

UNIVERZITA PARDUBICE  
FAKULTA CHEMICKO – TECHNOLOGICKÁ  
KATEDRA CHEMICKÉHO INŽENÝRSTVÍ

PROUDĚNÍ NEWTONSKÉ  
KAPALINY DUTÝM VLÁKNEM  
S PORÉZNÍMI STĚNAMI

DIPLOMOVÁ PRÁCE

AUTOR PRÁCE: Jan Kinčl

VEDOUCÍ PRÁCE: Ing. Petr Doleček, CSc.

2005

UNIVERSITY OF PARDUBICE  
FACULTY OF CHEMICAL TECHNOLOGY  
DEPARTMENT OF CHEMICAL ENGINEERING

NEWTONIAN FLUID FLOW IN  
HOLLOW FIBER WITH POROUS  
WALLS

THESIS

**AUTHOR:** Jan Kinčl

**SUPERVISOR:** Ing. Petr Doleček, CSc.

2005



Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 12. května 2005

Jan Kinčl

## Abstrakt

Práce se zabývá popisem laminárního ustáleného proudění při dead-end filtraci nestlačitelné newtonské kapaliny dutým vláknem s homogenně porézní stěnou za izotermních podmínek.

Byla provedena literární rešerše možností využití dutých vláken při mikrofiltracích a ultrafiltracích a dále rešerše způsobů řešení matematického modelu proudění.

Byl vytvořen kompletní matematický model z pohybové rovnice, rovnice kontinuity a Darcyho zákona toku porézním prostředím. Matematický model byl řešen numerickou metodou konečných objemů s posunutými sítěmi. Tato numerická metoda byla implementována v programovacím jazyce Delphi. Numerickými experimenty byly sledovány vlivy parametrů modelu (výstupní rychlosti, permeability stěny, délky porézní a neporézní části vlákna) na proudění.

Výsledky byly porovnány s výsledky zjednodušeného modelu, který předpokládá parabolický profil axiální rychlosti v celém vlákně. Ze srovnání modelů je vidět, že zjednodušený model lze s malou chybou použít jen při nízkých hodnotách permeability vlákna a výstupní rychlosti.

Dále výsledky potvrdily předpoklad neaktivní části vlákna při vysoké permeabilitě a také odhalily problémy s výstupní okrajovou podmínkou.

## Abstract

This work describes isothermal laminar steady-state Newtonian fluid flow through hollow fibre with uniformly porous walls.

Literature search have been done for the possibilities of usage of hollow fibers in microfiltration and ultrafiltration processes and also for methods of mathematical model solution.

Complete mathematical model have been created from momentum equation, continuity equation and Darcy's law for flow in porous media. Mathematical model have been solved by numerical method of multiple staggered grids. This numerical procedure have been implemented in computer programme written in Delphi. Influences of model parameters (outlet velocity, wall permeability, length of porous and non-porous part of the fibre) on fluid flow have been observed.

Results have been compared to simplified model, which assumes parabolic profile of axial velocity in the whole fibre. This comparison shows, that simplified model can be used with quite good accuracy in case of low wall permeability and outlet velocity.

Results confirmed presumption of inactive part of the fibre in case of high wall permeability. They also revealed problems with outlet boundary condition.

Na tomto místě bych chtěl poděkovat Ing. Petru Dolečkovi, CSc za odborné vedení, cenné rady a pomoc při zpracování této diplomové práce.

Také bych chtěl poděkovat své rodině za podporu při studiu.

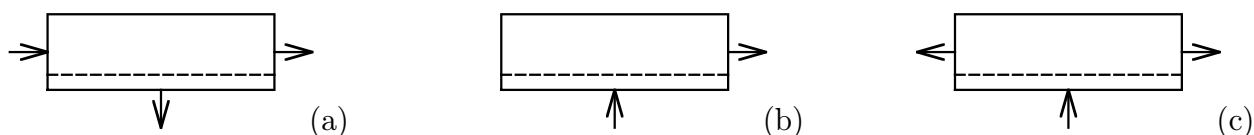
# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>9</b>
<b>2 Literární rešerše</b>	<b>11</b>
2.1 Využití membránových modulů s dutými vlákny . . . . .	11
2.2 Modelování proudění dutými vlákny . . . . .	14
<b>3 Matematický model</b>	<b>19</b>
3.1 Předpoklady . . . . .	19
3.2 Rozměrový tvar . . . . .	19
3.3 Bezrozměrný tvar . . . . .	21
3.4 Konzervativní tvar rovnic . . . . .	23
<b>4 Numerické řešení metodou sítí</b>	<b>24</b>
4.1 Návrh sítí . . . . .	24
4.2 Diskretizace rovnic . . . . .	25
4.3 Aplikace . . . . .	35
<b>5 Výsledky numerických experimentů</b>	<b>38</b>
5.1 Testy vlivu parametrů výpočtu na jeho průběh a výsledek . . . . .	38
5.2 Vektorové rozložení rychlostí . . . . .	38
5.3 Průběh rychlostí a tlaku . . . . .	39
5.4 Odchytky od Poiseuilleova toku . . . . .	42
5.5 Výstupní tlak . . . . .	43
5.6 Vliv typu okrajové podmínky na výstupním konci vlákna . . . . .	47
<b>6 Závěr</b>	<b>50</b>
<b>Dodatek</b>	<b>52</b>
<b>A Zjednodušený model</b>	<b>53</b>
A.1 Předpoklady řešení a geometrie systému . . . . .	53
A.2 Rozměrový tvar . . . . .	53
A.3 Bezrozměrný tvar . . . . .	55
<b>Literatura</b>	<b>57</b>
<b>Seznam symbolů</b>	<b>61</b>

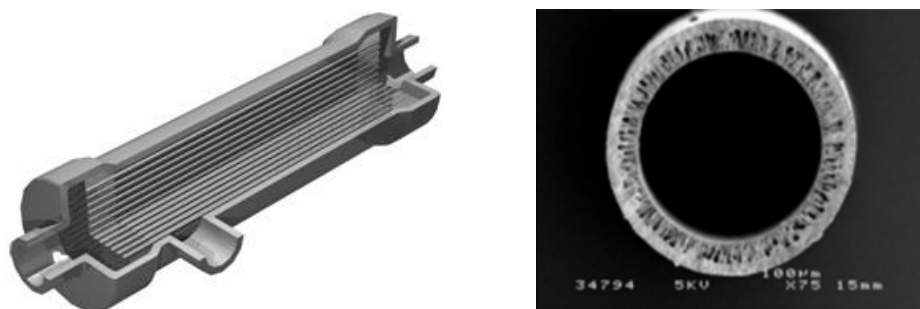


# 1 Úvod

Dutá vlákna můžeme z geometrického pohledu charakterizovat jako válcové trubice s vysokým poměrem délky ku průměru. Svazek dutých vláken s porézní stěnou s oběma konci vláken zatavenými v pryskyřici tvoří membránový element. Membránový element uložený v pouzdra tvoří membránový modul. Membránový element lze přímo ponořit do filtrované kapaliny, zatímco do membránového modulu je nutné přivádět kapalinu dovnitř pouzdra nebo odvádět ven. Zapojení těchto prvků je možné několika způsoby. Proces se nazývá cross-flow filtrací, pokud filtrovaná kapalina proudí tangenciálně k povrchu vlákna, což může přispívat k lepšímu odmyváni filtračního koláče. Druhý způsob uspořádání se nazývá dead-end filtrace, při které filtrovaná kapalina protéká přes porézní stěnu a vytéká ústím vláken. V případě opačného toku při dead-end filtracích by se filtrační koláč tvořil na vnitřní stěně vlákna a vlákno by se po čase ucpalo, proto se toto zapojení nepoužívá. Dead-end filtrace se může provádět dvěma způsoby a to buď odsáváním z jednoho konce vláken s druhým koncem zaslepeným a nebo odsáváním z obou konců vláken. Zaslepený konec u prvního způsobu a střed vlákna u druhého způsobu odsávání jsou místa, ve kterých je průtok permeátu v axiálním směru vlákna nulový. Matematický popis těchto dvou případů je podobný, liší se jen okrajovou podmínkou pro radiální rychlost právě v tomto místě. Odlišná specifikace této okrajové podmínky však ovlivní výsledné proudění jen v zanedbatelné části vlákna v blízkosti tohoto místa. V této práci jsem si vybral druhý způsob zapojení dead-end filtrace, tedy odsávání z obou konců vláken.



Obrázek 1: Schémata zapojení membránových modulů s dutými vlákny. (a) cross-flow uspořádání, (b) dead-end uspořádání s jedním koncem vláken zaslepeným, (c) dead-end uspořádání s výtokem oběma konci vláken



Obrázek 2: Membránový modul s dutými vlákny. Průřez asymetrickým vláknem. [62]

Hnací silou procesu je rozdíl tlaků vně a uvnitř vlákna, tedy nad a pod membránou. Při nízké hodnotě permeability stěny, jak je tomu např. u reverzní osmózy, je hnací síla v podstatě stejná po celé délce vlákna. Při vyšších hodnotách permeability je průtok kapaliny uvnitř vlákna natolik velký, že jejím prouděním v axiálním směru dochází k tlakové ztrátě, která může být srovnatelná s hnací silou. Tlak na vnitřní straně porézní stěny se potom významně mění po délce vlákna a tím i hodnota lokální tlakové hnací síly. Ke středu vlákna hnací síla klesá a může dojít k tomu, že střední část vlákna je prakticky neaktivní (průtok je zanedbatelný).

Cílem této práce je sestavit a řešit matematický model proudění kapaliny dutým vláknem s porézní stěnou a na základě numerických experimentů ověřit platnost výše uvedených kvalitativních úvah. Matematický model ve formě programu pak může sloužit k optimalizaci návrhových a provozních parametrů pro dead-end filtraci na dutých vláknech.

## 2 Literární rešerše

### 2.1 Využití membránových modulů s dutými vlákny

#### 2.1.1 Obecné vlastnosti modulů s dutými vlákny

Z hlediska materiálů lze membrány dělit na organické a anorganické. Dutá vlákna jsou vyráběna výhradně z polymerních organických materiálů, např. z acetátu celulózy, polysulfonu, polyethersulfonu, polykarbonátu, polyamidu, polyvinylchloridu, polypropylenu, polytetrafluoretylénu. Dutá vlákna, stejně jako ostatní typy membránových modulů, lze konstruovat jako symetrické, asymetrické a kompozitní.

Vnitřní průměr vláken je obvykle menší než 1 mm. Výhodou je malá zádrž tekutiny a vysoký měrný povrch, nevýhodou jsou vyšší tlakové ztráty při toku permeátu vláknem. Udávají se hodnoty 0,3 bar až 1,3 bar při doporučených hodnotách Reynoldsova kritéria od 500 do 3000 [48]. Nevýhodou malého průměru jsou také vysoké hodnoty stříhového napětí. Na stěně vlákna se udávají hodnoty  $4000 \text{ s}^{-1}$  až  $14000 \text{ s}^{-1}$ , proto je například nevhodné vést proud s živými buňkami dovnitř vlákna, protože by mohlo dojít k jejich usmrcení porušením celistvosti. Měrný povrch dutých vláken je nejvyšší ze všech typů membránových modulů. Proto se často používají u procesů, kde se malá hnací síla nahrazuje velkou stykovou plochou.

Tok v dutých vláknech je téměř vždy laminární. V turbulentní oblasti by při malém průřezu dutého vlákna vznikaly příliš velké tlakové ztráty. Uvedené doporučené hodnoty Reynoldsova kritéria platí pro cross-flow filtrace, kde je vyšší hodnota Reynoldsova kritéria žádoucí z důvodu odmýváním filtračního koláče. V případě dead-end filtrace je naopak vhodné membránový modul provozovat při nízkých hodnotách Reynoldsova kritéria, aby se předešlo rychlému zanášení membrány. Doporučené hodnoty rychlostí toku přes membránu jsou řádu desítek  $\text{l/m}^2 \cdot \text{h}$  u dead-end filtrací a stovek  $\text{l/m}^2 \cdot \text{h}$  u cross-flow filtrací.

Maximální hnací síla (rozdíl tlaků na obou stranách membrány) se u membránových modulů s dutými vlákny pohybuje okolo 1,8 bar. U speciálních „krátkých“ modulů může být až 2,4 bar při teplotách menších než asi  $30^\circ\text{C}$  [48].

Dutá vlákna jsou samonosná, proto je možné jejich čištění pomocí zpětného toku, tj. krátkodobým otočením směru toku přes membránu, při kterém se uvolní vzniklý filtrační koláč. Touto jednoduchou a účinnou metodou se snižuje spotřeba čistících chemikálií a také času na čištění. Účinnost čištění zpětným tokem však postupně klesá a jednou za čas je nutné vlákna vyčistit chemicky. Mechanické čištění dutých vláken není možné kvůli velmi malému průřezu.

Náklady na opravy jsou poměrně vysoké. Při porušení jednoho vlákna je někdy možné je zalepit a tím odstavit, ale obvykle je nutné vyměnit celý modul, protože samotné duté vlákno bývá většinou nepřístupné.

### 2.1.2 Membránové kontakory

V membránových kontakorech tvoří membrána rozhraní mezi dvěma proudy. Oproti klasickým kontaktorům mají výhodu velké stykové plochy a není tu nebezpečí zahlcení ani unášení kapaliny, jako u náplňových kolon. Z důvodu potřeby velké stykové plochy se využívají hlavně moduly s dutými vlákny. Membránový kontaktor může sloužit k absorpci (G-L), odplynění (L-G) nebo extrakci (L-L) [50]. Absorpce se využívá při získávání  $\text{SO}_2$ ,  $\text{CO}_2$  [28],  $\text{CO}$ ,  $\text{NO}_x$ ,  $\text{NH}_3$  z odpadních plynů nebo vzduchu,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{S}$  ze zemního plynu,  $\text{CO}_2$  z bioplynu, sycení nápojů  $\text{CO}_2$ , přenosu  $\text{O}_2$  do krve [34] nebo do fermentačních lázní [39]. Desorpce se využívá při odstraňování těkavých látek z bioproduktů nebo kyslíku z vody. Extrakce se využívá při odstraňování těžkých kovů, fenolu, nebo produktů fermentace. Membránové kontakory lze využít i na přípravu emulzí [16].

### 2.1.3 Membránová destilace

Membránová destilace je proces, ve kterém membrána tvoří rozhraní mezi teplejším a chladnějším proudem. Těkavější látka z kapaliny se přes póry membrány více odpařuje než látky méně těkavé, čímž snižuje svoji koncentraci v teplejším proudu a zvyšuje svoji koncentraci v chladnějším proudu, kde kondenzuje. Chladnější proud může být i plynný. Nevýhodou tohoto procesu je malý rozdíl výstupních koncentrací, který odpovídá jednomu teoretickému patru v destilační koloně. Výhodou je přesně definovaná plocha fázového rozhraní, která může být daleko větší než v náplňových nebo patrových kolonách. Proto se zde hojně využívá dutých vláken, která mají velký měrný povrch. Vylepšení procesu lze dosáhnout vtháněním inertu na obohacovanou stranu plynu, čímž se snižuje parciální tlak odpařované složky a posouvá rovnováha. Další možností je umístění kondenzační plochy těsně k membráně na stranu obohacovaného plynu, na které kondenzují přecházející páry a tím se snižuje jejich parciální tlak. Membránová destilace se využívá při čištění vody a odsolování mořské vody, brakické vody a odpadních vod, při získávání ethanolu z fermentačních procesů, při koncentrování vodných roztoků solí a kyselin a při odstraňování těkavých organických látek z vody [7].

### 2.1.4 Pervaporace

Pervaporace je proces, při kterém se do neporézní membrány sorbuje selektivně některá složka z kapalného nástřiku. V membráně dochází k difuzi a na straně permeátu, kde je snížený tlak, se tato složka desorbuje do plynné fáze. Většinou se používají deskové nebo spirálně vinuté moduly, ale někdy také dutá vlákna. Pervaporace se používá na velmi vysoké zakoncentrování roztoků organických látek ve vodě (90% ethanol na 100% ethanol) nebo na separaci organických směsí.

### 2.1.5 Kapalné membrány

Kapalné membrány oddělují prostor kapaliny extrahované a extrahovadla tenkým kapalným filmem – kapalnou membránou, která selektivně přenáší jen některé složky. Někdy se kapalná membrána napouští do porézního prostředí, které slouží jako její nosič. K tomuto účelu se používají tenké ploché membrány nebo dutá vlákna, do jejichž porézní struktury se kapalná membrána vsákne. Výhoda tohoto uspořádání je ve velmi malé spotřebě kapalných membrán, která zaplňuje pouze póry v pevné membráně při velmi vysoké stykové ploše.

### 2.1.6 Mikrofiltrace

Mikrofiltrace je tlakový membránový proces (stejně jako následující procesy), kterým se na základě síťového efektu odstraňují částice přibližně od 20 nm do 10  $\mu\text{m}$ , což odpovídá rozměrům koloidních částic. Potřebný tlak se pohybuje do 2 bar. V potravinářském průmyslu se používá na odstraňování křemeliny z želatiny a kukuřičného sirupu, pasterizaci piva a mléka, odtučnění mléka, či při odstraňování azbestu z vína [42]. Mikrofiltrace je nezastupitelný proces při odstraňování mikroorganismů ze vzduchu, kterým se okysličují bioreaktory. Uplatnění v biologických procesech má také při čištění plynů z bioreaktorů, při odsávání vyčištěné vody z bioreaktorů zpracovávajících odpadní nebo povrchové znečištěné vody [46, 27, 8], při recyklaci buněk, pěstování buněk, čištění enzymů apod. Velkým uplatněním mikrofiltrace je desinfekce pitných vod, při které se odstraňují řasy, bakterie a prvoci [11, 20]. Jedním z hlavních důvodů užití membránových procesů je odolnost některých organismů (*Giardia*, *Cryptosporidium*) vůči chloraci. Dále se mikrofiltrace používá na recyklaci odpadních vod papírenského průmyslu, při separaci titanové běloby a dalších anorganických pigmentů z vody či odstraňování prvků či nízkomolekulárních látek za použití předřazené flokulace či jiného způsobu zvětšování částic [54, 60].

### 2.1.7 Ultrafiltrace

Ultrafiltrací se na základě síťového efektu odstraňují částice přibližně od 5 nm do 100 nm, což odpovídá makromolekulárním látkám, při tlacích do 1 MPa. Ultrafiltrace se hojně využívá v potravinářském průmyslu v pivovarnictví, lihovarnictví, získávání škrobu ze škrobárenských odpadních vod, získávání ovocných šťáv [42], získávání bílkovin ze syrovátky a dalších mlékárenských produktů [44], při výrobě olivového a palmového oleje, či při zpracování ryb. Dále pak na odstraňování organickým látek [53], koncentraci olejových a latexových emulzí, čištění odpadních [30, 29, 13] i povrchových vod [57, 35, 32], při filtraci aktivního uhlí, či na virovou desinfekci pitných vod [3].

### 2.1.8 Nanofiltrace

Nanofiltrace odstraňuje částice velikosti přibližně od 1 nm do 10 nm, což odpovídá nízkomolekulárním látkám, při tlacích od 1 MPa do 6 MPa. Transport hmoty zde probíhá spíše selektivním rozpouštěním látek a difuzí skrz membránu. Při nanofiltraci se již uplatňuje osmotický tlak, který snižuje hnací sílu procesu. Nanofiltrace se využívá k získávání organických látek (cukry, pesticidy [24], herbicidy [23] a organická barviva) i některých anorganických látek (arsen [24]), na separaci jedno- a více-vazebných iontů, na odstranění kyselosti při výrobě kaseinu nebo jako předřadný proces před reverzní osmózou [56].

### 2.1.9 Reverzní osmóza

Reverzní osmóza je obrácený proces k osmóze. Působením tlaků od 1 MPa do 10 MPa na stranu nástřiku se překoná vysoký osmotický tlak a skrz membránu prochází v podstatě čistá voda. Transport hmoty probíhá selektivním rozpouštěním látek a difuzí přes membránu. Reverzní osmóza se využívá na separaci roztoků anorganických solí, separaci kovových iontů, odvodnění procesních i potravinářských proudů. Nejvíce se však reverzní osmóza využívá na odsolování brakické a mořské vody [31]. V těchto aplikacích jsou využívána dutá vlákna i spirálně vinuté moduly.

## 2.2 Modelování proudění dutými vlákny

### 2.2.1 Analytické metody

Rigorózní řešení těchto rovnic zatím neexistuje, proto se problém zjednodušuje natolik, až jej lze vyřešit analyticky. Společným rysem těchto postupů je předpoklad neměnného tvaru rychlostního profilu v axiálním směru.

Jednu z prvních prací, zabývajících se tokem tekutiny porézním kanálem, vypracoval Berman [1], který řešil Navier-Stokesovu rovnici pro laminární tok nestlačitelné newtonské kapaliny za předpokladů neměnného tvaru rychlostního profilu podél osy  $x$ , konstantní rychlosti toku přes porézní stěnu a ulpívání kapaliny na povrchu porézní stěny. Ukázal, že zavedeme-li na základě objemové bilance proudovou funkci ve tvaru

$$\Psi = (hu_0 - u_w x)f(\lambda) \quad (2.1)$$

kde  $u_0$  je střední rychlost na vstupu do kanálu,  $h$  je poloviční šířka kanálu a  $u_w$  je rychlost toku porézní stěnou, redukuje se Navier-Stokesova rovnice na obyčejnou nelineární diferenciální rovnici třetího řádu

$$\frac{d^3 f}{d\lambda^3} + Re_w \left[ \left( \frac{df}{d\lambda} \right)^2 - f \frac{d^2 f}{d\lambda^2} \right] = C \quad (2.2)$$

kde  $C$  je konstanta a  $f(\lambda)$  je funkce závislá na bezrozměrné vzdálenosti  $\lambda$  od středu kanálu k porézní stěně. Řešením této rovnice je

$$u_x = \frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = \left( u_0 + \frac{u_w x}{h} \right) \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \quad (2.3)$$

$$u_\lambda = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = u_w f(\lambda) \quad (2.4)$$

Pro nízké rychlosti toku přes porézní stěnu, které jsou časté v membránových procesech, lze zanedbat členy s  $Re_w = \frac{u_w h}{\nu}$  a rovnice (2.2) se zjednoduší na

$$\frac{d^3 f}{d\lambda^3} = C \quad (2.5)$$

jejímž řešením je rovnice Poiseuilleova toku. Pro vyšší hodnoty  $Re_w$  lze řešení zobecnit mocninnými řadami

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\lambda) Re_w^n \quad C = \sum_{n=0}^{\infty} C_n Re_w^n \quad (2.6)$$

Na tuto práci navázali Yuan a Finkelstein [61], kteří za stejných podmínek a stejným způsobem popsali proudění i v trubkovém kanálu (rovnice (2.7)-(2.9)), Terrill a Shrestha [55], kteří stejným způsobem popsali proudění v kanálu se dvěma stěnami s rozdílnými propustnostmi a Green [18], který se zabýval prouděním v kanálu jen s jednou propustnou stěnou.

$$u_{zB}(r_B, z_B) = \overline{u_{zB}} \left[ 2(1 - r_B^2) + \frac{Re_w}{18} (2 - 9r_B + 9r_B^4 - 2r_B^6) \right] \quad (2.7)$$

$$u_{rB}(r_B) = \frac{Re_w}{Re_0} \left[ 2r_B - r_B^3 + \frac{Re_w}{36} (4r_B - 9r_B^3 + 6r_B^5 - r_B^7) \right] \quad (2.8)$$

$$p_B(z_B) = -\frac{16z_B}{Re_0} + \frac{6Re_w z_B}{Re_0} + \frac{4Re_w^2 z_B}{9Re_0} + \frac{16Re_w z_B^2}{Re_0^2} - \frac{6Re_w^2 z_B^2}{Re_0^2} \quad (2.9)$$

kde  $\overline{u_{zB}}$  je průměrná axiální rychlost v průřezu o souřadnici  $z_B$  a definice bezrozměrných veličin jsou  $Re_0 = \frac{\rho u_0 R}{\mu}$ ,  $u_{zB} = \frac{u_z}{u_0}$ ,  $u_{rB} = \frac{u_r}{u_0}$ ,  $p_B = \frac{p - p_0}{\rho u_0^2}$ ,  $Re_w = \frac{\rho u_w R}{\mu}$ ,  $r_B = \frac{r}{R}$ ,  $z_B = \frac{z}{R}$ .

Dalším krokem jsou práce, které předpokládají snižování rychlosti toku skrz porézní stěny v závislosti na tlakovém spádu. Galwin a kol. [14, 15] počítali rychlost toku skrz stěnu pomocí Darcyho zákona se snižujícím se tlakovým spádem a dokázali dobrou shodu těchto výsledků oproti experimentálním měřením Quaila a Levyho [43]. Řešení ve formě řady hyperbolických funkcí dosáhla Grangerová a kol. [17].

Všechny tyto modely obsahují značnou míru zjednodušení, ale pro malé rychlosti toku skrz porézní stěnu jsou v docela dobrém souladu se skutečností. Modely proudění při naopak velmi vysokém  $Re_w$  se zabýval Sellars [49], který převedl Bermanovu rovnici na

$$f \frac{d^2 f}{d\lambda^2} - \left( \frac{df}{d\lambda} \right)^2 - \frac{1}{Re_w} \frac{d^3 f}{d\lambda^3} = C \quad (2.10)$$

ve které pro  $Re_w \rightarrow \infty$  vypadne poslední člen. Pro nižší hodnoty  $Re_w$  je řešení zobecňováno podobnou mocninou řadou jako v rovnicích (2.6), ale s parametrem  $\frac{1}{Re_w}$ . Podobný přístup lze nalézt v práci Yuana a Finkelsteina [61]. Zpřesnění přinášejí práce Terrilla [55] a Robinsona [45].

Při libovolné rychlosti toku přes porézní stěnu lze nalézt řešení různými způsoby. Vždy však se problém zjednoduší natolik, aby se dal příslušnou metodou vyřešit. Více viz např. Morduchow [33], White a kol. [58, 59], Kozinski a kol. [26].

Otázkou axiální rychlosti na porézní stěně se zabývalo mnoho autorů (Singh a Laurence [51, 52], Chelam [21], Saffman [47] a další). Zatímco rychlost na neporézní stěně se uvažuje vždy nulová, na porézní stěně je úměrná rychlosti proudění skrz stěnu a také stoupá se zvyšující se porozitou stěny. V membránových procesech jsou časté podmínky nízkého  $Re_w$  a nízké porozity, proto je v této práci rychlost na stěně zanedbána. Další odkazy na práce, které se snaží stanovit axiální rychlost u porézní stěny lze nalézt v práci Chelama a kol. [22].

Carrol a Booker [4] se zabývali zanášením membrány při dead-end filtracích, avšak proudění uvnitř vláken popsali zjednodušeně Hagen-Poiseuileovou rovnicí. Došli k vyjádření objemového průtoku v závislosti na permeabilitě membrány, průměru vlákna, délce vlákna a viskozitě kapaliny. Tyto závislosti vynesli do grafů a uvažovali o optimálních poměrech mezi těmito veličinami. Stejný model toku tekutiny používá Carrol [5] v další práci, která popisuje vliv vznikajícího filtračního koláče na průběh procesu.

### 2.2.2 Numerické metody

Mezi práce využívající numerické řešení metodou konečných diferencí lze zařadit práci Hornbeckovu [19] pro malé  $Re_w$ . Numerickou integraci Bermanovy rovnice (2.2) provedl sám Berman ve své další práci [2]. Numerické řešení ustáleného osově symetrického toku v porézním kanálu přináší práce Friedmana a Gillise [12], kteří předpokládali parabolický profil axiální rychlosti na vstupu i výstupu. Vycházeli z Navier-Stokesovy rovnice formulované pomocí proudové funkce  $\Psi$  a vírové funkce  $\omega$

$$u_z = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad u_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad \omega = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (2.11)$$

Kotzev [25] použil metodu konečných diferencí pro studium toku a převodu hmoty v trubkových membránových modulech pro libovolné konstantní  $Re_w$ . Vývoj rychlostního profilu na začátku porézního kanálu řešil Doughty a kol. [9, 10].

Oxarango a kol. [37] se zabývali popisem proudění ve svazcích dutých vláken i při nerovnoměrných okrajových podmínkách a různorodém geometrickém uspořádání. Vyšli z Bermanových rovnic a převedli je na jednorozměrný problém zavedením průměrných veličin rychlostí a tlaků. Výsledky z těchto rovnic jsou v oblasti nízkých  $Re_w$  v docela dobré shodě s výsledky CFD výpočtů metodou konečných objemů. Tyto rovnice použili jako základ výpočtu pro celý



modul. Každé vlákno ve svazku může mít jinou tloušťku porézní stěny a jinou hodnotu permeability. Matematický model představoval rozsáhlou soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, kterou řešili numericky metodou konečných diferencí. Výsledky však nejsou porovnány s experimentálními daty, proto je těžké říci, nakolik je tento způsob výpočtu systému s více kanály přesný.

Damak a kol. [6] numericky řešili laminární izotermní tok nestlačitelné newtonské kapaliny trubkou s porézními stěnami metodou konečných diferencí na jednotné síti. Tok porézní stěnou popsali Darcyho zákonem pro obě složky rychlosti. Na počátku kanálu předpokládali ustálený Poiseuilleův tok a na konci kanálu ustálený rychlostí profil. Axiální rychlost u stěny uvažovali nulovou. Diskretizací diferenciálních rovnic dostali soustavu algebraických rovnic pro rychlost, které řešili Gaussovou eliminační metodou. Z takto získaného rychlostního pole získali tlakové pole. Z nově získaného tlakového spádu určili rychlost toku přes porézní stěny a znovu vypočetli rychlostní pole. Výsledky srovnali se staršími perturbačními metodami a potvrdili tak jejich platnost v oblasti nízkých  $Re_w$ . Srovnáním s experimentálními daty zjistili relativní odchylku menší než 0,2%. Vypočtená závislost tlaku na radiální souřadnici se zpětně jeví jako zanedbatelná. V práci se autoři zmiňují o problémech s kolísáním hodnot vypočteného tlakového pole. Z toho lze soudit, že se setkali s případy, kdy řešení pro navrženou síť nekonverguje.

Patankar [41] vytvořil numerickou metodu konečných diferencí, která pracuje na posunutých sítích pro jednotlivé proměnné. Metodu vytvářel s ohledem na její aplikaci, tj. na proudění a sdílení tepla v tekutině. Na rozdíl od numerických metod, které pracují s jednotnou sítí, vypočtené tlakového pole nevykazuje nereálné oscilace.

Mezi práce využívající k řešení metodu konečných prvků patří např. Nassehi [36], Pangrle [38]. Nassehi řešil tok newtonských kapalin v porézních trubkách a v soustavě porézní trubka v neporézní trubce. Vyšel z Navier-Stokesovy rovnice a na okrajovou podmínku porézní části použil Darcyho zákon. K řešení získaných rovnic použil metodu konečných prvků. Výsledky uvádí s poměrně značnou chybou (až 4% odchylka v celkové látkové bilanci). Tyto chyby byly zřejmě způsobeny použitím hrubé sítě, velkého časového kroku a malým počtem iterací. Uvedený postup by bylo možno použít i pro nenewtonské kapaliny. Pangrle řešil tok porézní trubkou s otevřeným i uzavřeným koncem se stejnými výchozími rovnicemi jako Nassehi. Výsledky porovnal s hodnotami rychlostí naměřenými pomocí magnetické rezonance a zjistil jen malé rozdíly.

### 2.2.3 Shrnutí

K řešení proudění v dutém vlákně se zpočátku používaly metody analytické. Perturbační metody mají užší rozsah platnosti, protože při jejich odvození se mnoho jevů zanedbává a jsou řešeny jen pro malý počet jednoduchých uspořádání. Řešení lze také nalézt ve formě nekoneč-

ných řad, kde přesnost řešení závisí na počtu členů řad použitých k výpočtu. Všechny analytické metody však řeší tok tekutiny kanálem s určitým stupněm zanedbání některých jevů.

S rozvojem numerických metod a výpočetní techniky se tyto postupně prosazují. Vhodnou numerickou metodou je možné řešit úplný matematický model. Numerická metoda konečných diferencí s jednotnou sítí je v případě proudění nevýhodná, protože může poskytovat nereálné oscilace tlakového pole. Proto se pro řešení jeví jako nejlepší numerické metody s posunutou sítí nebo metoda konečných prvků. Metoda konečných prvků je vhodná hlavně pro případy složité geometrie, protože při jejím použití lze nadefinovat libovolnou síť a řešit přesněji proudění v komplikovaných místech v systému, zatímco v jednoduchých místech, kde se veličiny mění jen pozvolna, lze mít síť řídkou a tím urychlit výpočet. Metoda konečných diferencí s posunutou sítí neposkytuje až takovou volnost ve volbě sítě, je však jednodušší. V našem případě není geometrie složitá, proto se zdá, že použitím této metody můžeme získat dobré výsledky při rozumné složitosti problému.

Použití numerické metody, ať už jakékoliv, je vhodné také z důvodu předpokládaných navazujících diplomových prací, které se budou zabývat modelováním dead-end filtrace v modulech s dutými vlákny.

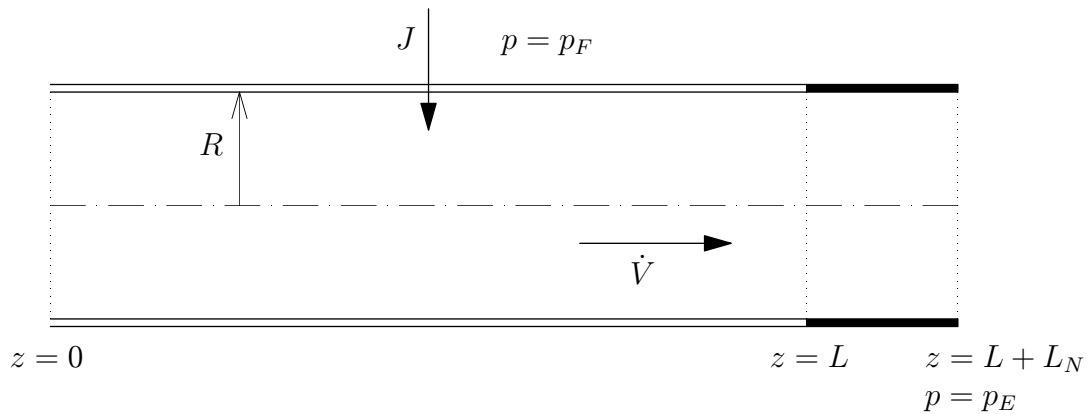
Případ geometrie sání z trubkového kanálu s uzavřeným koncem a navazující neporézní částí, řeší jen málo prací. Carrol a Booker [4, 5] řeší stejnou geometrii, avšak jednoduchým analytickým řešením, jehož obdoba je popsána v dodatku a slouží jako nástřel pro náš výpočet.

S numerickým řešením podobné geometrie Patankarovou metodou posunutých sítí jsem se v literatuře neseťkal. Patankar uvádí několik příkladů použití, avšak na jiných problémech.

### 3 Matematický model

#### 3.1 Předpoklady

Matematický model, který je v dalším textu uveden, bude popisovat proudění kapaliny z vnější strany dutého vlákna (kde je ve všech místech stejný tlak  $p_F$ ) přes porézní stěnu vlákna dovnitř a dále vnitřkem vlákna až k výstupnímu konci (kde je tlak  $p_E$ ). O proudění kapaliny budeme předpokládat, že je ustálené, má laminární charakter a probíhá za izotermních podmínek. Kapalina je newtonská a nestlačitelná. Její hustota i viskozita jsou tedy konstantní a známé. Kanál je přímý, válcový, s konstantním průměrem; je tedy symetrický podle osy.



Obrázek 3: Model vlákna

Porézní část dutého vlákna má délku  $2L$ . Na porézní část navazuje na obou koncích neporézní část o délce  $L_N$ . Kapalina z důvodů symetrie proudí uvnitř dutého vlákna v každé polovině vlákna k bližšímu konci. Vnitřní poloměr vlákna je  $R$ .

#### 3.2 Rozměrový tvar

Matematický model je tvořen rovnicí kontinuity, pohybovou rovnicí [40] a okrajovými podmínkami.

##### *Pohybová rovnice reálné tekutiny*

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{g} \quad (3.1)$$

kde  $\vec{u}$  je rychlost proudění,  $t$  je čas,  $\rho$  je hustota,  $p$  je tlak,  $\vec{\tau}$  je tenzor napětí a  $\vec{g}$  je gravitační zrychlení.

Tuto rovnici je vhodné rozepsat v cylindrických souřadnicích:

ve směru radiální souřadnice  $r$ :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\vartheta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - \frac{u_\vartheta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} - \frac{\tau_{\vartheta\vartheta}}{r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} \right) + g_r \quad (3.2)$$

ve směru tangenciální souřadnice  $\vartheta$ :

$$\frac{\partial u_\vartheta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} + \frac{u_\vartheta}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r u_\vartheta}{r} + u_z \frac{\partial u_\vartheta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2\tau_{r\vartheta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial\tau_{\vartheta z}}{\partial z} \right) + g_\vartheta \quad (3.3)$$

ve směru axiální souřadnice  $z$ :

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\vartheta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\vartheta z}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} \right) + g_z \quad (3.4)$$

Složky tenzoru napětí jsou obecně vyjádřeny vztahy:

$$\tau_{rr} = -2\mu \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \right] \quad (3.5)$$

$$\tau_{\vartheta\vartheta} = -2\mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \right] \quad (3.6)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \left[ \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \right] \quad (3.7)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = -\mu \left[ \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] \quad (3.8)$$

$$\tau_{r\vartheta} = \tau_{\vartheta r} = -\mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\vartheta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \right] \quad (3.9)$$

$$\tau_{z\vartheta} = \tau_{\vartheta z} = -\mu \left[ \frac{\partial u_\vartheta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} \right] \quad (3.10)$$

Vzhledem k tomu, že kapalina je nestlačitelná, proudění je ustálené a v dané geometrii osově symetrické můžeme předcházející rovnice (3.2)–(3.10) dále zjednodušit. Divergence rychlosti je nulová, tangenciální složka rychlosti  $u_\vartheta$  je nulová, derivace všech veličin podle tangenciální souřadnice  $\vartheta$  je také nulová a derivace podle času je také nulová. Pokud vynecháme tyto členy, vypadnou některé rovnice pro  $\tau$ , celá pohybová rovnice ve směru  $\vartheta$  a některé členy z ostatních rovnic pro  $\tau$  a zbylých dvou pohybových rovnic. Zůstanou tyto rovnice:

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} - \frac{\tau_{\vartheta\vartheta}}{r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} \right) \quad (3.11)$$

$$u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (3.12)$$

$$\tau_{rr} = -2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \tau_{\vartheta\vartheta} = -2\mu \frac{u_r}{r}, \quad \tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \tau_{rz} = -\mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \quad (3.13)$$

**Rovnice kontinuity**

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \vec{u}) = 0 \quad (3.14)$$

opět rovnici rozepíšeme do cylindrických souřadnic:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\varrho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\varrho u_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial(\varrho u_z)}{\partial z} = 0 \quad (3.15)$$

Pokud vynecháme členy, které jsou podle předpokladů nulové, dostaneme rovnici:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.16)$$

**3.2.1 Okrajové podmínky**

$$z = 0, 0 \leq r \leq R:$$

$$\begin{aligned} u_z &= 0 && \text{uprostřed vlákna je tok kapaliny v axiálním směru } z \text{ nulový} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} &= 0 && \text{uprostřed vlákna } u_r \text{ nezávisí na } z \text{ z důvodu symetrie kolem středu} \\ &&& \text{vlákna} \end{aligned}$$

$$z = L + L_N, 0 \leq r \leq R:$$

$$\begin{aligned} u_r &= 0 && \text{neporézní částí povrchu vlákna nic neteče} \\ u_z &= 2\overline{u_{zE}} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] && \text{vyvinutý Poiseuilleův toku na konci neporézní části vlákna} \end{aligned}$$

$$0 \leq z \leq L + L_N, r = 0:$$

$$\begin{aligned} u_r &= 0 && \text{v ose vlákna je díky symetrii nulová radiální rychlost} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= 0 && \text{v ose vlákna má } u_z \text{ maximum} \end{aligned}$$

$$0 \leq z \leq L, r = R:$$

$$\begin{aligned} u_z &= 0 && \text{nulový skluz toku kapaliny v axiálním směru na povrchu stěny} \\ u_r &= \frac{K}{\mu}(p - p_F) && \text{rychlost skrz stěnu z Darcyho zákona, permeabilita } K = \textit{konst.} \end{aligned}$$

$$L \leq z \leq L + L_N, r = R:$$

$$\begin{aligned} u_r &= 0 && \text{neporézní částí povrchu vlákna nic neteče} \\ u_z &= 0 && \text{nulový skluz toku kapaliny v axiálním směru na povrchu stěny} \end{aligned}$$

**3.3 Bezrozměrný tvar**

Rovnice (3.11), (3.12), (3.13), (3.16) a okrajové podmínky představují rozměrový matematický model, v němž tři neznámé pole  $u_r$ ,  $u_z$ ,  $p$  závisí na osmi rozměrových parametrech  $\varrho$ ,  $\mu$ ,  $L$ ,  $L_N$ ,

$R$ ,  $p_F$ ,  $\overline{u_{zE}}$ ,  $K$ . Kvůli snížení počtu parametrů převedeme tento model na bezrozměrný tvar s využitím následujících definic bezrozměrných veličin:

$$r_B = \frac{r}{R}, \quad z_B = \frac{z}{R} \quad (3.17)$$

$$u_{rB} = \frac{u_r \varrho R}{\mu}, \quad u_{zB} = \frac{u_z \varrho R}{\mu} \quad (3.18)$$

$$p_B = \frac{\varrho R^2 (p - p_F)}{\mu^2} \quad (3.19)$$

$$\tau_{ijB} = \frac{\varrho R^2 \tau_{ij}}{\mu^2} \quad (3.20)$$

Když z těchto rovnic vyjádříme rozměrové veličiny a dosadíme do rozměrového matematického modelu, dostaneme rovnice matematického modelu v bezrozměrném tvaru.

Složka  $r$  pohybové rovnice:

$$u_{rB} \frac{\partial u_{rB}}{\partial r_B} + u_{zB} \frac{\partial u_{rB}}{\partial z_B} = -\frac{\partial p_B}{\partial r_B} - \frac{1}{r_B} \frac{\partial (r_B \tau_{rrB})}{\partial r_B} + \frac{\tau_{\vartheta\vartheta B}}{r_B} - \frac{\partial \tau_{rzB}}{\partial z_B} \quad (3.21)$$

Složka  $z$  pohybové rovnice:

$$u_{rB} \frac{\partial u_{zB}}{\partial r_B} + u_{zB} \frac{\partial u_{zB}}{\partial z_B} = -\frac{\partial p_B}{\partial z_B} - \frac{1}{r_B} \frac{\partial (r_B \tau_{rzB})}{\partial r_B} - \frac{\partial \tau_{zzB}}{\partial z_B} \quad (3.22)$$

Rovnice kontinuity:

$$\frac{1}{r_B} \frac{\partial (r_B u_{rB})}{\partial r_B} + \frac{\partial u_{zB}}{\partial z_B} = 0 \quad (3.23)$$

Složky bezrozměrného tenzoru napětí  $\vec{\tau}_B$ :

$$\tau_{rrB} = -2 \frac{\partial u_{rB}}{\partial r_B}, \quad \tau_{\vartheta\vartheta B} = -2 \frac{u_{rB}}{r_B}, \quad \tau_{zzB} = -2 \frac{\partial u_{zB}}{\partial z_B}, \quad \tau_{rzB} = -\left( \frac{\partial u_{zB}}{\partial r_B} + \frac{\partial u_{rB}}{\partial z_B} \right) \quad (3.24)$$

Okrajové podmínky v bezrozměrném tvaru:

$$z_B = 0, \quad 0 \leq r_B \leq 1: \quad u_{zB} = 0$$

$$\frac{\partial u_{rB}}{\partial z_B} = 0$$

$$z = \lambda + \lambda_N, \quad 0 \leq r_B \leq 1: \quad u_{rB} = 0$$

$$u_{zB} = Re_E (1 - r_B^2)$$

$$0 \leq z_B \leq \lambda + \lambda_N, \quad r_B = 0: \quad u_{rB} = 0$$

$$\frac{\partial u_{zB}}{\partial r_B} = 0$$

$$0 \leq z_B \leq \lambda, \quad r_B = 1: \quad u_{zB} = 0$$

$$u_{rB} = \kappa p_B$$

$$\lambda \leq z_B \leq \lambda + \lambda_N, \quad r_B = 1: \quad u_{rB} = 0$$

$$u_{zB} = 0$$

kde

$$Re_E = \frac{2\bar{u}_{zE}\rho R}{\mu}, \quad \lambda = \frac{L}{R}, \quad \lambda_N = \frac{L_N}{R}, \quad \kappa = \frac{K}{R} \quad (3.25)$$

Matematický model v bezrozměrném tvaru obsahuje pole tří veličin  $u_{rB}$ ,  $u_{zB}$  a  $p_B$  a závisí jen na čtyřech bezrozměrných parametrech  $Re_E$ ,  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda_N$ .

### 3.4 Konzervativní tvar rovnic

Výše uvedené rovnice je výhodné převést do konzervativního tvaru, který je vhodnější pro jejich diskretizaci. Složky pohybové rovnice (3.21) a (3.22) upravíme tak, že k rovnici (3.21) připočteme  $u_{rB}$  násobek rovnice kontinuity (3.23) a k rovnici (3.22)  $u_{zB}$  násobek rovnice (3.23). Obě vzniklé pohybové rovnice vynásobíme  $r_B$  stejně jako původní rovnici kontinuity a dostaneme:

$$\frac{\partial(r_B u_{rB}^2)}{\partial r_B} + \frac{\partial(r_B u_{rB} u_{zB})}{\partial z_B} = -r_B \frac{\partial p_B}{\partial r_B} - \frac{\partial(r_B \tau_{rrB})}{\partial r_B} + \tau_{\vartheta\vartheta B} - \frac{\partial(r_B \tau_{rzB})}{\partial z_B} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial(r_B u_r B u_{zB})}{\partial r_B} + \frac{\partial(r_B u_{zB}^2)}{\partial z_B} = -r_B \frac{\partial p_B}{\partial z_B} - \frac{\partial(r_B \tau_{rzB})}{\partial r_B} - \frac{\partial(r_B \tau_{zzB})}{\partial z_B} \quad (3.27)$$

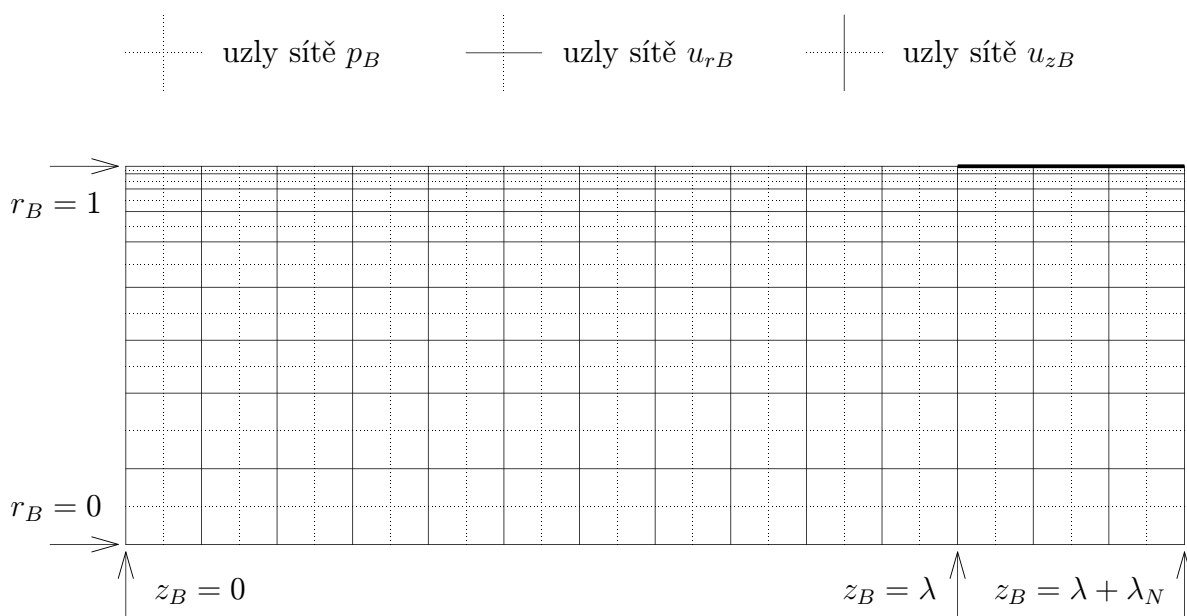
$$\frac{\partial(r_B u_{rB})}{\partial r_B} + \frac{\partial(r_B u_{zB})}{\partial z_B} = 0 \quad (3.28)$$

## 4 Numerické řešení metodou sítí

Analytické řešení matematického modelu je sotva možné, proto musíme použít přibližnou numerickou metodu. Místo spojité funkce, která přesně splňuje rovnice modelu ve všech bodech oblasti řešení, dostaneme hodnoty jen v konečném počtu bodů, a to ještě s určitou chybou. Pro numerické řešení rovnic použijeme metodu sítí.

### 4.1 Návrh sítí

Pro jednotlivé veličiny ( $u_{rB}$ ,  $u_{zB}$ ,  $p_B$ ) použijeme různé (vzájemně posunuté) sítě. Metoda posunutých sítí je popsána např. v Patankarově knize [41] a její použití při výpočtu proudění tekutin odstraňuje potíže s fyzikálně nereálnými oscilacemi tlakového pole, které mohou vzniknout při numerickém řešení na jednotné síti. Při vytváření posunutých sítí použijeme následující postup.



Obrázek 4: Sítě uzlů

Oblast řešení pokryjeme soustavou  $N_r + 1$  vodorovných a  $N_z + 1$  svislých úseček (viz obr. 4) o rovnicích

$$r_B = r_{B1}; r_{B2}; \dots; r_{BN_r+1} \quad (4.1)$$

a

$$z_B = z_{B1}; z_{B2}; \dots; z_{BN_z+1} \quad (4.2)$$

Přitom  $r_{B1} = 0$ ,  $r_{BN_r+1} = 1$  a  $z_{B1} = 0$ ,  $z_{BN_z+1} = \lambda + \lambda_N$ . Pokrytí oblasti řešení přitom volíme tak, aby jedna svislá úsečka měla rovnici  $z_{Bi} = \lambda$ . Použité úsečky rozdělují oblast řešení na soustavu kontrolních objemů pro rovnici kontinuity. Dělení ve svislém i vodorovném směru



nemusí být ekvidistantní a tudíž kontrolní objemy nemusí být stejně velké. Každý kontrolní objem leží celý buďto nalevo nebo napravo od úsečky  $z_{Bi} = \lambda$ .

Uzly sítě pro tlak  $p_B$  umístíme doprostřed kontrolních objemů pro rovnici kontinuity. Ve směru radiální souřadnice je tedy počet uzlů pro tlak  $N_r$ , ve směru axiální souřadnice  $N_z$ . Všechny uzly sítě  $p_B$  leží uvnitř oblasti řešení  $\Omega$ :  $\{0 \leq r_B \leq 1, 0 \leq z_B \leq \lambda + \lambda_N\}$ .

Uzly sítě pro radiální složku rychlosti  $u_{rB}$  umístíme na průsečíky vodorovných dělicích úseček (4.1) a svislých úseček procházejících tlakovými uzly. Tato síť má tedy v radiálním směru o jeden uzel víc  $N_r + 1$ , než síť  $p_B$ . V axiálním směru mají obě sítě stejný počet uzlů  $N_z$ . Dolní a horní řada uzlů sítě  $u_{rB}$  leží na hranici oblasti řešení.

Uzly sítě pro axiální složku rychlosti  $u_{zB}$  umístíme na průsečíky svislých dělicích úseček (4.2) a vodorovných úseček procházejících tlakovými uzly. Tato síť má tedy v axiálním směru o jeden uzel víc  $N_z + 1$ , než síť  $p_B$ . V radiálním směru mají obě sítě stejný počet uzlů  $N_r$ . Levý a pravý sloupec uzlů sítě  $u_{zB}$  leží na hranici oblasti řešení.

Sítě pro jednotlivé veličiny jsou schematicky znázorněny na obr. 4. Uzly jednotlivých sítí přitom vytváří horizontální a vertikální řady; přičemž vzdálenosti sousedních řad nemusí být konstantní.

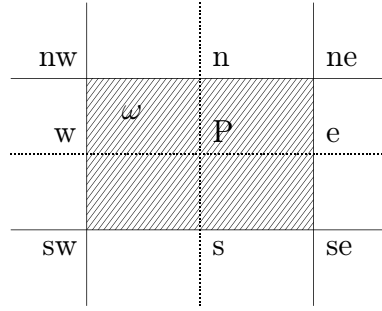
## 4.2 Diskretizace rovnic

Původní parciální diferenciální rovnice matematického modelu převedeme na diferenčními náhrady (diskretizujeme), což jsou algebraické rovnice pro neznámé hodnoty veličin v příslušných uzlech sítí. Existuje více způsobů jak diskretizovat parciální diferenciální rovnice, např. metoda konečných diferencí, metoda konečných prvků, metoda konečných objemů apod. Použijeme poslední z nich, metodu konečných objemů. U této metody integrujeme parciální diferenciální rovnici v určitém okolí (konečném objemu) uzlu příslušné sítě, což vlastně znamená, že požadujeme splnění diferenciální rovnice nikoliv v každém bodě, ale v průměru. Ve dvourozměrném modelu (souřadnice  $r_B, z_B$ ) má konečný objem význam plošky v okolí uzlu.

### 4.2.1 Diskretizace rovnice kontinuity

Diskretizaci provedeme na konečných objemech v okolí uzlů základní sítě tlakového pole. Oblast (konečný objem)  $\omega$ , přes kterou integrujeme rovnici kontinuity, je vyznačena v obrázku šrafovaně. Uzel (P) sítě tlakového pole leží uprostřed mezi uzly (n) a (s) a uprostřed mezi uzly (e) a (w). Uzly (n) a (s) odpovídají uzlům sítě radiální složky rychlosti; uzly (e) a (w) odpovídají uzlům sítě axiální složky rychlosti. Integrujeme rovnici kontinuity (3.28) přes oblast  $\omega$ .

$$\int_{z_{Bw}}^{z_{Be}} \int_{r_{Bs}}^{r_{Bn}} \left[ \frac{\partial(r_B u_{rB})}{\partial r_B} + \frac{\partial(r_B u_{zB})}{\partial z_B} \right] dr_B dz_B = 0 \quad (4.3)$$

Obrázek 5: Konečný objem  $\omega$  pro rovnici kontinuity

Výraz na levé straně lze částečně integrovat exaktně

$$\int_{z_{Bw}}^{z_{Be}} (r_{Bn}u_{rBn} - r_{Bs}u_{rBs})dz_B + \int_{r_{Bs}}^{r_{Bn}} (r_B u_{zBe} - r_B u_{zBw})dr_B = 0 \quad (4.4)$$

Přítom  $u_{rBn}$  je radiální složka rychlosti na hraně (nw,ne) oblasti  $\omega$  a je obecně funkcí  $z_B$ . Při další integraci ji však budeme považovat za konstantní na celé hraně (nw,ne) a rovnou hodnotě v uzlu (n). Podobně pro  $u_{rBs}$ .

Veličina  $u_{zBe}$  je axiální složka rychlosti na hraně (se,ne) oblasti  $\omega$  a je obecně funkcí  $r_B$ . Při další integraci ji však budeme považovat za konstantní na celé hraně (se,ne) a rovnou hodnotě v uzlu (e). Podobně pro  $u_{zBw}$ . Za těchto zjednodušujících předpokladů dostaneme z rovnice (4.4) provedením naznačených integrací

$$(z_{Be} - z_{Bw})(r_{Bn}u_{rBn} - r_{Bs}u_{rBs}) + \frac{r_{Bn}^2 - r_{Bs}^2}{2}(u_{zBe} - u_{zBw}) = 0 \quad (4.5)$$

Rovnici můžeme upravit do tvaru

$$A_{Kn}u_{rBn} + A_{Ks}u_{rBs} + A_{ke}u_{zBe} + A_{Kw}u_{zBw} = 0 \quad (4.6)$$

kde

$$A_{Kn} = (z_{Be} - z_{Bw})r_{Bn} \quad (4.7)$$

$$A_{Ks} = -(z_{Be} - z_{Bw})r_{Bs} \quad (4.8)$$

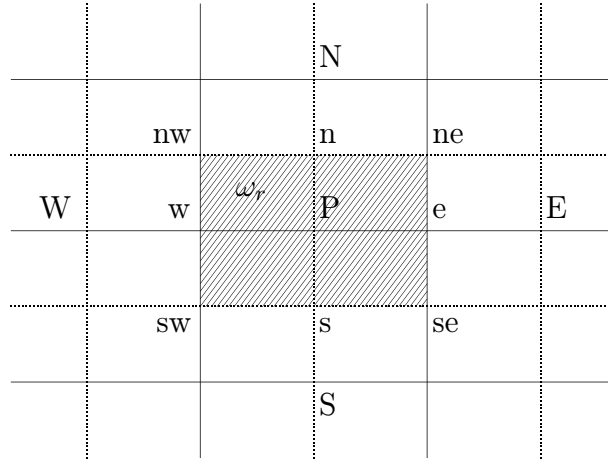
$$A_{Ke} = \frac{r_{Bn}^2 - r_{Bs}^2}{2} \quad (4.9)$$

$$A_{Kw} = -A_{Ke} \quad (4.10)$$

#### 4.2.2 Diskretizace r-složky pohybové rovnice

Diskretizaci provedeme na konečných objemech v okolí uzlů sítě radiální složky rychlosti. Oblast  $\omega_r$ , přes kterou integrujeme rovnici (3.26), je vyznačena v obrázku šrafovane. Diskretizace se

provádí jen pro ty uzly sítě  $u_{rB}$ , které leží uvnitř oblasti řešení. Pro uzly na hranici oblasti jsou hodnoty  $u_{rB}$  dány okrajovými podmínkami. V tomto obrázku jsou {P,S,N,W,E} uzly sítě



Obrázek 6: Konečný objem  $\omega_r$  pro r-složku pohybové rovnice

veličiny  $u_{rB}$ , {s,n} jsou uzly sítě veličiny  $p_B$  a {sw,nw,se,ne} jsou uzly sítě veličiny  $u_{zB}$ . Uzel (P) leží uprostřed mezi (e) a (w), ale nemusí ležet uprostřed mezi (n) a (s). Uzel (n) leží uprostřed mezi (N) a (P) a podobně (s) leží uprostřed mezi (S) a (P). Uzel (e) nemusí ležet uprostřed mezi (P) a (E) a podobně (w) nemusí ležet uprostřed mezi (W) a (P).

Rovnici (3.26) převedeme do anulovaného tvaru a integrujeme přes  $\omega_r$

$$\int_{z_{Bw}}^{z_{Be}} \int_{r_{Bs}}^{r_{Bn}} \left[ \frac{\partial(r_B u_{rB}^2)}{\partial r_B} + \frac{\partial(r_B u_{rB} u_{zB})}{\partial z_B} + r_B \frac{\partial p_B}{\partial r_B} + \frac{\partial(r_B \tau_{rrB})}{\partial r_B} - \tau_{\vartheta\vartheta B} + \frac{\partial(r_B \tau_{rzB})}{\partial z_B} \right] dr_B dz_B \quad (4.11)$$

Některé členy výrazu na levé straně lze částečně integrovat exaktně

$$\begin{aligned} & \int_{z_{Bw}}^{z_{Be}} (r_{Bn} u_{r_{Bn}}^2 - r_{Bs} u_{r_{Bs}}^2) dz_B + \int_{r_{Bs}}^{r_{Bn}} (r_B u_{r_{Be}} u_{z_{Be}} - r_B u_{r_{Bw}} u_{z_{Bw}}) dr_B + \\ & + \int_{z_{Bw}}^{z_{Be}} r_{BP} (p_{Bn} - p_{Bs}) dz_B + \int_{z_{Bw}}^{z_{Be}} (r_{Bn} \tau_{rr_{Bn}} - r_{Bs} \tau_{rr_{Bs}}) dz_B - \\ & - \int_{z_{Bw}}^{z_{Be}} \int_{r_{Bs}}^{r_{Bn}} \tau_{\vartheta\vartheta B} dr_B dz_B + \int_{r_{Bs}}^{r_{Bn}} (r_B \tau_{rz_{Be}} - r_B \tau_{rz_{Bw}}) dr_B = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Postup integrace členu s tlakem si zaslouží bližší vysvětlení. Platí

$$r_B \frac{\partial p_B}{\partial r_B} = \frac{\partial(r_B p_B)}{\partial r_B} - p_B \quad (4.13)$$

potom

$$\begin{aligned} & \int_{r_{Bs}}^{r_{Bn}} r_B \frac{\partial p_B}{\partial r_B} dr_B = r_{Bn} p_{Bn} - r_{Bs} p_{Bs} - \int_{r_{Bs}}^{r_{Bn}} p_B dr_B = \\ & = r_{Bn} p_{Bn} - r_{Bs} p_{Bs} - \int_{r_{Bs}}^{r_{BP}} p_B dr_B - \int_{r_{BP}}^{r_{Bn}} p_B dr_B \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dále předpokládáme, že hodnota tlaku je na kontrolním objemu  $\omega$  v okolí tlakového uzlu konstantní a rovna hodnotě v uzlu. To znamená, že (viz obr. 5) tlak na úsečce (s,P) je roven  $p_{Bs}$  a tlak na úsečce (P,n) je roven  $p_{Bn}$ . Potom se dostaneme k vyjádření v rovnici (4.12)

$$\int_{r_{Bs}}^{r_{Bn}} r_B \frac{\partial p_B}{\partial r_B} dr_B = r_{Bn} p_{Bn} - r_{Bs} p_{Bs} - (r_{BP} - r_{Bs}) p_{Bs} - (r_{Bn} - r_{BP}) p_{Bn} = r_{BP} (p_{Bn} - p_{Bs}) \quad (4.15)$$

Při dalších integracích rovnice (4.12) se uvažují veličiny na příslušných částech hranice  $\omega_r$  za konstantní. Například  $u_{rBn}$  na hraně (nw,ne) je konstantní a rovna hodnotě v uzlu (n). Navíc člen  $\tau_{\vartheta\vartheta B}$  se uvažuje konstantní na celé oblasti  $\omega_r$ . Dostaneme

$$\begin{aligned} & (r_{Bn} u_{rBn}^2 - r_{Bs} u_{rBs}^2) (z_{Be} - z_{Bw}) + (u_{rBe} u_{zBe} - u_{rBw} u_{zBw}) \frac{r_{Bn}^2 - r_{Bs}^2}{2} + \\ & + (r_{Bn} \tau_{rrBn} - r_{Bs} \tau_{rrBs}) (z_{Be} - z_{Bw}) + (\tau_{rzBe} - \tau_{rzBw}) \frac{r_{Bn}^2 - r_{Bs}^2}{2} + \\ & + r_{BP} (p_{Bn} - p_{Bs}) (z_{Be} - z_{Bw}) - \tau_{\vartheta\vartheta BP} (r_{Bn} - r_{Bs}) (z_{Be} - z_{Bw}) = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

V rovnici jsou členy obsahující

- součiny složek rychlosti ( $u_{rBn}^2, u_{rBe} u_{zBe}, \dots$ ),
- složky tenzoru napětí ( $\tau_{rrBn}, \tau_{\vartheta\vartheta BP}, \dots$ ), které jsou lineární funkcí derivací složek rychlosti a  $u_{rBP}$ ,
- hodnoty tlaku.

Další úprava rovnice (4.16) spočívá v linearizaci členů se součiny složek rychlosti a náhradě derivací ve členech  $\tau_{ijB}$  diferenčními vzorci. Člen  $r_{BP} (p_{Bn} - p_{Bs}) (z_{Be} - z_{Bw})$  není třeba dále upravovat, protože  $p_{Bn}$  a  $p_{Bs}$  jsou hodnoty tlaku přímo v uzlech tlakové sítě.

### ***Linearizace členů se součiny složek rychlosti***

Postup linearizace ukážeme na členu  $u_{rBe} u_{zBe}$ . Tento člen vyjadřuje (v bezrozměrném tvaru) sdílení r-složky hybnosti tekutiny konvekci ve směru  $z$ .

Veličinu  $u_{zBe}$ , která je mírou velikosti konvekce ve směru  $z$ , určíme jako aritmetický průměr  $z$  hodnot v uzlech (ne) a (se) sítě  $u_{zB}$

$$u_{zBe} = \frac{u_{zBne} + u_{zBse}}{2} \quad (4.17)$$

Náhradu veličiny  $u_{rBe}$  provedeme odlišným způsobem; použijeme tzv. náhradu „proti proudu“ (upstream), která je dána vztahy

$$\text{pro } u_{zBe} \geq 0 : u_{rBe} = u_{rBP}, \quad (4.18)$$

$$\text{pro } u_{zBe} < 0 : u_{rBe} = u_{rBE}$$

Veličina  $u_{rBe}$  je tedy nahrazena hodnotou v tom uzlu sítě  $u_{rB}$ , ze kterého tekutina přitéká (odtud název). Podle toho můžeme vyjádřit člen  $u_{rBe}u_{zBe}$  takto

$$u_{rBe}u_{zBe} = -\max(0; -u_{zBe})u_{rBE} + \max(0; u_{zBe})u_{rBP} \quad (4.19)$$

kde  $u_{zBe}$  je dána vztahem (4.17). Funkce  $\max(a; b)$  vybírá maximum z hodnot  $a, b$ . Stejným způsobem nahradíme další nelineární členy v rovnici (4.16)

$$u_{rBw}u_{zBw} = -\max(0; -u_{zBw})u_{rBP} + \max(0; u_{zBw})u_{rBW} \quad (4.20)$$

$$u_{zBw} = \frac{u_{zBnw} + u_{zBsw}}{2} \quad (4.21)$$

$$u_{rBn}^2 = -\max(0; -u_{rBn})u_{rBN} + \max(0; u_{rBn})u_{rBP} \quad (4.22)$$

$$u_{rBn} = \frac{u_{rBN} + u_{rBP}}{2} \quad (4.23)$$

$$u_{rBs}^2 = -\max(0; -u_{rBs})u_{rBP} + \max(0; u_{rBs})u_{rBS} \quad (4.24)$$

$$u_{rBs} = \frac{u_{rBS} + u_{rBP}}{2} \quad (4.25)$$

### Úpravy členů se složkami tenzoru napětí

$$\tau_{rrBn} = -2 \left( \frac{\partial u_{rB}}{\partial r_B} \right)_n \approx -2 \frac{u_{rBN} - u_{rBP}}{r_{BN} - r_{BP}} \quad (4.26)$$

$$\tau_{rrBs} = -2 \left( \frac{\partial u_{rB}}{\partial r_B} \right)_s \approx -2 \frac{u_{rBP} - u_{rBS}}{r_{BP} - r_{BS}} \quad (4.27)$$

$$\tau_{rzBe} = - \left( \frac{\partial u_{zB}}{\partial r_B} + \frac{\partial u_{rB}}{\partial z_B} \right)_e \approx - \left( \frac{u_{zBne} - u_{zBse}}{r_{Bn} - r_{Bs}} + \frac{u_{rBE} - u_{rBP}}{z_{BE} - z_{BP}} \right) \quad (4.28)$$

$$\tau_{rzBw} = - \left( \frac{\partial u_{zB}}{\partial r_B} + \frac{\partial u_{rB}}{\partial z_B} \right)_w \approx - \left( \frac{u_{zBnw} - u_{zBsw}}{r_{Bn} - r_{Bs}} + \frac{u_{rBP} - u_{rBW}}{z_{BP} - z_{BW}} \right) \quad (4.29)$$

$$\tau_{\vartheta\vartheta BP} = -2 \frac{u_{rBP}}{r_{BP}} \quad (4.30)$$

Dosadíme-li do rovnice (4.16) výrazy (4.19), (4.20), (4.22), (4.24), (4.26)–(4.30) a seskupíme jednotlivé členy obsahující  $u_{rBP}$  k sobě (a podobně členy s  $u_{rBN}, u_{rBS}, u_{rBE}, u_{rBW}$ ), můžeme výslednou rovnici psát ve tvaru

$$A_{RP}u_{rBP} = A_{RN}u_{rBN} + A_{RS}u_{rBS} + A_{RE}u_{rBE} + A_{RW}u_{rBW} + B_{RP}(p_{Bs} - p_{Bn}) + C_{RP} \quad (4.31)$$

kde

$$A_{RN} = (z_{Be} - z_{Bw})r_{Bn} \left[ \max(0; -u_{rBn}) + \frac{2}{r_{BN} - r_{BP}} \right] \quad (4.32)$$

$$A_{RS} = (z_{Be} - z_{Bw})r_{Bs} \left[ \max(0; u_{rBs}) + \frac{2}{r_{BP} - r_{BS}} \right] \quad (4.33)$$

$$A_{RE} = \frac{r_{Bn}^2 - r_{Bs}^2}{2} \left[ \max(0; -u_{zBe}) + \frac{1}{z_{BE} - z_{BP}} \right] \quad (4.34)$$

$$A_{RW} = \frac{r_{Bn}^2 - r_{Bs}^2}{2} \left[ \max(0; u_{zBw}) + \frac{1}{z_{BP} - z_{BW}} \right] \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} A_{RP} = (z_{Be} - z_{Bw}) & \left[ r_{Bn} \max(0; u_{rBn}) + r_{Bs} \max(0; -u_{rBs}) + 2 \left( \frac{r_{Bn}}{r_{BN} - r_{BP}} + \frac{r_{Bs}}{r_{BP} - r_{BS}} \right) \right] \\ & + \frac{r_{Bn}^2 - r_{Bs}^2}{2} \left[ \max(0; u_{zBe}) + \max(0; -u_{zBw}) + \frac{1}{z_{BE} - z_{BP}} + \frac{1}{z_{BP} - z_{BW}} \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$B_{RP} = r_{BP}(z_{Be} - z_{Bw}) \quad (4.37)$$

$$C_{RP} = \frac{r_{Bn} + r_{Bs}}{2} (u_{zBne} - u_{zBse} - u_{zBnw} + u_{zBsw}) - \frac{2u_{rBP}}{r_{BP}} (r_{Bn} - r_{Bs})(z_{Be} - z_{Bw}) \quad (4.38)$$

Druhý člen v rovnici (4.38) sice obsahuje  $u_{rBP}$ , ale nebyl výjimečně přiřazen k  $A_{RP}u_{rBP}$ . Koeficient  $A_{RP}$  můžeme dále upravit. Na základě rovnosti

$$u = \max(0; u) - \max(0; -u) \quad (4.39)$$

nahradíme v (4.36) jednotlivé členy s  $\max()$  a dostaneme

$$\begin{aligned} A_{RP} = (z_{Be} - z_{Bw}) & \left[ r_{Bn} \max(0; -u_{rBn}) + r_{Bs} \max(0; u_{rBs}) + 2 \left( \frac{r_{Bn}}{r_{BN} - r_{BP}} + \frac{r_{Bs}}{r_{BP} - r_{BS}} \right) \right] \\ & + \frac{r_{Bn}^2 - r_{Bs}^2}{2} \left[ \max(0; -u_{zBe}) + \max(0; u_{zBw}) + \frac{1}{z_{BE} - z_{BP}} + \frac{1}{z_{BP} - z_{BW}} \right] \end{aligned} \quad (4.40)$$

Příčemž bylo využito skutečnosti, že

$$(z_{Be} - z_{Bw})(r_{Bn}u_{rBn} - r_{Bs}u_{rBs}) + \frac{r_{Bn}^2 - r_{Bs}^2}{2} (u_{zBe} - u_{zBw}) = 0 \quad (4.41)$$

což je vlastně diskretizovaná rovnice kontinuity (4.5), tentokrát ovšem v okolí uzlu sítě  $u_{rB}$ . Porovnáním vztahu (4.36) se vztahy (4.32)–(4.35) je vidět, že

$$A_{RP} = A_{RN} + A_{RS} + A_{RE} + A_{RW} \quad (4.42)$$

Hodnoty rychlostí, které figurují v koeficientech  $A_{Ri}$ , se počítají ze vztahů (4.17), (4.21), (4.23), (4.25).

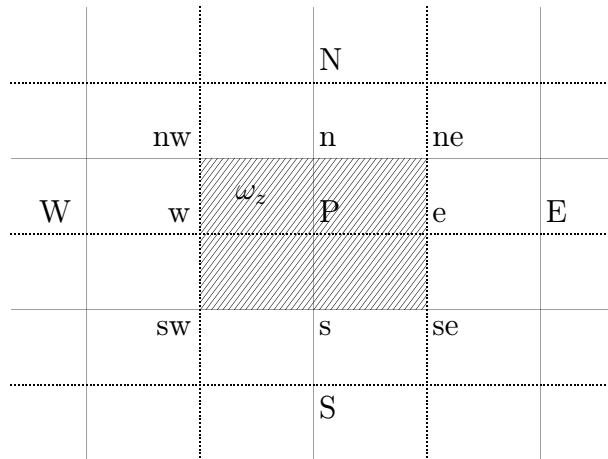
Ve výrazech (4.28), (4.29), (4.34), (4.35) figurují hodnoty  $u_{rBE}$ ,  $u_{rBW}$  a souřadnice  $z_{BE}$ ,  $z_{BW}$ , které mohou odpovídat uzlům ležícím mimo oblast řešení.

V případě, že uzel (P) sítě  $u_{rB}$  leží v prvním sloupci vlevo od hranice  $z_B = \lambda + \lambda_N$ , pak  $\left(\frac{\partial u_{rB}}{\partial z_B}\right)_e = 0$  (plně vyvinutý profil). Ve vztahu (4.28) vypadne člen  $\frac{u_{rBE} - u_{rBP}}{u_{BE} - u_{BP}}$  a v koeficientech  $A_{RE}$  a  $A_{RP}$  proto nebude člen  $\frac{1}{z_{BE} - z_{BP}}$ . Navíc pro takový uzel je  $u_{rBE} = 0$  a součin  $A_{RE}u_{rBE}$  se v rovnici (4.31) neuplatní.

Jestliže naopak leží uzel (P) v prvním sloupci vpravo od hranice  $z_B = 0$ , potom  $u_{zBw} = 0$  a  $\left(\frac{\partial u_{rB}}{\partial z_B}\right)_w = 0$  (symetrie podle středu vlákna). Koeficient  $A_{RW}$  je v tomto případě nulový a tím je vyloučena závislost na  $u_{rBW}$  v uzlu mimo oblast řešení.

### 4.2.3 Diskretizace z-složky pohybové rovnice

Diskretizaci provedeme na konečných objemech v okolí uzlů sítě axiální složky rychlosti. Oblast  $\omega_z$ , přes kterou integrujeme rovnici (3.26), je vyznačena v obr. 7 šrafovane. Diskretizace se provádí jen pro ty uzly sítě  $u_{zB}$ , které leží uvnitř oblasti řešení. Pro uzly na hranici oblasti jsou hodnoty  $u_{zB}$  dány okrajovými podmínkami. V tomto obrázku jsou {P,S,N,W,E} uzly sítě



Obrázek 7: Konečný objem  $\omega_z$  pro z-složku pohybové rovnice

veličiny  $u_{zB}$ , {w,e} jsou uzly sítě veličiny  $p_B$  a {sw,nw,se,ne} jsou uzly sítě veličiny  $u_{rB}$ . Uzel (P) leží uprostřed mezi (n) a (s), ale nemusí ležet uprostřed mezi (e) a (w). Uzel (e) leží uprostřed mezi (E) a (P) a podobně (w) leží uprostřed mezi (W) a (P). Uzel (n) nemusí ležet uprostřed mezi (P) a (N) a podobně (s) nemusí ležet uprostřed mezi (S) a (P).

Rovnici (3.26) převedeme do anulovaného tvaru a integrujeme přes  $\omega_z$

$$\int_{r_{Bs}}^{r_{Bn}} \int_{z_{Bw}}^{z_{Be}} \left[ \frac{\partial(r_B u_{rB} u_{zB})}{\partial r_B} + \frac{\partial(r_B u_{zB}^2)}{\partial z_B} + r_B \frac{\partial p_B}{\partial z_B} + \frac{\partial(r_B \tau_{rzB})}{\partial r_B} + \frac{\partial(r_B \tau_{zzB})}{\partial z_B} \right] dz_B dr_B = 0 \quad (4.43)$$

Některé členy výrazu levé části rovnice lze částečně integrovat exaktně

$$\int_{z_{Bw}}^{z_{Be}} (r_{Bn} u_{rBn} u_{zBn} - r_{Bs} u_{rBs} u_{zBs}) dz_B + \int_{r_{Bs}}^{r_{Bn}} (r_B u_{zBe}^2 - r_B u_{zBw}^2) dr_B + \int_{r_{Bs}}^{r_{Bn}} r_B (p_{Be} - p_{Bw}) dr_B +$$

$$+ \int_{z_{Bw}}^{z_{Be}} (r_{Bn} \tau_{rzBn} - r_{Bs} \tau_{rzBs}) dz_B + \int_{r_{Bs}}^{r_{Bn}} (r_B \tau_{zzBe} - r_B \tau_{zzBw}) dr_B = 0 \quad (4.44)$$

Při dalších integracích se uvažují veličiny na příslušných částech hranice  $\omega_z$  za konstantní. Například  $u_{rBn}$  na hraně (nw,ne) je konstantní a rovna hodnotě v uzlu (n). Dostaneme

$$(r_{Bn} u_{rBn} u_{zBn} - r_{Bs} u_{rBs} u_{zBs})(z_{Be} - z_{Bw}) + \frac{r_{Bn}^2 - r_{Bs}^2}{2} (u_{zBe}^2 - u_{zBw}^2) + \quad (4.45)$$

$$(r_{Bn} \tau_{rzBn} - r_{Bs} \tau_{rzBs})(z_{Be} - z_{Bw}) + \frac{r_{Bn}^2 - r_{Bs}^2}{2} (\tau_{zzBe} - \tau_{zzBw}) + \frac{r_{Bn}^2 - r_{Bs}^2}{2} (p_{Be} - p_{Bw}) = 0$$

Další úprava rovnice je podobná úpravě rovnice (4.16) z části 4.2.2. Zde jsou uvedeny jen výsledky bez podrobného komentáře.

### *Linearizace členů se součiny složek rychlosti*

$$u_{rBn} u_{zBn} = -\max(0; -u_{rBn}) u_{zBN} + \max(0; u_{rBn}) u_{zBP} \quad (4.46)$$

$$u_{rBn} = \frac{u_{rBnw} + u_{rBne}}{2} \quad (4.47)$$

$$u_{rBs} u_{zBs} = -\max(0; -u_{rBs}) u_{zBP} + \max(0; u_{rBs}) u_{zBS} \quad (4.48)$$

$$u_{rBs} = \frac{u_{rBsw} + u_{rBse}}{2} \quad (4.49)$$

$$u_{zBe}^2 = -\max(0; -u_{zBe}) u_{zBE} + \max(0; u_{zBe}) u_{zBP} \quad (4.50)$$

$$u_{zBe} = \frac{u_{zBE} + u_{zBP}}{2} \quad (4.51)$$

$$u_{zBw}^2 = -\max(0; -u_{zBw}) u_{zBP} + \max(0; u_{zBw}) u_{zBW} \quad (4.52)$$

$$u_{zBw} = \frac{u_{zBW} + u_{zBP}}{2} \quad (4.53)$$



*Úpravy členů se složkami tenzoru napětí*

$$\tau_{rzBn} = - \left( \frac{\partial u_{rB}}{\partial z_B} + \frac{\partial u_{zB}}{\partial r_B} \right)_n \approx - \left( \frac{u_{rBne} - u_{rBnw}}{z_{Be} - z_{Bw}} + \frac{u_{zBN} - u_{zBP}}{r_{BN} - r_{BP}} \right) \quad (4.54)$$

$$\tau_{rzBs} = - \left( \frac{\partial u_{rB}}{\partial z_B} + \frac{\partial u_{zB}}{\partial r_B} \right)_s \approx - \left( \frac{u_{rBse} - u_{rBsw}}{z_{Be} - z_{Bw}} + \frac{u_{zBP} - u_{zBS}}{r_{BP} - r_{BS}} \right) \quad (4.55)$$

$$\tau_{zzBe} = -2 \left( \frac{\partial u_{zB}}{\partial z_B} \right)_e \approx -2 \frac{u_{zBE} - u_{zBP}}{z_{Be} - z_{BP}} \quad (4.56)$$

$$\tau_{zzBw} = -2 \left( \frac{\partial u_{zB}}{\partial z_B} \right)_w \approx -2 \frac{u_{zBP} - u_{zBW}}{z_{BP} - z_{BW}} \quad (4.57)$$

Dosadíme-li do rovnice (4.45) výrazy (4.46), (4.48), (4.50), (4.52), (4.54)–(4.57) a seskupíme jednotlivé členy obsahující  $u_{zBP}$  k sobě (a podobně členy s  $u_{zBN}$ ,  $u_{zBS}$ ,  $u_{zBE}$ ,  $u_{zBW}$ ), můžeme výslednou rovnici psát ve tvaru

$$A_{ZP}u_{zBP} = A_{ZN}u_{zBN} + A_{ZS}u_{zBS} + A_{ZE}u_{zBE} + A_{ZW}u_{zBW} + B_{ZP}(p_{Bw} - p_{Be}) + C_{ZP} \quad (4.58)$$

kde

$$A_{ZN} = (z_{Be} - z_{Bw})r_{Bn} \left[ \max(0; -u_{rBn}) + \frac{1}{r_{BN} - r_{BP}} \right] \quad (4.59)$$

$$A_{ZS} = (z_{Be} - z_{Bw})r_{Bs} \left[ \max(0; u_{rBs}) + \frac{1}{r_{BP} - r_{BS}} \right] \quad (4.60)$$

$$A_{ZE} = \frac{r_{Bn}^2 - r_{Bs}^2}{2} \left[ \max(0; -u_{zBe}) + \frac{2}{z_{BE} - z_{BP}} \right] \quad (4.61)$$

$$A_{ZW} = \frac{r_{Bn}^2 - r_{Bs}^2}{2} \left[ \max(0; u_{zBw}) + \frac{2}{z_{BP} - z_{BW}} \right] \quad (4.62)$$

$$A_{ZP} = A_{ZN} + A_{ZS} + A_{ZE} + A_{ZW} \quad (4.63)$$

$$B_{ZP} = \frac{r_{Bn}^2 - r_{Bs}^2}{2} \quad (4.64)$$

$$C_{ZP} = r_{Bn}(u_{rBne} - u_{rBnw}) - r_{Bs}(u_{rBse} - u_{rBsw}) \quad (4.65)$$

Hodnoty rychlostí, které figurují v koeficientech  $A_{Zi}$ , se počítají ze vztahů (4.47), (4.49), (4.51), (4.53).

V některých z výše uvedených výrazů figurují hodnoty  $u_{zBN}$ ,  $u_{zBS}$  a souřadnice  $r_{BN}$  a  $r_{BS}$  pro uzly (N) a (S) ležící mimo oblast řešení.

V případě, že uzel (P) sítě  $u_{zB}$  leží v první řadě pod horní částí hranice oblasti řešení  $r_{Bn} = 1$ , použijeme místo náhrady (4.46) náhradu

$$u_{rBn}u_{zBn} = -\max(0, -u_{rBn})u_{zBn} + \max(0, u_{rBn})u_{zBP} \quad (4.66)$$

a místo náhrady (4.54) použijeme

$$\tau_{rzBn} = - \left( \frac{u_{rBne} - u_{rBnw}}{z_{Be} - z_{Bw}} + \frac{u_{zBn} - u_{zBP}}{z_{Bn} - z_{BP}} \right) \quad (4.67)$$

V náhradách (4.66), (4.67) je tedy místo  $u_{zBN}$  použito hodnoty  $u_{zBn}$  a místo  $r_{BN}$  hodnoty  $r_{Bn}$ . Rovnice (4.58) se změní tak, že první člen na pravé straně bude  $A_{ZN}u_{zBn}$ . V koeficientech  $A_{ZN}$  a  $A_{ZP}$  bude místo  $r_{BN}$  hodnota  $r_{Bn}$ . Ostatní koeficienty se nezmění a platný zůstává i vztah (4.63). Protože pro  $r_{Bn} = 1$  je podle jedné z okrajových podmínek  $u_{zBn} = 0$ , první člen na pravé straně rovnice (4.58) se nakonec neuplatní.

V případě, že uzel (P) sítě  $u_{zB}$  leží v první řadě nad dolní částí hranice oblasti řešení  $r_{Bs} = 0$ , je koeficient  $A_{ZS} = 0$  a hodnota  $u_{zBS}$  se v rovnici (4.58) neuplatní.

#### 4.2.4 Rovnice pro tlak

V předcházejících částech jsme dostali diskrétní analogy r- a z-složky pohybové rovnice (rovnice (4.31) a (4.58)) ve tvaru kvazilineárních algebraických rovnic pro obě složky rychlosti. Rovnici (4.31) upravíme do tvaru

$$u_{rBP} = \hat{u}_{rBP} + D_{RP}(p_{Bs} - p_{Bn}) \quad (4.68)$$

kde  $\hat{u}$  budeme nazývat pseudorychlost v soulase s pojmenováním, které použil Patankar [41]. Přitom

$$\hat{u}_{rBP} = \frac{A_{RN}u_{rBN} + A_{RS}u_{rBS} + A_{RE}u_{rBE} + A_{RW}u_{rBW} + C_{RP}}{A_{RP}} \quad (4.69)$$

$$D_{RP} = \frac{B_{RP}}{A_{RP}} \quad (4.70)$$

Podobně rovnici (4.58) upravíme do tvaru

$$u_{zBP} = \hat{u}_{zBP} + D_{ZP}(p_{Bw} - p_{Be}) \quad (4.71)$$

$$\hat{u}_{zBP} = \frac{A_{ZN}u_{zBN} + A_{ZS}u_{zBS} + A_{ZE}u_{zBE} + A_{ZW}u_{zBW} + C_{ZP}}{A_{ZP}} \quad (4.72)$$

$$D_{ZP} = \frac{B_{ZP}}{A_{ZP}} \quad (4.73)$$

Chybí nám ještě rovnice pro tlak podobná rovnicím (4.31) a (4.58). Diskretizovaná rovnice kontinuity vyjadřuje vztah mezi složkami rychlosti na hranách kontrolního objemu v okolí obecného uzlu sítě pro tlak a hodnoty tlaku explicitně neobsahuje. Může ale sloužit jako výchozí bod pro odvození potřebného vztahu. Do rovnice (4.6) dosadíme za jednotlivé složky rychlosti jejich vyjádření pomocí vztahů (4.68) a (4.71), s výjimkou u těch uzlů  $\{n,s,w,e\}$  kontrolního objemu  $\omega$ , které leží na hranici oblasti řešení. Dostaneme

$$A_{PPPBP} = A_{PN}p_{BN} + A_{PS}p_{BS} + A_{PE}p_{BE} + A_{PW}p_{BW} + C_{PP} \quad (4.74)$$

kde

$$A_{PN} = A_{Kn}D_{Rn} \quad (4.75)$$

$$A_{PS} = -A_{Ks}D_{Rs} \quad (4.76)$$

$$A_{PE} = A_{Ke}D_{Ze} \quad (4.77)$$

$$A_{PW} = -A_{Kw}D_{Zw} \quad (4.78)$$

$$A_{PP} = A_{PN} + A_{PS} + A_{PE} + A_{PW} \quad (4.79)$$

$$C_{PP} = -(A_{Kn}\hat{u}_{rBn} + A_{Ks}\hat{u}_{rBs} + A_{Ke}\hat{u}_{zBe} + A_{Kw}\hat{u}_{zBw}) \quad (4.80)$$

Jestliže uzel (P) sítě tlaku leží v sousedství hranice oblasti řešení, pak některý z uzlů  $\{n,s,w,e\}$  leží na této hranici. Pro takový uzel je ve výrazu (4.80) místo odpovídající pseudorychlosti použita přímo hodnota rychlosti a odpovídající koeficient  $A_{Pi}$  je nulový. Tím je zajištěno, že se při použití rovnice (4.74) nebude odkazovat na hodnoty mimo oblast řešení.

## 4.3 Aplikace

### 4.3.1 Popis algoritmu numerického řešení

Matematický model v diskretním tvaru je soustava nelineárních algebraických rovnic. Hledanými veličinami jsou radiální rychlost  $u_{rB}$ , axiální rychlost  $u_{zB}$  a tlak  $p_B$ .

Počet uzlů s neznámou hodnotou je u pole radiálních rychlostí  $(N_r - 1) \times N_z + N_{z,por}$ , kde  $N_{z,por}$  je počet uzlu na stěně porézní části. Pole axiálních rychlostí má  $N_r \times (N_z - 1)$  neznámých a tlakové pole  $N_r \times N_z$  neznámých. Celkový počet neznámých je tedy  $(N_r - 1) \times N_z + N_{z,por} + N_r \times (N_z - 1) + N_r \times N_z$ .

Počet rovnic, které dostaneme diskretizací r-složky pohybové rovnice je  $(N_r - 1) \times N_z$ . Počet rovnic, které dostaneme diskretizací z-složky pohybové rovnice je  $N_r \times (N_z - 1)$ . Počet rovnic, které dostaneme diskretizací rovnice kontinuity a převedením na tlakovou rovnici je  $N_r \times N_z$ . Další  $N_{z,por}$  rovnic dostaneme z okrajové podmínky pro radiální rychlost kapaliny proudící přes porézní stěnu vlákna. Celkový počet rovnic je tedy  $(N_r - 1) \times N_z + N_{z,por} + N_r \times (N_z - 1) + N_r \times N_z$  a je stejný jako počet neznámých veličin. Systém rovnic je tedy principiálně řešitelný.

Systém numerických rovnic jsem zpracoval v programovacím jazyce Delphi. Zdrojový kód programu je přiložen na CD.

### **Postup výpočtu**

1. Zadání vstupních veličin — Vstupními veličinami jsou počet bodů tlakového pole v radiálním směru  $N_r$ , počet bodů tlakového pole v axiálním směru  $N_z$ , počet iterací tlakové

- rovnice, minimální residuum řídicích rovnic, Reynoldsovo kritérium na výstupu  $Re_E$ , bezrozměrná permeabilita  $\kappa$ , bezrozměrná délka porézní části vlákna  $\lambda$  a bezrozměrná délka neporézní části vlákna  $\lambda_N$ .
2. Generace souřadnic sítě — Souřadnice lze nadefinovat přímým zadáním nebo cyklem s příslušnou funkcí, která může definovat síť souřadnic rozdělenou stejnoměrně i nestejnoměrně.
  3. Vytvoření nástřelových hodnot — Protože se jedná o iterační výpočet, je nutné stanovit nástřel cílových veličin, tedy tlaku a obou rychlostí. Násthřel byl vypočten ze zjednodušeného modelu uvažujícího Poiseuilleův tok, který je popsán v dodatku A. Násthřel rychlostí  $u_{rB}$  byl proveden z rovnic (A.25) a (A.28), rychlostí  $u_z$  z rovnic (A.27) a (A.29), tlaků  $p_B$  z rovnic (A.23) a (A.30). Násthřely veličin se zapisují do textových souborů.
  4. Výpočet pseudorychlostí a  $D$  koeficientů — Pseudorychlosti  $\hat{u}_r$  a  $\hat{u}_z$  se počítají z rovnic (4.69) a (4.72). Koeficienty  $D_R$  a  $D_Z$  se počítají z rovnic (4.70) a (4.73). Pseudorychlosti i  $D$  koeficienty závisí jen na rychlostních polích.
  5. Výpočet tlaku — Tlak se počítá z rovnice (4.74). Závisí na polích pseudorychlostí  $\hat{u}$ , polích koeficientů  $D$  a tlakovém poli. Teoreticky by se měla tato rovnice dovést ke konvergenci, ale vzhledem k velkým počátečním odchýlkám v násthřelech nemá význam tlak příliš opravovat, protože se jedná jen o mezivýpočet, který nevede k celkově konečné hodnotě tlaku, ale jen k hodnotě odpovídající aktuálním rychlostem. Je potřeba zvolit vhodný poměr mezi počty vnitřních iterací tlaku a celkovým počtem vnějších iterací, aby byl výpočet co nejrychlejší. Tento poměr jsem zvolil na základě série pokusů. Rovnice pro výpočet tlaku se tedy neřídí podmínkou ukončení výpočtu podle konvergence nebo residua, ale provede se předem zvolené množství iterací.
  6. Výpočet rychlostí — Na základě opraveného tlaku se dají vypočíst nové hodnoty rychlostí z rovnic (4.68), (4.71) a okrajové podmínky pro proudění přes porézní stěnu vlákna (strana 22). Závisí na polích pseudorychlostí  $\hat{u}$ , polích koeficientů  $D$  a tlakovém poli.
  7. Podmínky ukončení výpočtu — Podmínkou ukončení je nastavená minimální hodnota residua rovnice kontinuity. Residuum je rozdíl levé a pravé strany řídicích rovnic s dosazenými aktuálními hodnotami rychlostí a tlaků. Toto residuum počítáme v každém bodě a pokud je jeho maximální hodnota menší než hodnota zadaná, výpočet se ukončí. Pokud ještě není dosaženo požadované konvergence, výpočet pokračuje dál skokem na číslo 4. Residua pohybových rovnic vycházejí daleko nižší, proto jsem pro urychlení výpočtu použil jen podmínku residua rovnice kontinuity. Po ukončení výpočtu se výsledky zapisují do textových souborů.

Lze provádět více výpočtů za sebou, bez přerušení chodu programu. Výsledky se zapisují do samostatných textových souborů označených číslem dávky. Také lze výsledky minulého výpočtu použít jako nástřel pro další výpočet. To je však výhodné jen u velmi podobných vstupních hodnot.

Struktura výstupních dat je formátu CSV, tedy text oddělený středníkem. Tento formát je vhodný pro následné zpracování v tabulkovém kalkulátoru, například v Excelu. První dva řádky tvoří parametry aktuálního výpočtu s jejich popisem. Další řádek je prázdný a pak následuje tabulka výsledných hodnot tlaku nebo rychlostí. V prvním řádku tabulky je radiální souřadnice a v prvním sloupci je axiální souřadnice. Při výpočtu je použita dvojnásobná přesnost (Double), ale pro zápis je použito jen 6 platných cifer.

## 5 Výsledky numerických experimentů

### 5.1 Testy vlivu parametrů výpočtu na jeho průběh a výsledek

#### *Vliv hustoty sítě*

Rozměry sítě jsou dány hlavně požadovanou maximální dobou výpočtu. Provedl jsem několik pokusů a nakonec jsem za rozměry sítě zvolil hodnoty  $N_r = 20$  a  $N_z = 1000$ . Rozsáhlejší sítě jsou již velmi náročné na výpočetní výkon počítače a nepřinášejí již téměř žádné zpřesnění výsledků.

#### *Vliv velikosti residua na přesnost výpočtu*

Minimální residuum rovnice kontinuity jsem zvolil  $10^{-5}$ . Odchyłka od celkové látkové bilance se u této sítě a tohoto residua pohybuje kolem 0,1%. Další snížení hodnoty residua mělo za následek výrazně vyšší počet iterací, zatímco přesnost výpočtu se zvýšila jen minimálně.

#### *Vliv počtu poditerací při řešení tlakové rovnice*

Pro tuto velikost sítě vychází optimální hodnota počtu vnitřních iterací kolem 150. Závislost času na počtu vnitřních iterací zpočátku přibližně hyperbolicky klesá až do minima. Odtud čas přibližně lineárně mírně stoupá. Proto je lépe volit raději vyšší hodnoty počtu vnitřních iterací a tím se dostat raději mírně za minimum než před něj. Zajímavostí numerické metody je, že součin počtu vnitřních a vnějších iterací je téměř konstantní.

#### *Vliv délky neporézní části na vývoj tlakového a rychlostních polí*

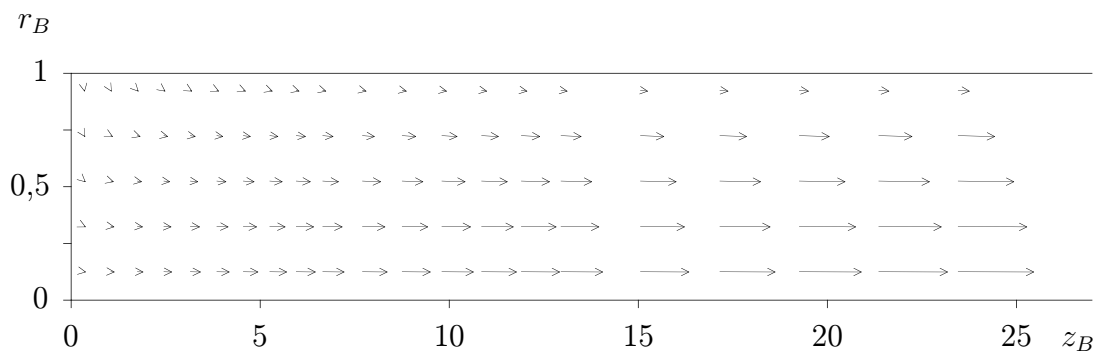
Délka neporézní části neovlivňuje proudění v porézní části. Při nižších hodnotách  $\lambda_N$  je proudění v neporézní části stejné jako při vyšších hodnotách, jen je jeho vývoj kratší.

Ostatní konstantní vstupní parametry modelu jsou vždy uvedeny v popisu grafu.

### 5.2 Vektorové rozložení rychlostí

Vektorové rozložení rychlostí je znázorněno v následujícím grafu jako funkce obou bezrozměrných souřadnic.

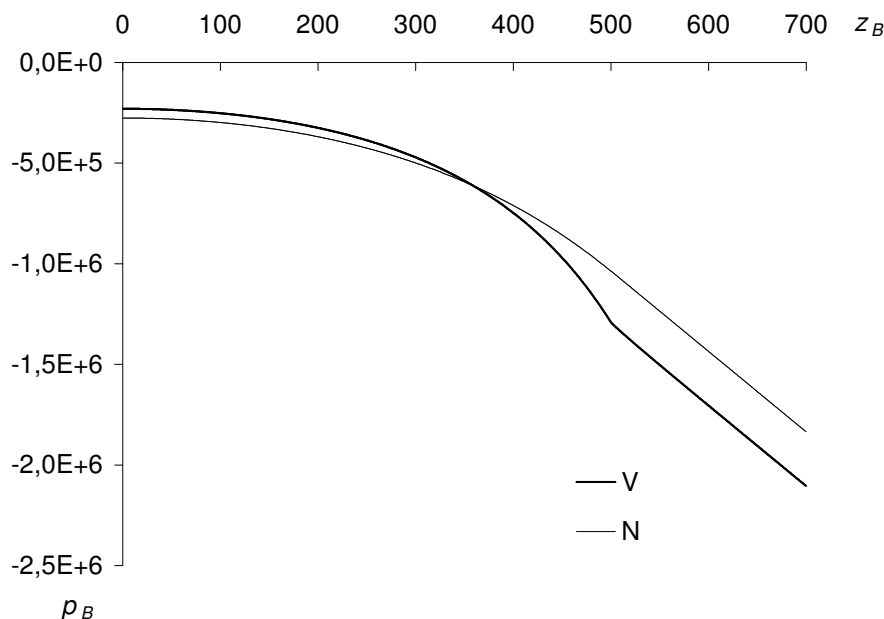
V obrázku 8 je vyneseno jen počátek vlákna. Pro vyšší  $z_B$  je radiální rychlost neporovnatelně menší než rychlost axiální a vektory v podstatě splývají s axiálním směrem.

Obrázek 8: Rozložení rychlostí na počátku vlákna. [ $Re_E = 1000$ ,  $\kappa = 10^{-6}$ ,  $\lambda = 500$ ,  $\lambda_N = 200$ ]

### 5.3 Průběh rychlostí a tlaku

Na dalších grafech je průběh všech tří neznámých ( $p_B$ ,  $u_{rB}$ ,  $u_{zB}$ ) v závislosti na obou bezrozměrných souřadnicích ( $r_B$ ,  $z_B$ ). Tučně jsou vykresleny hodnoty vypočtené (V) a tenčí hodnoty nástřelové (N).

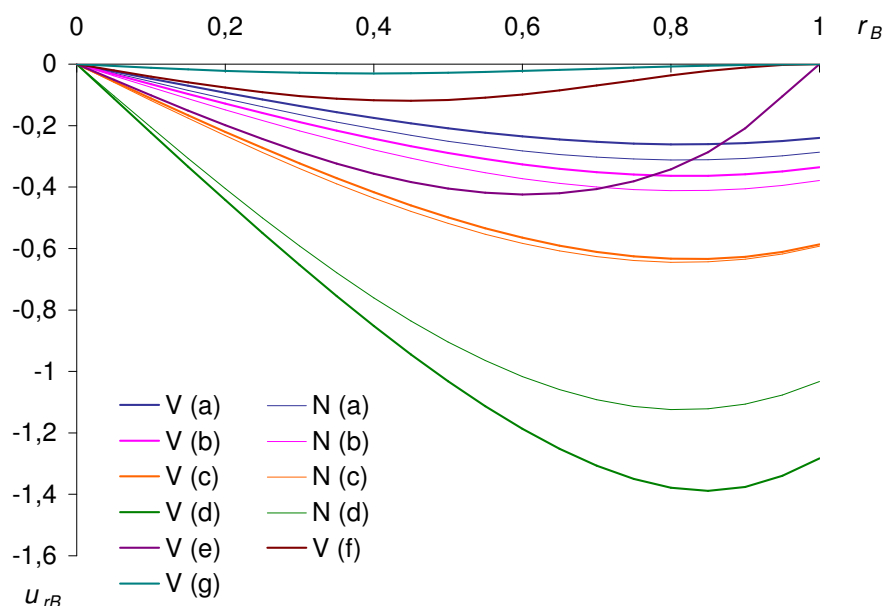
#### 5.3.1 Tlak

Obrázek 9: Závislost tlaku na axiální souřadnici. [ $Re_E = 1000$ ,  $\kappa = 10^{-6}$ ,  $\lambda = 500$ ,  $\lambda_N = 200$ ]

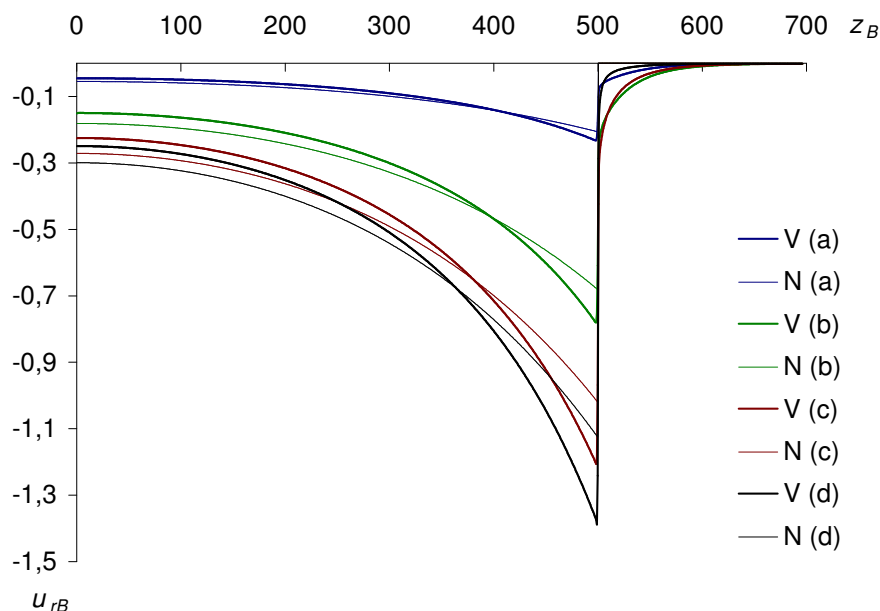
Závislost tlaku na axiální souřadnici (obr. 9) se mírně odchyľuje od nástřelu. Nástřel nadhodnocuje tlakovou hnací sílu na počátku vlákna a naopak podhodnocuje na výstupu. V neporézní části tlak téměř lineárně klesá.

Závislost tlaku na radiální souřadnici je nepatrná. Hodnoty tlaku  $p_B = p_B(z_B = konst., r_B)$  se liší až na šestém platném desetinném místě. Takto nízká odchylka může být srovnatelná s přesností numerické metody, a proto ani nemá význam tento graf kreslit.

## 5.3.2 Radiální rychlost



Obrázek 10: Závislost radiální rychlosti na radiální souřadnici. (a)  $z_B = 70$ , (b)  $z_B = 210$ , (c)  $z_B = 350$ , (d)  $z_B = 499$ , (e)  $z_B = 501$ , (f)  $z_B = 507$ , (g)  $z_B = 534$ . [ $Re_E = 1000$ ,  $\kappa = 10^{-6}$ ,  $\lambda = 500$ ,  $\lambda_N = 200$ ]



Obrázek 11: Závislost radiální rychlosti na axiální souřadnici. (a)  $r_B = 0,125$ , (b)  $r_B = 0,375$ , (c)  $r_B = 0,625$ , (d)  $r_B = 0,875$ . [ $Re_E = 1000$ ,  $\kappa = 10^{-6}$ ,  $\lambda = 500$ ,  $\lambda_N = 200$ ]

Závislost radiální rychlosti na radiální souřadnici (obr. 10) vykazuje maximum mezi  $r_B = 0,8$  a  $r_B = 0,85$ . V tomto intervalu leží i teoretická hodnota  $r_B = \sqrt{\frac{2}{3}} \doteq 0,8165$ , kterou lze získat

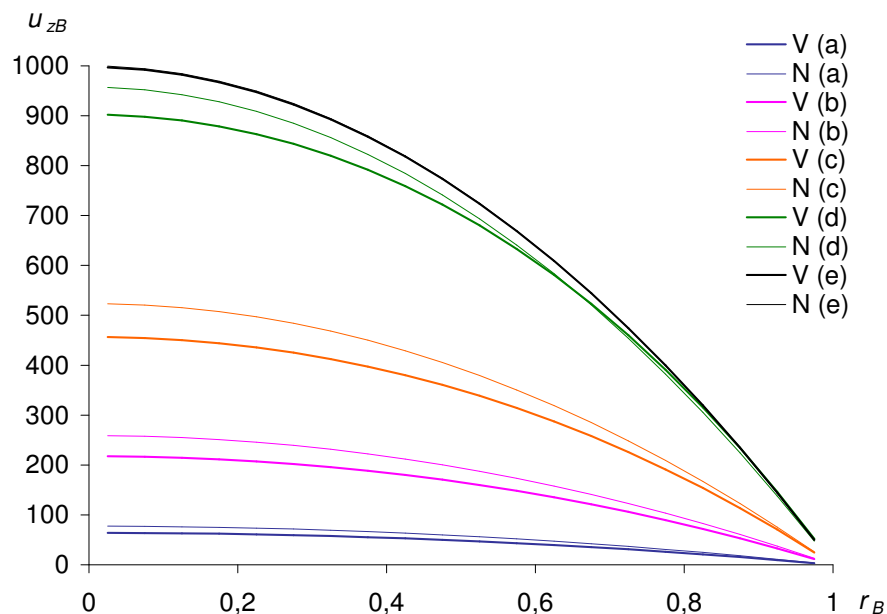


ze zjednodušeného modelu (viz dodatek A). Někteří autoři (např. [17, 6]) tuto hodnotu také uvádějí. Zjemňováním sítě v této oblasti  $r_B$  bylo zjištěno maximum při  $r_B \doteq 0,814$ , což je v dobré shodě s nástřelem. Poloha maxima je nezávislá na všech čtyřech vstupních parametrech modelu ( $Re_E, \kappa, \lambda, \lambda_N$ ).

Po přechodu do neporézní části radiální rychlost prudce klesá, přičemž maximum se v neporézní části posunuje směrem k ose vlákna.

S axiální souřadnicí (obr. 11) se radiální rychlost zvyšuje, protože roste tlaková hnací síla. Na začátku neporézní části se rychlost toku přes stěnu skokovitě změní na nulu a radiální rychlosti ve vlákně prudce klesnou.

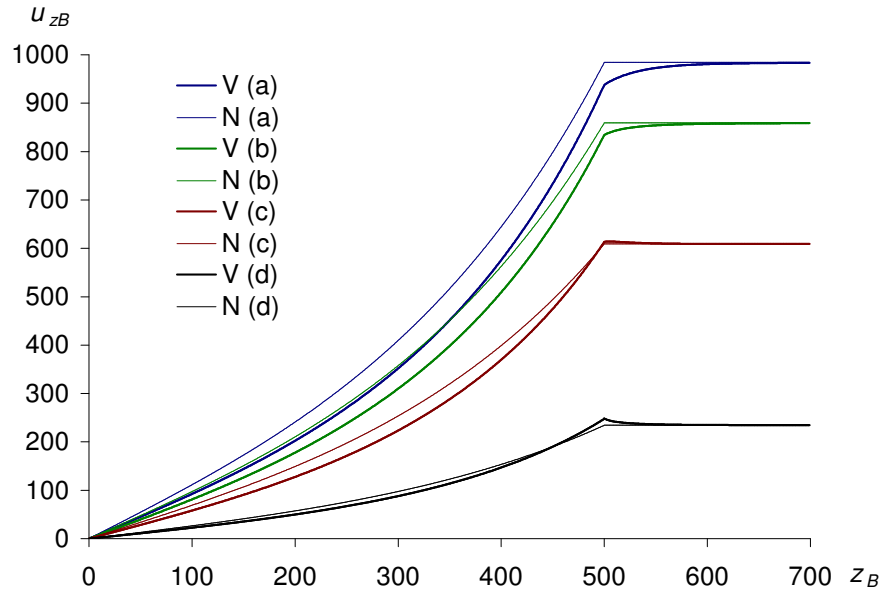
### 5.3.3 Axiální rychlost



Obrázek 12: Závislost axiální rychlosti na radiální souřadnici. (a)  $z_B = 70$ , (b)  $z_B = 210$ , (c)  $z_B = 350$ , (d)  $z_B = 490$ , (e)  $z_B = 630$ . [ $Re_E = 1000$ ,  $\kappa = 10^{-6}$ ,  $\lambda = 500$ ,  $\lambda_N = 200$ ]

Axiální rychlost klesá směrem od osy ke stěně vlákna (obr. 12). V porézní části vlákna se od nástřelu dost liší, v neporézní části jsou oba modely rovnocenné.

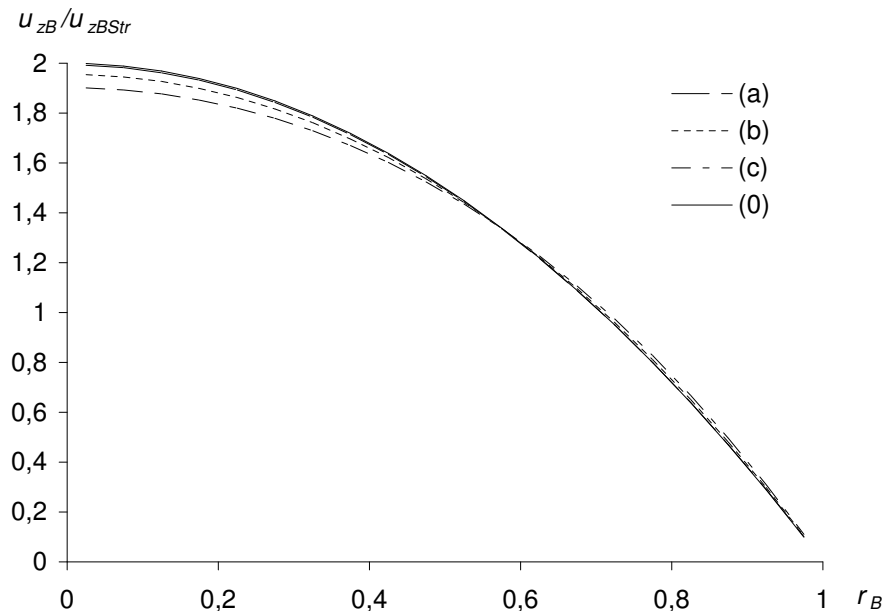
Axiální rychlost v porézní části roste (obr. 13) v důsledku vtoku další kapaliny do vlákna. V oblasti přechodu porézní a neporézní části vykazuje v blízkosti stěny maximum, protože po vstupu do neporézní části se relativně vysoká rychlost poblíž stěny postupně snižuje na hodnotu odpovídající Poiseuilleovu toku. Poblíž osy vlákna toto maximum není, protože zde je naopak rychlost nižší než hodnota odpovídající Poiseuilleovu toku.



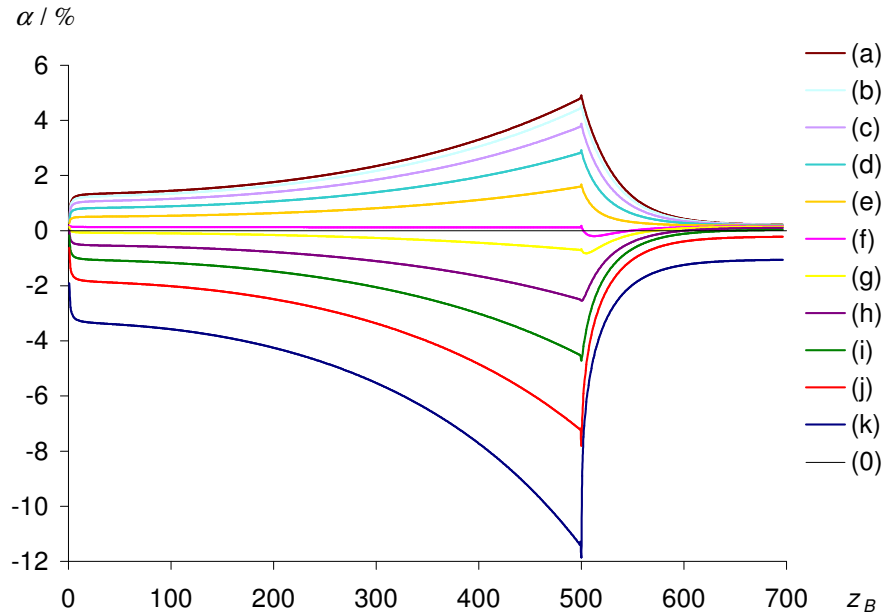
Obrázek 13: Závislost axiální rychlosti na axiální souřadnici. (a)  $r_B = 0,125$ , (b)  $r_B = 0,375$ , (c)  $r_B = 0,625$ , (d)  $r_B = 0,875$ . [ $Re_E = 1000$ ,  $\kappa = 10^{-6}$ ,  $\lambda = 500$ ,  $\lambda_N = 200$ ]

#### 5.4 Odchyly od Poiseuilleova toku

Profil axiální rychlosti na výstupu z vlákna je již srovnatelný s nástřelovou hodnotou (obr. 14), protože tok je zde již téměř ustálený. Od Poiseuilleova toku se liší hlavně blízko stěny, kde je rychlost vyšší než nástřelová, a také u osy vlákna, kde je rychlost naopak nižší.



Obrázek 14: Závislost poměru výstupní rychlosti ku střední výstupní rychlosti na radiální souřadnici. (a)  $z_B = 1$ , (b)  $z_B = 250$ , (c)  $z_B = 499$ , (0) Poiseuilleův tok. [ $Re_E = 1000$ ,  $\kappa = 10^{-6}$ ,  $\lambda = 500$ ,  $\lambda_N = 200$ ]



Obrázek 15: Závislost  $\alpha$  na axiální souřadnici. (a)  $r_B = 0,075$ , (b)  $r_B = 0,175$ , (c)  $r_B = 0,275$ , (d)  $r_B = 0,375$ , (e)  $r_B = 0,475$ , (f)  $r_B = 0,575$ , (g)  $r_B = 0,625$ , (h)  $r_B = 0,725$ , (i)  $r_B = 0,825$ , (j)  $r_B = 0,925$ , (k)  $r_B = 0,975$ , (0)  $\alpha = 0$ . [ $Re_E = 1000$ ,  $\kappa = 10^{-6}$ ,  $\lambda = 500$ ,  $\lambda_N = 200$ ]

Pro posouzení odchylky vypočtených axiálních rychlostí od Poiseuilleova toku v podél celého vlákna (obr. 15) můžeme použít také veličinu

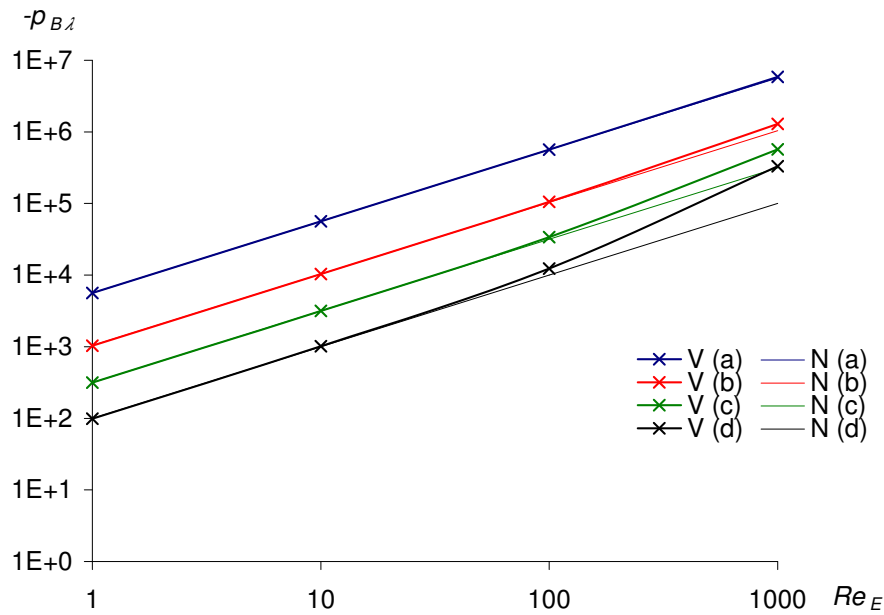
$$\alpha = \frac{u_{zB}}{2\bar{u}_{zB}(1 - r_B^2)} \quad (5.1)$$

která vyjadřuje poměr rychlosti v daném místě vlákna ku rychlosti odpovídající parabolickému profilu. Maximální hodnota této veličiny vyšla okolo 12% pro dané vstupní hodnoty modelu. Výsledky výpočtů ukazují, že tyto odchylky se rychle zvyšují s zvyšujícím se  $Re_E$  a  $\kappa$ . Nejvyšší kladné odchylky vycházejí u stěny, kde je rychlost vyšší než odpovídá kvadratickému profilu a u osy vlákna, kde je rychlost naopak nižší. Odchylka v porézní části vzrůstá a po přechodu do neporézní části klesá.

## 5.5 Výstupní tlak

Úhrnnou hnací silou filtrace porézním dutým vláknem je rozdíl tlaků na vnější straně vlákna a na jeho výstupním konci. Neporézní část však k objemu prošlé kapaliny nepřispívá, dochází v ní pouze k postupnému vytváření rychlostního profilu na parabolický (k vývoji Poiseuilleova toku) a připadá na ni část tlakové ztráty v kapalině proudící uvnitř vlákna. Existence neporézní části je sice z konstrukčního hlediska nutná kvůli uchycení vláken do svazku a připojení na odsávací potrubí, ale pro posouzení vzájemného vztahu mezi objemovým průtokem a hnací silou bude užitečnější vycházet z „čisté“ hnací síly, tj. rozdílu tlaků na vnější straně vlákna a

na konci porézní části uvnitř vlákna. V bezrozměrném vyjádření to odpovídá vztahu mezi  $Re_E$  a  $p_{B\lambda} = p_B(z_B = \lambda)$ .

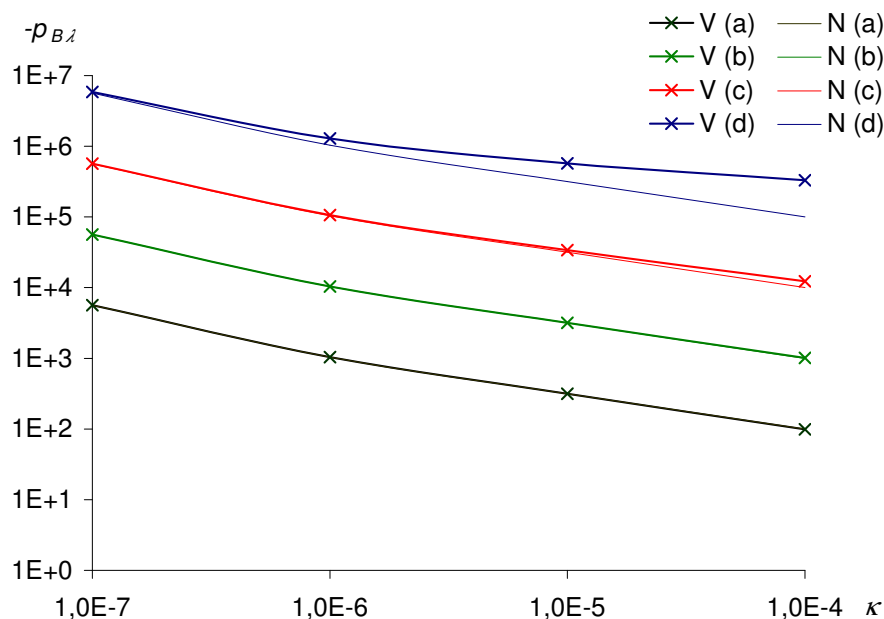


Obrázek 16: Závislost tlaku na konci porézní části na výstupní rychlosti a permeabilitě. (a)  $\kappa = 10^{-7}$ , (b)  $\kappa = 10^{-6}$ , (c)  $\kappa = 10^{-5}$ , (d)  $\kappa = 10^{-4}$ . [ $\lambda = 500$ ,  $\lambda_N = 200$ ]

Pro nízké hodnoty permeability  $\kappa$  se tlaková hnací síla  $-p_{B\lambda}$  zvyšuje lineárně až do vysokých hodnot  $Re_E$  (obr. 16; v grafu s logaritmickými osami dostáváme přímkovou závislost se směrnici +1). Tento charakter závislosti odpovídá zjednodušenému modelu. Pro vyšší hodnoty permeability začínají být při  $Re_E \approx 100$  vypočtené hodnoty  $-p_{B\lambda}$  vyšší než hodnoty podle zjednodušeného modelu. Možným vysvětlením těchto odchylek je, že zjednodušený model předpokládá vznik tlakové ztráty pouze třením při proudění v axiálním směru (lokálně podle Hagen-Poiseuilleova zákona). Při vyšších hodnotách  $Re_E$  však dochází pravděpodobně k nezanedbatelné tlakové ztrátě i vlivem sekundárního proudění (kapalina ztrácí část své energie při změně směru proudění z radiálního na axiální). Tento efekt je při vyšších hodnotách permeability překryt převažujícím poklesem tlaku na membráně.

Tento trend je vidět i na obrázku 17, kde je vynesena závislost tlakové hnací síly na konci porézní části  $-p_{B\lambda}$  na permeabilitě  $\kappa$ .

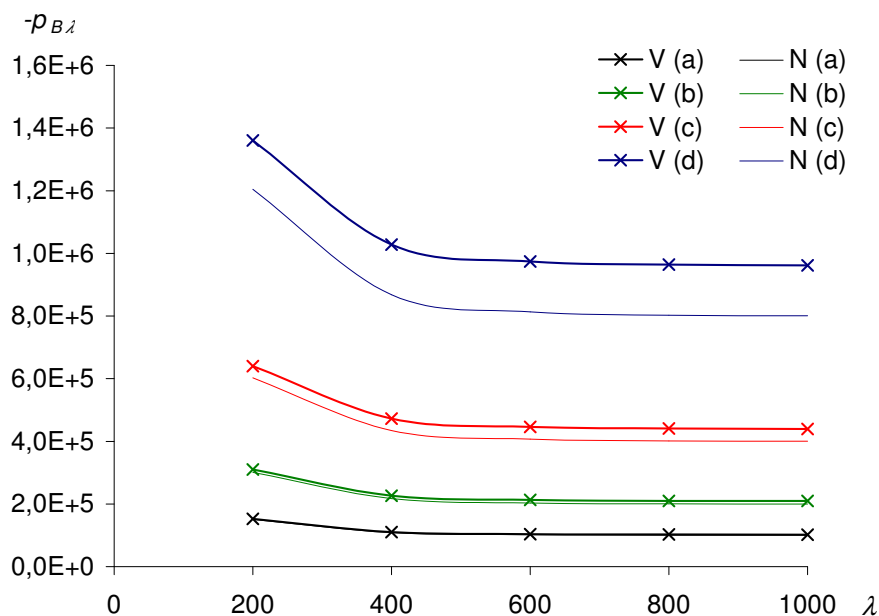
Pro danou hodnotu Reynoldsova kriteria (výstupní rychlosti) tlak na konci porézní části zpočátku klesá s bezrozměrnou délkou  $\lambda$  (obr. 18). Od hodnoty  $\lambda \approx 500$  je téměř konstantní. Pro poměrně nízké hodnoty  $\lambda$  probíhá filtrace srovnatelnou rychlostí podél celého vlákna, a proto při prodloužení vlákna potřebujeme na dosažení hodnoty  $Re_E$  menší hnací sílu  $-p_{B\lambda}$ . Pokud je tlaková ztráta ve vlákne v porovnání s hnací silou na konci vlákna moc velká, filtrace probíhá jen u konce vlákna, zatímco středem vlákna neteče téměř žádná kapalina, a proto zvyšování délky vlákna nemá vliv na výstupní průtok ani výstupní tlak.



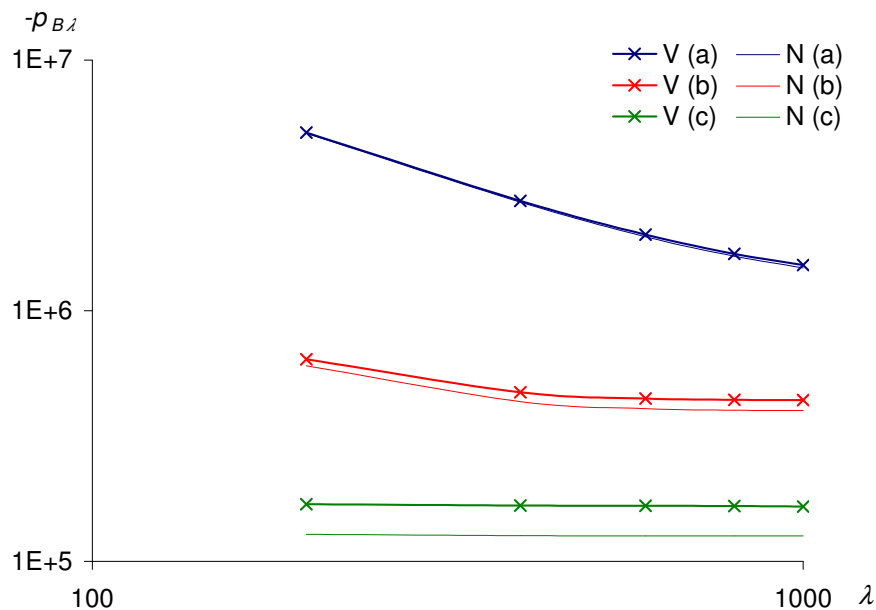
Obrázek 17: Závislost tlaku na konci porézní části na permeabilitě a výstupní rychlosti. (a)  $Re_E = 1$ , (b)  $Re_E = 10$ , (c)  $Re_E = 100$ , (d)  $Re_E = 1000$ . [ $\lambda = 500$ ,  $\lambda_N = 200$ ]

Vzhledem k výše uvedené skutečnosti lze hodnotu  $\lambda$  ekonomicky optimalizovat, tedy zvolit vhodnou délku vláken, při které je součet pořizovacích a provozních nákladů minimální.

Permeabilita  $\kappa$  výrazně ovlivňuje závislost tlaku na konci porézní části na délce kanálu (obr. 19). Při vysoké permeabilitě stěny kanálu je závislost výstupního tlaku na bezrozměrné délce kanálu téměř konstantní, protože porézní stěna neklade velký odpor a daný objemový průtok

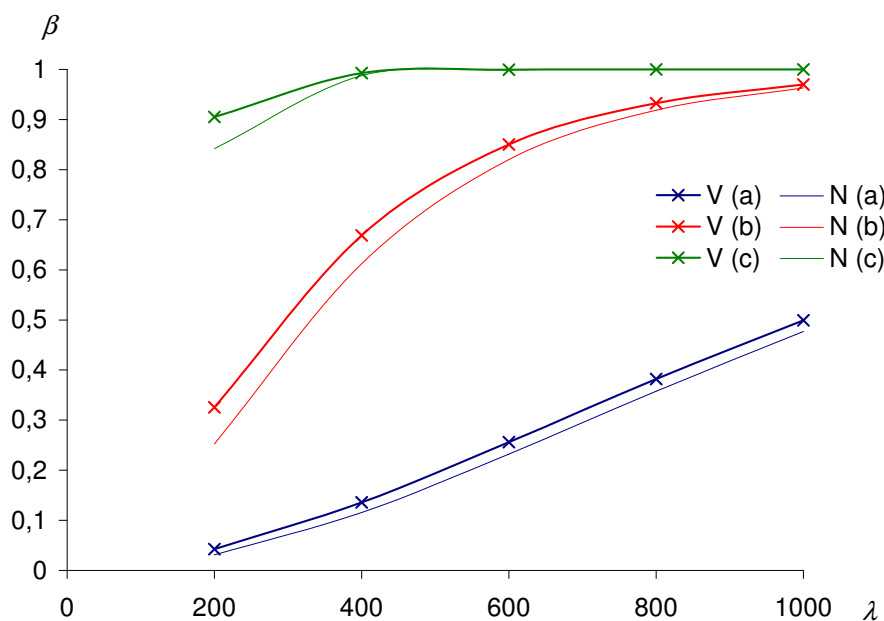


Obrázek 18: Závislost tlaku na konci porézní části na délce kanálu a rychlosti. (a)  $Re_E = 100$ , (b)  $Re_E = 200$ , (c)  $Re_E = 400$ , (d)  $Re_E = 800$ . [ $\kappa = 10^{-6}$ ,  $\lambda_N = 100$ ]



Obrázek 19: Závislost tlaku na konci porézní části na délce kanálu a permeabilitě. (a)  $\kappa = 10^{-7}$ , (b)  $\kappa = 10^{-6}$ , (c)  $\kappa = 10^{-5}$ . [ $Re_E = 400$ ,  $\lambda_N = 100$ ]

se nafiltruje jen u konce vlákna. Při nízké permeabilitě tlaková hnací síla s délkou kanálu rychle klesá, na dosažení daného objemového průtoku je k dispozici delší aktivní část vlákna, na které vzniká tlaková ztráta.



Obrázek 20: Závislost  $\beta$  na délce kanálu a permeabilitě. (a)  $\kappa = 10^{-7}$ , (b)  $\kappa = 10^{-6}$ , (c)  $\kappa = 10^{-5}$ . [ $Re_E = 400$ ,  $\lambda_N = 100$ ]

Na velikost neaktivní oblasti vlákna lze usoudit z hodnoty veličiny

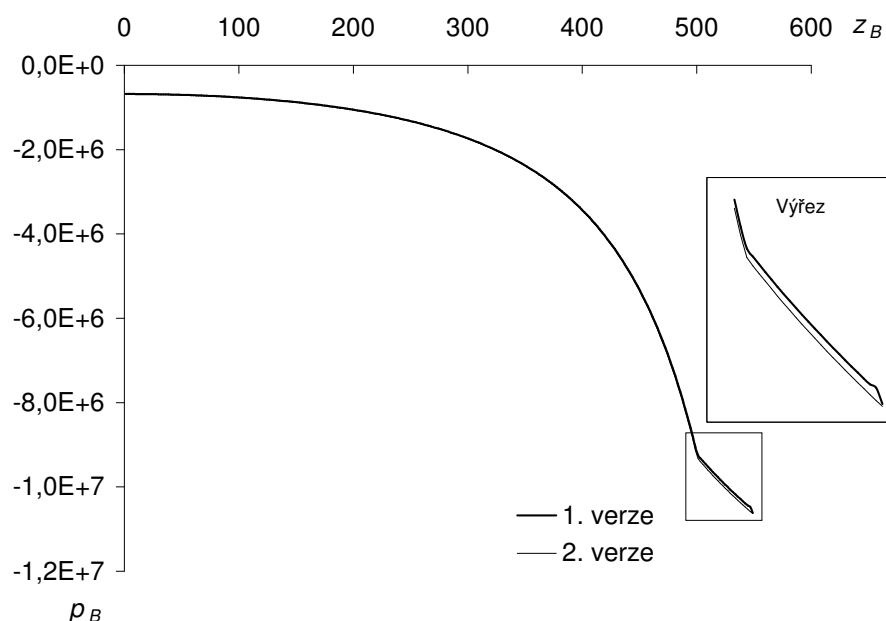
$$\beta = \frac{p_{B\lambda} - p_{B0}}{p_{B\lambda}} \quad (5.2)$$

kteřá vyjadřuje poměr poklesu tlaku po délce vlákna ku maximální hnací síle. Jestliže se hodnota této veličiny blíží jedné, pak je velká část vlákna neaktivní. Z obrázku 20 je vidět, že pro vysoké hodnoty permeability nastává tento stav již při nízkých hodnotách  $\lambda$ . Hodnoty  $\beta$  získané ze zjednodušeného modelu jsou podhodnocené, což souvisí se závislostí tlaku na axiální souřadnici (obr. 9).

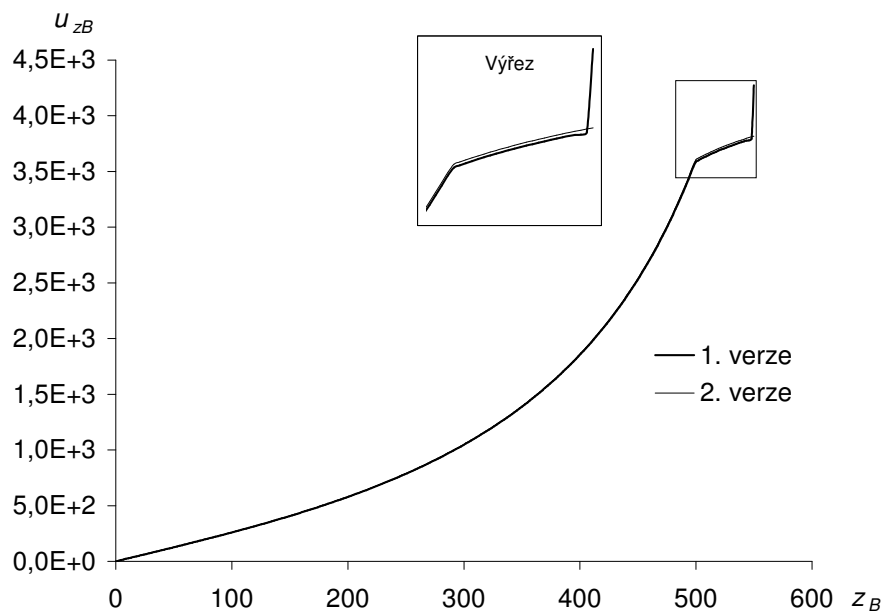
## 5.6 Vliv typu okrajové podmínky na výstupním konci vlákna

V polích hledaných veličin se na výstupu z vlákna objevuje skoková změna na hodnoty odpovídající vyvinutému profilu, tedy okrajové podmínce pro výstup. Při vyšších hodnotách  $Re_E$  je tento skok zvláště zřetelný. Toto chování si vysvětlují tím, že okrajová podmínka předpokládající vyvinutý Poiseuilleův tok na konci vlákna v axiálním směru je příliš přísná.

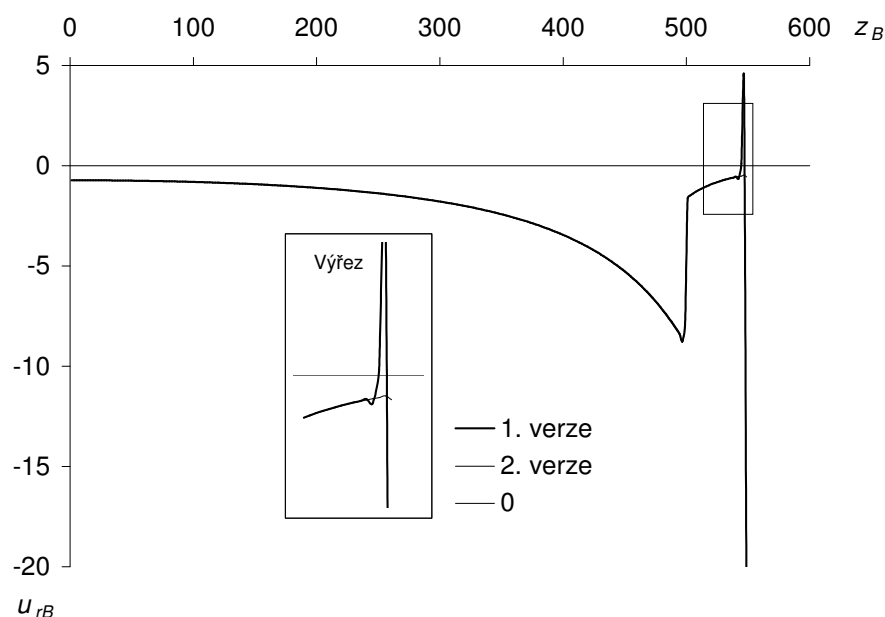
Proudění uvnitř vlákna je možno považovat za téměř jednosměrné v axiálním směru [41]. Tento výraz zhruba znamená, že hodnota veličiny v určitém místě závisí jen na hodnotě předcházející. Například čas je typická jednosměrná veličina, zatím co například teplota je typická dvousměrná veličina, protože závisí na teplotách ve všech okolních bodech. Proudění považujeme v určitém směru za jednosměrné, pokud v tomto směru převažuje sdílení hybnosti (i jiné veličiny) konvekci nad difuzí. Hodnoty koeficientů  $A$  v diskretizovaných pohybových rovnicích (4.31),(4.58) a rovnici kontinuity (4.74) tuto jednosměrnost problému proudění vláknem s porézními stěnami potvrzují. Hodnoty koeficientů  $A_W$  jsou o mnoho řádů vyšší než  $A_E$ , proto se okrajová podmínka ustáleného Poiseuilleova toku na výstupu při výpočtech téměř neprojeví a v posledním bodě, který se v polích nemění a je dán touto okrajovou podmínkou, nastává skok z toku, který se ještě nestačil v neporézní části ustálit na hodnotu této okrajové podmínky.



Obrázek 21: Průběh tlaku u osy vlákna podle obou verzí programu



Obrázek 22: Průběh axiální rychlosti u osy vlákna podle obou verzí programu



Obrázek 23: Průběh maximální radiální rychlosti podle obou verzí programu

Kvůli tomuto chování jsem vypracoval ještě druhou verzi programu, která na výstupu předpokládá profil axiální rychlosti rovněž vyvinutý, avšak ne nutně parabolický. Jako okrajová podmínka zde slouží hodnota výstupního tlaku  $p_E$ . Odchyšky výsledků obou verzí programu v porézní části vlákna jsou zanedbatelné, v neporézní části vlákna jsou vyšší, avšak stále velmi malé. Srovnání vybraných profilů veličin vypočtených oběma verzemi programu je na obrázcích 21–23. Tlak  $p_E$ , použitý jako okrajová podmínka v druhé verzi programu, byl převzat z výsledků výpočtů první verze programu. Srovnání je provedeno pro velmi vysokou hodnotu  $Re_E = 4318$ .



Pro nižší hodnoty  $Re_E$ , které se budou používat v hlavních výpočtech, by byl rozdíl v grafech nezobrazitelný.

Pro většinu výpočtů je výhodné zadávat okrajovou podmínku pro výstupní rychlost, tedy používat první verzi programu. Podle zadání práce je předmětem zájmu hlavně porézní část. Z těchto důvodů byla pro výpočty použita první verze programu a ani matematický popis druhé verze okrajové podmínky není v této práci blíže zpracován. Ve výsledných polích rychlostí zanedbávám posledních pár bodů, které mohou být částečně ovlivněny skokovou změnou na konci vlákna.

## 6 Závěr

V rámci diplomové práce byla provedena literární rešerše možností využití dutých vláken při mikrofiltracích a ultrafiltracích vodných roztoků a dále rešerše způsobů řešení matematického modelu ustáleného proudění newtonské nestlačitelné kapaliny dutým vláknem s porézními stěnami za izotermních podmínek.

Byl vytvořen kompletní matematický model, který byl řešen numerickou metodou konečných objemů s posunutými sítěmi. Numerická metoda byla implementována v programovacím jazyce Delphi.

Vlivy jednotlivých parametrů modelu byly pomocí tohoto programu numericky ověřeny a získané výsledky byly porovnány s nástřelovými hodnotami získanými ze zjednodušeného modelu (dodatek A). Výsledky jsou dále diskutovány.

### *Trendy závislosti*

Při zvyšování Reynoldsova kritéria na výtoku z vlákna se zvyšují rychlosti ve vlákně i tlaková hnací síla.

Bezrozměrná permeabilita  $\kappa$  a bezrozměrná délka porézní části  $\lambda$  mají vliv na výskyt neaktivních oblastí ve vlákně. Při nízké permeabilitě a krátkém vlákně probíhá filtrace v celém vlákně. Při vyšších hodnotách  $\kappa$  a  $\lambda$  vzniká postupně uprostřed vlákna neaktivní část, kde filtrace téměř neprobíhá a zvyšování  $\lambda$  přestává mít vliv na výkon filtrace.

Bezrozměrná délka neporézní části vlákna  $\lambda_N$  neovlivňuje proudění v porézní ani neporézní části. Hodnota  $\lambda_N$  pouze určuje míru ustálení toku kapaliny před výtokem.

### *Srovnání modelů a zjednodušující předpoklady*

Jediný analytický model, se kterým se dají výsledky porovnávat, je zjednodušený model z dodatku A, tedy model z článků [17, 4, 5, 6]. Ostatní autoři předpokládají vždy filtraci s nenulovou vstupní rychlostí tekutiny na začátku vlákna, na které jsou závislé všechny rovnice (viz např. (2.7)–(2.9)). Při dead-end filtraci je vstupní rychlost nulová (kapalina vstupuje pouze přes porézní stěnu), a proto se s nimi tento model nedá porovnávat. Porovnání výsledků této práce s numerickými metodami uvedenými v literatuře by vyžadovalo provést implementaci těchto metod na počítači, což už přesahovalo rámec této diplomové práce.

Ze srovnání s modelem z dodatku lze odvodit několik zjednodušení. Závislost tlaku na radiální souřadnici je zanedbatelná. Nebyla zjištěna žádná kombinace vstupních parametrů, při kterých by se vyskytla výraznější změna tlaku v radiálním směru. Derivace tlaku podle  $z$  vychází vždy nejméně o dva řady vyšší než derivace tlaku podle  $r$ . Zanedbáním závislosti tlaku na radiální souřadnici by bylo možné výpočet urychlit, aniž by byl ovlivněn výsledek.

Model z dodatku A je docela dobře použitelný v případě nízké permeability a v případě nízkého výstupního Reynoldsova kriteriá. Pro chemicko-inženýrské výpočty lze za těchto podmínek využít zjednodušený model. V případě vyšších hodnot  $Re_E$  nebo  $\kappa$  lze zjednodušený model použít jen jako hrubý odhad.

### ***Problémy s výstupní okrajovou podmínkou***

Výstupní okrajová podmínka pro axiální rychlost, která předpokládá vyvinutý Poiseuilleův tok, je splněna jen přibližně, protože profil axiální rychlosti se na délce neporézní části nestačí vyvinout na plně parabolický. Při jejím užití byl zjištěn nereálný skok rychlostí i tlaku v poslední řadě bodů před výtokem z vlákna. Zdá se, že tuto podmínku je vhodnější nahradit podmínkou zadaného tlaku na výtoku.

### ***Návrh navazujících prací***

V navazujících pracích by měly být experimentálně ověřeny výsledky této práce. Dále lze také tuto práci použít jako výchozí pro modelování mikrofiltrace a ultrafiltrace v dutých vláknech, kde dalším parametrem bude proměnný odpor stěny vlákna v závislosti na narůstajícím filtračním koláči.

## **Dodatek**

## A Zjednodušený model

V pracích [17, 4, 5, 6] je popsán zjednodušený model proudění kapaliny dutým vláknem s porézními stěnami. Pokud je mi známo, práce [4] je jediná studie, která řeší problém ve stejné geometrii (odtok oběma konci vlákna, ale bez neporézní části), jakou jsem použil v této diplomové práci. V tomto dodatku je tento zjednodušený model stručně odvozen a poté převeden do bezrozměrného tvaru, který používá bezrozměrné veličiny zavedené v části 3.3.

### A.1 Předpoklady řešení a geometrie systému

Základní předpoklady zjednodušeného modelu jsou stejné jako v oddíle 3.1: ustálené laminární izotermní proudění nestlačitelné newtonské kapaliny dutým vláknem s homogenně porézními stěnami. Vláknem má délku  $2L$  a je porézní po celé délce. Kapalina vtéká přes porézní stěnu dovnitř vlákna a odvádí se stejným dílem oběma konci. Stačí tedy uvažovat jen polovinu vlákna, od středu k jednomu z konců.

V modelu jsou dále použita tato zjednodušení:

- Profil axiální složky rychlosti je v každém průřezu vlákna parabolický a vztah mezi tlakovým spádem  $dp/dz$  a objemovým průtokem  $Q$  je dán Hagen-Poiseuilleovým zákonem. Velikost průtoku  $Q$  je však po délce vlákna proměnná.
- Radiální změny tlaku jsou zanedbatelné.

### A.2 Rozměrový tvar

#### A.2.1 Objemová bilance kapaliny

Objemový průtok  $Q$  kapaliny uvnitř vlákna v axiálním směru se na délce  $dz$  zvýší o objem kapaliny proteklý porézní stěnou

$$Q(z + dz) = Q(z) + J2\pi R dz \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{dQ}{dz} = 2\pi R J \quad (\text{A.2})$$

kde  $J$  je rychlost toku porézní stěnou vlákna. Podle Hagen-Poiseuilleova zákona je

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dz} \quad (\text{A.3})$$

Rychlost toku kapaliny stěnou vlákna vyjádříme Darcyho zákonem pro tok porézním prostředím

$$J = \frac{K}{\mu} (p_F - p) \quad (\text{A.4})$$

kde  $K$  je permeabilita porézní stěny vlákna,  $\mu$  je dynamická viskozita protékající kapaliny,  $p_F$  je tlak na vnější straně vlákna a  $p$  je lokální hodnota tlaku uvnitř vlákna. Ze vztahů (A.3) a (A.4) dosadíme do (A.2) a dostaneme

$$\frac{d^2p}{dz^2} = -\frac{16K}{R^3}(p_F - p) \quad (\text{A.5})$$

Okrajové podmínky jsou:

$$Q(z = 0) = 0 \quad (\text{A.6})$$

takže podle vztahu (A.3) také

$$\frac{dp}{dz}(z = 0) = 0 \quad (\text{A.7})$$

a

$$p(z = L) = p_L \quad (\text{A.8})$$

Řešení lineární diferenciální rovnice (A.5) s okrajovými podmínkami (A.7) a (A.8) je

$$p = p_F - (p_F - p_L) \frac{\cosh(\alpha z/L)}{\cosh(\alpha)} \quad (\text{A.9})$$

kde bezrozměrný parametr

$$\alpha = \frac{4L}{R} \sqrt{\frac{K}{R}} \quad (\text{A.10})$$

První derivace tlaku je

$$\frac{dp}{dz} = -(p_F - p_L) \frac{\alpha}{L} \frac{\sinh(\alpha z/L)}{\cosh(\alpha)} \quad (\text{A.11})$$

Kombinací vztahů (A.3) a (A.11) dostaneme objemový průtok vláknem

$$Q(z) = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\alpha}{L} (p_F - p_L) \frac{\sinh(\alpha z/L)}{\cosh(\alpha)} \quad (\text{A.12})$$

jehož derivace podle  $z$  je

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(\frac{\alpha}{L}\right)^2 (p_F - p_L) \frac{\cosh(\alpha z/L)}{\cosh(\alpha)} \quad (\text{A.13})$$

Průtok na konci vlákna je

$$Q_L = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\alpha}{L} (p_F - p_L) \tanh(\alpha) \quad (\text{A.14})$$

### A.2.2 Výpočet radiální složky rychlosti z rovnice kontinuity

Podle předpokladu je profil axiální složky rychlosti parabolický podle Hagen-Poiseuilleova zákona

$$u_z = u_{zmax} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = 2\bar{u}_z \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = \frac{2Q}{\pi R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad (\text{A.15})$$

Rovnice kontinuity pro axiálně symetrické proudění je

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.16})$$

Z rovnice (A.16) a vztahu (A.15) dostaneme

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = -r \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{2}{\pi R^2} \frac{\partial Q}{\partial z} \left( r - \frac{r^3}{R^2} \right) \quad (\text{A.17})$$

Integrací v mezích od 0 do  $r$  dostaneme

$$u_r = -\frac{\partial Q}{\partial z} \frac{1}{\pi R} \frac{r}{R} \left( 1 - \frac{r^2}{2R^2} \right) \quad (\text{A.18})$$

### A.3 Bezrozměrný tvar

Vztahy (A.9), (A.15) a (A.18) převedeme na bezrozměrný tvar s použitím bezrozměrných veličin definovaných v části 3.3

$$\alpha = \frac{4L}{R} \sqrt{\frac{K}{R}} = 4\lambda\sqrt{\kappa} \quad (\text{A.19})$$

$$Q_L = \pi R^2 \overline{u_{zL}} = \frac{\pi R \mu}{2\varrho} Re_L \quad (\text{A.20})$$

Z rovnice (A.14) vyjádříme

$$p_F - p_L = \frac{8\mu L Q_L}{\pi R^4 \alpha} \frac{\cosh(\alpha)}{\sinh(\alpha)} \quad (\text{A.21})$$

a dosadíme do (A.9). Dostaneme pro tlak

$$p = p_F - \frac{8\mu L Q_L}{\pi R^4 \alpha} \frac{\cosh(\alpha z/L)}{\sinh(\alpha)} \quad (\text{A.22})$$

a pro bezrozměrný tlak

$$p_B = \frac{\varrho R^2 (p - p_F)}{\mu^2} = -\frac{Re_L}{\sqrt{\kappa}} \frac{\cosh(4\sqrt{\kappa} z_B)}{\sinh(4\sqrt{\kappa} \lambda)} \quad (\text{A.23})$$

Z (A.18), (A.13) a (A.21) dostaneme pro radiální složku rychlosti

$$u_r = -\frac{\alpha}{\pi R L} Q_L \frac{\cosh(\alpha z/L)}{\sinh(\alpha)} \frac{r}{R} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (\text{A.24})$$

a bezrozměrnou radiální složku rychlosti

$$u_{rB} = \frac{u_r \varrho R}{\mu} = -2\sqrt{\kappa} Re_L \frac{\cosh(4\sqrt{\kappa} z_B)}{\sinh(4\sqrt{\kappa} \lambda)} r_B \left( 1 - \frac{r_B^2}{2} \right) \quad (\text{A.25})$$

Z (A.15), (A.12) a (A.21) dostaneme axiální složku rychlosti

$$u_z = \frac{2Q_L}{\pi R^2} \frac{\sinh(\alpha z/L)}{\sinh(\alpha)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (\text{A.26})$$

a bezrozměrnou axiální složku rychlosti

$$u_{zB} = \frac{u_z \rho R}{\mu} = Re_L \frac{\sinh(4\sqrt{\kappa} z_B)}{\sinh(4\sqrt{\kappa} \lambda)} (1 - r_B^2) \quad (\text{A.27})$$

Pro neporézní oblast  $z_B > \lambda$ , kde již předpokládáme neproměnný plně vyvinutý parabolický profil, platí

$$u_{rB} = 0 \quad (\text{A.28})$$

$$u_{zB} = Re_L (1 - r_B^2) \quad (\text{A.29})$$

$$p_B = p_B(\lambda) - 4Re_L(z_B - \lambda) \quad (\text{A.30})$$

Vztahy (A.25), (A.27) a (A.23) byly v programu použity pro generování nástřelů polí v porézní části vlákna. Pro neporézní část byly použity vztahy (A.28), (A.29) a (A.30).



---

## Literatura

- [1] Berman A.S.: Journal of Applied Physics 24(9), 1232–1235 (1953)
- [2] Berman A.S.: Journal of Applied Physics 27(12), 1557–1558 (1956)
- [3] Bohonak D.M., Zydney A.L.: Journal of Membrane Science, v tisku (2005)
- [4] Carrol T., Booker N.A.: Journal of Membrane Science 168, 203–212 (2000)
- [5] Carrol T.: Journal of Membrane Science 189, 167–178 (2001)
- [6] Damak K., Ayadi A., Zeghmati B., Schmitz P.: Desalination 161, 67–77 (2004)
- [7] Das A., Abou-Nemeh I., Chandra S., Sirkar K.K.: Journal of Membrane Science 148, 257–271 (1998)
- [8] Delgado S., Díaz F., Vera L., Díaz R., Elmaleh S.: Journal of Membrane Science 228, 55–63 (2004)
- [9] Doughty J.R., Perkins J.H.C.: Journal of Applied Mechanics 37, 548–550 (1970)
- [10] Doughty J.R.: Journal of Fluids Engineering 97 Series I, 78–81 (1975)
- [11] *Low-pressure membrane filtration for pathogen removal: Application, implementation, and regulatory issues*, U.S. Environmental Protection Agency (2001)
- [12] Friedman M., Gillis J.: Journal of Applied Mechanics 89 Series E(4), 819–822 (1967)
- [13] Fugere R., Mameri N., Gallot J.E., Comeau Y.: Journal of Membrane Science, v tisku (2005)
- [14] Galowin L.S., DeSantis M.J.: Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control 93, 102–108 (1971)
- [15] Galowin L.S., Fletcher L.S., DeSantis M.J.: AIAA Journal 12(11), 1585–1589 (1974)
- [16] Giorno L., Li N., Drioli E.: Journal of Membrane Science 217, 173–180 (2003)
- [17] Granger J., Dodds J., LeClerc D., Midoux N.: Chemical Engineering Science 41(12), 3119–3128 (1986)
- [18] Green G.A.: *Laminar flow through a channel with one porous wall*, Course project in advanced fluid mechanics, Department of chemical and environmental engineering, RPI, Troy, New York (1979)

- 
- [19] Hornbeck R.W., Rouleau W.T., Osterle F.: *Physics of Fluids* 6(11), 1649–1654 (1963)
- [20] Hrubá M.: *Využití membránové mikrofiltrace (ultrafiltrace) při úpravě vody*, bakalářská práce, Univerzita Pardubice (2004)
- [21] Chelam S., Wiesner M.R., Dawson C.: *Journal of Engineering Mathematics* 26(4), 481–492 (1992)
- [22] Chelam S., Wiesner M.R., Dawson C.: *Reviews in Chemical Engineering* 11(1), 53–99 (1995)
- [23] Kiso Y., Mizuno A., Othman R.A.A., Jung Y., Kumano A., Ariji A.: *Desalination* 143, 147–157 (2002)
- [24] Košutić K., Furač L., Sipos L., Kunst B.: *Separation and Purification Technology* 42, 137–144 (2005)
- [25] Kotzev T.: *International Journal of Engineering Science* 32(2), 359–368 (1994)
- [26] Kozinski A.A., Schmidt F.P., Lightfoot E.N.: *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals* 9(3), 502–505 (1970)
- [27] Li X., Chu H.P.: *Water Research* 37, 4781–4791 (2003)
- [28] Li J.L., Cheng B.G.: *Separation and Purification Technology* 41, 109–122 (2005)
- [29] Lo Y.M., Cao D., Argin-Soysal S., Wang J., Hahm T.: *Bioresource Technology* 96, 687–698 (2005)
- [30] Lodge B., Judd S.J., Smith A.J.: *Journal of Membrane Science* 231, 91–98 (2004)
- [31] Marquardt K., Nagel R.: *Desalination* 60(1), 25–44 (1986)
- [32] Meyer-Blumenroth U., Schneider B.: *Filtration & Separation* 38(4), 32–34 (2001)
- [33] Morduchow M.: *Quarterly of Applied Mathematics* 14(4), 361–368 (1957)
- [34] Nagase K., Kohori F., Sakai K.: *Biochemical Engineering Journal* 24, 105–113 (2005)
- [35] Nakatsuka S., Nakate I., Miyano T.: *Desalination* 106, 55–61 (1996)
- [36] Nassehi V.: *Chemical Engineering Science* 53(6), 1253–1265 (1998)
- [37] Oxarango L., Schmitz P., Quintard M.: *Chemical Engineering Science* 59, 1039–1051 (2004)
- [38] Pangrle B.J., Alexandrou A.N., Dixon A.G., Dibiasio D.: *Chemical Engineering Science* 46(11), 2847–2855 (1991)
-

- 
- [39] Pankhania M., Stephenson T., Semmens M.J.: *Water Research* 28(10), 2233–2236 (1994)
- [40] Pantoflíček J., Machač I.: *Úvod do sdílení hybnosti, tepla a hmoty; I. Mechanika tekutin*, SNTL Praha (1971)
- [41] Patankar S.V.: *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw-Hill/Hemisphere (1980)
- [42] Perry R.H., Green D.W., Maloney J.O.: *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, 7th Edition, McGraw-Hill (1997)
- [43] Quaile J.P., Levy E.K.: *Journal of Heat Transfer* 2, 66–71 (1975)
- [44] Rektor A., Vatai G.: *Desalination* 162, 279–286 (2004)
- [45] Robinson W.A.: *Journal of Engineering Mathematics* 10(1), 23–40 (1976)
- [46] Rosenberger S., Krüger U., Witzig R., Manzb W., Szewzyk U., Kraume M.: *Water Research* 36, 413–420 (2002)
- [47] Saffman P.G.: *Studies in Applied Mathematics* 10(1), 23–40 (1971)
- [48] Scott K.: *Handbook of Industrial Membranes*, First Edition, Elsevier Advanced Technology, Oxford UK (1995)
- [49] Sellars J.R.: *Journal of Applied Physics* 26(4), 489–490 (1955)
- [50] Schlosser Š., Kertész R., Marták J.: *Separation and Purification Technology* 41, 237–266 (2005)
- [51] Singh R., Laurence R.L.: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 22, 721–729 (1979)
- [52] Singh R., Laurence R.L.: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 22, 731–737 (1979)
- [53] Smith S.R., Cui Z.F.: *Journal of Membrane Science* 242, 117–128 (2004)
- [54] Teng Z., Huang J.Y., Fujita K., Takizawa S.: *Desalination* 139, 411–418 (2001)
- [55] Terrill R.M., Shrestha G.M.: *Journal of Applied Physics* 16, 470–482 (1965)
- [56] Vial D., Doussau G.: *Desalination* 153, 141–147 (2003)
- [57] Weber P., Knauf R.: *Desalination* 119, 335–339 (1998)
- [58] White F.M., Barfield B.F., Goglia M.J.: *Journal of Applied Mechanics* 25, 613–617 (1958)
-

- [59] White F.M.: Journal of Applied Mechanics 29, 201–204 (1962)
- [60] Yong G., Jun Z., Gunaghui Z., Dong Z., Weiwen Ch., Guoqi Y., Xuejun L., Bangzhong M., Junhui Z., Ping G.: Separation and Purification Technology 40, 183-189 (2004)
- [61] Yuan S.W., Finkelstein A.B.: Transactions of ASME 78, 719–724 (1956)
- [62] obrázky z [http://www.vt.tuwien.ac.at/project/project.php?project\\_id=74](http://www.vt.tuwien.ac.at/project/project.php?project_id=74),  
<http://www.bath.ac.uk/chem-eng/staff/profiles/semali-perera.shtml>

## Seznam symbolů

$A, B, C, D$	koeficienty v diskretizovaných rovnicích	-
$\vec{g}$	gravitační zrychlení	$\text{m.s}^{-2}$
$K$	permeabilita stěny vlákna	m
$J$	rychlost toku přes porézní stěnu	$\text{m.s}^{-1}$
$L$	poloviční délka porézní části vlákna	m
$L_N$	délka neporézního konce vlákna	m
$N_r$	počet uzlů základní sítě $p_B$ v radiálním směru	-
$N_z$	počet uzlů základní sítě $p_B$ v axiálním směru	-
$p$	tlak uvnitř vlákna (proměnný s místem)	Pa
$p_E$	tlak na výtokovém konci vlákna	Pa
$p_F$	tlak na vnější (nástřikové) straně vlákna	Pa
$Q$	objemový průtok	$\text{m}^3.\text{s}^{-1}$
$r$	radiální souřadnice	m
$R$	vnitřní poloměr vlákna	m
$Re_E$	bezrozměrná rychlost na výstupním konci vlákna	-
$t$	čas	s
$\vec{u}, u$	vektor rychlosti nebo jeho složky	$\text{m.s}^{-1}$
$\overline{u_z}$	střední hodnota $u_z$	$\text{m.s}^{-1}$
$\overline{u_{zE}}$	střední hodnota $u_z$ na výstupním konci vlákna	$\text{m.s}^{-1}$
$\hat{u}$	pseudorychlost	$\text{m.s}^{-1}$
$\dot{V}$	objemový průtok	$\text{m}^3.\text{s}^{-1}$
$z$	axiální souřadnice	m

## Řecká písmena:

$\alpha$	bezrozměrný parametr zjednodušeného modelu	-
$\kappa$	bezrozměrná permeabilita stěny vlákna	-
$\lambda$	bezrozměrná délka porézní části vlákna	-
$\lambda_N$	bezrozměrná délka neporézní části vlákna	-
$\mu$	dynamická viskozita kapaliny	Pa.s
$\rho$	hustota kapaliny	kg.m <sup>-3</sup>
$\vartheta$	tečná souřadnice	rad
$\vec{\tau}, \tau$	tenzor napětí nebo jeho složky	Pa
$\omega$	kontrolní objem	-
$\Omega$	oblast řešení	-

## Indexy:

B	bezrozměrná veličina
K	rovnice kontinuity
P	tlaková rovnice
r	radiální složka
R	r-složka pohybové rovnice
z	axiální složka
Z	z-složka pohybové rovnice
$\vartheta$	tečná složka
N,S,W,E,P	označení sousedních bodů stejné sítě
n,s,w,e,ne,nw,sw,sw	označení středů hran a rohů kontrolních objemů
max	maximální hodnota

## ÚDAJE PRO KNIHOVNICKOU DATABÁZI

Název práce	Proudění newtonské kapaliny dutým vláknem s porézními stěnami
Autor práce	Jan Kinčl
Obor	Chemické inženýrství
Rok obhajoby	2005
Vedoucí práce	Ing. Petr Doleček, CSc.
Anotace	Práce se zabývá numerickým řešením proudění nestlačitelné newtonské kapaliny dutým vláknem s porézní stěnou při dead-end filtraci.
Klíčová slova	porézní kanál, dutá vlákna, dead-end filtrace, modelování, numerické řešení, metoda posunutých sítí