Qin J.J., Oo M.H., Lee H., Kolkman R.: Dead-end ultrafiltration for pretreatment of RO in reclamation of municipal wastewater effluent. *Journal of Membrane Science* 243, 107 – 113 (2004)
21. Piatkiewicz W., Rosiński S., Lewińska D., Bukowski J., Judycki W.: Determination of pore size distribution in hollow fiber membranes, *Journal of Membrane Science* 153, 91 – 102 (1999)
22. Tao G., Kekre K., Wei Z., Lee T.C., Viswanath, Seah H.: Membrane bioreactors for water reclamation, *Water Science and Technology* Vol 51 No 6-7, 431 – 440 (2005)
23. Bessiere Y., Abidine N., Bacchin P.: Low fouling conditions in dead-end filtration: Evidence for a critical volume and interpretation using critical osmotic pressure, *Journal of Membrane Science* 264, 37 – 47 (2005)
24. Fugère R., Mameri N., Gallot J.E., Comeau Y.: Treatment of pig farm effluents by ultrafiltration, *Journal of Membrane Science* 255, 225 – 231 (2005)

9 Seznam obrázků

Obrázek 1: Separační a aerační modul	14
Obrázek 2: Modelová představa filtrace dutým vláknem podle Hwang-Mook Leeho	17
Obrázek 3: Model filtrace ½ dutého vlákna bez zanášení, Carroll.....	19
Obrázek 4: Model filtrace ½ dutého vlákna se zanášením, Carroll.....	19
Obrázek 5: Schéma modulu Christophe Serry	22
Obrázek 6: Schéma jednoho ponořeného dutého vlákna, Chang	25
Obrázek 7: Schéma toku tekutiny dutým vláknem symetricky od středu k oběma otevřeným koncům	28
Obrázek 8: Profil usazeného koláče po celé délce vlákna pro oba způsoby filrace za KTR i KRF	39
Obrázek 9: Profil rozmístění odporu koláče po délce vlákna pro oba způsoby filtrace za KTR i KRF	40
Obrázek 10: Profil průběhu tlakové ztráty po délce vlákna pro oba způsoby filtrace za KTR i KRF	40
Obrázek 11: Profil normovaného fluxu po délce vlákna pro oba způsoby filtrace za KTR i KRF	41
Obrázek 12: Zkoumání změny tvaru profilů průtoku filtrátu po délce vlákna při proměnném parametru α , $\beta = 1$	43
Obrázek 13: Zkoumání změny tvaru profilů průtoku filtrátu po délce vlákna při proměnném parametru β , $\alpha = 0,1$	44
Obrázek 14: Ukázka profilů průtoku filtrátu po délce vlákna při stejných parametrech α i β .	45
Obrázek 15: Ukázka profilů průtoku filtrátu po délce vlákna při různých parametrech α i β .	45
Obrázek 16: Ukázka profilů usazeného koláče po délce vlákna při $\beta = 0$ a $\beta > 0$	46
Obrázek 17: Ukázka profilů odporu koláče po délce vlákna při $\beta = 0$ a $\beta > 0$	47
Obrázek 18: Ukázka profilů toku filtrátu po délce vlákna při $\beta = 0$ a $\beta > 0$	47
Obrázek 19: Ukázka profilů tlakové ztráty ve vlákně a po jeho délce při $\beta = 0$ a $\beta > 0$	48
Obrázek 20: Ukázka růstu tlakové ztráty ve vlákně podél jeho délky při $\beta = 0$ a $\beta > 0$	48
Obrázek 21: Model vlákna, zjednodušený model proudění čisté kapaliny	49
Obrázek 22: Pohled na vnitřní pórovitou strukturu dutého vlákna	54
Obrázek 23: Pohled na vnější povrch dutého vlákna	54
Obrázek 24: Aparatura.....	55
Obrázek 25: Našití dutých vláken	56
Obrázek 26: Utěsnění dutých vláken.....	57
Obrázek 27: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 1	59
Obrázek 28: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 2	60
Obrázek 29: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 3	61
Obrázek 30: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 4	62
Obrázek 31: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 5	63
Obrázek 32: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 6	64
Obrázek 33: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 7	65
Obrázek 34: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 8	66
Obrázek 35: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, měření 9	67
Obrázek 36: Lineární závislost velikosti výtoku z vlákna na hnací síle (ΔP)	68
Obrázek 37: Schéma nového typu experimentálního zařízení	74
Obrázek 38: Závislost velikosti výtoku z vlákna na jeho délce, všechna měření	75

10 Seznam tabulek

Tabulka 1: Přehled zvolených kombinací α, β k porovnání profilů A_{cB} , R_{cB} , p_{iB} pro oba způsoby filtrace.....	39
Tabulka 2: Přehled zvolených kombinací α, β k porovnání profilů normovaného fluxu pro oba způsoby filtrace.....	39
Tabulka 3: Přehled vypočtených hodnot V_B pro zvolenou kombinaci $\alpha = 1$, $\beta = 5$ k porovnání profilů A_{cB} , R_{cB} , p_{iB} pro filtraci za konstantní rychlosti filtrace	42
Tabulka 4: Přehled naměřených hodnot fluxů a Q_{Lexp} pro měření 1	59
Tabulka 5: Přehled naměřených hodnot fluxů a Q_{Lexp} pro měření 2	60
Tabulka 6: Přehled naměřených hodnot fluxů a Q_{Lexp} pro měření 3	61
Tabulka 7: Přehled naměřených hodnot fluxů a Q_{Lexp} pro měření 4	62
Tabulka 8: Přehled naměřených hodnot fluxů a Q_{Lexp} pro měření 5	63
Tabulka 9: Přehled naměřených hodnot fluxů a Q_{Lexp} pro měření 6	64
Tabulka 10: Přehled naměřených hodnot fluxů a Q_{Lexp} pro měření 7	65
Tabulka 11: Přehled naměřených hodnot fluxů a Q_{Lexp} pro měření 8	66
Tabulka 12: Přehled naměřených hodnot fluxů a Q_{Lexp} pro měření 9	67
Tabulka 13: Závislost výtoku kapaliny z vlákna na tlaku pro délku $L = 0,3m$	68
Tabulka 14: Závislost výtoku kapaliny z vlákna na tlaku pro délku $L = 0,65m$	68
Tabulka 15: Závislost výtoku kapaliny z vlákna na tlaku pro délku $L = 0,7m$	68
Tabulka 16: Výtoky permeátu z vlákna z exp. měření a vypočtená z numerického modelu pro měření 1, 2, 3	71
Tabulka 17: Výtoky permeátu z vlákna z exp. měření a vypočtená z numerického modelu pro měření 4, 5, 6	72
Tabulka 18: Výtoky permeátu z vlákna z exp. měření a vypočtená z numerického modelu pro měření 7, 8, 9	73

11 Seznam symbolů

A	m^2	plocha průřezu o poloměru r , $A = \pi.r^2$
A_o	m^2	vnější průřez vlákna, $A_o = \pi.r_o^2$
A_c	m^2	plocha průřezu o poloměru r_c , $A_c = \pi.r_c^2$
c_f	$kg.m^{-3}$	koncentrace suspenze (tuhá fáze/filtrát)
d_i	m	vnitřní průměr vlákna
d_o	m	vnější průměr vlákna
h_τ	-	délka časového kroku
h_z	-	délkový krok, $h_z = 1/N$
J_l	$m^3.s^{-1}.m^{-1}$	lokální průtok filtrátu na jednotku délky vlákna
k_c	m^2	permeabilita koláče
K	m	permeabilita porézní stěny vlákna
L	m	délka poloviny vlákna
N	-	počet uzlů sítě v axiálním směru
p	Pa	tlak
p_c	Pa	tlak na vnějším povrchu koláče (nástříková strana)
p_i	Pa	tlak v dutině vlákna
p_{iL}	Pa	tlak na konci vlákna
p_o	Pa	tlak na vnějším povrchu vlákna
Q	$m^3.s^{-1}$	lokální objemový průtok vláknem
Q_L	$m^3.s^{-1}$	výtok filtrátu koncem vlákna
r	m	obecná radiální souřadnice
r_i	m	vnitřní poloměr vlákna
r_o	m	vnější poloměr vlákna
r_c	m	poloměr vnějšího povrchu koláče
R_c	m^{-2}	lokální hydraulický odpor koláče
R_m	m^{-2}	hydraulický odpor stěny vlákna
u_f	$m.s^{-1}$	mimovrstvová radiální rychlost filtrátu na souřadnici r
z	m	obecná axiální souřadnice
V	m^3	celkový objem filtrátu
α	-	parametr modelu v bezrozměrném tvaru
β	-	parametr modelu v bezrozměrném tvaru
γ	-	poměr maximální a střední hodnoty J_l
ε	-	porozita koláče
μ	$Pa.s$	dynamická viskozita filtrátu
ρ_s	$kg.m^{-3}$	hustota tuhé fáze
τ	s	čas

index B označuje bezrozměrnou veličinu

ÚDAJE PRO KNIHOVNICKOU DATABÁZI

Název práce	Duté vlákno s porézní stěnou: studium hydrodynamického chování a koláčové filtrace
Autor práce	Lenka Škrobánková
Obor	Chemické inženýrství
Rok obhajoby	2006
Vedoucí práce	Ing. Petr Doleček, CSc.
Anotace	Práce se zabývá modelováním a numerickým řešením dead-end mikrofiltrace suspenzí v newtonské kapalině dutým vláknem, experimentálním ověřením matematického modelu ustáleného laminárního toku nestlačitelné newtonské kapaliny dutým vláknem při dead-end filtraci.
Klíčová slova	dutá vlákna, porézní kanál, dead-end mikrofiltrace, modelování mikrofiltrace, numerické řešení, metoda sítí, experimentální zařízení pro dead-end mikrofiltraci