

UNIVERZITA PARDUBICE

FAKULTA EKONOMICKO-SPRÁVNÍ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2021

Klára Hlaváčová

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní

Model dravec – kořist a jeho aplikace při popisu tržního chování ekonomických
subjektů

Bakalářská práce

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2020/2021

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE (projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Klára Hlaváčová**
Osobní číslo: **E18398**
Studijní program: **B6208 Ekonomika a management**
Studijní obor: **Management podniku: Management malých a středních podniků**
Téma práce: **Model dravec – kořist a jeho aplikace při popisu tržního chování ekonomických subjektů**
Zadávací katedra: **Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Zásady pro vypracování

Cíl práce: Matematický popis vývoje populačního systému, v němž dochází k interakci dvou druhů. Lotkova – Volterrovy rovnice a jejich řešení. Kolmogorovův model. Aplikace v ekonomice.

Osnova:

- Základní dynamické populační modely: historie, vlastnosti, příklady.
- Model „dravec-kořist“ a jeho matematický popis.
- Využití modelu „dravec-kořist“ při popisu chování ekonomických subjektů.
- Přednosti a nedostatky modelu.

Rozsah pracovní zprávy: **35**
Rozsah grafických prací: **–**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

BACAÉR, N. A Short History of Mathematical Population Dynamics. London: Springer-Verlag, 2011. ISBN 978-0-85729-114-1.
GANDOLFO, G. Economic Dynamics: Study Edition. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1997. ISBN 3-540-62760-X.
CHICONE, C. C. Ordinary differential equations with applications. New York: Springer-Verlag, 1999. ISBN 978-0-387-22623-1.
MURRAY, J. D. Mathematical biology. New York: Springer-Verlag, 2002. ISBN 978-0-387-22437-4.
KLÍČ A., M. DUBCOVÁ, L. BUŘIČ. Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic – kvalitativní teorie, dynamické systémy [online]. Praha: VŠCHT Praha, 2009 [cit. 2020-06-17]. Dostupné z [www. .](http://www.vsch.cz) ISBN 978-80-7080-724-8.

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Libor Koudela, Ph.D.**
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání bakalářské práce: **1. září 2020**
Termín odevzdání bakalářské práce: **30. dubna 2021**

L.S.

prof. Ing. Jan Stejskal, Ph.D.
děkan

doc. Ing. Marcela Kožená, Ph.D.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 1. září 2020

Prohlašuji:

Práci s názvem Model dravec – kořist a jeho aplikace při popisu tržního chování ekonomických subjektů jsem vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 7/2019 Pravidla pro odevzdávání, zveřejňování a formální úpravu závěrečných prací, ve znění pozdějších dodatků, bude práce zveřejněna prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 14. 05. 2021

Klára Hlaváčová v. r.

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych ráda poděkovala svému vedoucímu práce Mgr. Liboru Koudelovi, Ph.D. za jeho odbornou pomoc a cenné rady, které mi velmi pomohly při zpracování bakalářské práce. Dále bych chtěla poděkovat své rodině a přátelům za podporu a trpělivost během celého studia.

ANOTACE

Tato bakalářská práce se zabývá modelem dravec-kořist a jeho aplikací na chování ekonomických subjektů. V první části bude představen historický vývoj dynamických systémů a matematický popis modelu dravec-kořist. V dalších kapitolách bude popsán Goodwinův model, který bude dále ověřen na datech České republiky.

KLÍČOVÁ SLOVA

model dravec-kořist, hospodářský cyklus, Goodwinův model, zaměstnanost

TITLE

The Predator-Prey model and its application on the economic subjects business behaviour description

ANNOTATION

This bachelor thesis deals with the predator-prey model and its application on the economic subjects business behaviour description. The first part will present the historical development of dynamical systems and mathematical description of predator-prey model. In the next chapters, will be described the Goodwin model, which will be further verified on the data of the Czech Republic.

KEYWORDS

The Predator-Prey model, business cycle, The Goodwin growth cycle, employment

OBSAH

ÚVOD	12
1 ZÁKLADNÍ DYNAMICKÉ POPULAČNÍ MODELY	13
1.1 Základní pojmy	13
1.2 Typy vztahů v dynamickém systému.....	14
1.3 Historický vývoj.....	14
1.3.1 Fibonacci	14
1.3.2 Leonhard Euler (1707-1783).....	15
1.3.3 Thomas Robert Malthus (1766 -1834).....	16
1.4 Lotka, Volterra a model dravec-kořist	16
1.5 Aplikace modelu dravec-kořist v ekonomii.....	18
2 MODEL DRAVEC-KOŘIST A JEHO MATEMATICKÝ POPIS	19
2.1 Odvození modelu dravec-kořist	19
2.2 Parametry	19
2.3 Stacionární body	20
2.4 Lokální minimum a lokální maximum.....	23
2.6 Fázový diagram.....	25
3 VYUŽITÍ MODELU DRAVEC-KOŘIST PŘI POPISU CHOVÁNÍ EKONOMICKÝCH SUBJEKTŮ	27
3.1 Ekonomické pojetí dynamického modelu.....	27
3.2 Obecné předpoklady modelu MDK.....	27
3.3 Bodový diagram.....	28
3.3.1 Grafická analýza dat.....	28
3.4 Goodwinův model.....	29
3.4.1 Princip Goodwinova modelu.....	29
3.4.2 Matematické vyjádření	29
3.4.3 Základní předpoklady Goodwinova modelu	30

3.5	Ověření na datech České republiky	32
3.6	Definice hodnot.....	32
3.6.1	Hrubý domácí produkt	32
3.6.2	Hrubý národní produkt	32
3.6.3	Hospodářský cyklus	32
3.6.4	Zaměstnanost a míra zaměstnanosti	33
3.6.5	Pracovní síla, míra produktivity	33
3.6.6	Nezaměstnanost.....	33
3.6.7	Průměrná hrubá mzda.....	34
3.6.8	Phillipsova křivka.....	35
3.7	Vstupní hodnoty pro aplikaci Goodwinova modelu na ČR.....	36
3.8	Aplikace Goodwinova modelu na data ČR.....	37
3.8.1	Odhad parametrů	37
3.8.2	Zobrazení.....	38
3.8.3	Vyhodnocení dat ČR	40
3.8.4	uv zobrazení	41
3.8.5	Jiný pohled na Goodwinův model.....	42
4	HODNOCENÍ PRICIPU MODELU DRAVCE-KOŘISTI.....	47
4.1	Nedostatky modelu	47
4.2	Přednosti modelu	47
4.3	Možné využití modelu	47
	ZÁVĚR.....	48
	POUŽITÁ LITERATURA	49

SEZNAM ILUSTRACÍ

Obrázek 1 – Historický vývoj v čase	18
Obrázek 2 - Situace MDK.....	21
Obrázek 3 – Diagram funkce f a g	23
Obrázek 4 - Fázový diagram – zobrazení uzavřeného dynamického systému MDK v programu MATLAB	25
Obrázek 5 – Ilustrace vztahu populace dravce a kořisti	28
Obrázek 6 - Tempo růstu mezd 2000-2019	35
Obrázek 7 – Odhad parametru γ a δ	35
Obrázek 8 – Odhad parametru α	37
Obrázek 9 – Odhad parametru β	38
Obrázek 10 – Odhad koeficientu k	38
Obrázek 11 – Vztah mezi zaměstnaností a podílu mezd na GNP.....	39
Obrázek 12 – uv zobrazení modelu GM na datech ČR	42
Obrázek 13 – Odhad zaměstnanosti rok 2020	43
Obrázek 14 – 2000–2006	45
Obrázek 15 - 2006–2012.....	45
Obrázek 16 – 2012–2018	46
Obrázek 17 – GM v graf hodnot u a v	46

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1 – Fibonacciho posloupnosti	15
Tabulka 2 – Popis situace a vztahy v jednotlivých kvadrantech v MDK	21
Tabulka 3 – Tabulka vstupních hodnot pro GM.....	36
Tabulka 4 - Míra zaměstnaností a růst podílu mezd na GNP	39
Tabulka 5 – Vztahy v GM	41
Tabulka 6 – Podklad vstupních hodnot pro odhad zaměstnanosti	43

SEZNAM ZKRATEK A ZNAČEK

ČR	Česká republika
EA	ekonomicky aktivní obyvatelstvo
GM	Goodwinův model
HDP	hrubý domácí produkt
GNP	hrubý národní produkt
MDK	model dravec – kořist
OECD	Organizaci pro hospodářskou spolupráci a rozvoj
VŠPS	výběrové šetření pracovní síly

ÚVOD

Cílem této bakalářské práce je popsat využití modelu dravec-kořist a aplikovat jej na tržní chování ekonomických subjektů. Model dravec a kořist je užíván v biologii, ekologii a chemii k modelaci interakcí v určité populaci. Během posledních pár let je tento populační model častěji aplikován i na chování ekonomických subjektů, například k sledování hospodářského cyklu.

V první kapitole budou vymezeny základní pojmy, které čtenáři umožní pochopit vznik matematicko-biologického modelu dravec-kořist. Zde bude představen historický vývoj a osobnosti, které se podílely na rozvoji dynamických populačních systémů. Zmíněny budou také zajímavosti týkající se prvních populačních modelů a přínosy vybraných osobností.

Další kapitola bude věnována matematickému popisu modelu dravec-kořist. Čtenář bude seznámen s jednotlivými vztahy a bude mu vysvětlena interakce mezi kořistí a dravcem.

Ve třetí kapitole bude představena nejznámější ekonomická aplikace modelu dravec-kořist, kterou je Goodwinův model. Tato část je rozdělena na základní definice, které budou popisovat význam hodnot. Poznatky o Goodwinově modelu budou shrnuty na makroekonomických datech České republiky.

V poslední kapitole budou shrnuty pozitiva a negativa modelu dravec-kořist a bude rozvinuta myšlenka jeho možného využití při popisu chování ekonomických subjektů.

1 ZÁKLADNÍ DYNAMICKÉ POPULAČNÍ MODELY

Cílem této kapitoly je vymezení základních pojmů, které se týkají dynamických populačních modelů. Čtenář bude seznámen s historickým vývojem a osobnostmi, které se věnovaly dynamickým populačním modelům či se podílely na jejich rozvoji.

1.1 Základní pojmy

Následuje vymezení základních pojmů, které se vztahují k problematice dynamických populačních modelů. Čtenáři budou blíže seznámeni s problematikou vztahující se k modelu dravec-kořist. Základní pojmy jsou:

Dynamický model – zobrazení vzájemných vztahů pozorovaných hodnot (veličin) v určitém prostředí, které je pro ně typické. Na základě počátečních podmínek, lze predikovat jejich budoucí vývoj. [4][6] Porovnávané hodnoty jsou na sobě závislé a jsou vázány na parametry. U pozorovaného dynamického modelu je důležité najít takové informace, které určí jeho aktuální stav. Matematické modely dynamických systémů se snaží co nejvíce se přiblížit skutečné situaci a popsat ji. Dělí se na deterministické a stochastické.

Stochastický model – je takový model, který popisuje neúplné informace a jsou v něm obsaženy prvky náhodnosti.

Deterministický model – opak stochastického modelu. Veličiny, které jsou v něm popisovány jsou pevně definovány a propojeny vztahy.[7]

Parametr – slouží k hledání optimálního řešení a analyzují stávající stav daného modelu či situaci. Mezi parametry patří například velikost, objem či hustota. [6]

Rovnovážný stav neboli ekvilibrium – charakterizuje klidový stav v modelu. V modelu dravec-kořist mohou nastat následující dvě situace, které popisují právě dva rovnovážné body E_0 a E_1 .

- Rovnovážný bod E_0 , který popisuje situaci, kde neexistuje žádný dravec a žádná kořist.
- Rovnovážný bod E_1 , popisuje rovnovážný stav systému., který bývá označován také jako kritický bod. Svou pozicí vyjadřuje ideální poměr populace kořisti a populace dravce, který spolu existují v určitém prostředí. [8]

Fázový portrét – graficky zobrazuje soustavu křivek, které odpovídají počátečním podmínkám pro různé hodnoty parametrů. Jedná se o trajektorie, které se nemohou protínat a každý bod leží právě na jedné z nich. Daný bod zobrazuje aktuální chování či situaci v daném modelu. [4]

1.2 Typy vztahů v dynamickém systému

Nyní bude detailněji představen jednoduchý vztah dravce a kořisti v modelu dravec–kořist (dále jen MDK). Základní myšlenkou tohoto modelu je vztah dvou skupin. Jedné slabší a druhé silnější skupiny, které fungují v určitém prostředí v daném čase.

Představme si tedy, že existuje uzavřený prostor či systém, kde se setkávají pouze dva druhy. Tyto druhy se navzájem ovlivňují různými způsoby, a. mohou zde vznikat následující vazby a vztahy, které jsou

- nezávislé na sobě,
- soupeřící mezi sebou,
- vztah dravce a kořisti,
- dva druhy, které se navzájem potřebují a fungují v symbióze. [1] [5]

1.3 Historický vývoj

V této části budou shrnuty významné poznatky, které jsou zaměřeny na problematiku dynamických populačních modelů. Tento krátký pohled do historie přiblíží čtenáři historický vývoj představ o dynamických modelech, které lze aplikovat na různá prostředí, subjekty a jejich chování. Zde jsem čerpala převážně z knihy [1].

1.3.1 Fibonacci

Již na přelomu 12. a 13. století se problematikou vývoje populace zabýval matematik a obchodník Leonardo Pisano, známý jako Fibonacci. Jeho myšlenky byly na tehdejší dobu velmi pokrokové. Roku 1202 vydal knihu s názvem „*Liber abaci*“. V této knize jsou vysvětleny do té doby známé matematické metody z oblasti aritmetiky a algebry za využití arabských číslic. Zde nalezneme příklady z oblasti směnných obchodů, přerozdělování zisku nebo výpočtu úroků.

V knize je také popsán první jednoduchý dynamický systém. Tento systém popisuje růst populace králíků, kde je stanoven čas a rozmnožovací schopnost králíků.

Princip tohoto jednoduchého systému spočívá v tom, že na počátku sledovaného období existuje pouze jeden pár králíků (samec a samice), který zplodí další jeden pár králíků. Nový

pár je schopen reprodukce až následující měsíc. A takto se to opakuje každý měsíc pouze u párů, které jsou dospělé a jsou schopny se rozmnožovat.

Tabulka 1 – Fibonacciho posloupnost

1	1 měsíc	1							
1	2 měsíc	1							
2	3 měsíc	1	1						
3	4 měsíc	1	1	1					
5	5 měsíc	1	1	1	1	1			
8	6 měsíc	1	1	1	1	1	1	1	1

Zdroj: vlastní zpracování

Počty párů králíků vytváří tedy posloupnost, jejíž každý další člen je roven součtu dvou předchozích členů. [1]

1.3.2 Leonhard Euler (1707-1783)

Leonhard Euler během svého života vydal mnoho článků a knih, z oblasti fyziky, astronomie, matematiky a publikoval i úvahy týkající se demografie. Dynamickými populačními systémy se zabýval ve své knize *Introductio in analysin infinitorum*, která byla vydána v roce 1748. Jedna z kapitol v této publikaci je věnována exponenciálám a logaritmům. Euler zde řešil na třech příkladech ze šesti i otázku, které se vztahují k problematice růstu populace. V jednom z těchto příkladů se snažil zjistit velikost populace za určité časové období. Využil dostupných údajů, které se týkaly počtu žijících obyvatel v daném regionu a současně byl znám roční přírůstek obyvatel. Tento údaj byl určen k výpočtu (odhadu) velikosti populace za 100 let a byl velmi významný.

K tématu populačního růstu se Euler vrátil o několik let později. V roce 1760 publikoval text *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain*, který byl zveřejněn ve sborníku Akademie věd v Berlíně. Tento text, sjednocoval jeho předchozí úvahy a myšlenky, ve kterých se zabýval geometrickým (exponenciálním) růstem a úmrtností populace. Jeho poznatků později využil ve své práci i Lotka. [1][5]

1.3.3 Thomas Robert Malthus (1766–1834)

Thomas Robert Malthus byl anglický ekonom, který se zabýval populačním růstem. V roce 1798 anonymně vydal knihu¹, jež byla nesouhlasnou reakcí na výroky ekonomů, sociologů a dalších autorů, kteří tvrdili, že po Velké francouzské revoluci (1789-1799) musí přijít pokrok a rozvoj, který je nevyhnutelný. Ve své knize hodnotil anglickou legislativu, která v tehdejší době upřednostňovala rodiny s dětmi, ale již se nestarala o stárnoucí populaci a podporu produkce potravin. Tvrdil, že pokud podpora ze strany státu bude přetrvávat, dojde sice k nárůstu populace, ale časem vzhledem k nízké produkci potravin bude docházet k hladomorům a epidemiím, které zpomalí růst populace. Malthusův přínos spočívá v tom, že propojil Eulerův geometrický růst populace s reálnou situací. [1][5]

Princip Malthusovy teorie populačního růstu spočívá v tom, že populace má tendenci růst geometrickou řadou, ale množství potravin roste pouze aritmetickou řadou. To znamená, že množství potravy na jednoho jedince by se mělo časem snížit. Toto snížení produkce potravy, bude mít vliv právě na pokles růstu populace.[30]

1.4 Lotka, Volterra a model dravec-kořist

Model dravec-kořist je nejznámějším popisem vztahů v určitém prostředí. Nejčastěji bývá užíván v ekologii a biologii a slouží k popisu a modelaci vztahů. Tento model vyobrazuje dva provázané vztahy, které jsou v populaci. Konkrétně se jedná o vztah, popisující závislost mezi predátorem a jeho kořistí a naopak.[7]

Model dravec-kořist je známý také jako Lotkův-Volterrův model. Tento model popsali nezávisle na sobě Alfred James Lotka a Vito Volterra mezi lety 1920-1926.

V roce 1920 zveřejnil Lotka své poznatky v textu *Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems*, které se popisovali periodické chování chemických prvků v laboratorních podmínkách. V roce 1925 tyto své myšlenky rozšířil ve své knize s názvem *Elements of Physical Biology*. V publikaci popisuje vztah mezi dvěma živočišnými druhy. Zjistil také, že tento vztah mezi dravcem a jeho kořistí, lze aplikovat i na vztah mezi parazity a hostiteli. [1][5]

Volterra se touto problematikou zabýval od roku 1925 až do své smrti. Zaujala ho studie zoologa Umberta D'Ancony, která sledovala podíl vylovených ryb v letech 1905-1923

¹ *An Essay on the Principle of Population, as It Affects the Future Improvement of Society, With Remarks on the Speculations of Mr Godwin, Mr Condorcet and Other Writers.*[1]

v Jaderském moři. Volterra se během svého života k problematice vztahu dravce a kořisti vrátil. Stejně jako Lotka si povšiml, že tento systém osciluje a je ovlivňován počáteční podmínkou, která má vliv na stav dané populace.

Alfred James Lotka (1880-1949) během svého života studoval ve Francii, Německu a v Anglii, kde také získal doktorát za své články o dynamickém růstu populace a demografii.

V letech 1907-1911 se zaměřil na studium věkové struktury populace. Zde si pohrával s podobnou myšlenkou, která se týkala tempa růstu populace. Ve svých studiích využil podobných myšlenek jako Euler, ale oproti němu předpokládal, že se hodnoty plynule mění v určitém čase.

V roce 1925 zveřejnil své poznatky o vztazích mezi dvěma biologickými systémy. V práci uvažoval o vztahu mezi býložravci a rostlinami a předpokládal, že množství bylin je omezené (potrava pro býložravce) a množství populace býložravců je na něm závislé. A vše se odehrává v určitý čas. Jejich vztah vyjádřil pomocí soustavy diferenciálních rovnic, kterou lze zapsat následujícím způsobem:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy \quad (2)$$

V daném systému popsal vztah rostlin (kořisti) a býložravců (dravců). Pokud je dostatek rostlin, tak roste i populace býložravců. Ale je-li přebytek býložravců, ubývá jim potrava a tím pádem predátoři začínají vymírat a dochází k obnově populace kořisti. V tomto případě je potrava býložravců kořistí. Tento cyklus se stále opakuje, pokud nedojde k nějaké radikální změně a tato změna neohrozí jednu skupinu.[1]

Vito Volterra (1890-1940) ve svých 22 letech získal doktorát z fyziky na Univerzitě ve Florencii. Po první světové válce založil Italskou matematickou unii (1922) a Národní výzkumný ústav (1923). Rovněž vedl Mezinárodní komisi pro vědu a studii Středozemního moře (International Study of the Mediterranean Sea) (1923). Problematice dravce a kořisti se průběžně věnoval až do konce svého života. Své poznatky vysvětlil pomocí stejného modelu jako Lotka, ale nezávisle na jeho studiích. Vzhledem k tomu, že v roce 1931 odmítl spolupracovat s Mussolinim, tak musel opustit post profesora a byl zbaven všech funkcí

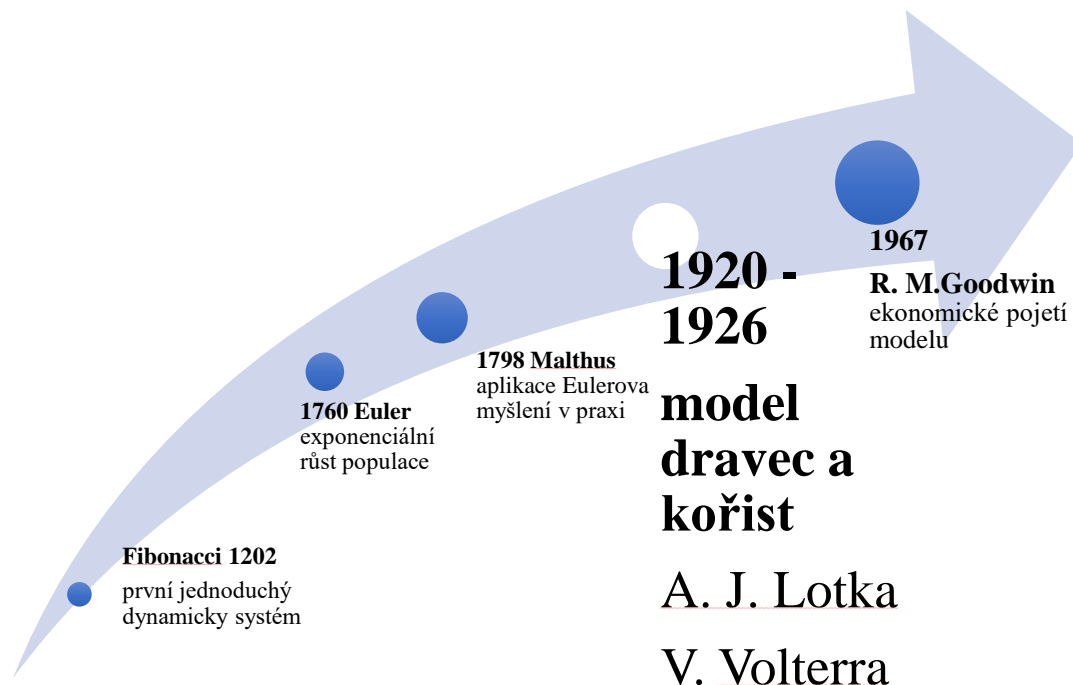
a členství v Italských organizacích. Od té doby až do své smrti pobýval převážně mimo Itálii, kdy cestoval a přednášel po celé Evropě. [1]

Ruský matematik Andrej Nikolajevič Kolmogorov se narodil v roce 1903. Je znám především jako zakladatel moderní teorie pravděpodobnosti. V roce 1936 vydal článek, který byl zaměřen na zobecnění modelu dravec-kořist. Na textu² z Volterrova výzkumu, poukázal Kolmogorov, že model dravec-kořist má svá omezení při popisu reálné situace.[1]

1.5 Aplikace modelu dravec-kořist v ekonomii

Richard M. Goodwin (1913-1996) americký matematik a ekonom, který se jako jeden z prvních pokusil kombinovat cyklické chování hospodářských cyklů a ekonomický růst. Poté co byl jmenován profesorem ekonomie na Harvardu (1945), započal se studiem hospodářských cyklů. Při analýze hospodářských cyklů hledal inspiraci ve fyzice a později ji našel v biologii, kde využil modelu dravec-kořist a aplikoval jej v roce 1967 v příspěvku s názvem *A Growth Cycle*, který byl publikován ve sborníku *Socialism, Capitalism and Economic Growth* [39]

Časová osa zobrazuje významné události a osobnosti, které měly vliv na vývoj modelu dravec-kořist. Jedná se o shrnutí první kapitoly, která popisuje osobnosti, které svými pracemi přispěly mimo jiné i k rozvoji populačních dynamických systémů.



Obrázek 1 – Historický vývoj v čase

Zdroj: vlastní zpracování

² Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza, Giorn. Ist. Ital. Attuari 7[1]

2 MODEL DRAVEC-KOŘIST A JEHO MATEMATICKÝ POPIS

V této kapitole bude řešen MDK a jeho matematický popis. Budou vysvětleny jednotlivé vztahy mezi predátorem a kořistí. Nejprve budou odvozeny a popsány jednotlivé vztahy v příslušných diferenciálních rovnicích, které jsou nelineární. V této kapitole jsem čerpala převážně z následujících zdrojů.[1][2][7][9]

2.1 Odvození modelu dravec-kořist

Kapitola bude zaměřena odvození vztahu mezi dravcem a jeho kořistí. Představme si tedy určitý systém, kde spolu fungují dvě populace, které jsou ve vztahu dravce a kořisti. Tento systém je označován také jako Lotkûv-Volterrûv systém.

Předpokládejme, že existuje ohraničený prostor, kde se setkávají pouze dva druhy. Tyto dva druhy jsou na sobě závislé. Nechť proměnná x je kořist; proměnná y je predátor (dravec). Změnu množství populace v čase popisují derivace $x'(t)$, $y'(t)$. Parametry a , b , c , d jsou vždy kladné a definují interakci v daném systému.

- $x = 0; y = 0 \rightarrow$ populace dravce vyhynula, proto již není nutná existence populace kořisti;
- $x = c/d; y = a/b \rightarrow$ tyto dvě populace mohou fungovat vedle sebe a daný systém má potenciál, protože systém je v rovnovážném stavu, který je v bodě E_1 .

Rovnice, které zobrazují vztahy v daném modelu mají tvar:

$$x'(t) = ax - bxy \quad \text{čili} \quad \frac{dx}{dt} = (a - by)x \quad (3)$$

$$y'(t) = -cy + dxy \quad \text{čili} \quad \frac{dy}{dt} = (-c + dx)y \quad (4)$$

2.2 Parametry

Neznámá populace y je definována jako predátor a neznámá populace x je zde považována za kořist. Vztahy mezi kořistí a dravcem jsou popisovány pomocí parametrů, které vyjadřují různé interakce v systému.

- a) Parametr a vyjadřuje rychlost růstu populace kořisti bez populace dravce.
- b) Parametr b vyjadřuje úhyn populace kořisti. Čím větší je zásoba potravy (kořisti), tím větší je nárůst populace dravce. Na druhou stranu přirozený růst populace kořisti závisí na velikosti populace dravce.
- c) Parametr c vyjadřuje pokles populace dravců, když není dostatek kořisti.

- d) Parametr d popisuje situaci, která popisuje růst populace dravce v závislosti na velikosti kořisti.

Výrazy $-bxy$ a dxy , tedy vyjadřují závislost mezi populacemi. Jedná se o vztah růstu či poklesu mezi populací y (dravce) a populací x (kořisti).

Parametry slouží k odhadu velikosti populace a ukazují vzájemnou závislost jedné populace na druhé. Čím větší je populace kořisti, tím větší je růst populace dravce a přirozený růst populace kořisti závisí na velikosti populace dravce. Dále platí, že čím bude populace dravce větší, tím se bude populace kořisti zmenšovat a tento cyklus se bude opakovat.

2.3 Stacionární body

Stacionární body určují rovnovážný stav populace. Zde je předpokládán vznik dvou rovnovážných stavů, které se nachází v bodě E_0 a v bodě E_1 .

U rovnovážného stavu E_0 neexistuje žádná kořist a žádný dravec. Tento stav lze vyjádřit jako $x_0, y_0 = (0,0)$ a je počátečním rovnovážným stavem v bodě E_0 .

Stacionární bod E_1 popisuje aktuální rovnovážný stav systému. Tento stav zjistíme, pokud výrazy $x'(t)$; $y'(t)$ v rovnicích (3) a (4) položíme rovny nule

$$ax - bxy = 0 \quad (5)$$

$$-cy + dxy = 0 \quad (6)$$

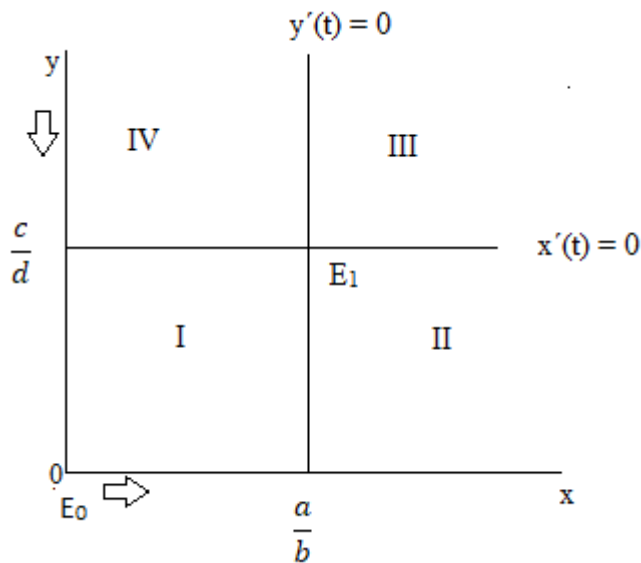
Tímto odvozením získáme druhý rovnovážný bod $E_1 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$.

$$x'(t) = 0 \quad ax - bxy = 0 \quad y = \frac{a}{b} \quad (7)$$

$$y'(t) = 0 \quad -cy + dxy = 0 \quad x = \frac{c}{d} \quad (8)$$

Zanesením stacionárních bodů, které byly zjištěny z předchozích rovnic (7) a (8). do grafu, vzniknou dva rovnovážné body. Posunem os x a y , tedy z bodu E_0 do druhého rovnovážného bodu E_1 , se získají čtyři kvadranty, definující vztahy mezi populací x a populací y .

Na ose x jsou umístěny hodnoty populace kořisti a na ose y jsou vyneseny hodnoty populace dravce.



Obrázek 2 - Situace MDK

Zdroj: vlastní zpracování [8]

Obrázek 2 zobrazuje možné situace a stavy, které mohou nastat v MDK po rozdělení na čtyři kvadranty. Tyto vztahy jsou popsány v tabulce 2.

Tabulka 2 – Popis situace a vztahy v jednotlivých kvadrantech v MDK

Kvadranty	I	II	III	IV
Vztahy v systému	$x'(t) > 0; y'(t) < 0$	$x'(t) > 0; y'(t) > 0$	$x'(t) < 0; y'(t) > 0$	$x'(t) < 0; y'(t) < 0$
	↗ kořisti; ↓ dravce	↑ kořisti; ↗ dravce	↘ kořist; ↑ dravce	↓ kořisti; ↘ dravce

Legenda

↑ růst
 ↓ pokles
 ↗; ↘ pozvolný růst
 ↘; ↗ pozvolný pokles

Zdroj: vlastní zpracování [8]

Z této tabulky je patrné chování mezi kořistí a dravcem. V prvním kvadrantu dochází k pozvolnému nárůstu populace kořisti, protože populace dravce klesá.

Pokles populace dravce v kvadrantu I byl způsoben situací z kvadrantu IV a III, kde dochází k poklesu kořisti a z důvodu nárůstu populace dravce. Nárůst populace dravce byl způsoben pozitivním vývojem růstu populace kořisti v kvadrantu I a II, a proto dochází ke snižování populace dravce v kvadrantech IV a I.

Další část je zaměřena na řešení soustavy diferenciálních rovnic (3) a (4) a na situaci okolo rovnovážného bodu E_1 . Populace dravce y musí být funkcí kořisti x , tzn. $y = f(x)$; pro její derivaci platí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad (9)$$

Dosažením do rovnice (9) dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-c + dx)y}{(a - by)x} \quad (10)$$

$$(a - by)x dy = (-c + dx)y dx \quad (11)$$

a po separaci proměnných

$$\frac{(a - by)}{y} dy = \frac{(-c + dx)}{x} dx \quad (12)$$

Integrací obou stran dostaneme

$$\int \left(\frac{a}{y} - b \right) dy = \int \left(\frac{(-c)}{x} + d \right) dx \quad (13)$$

$$a \ln y - by = -c \ln x + dx + \ln C \quad (14)$$

$$a \ln y + c \ln x = by + dx + C \quad (15)$$

Po úpravě a odstranění logaritmů lze řešení zapsat ve tvaru

$$y^a x^c = C e^{by+dx} y^a x^c = C e^{by+dx} \quad (16)$$

$$\frac{y^a x^c}{e^{by+dx}} = C \quad (17)$$

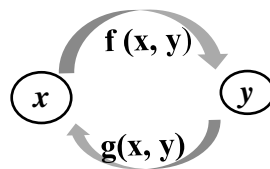
Těmito úpravami, byla získána konstantu C , která zobrazuje všechna možná řešení ve fázovém diagramu a také zobrazuje směr vývoje křivek a určuje jejich tvar.

2.4 Lokální minimum a lokální maximum

K analýze stacionárních bodů může být využita Jacobiho matice J , která slouží ke zkoumání vlastnosti rovnovážných bodů. Touto analýzou bude zjištěna možná kapacita prostředí. Jedná se o lokální extrém, tedy kde lokální minimum a lokální maximum pro dané funkce.

OBECNÉ ZOBRAZENÍ

Diagram funkce f a g , zobrazuje vztah mezi populacemi. Derivací těchto funkcí získáme dva rovnovážné body E_0 a E_1 , dosazením do determinantu Jacobiho matice.



Obrázek 3 – Diagram funkce f a g

Zdroj: vlastní zpracování [7]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a - by \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -bx; \quad \frac{\partial g}{\partial x} = dy; \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -c + dx \quad (18)$$

Determinant Jacobiho matice J je obecně

$$J_{(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{vmatrix} \quad (19)$$

Determinant Jacobiho matice J v bodě E_0

$$J(S_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{vmatrix} \quad (20)$$

Determinant Jacobiho matice J v bodě E_1

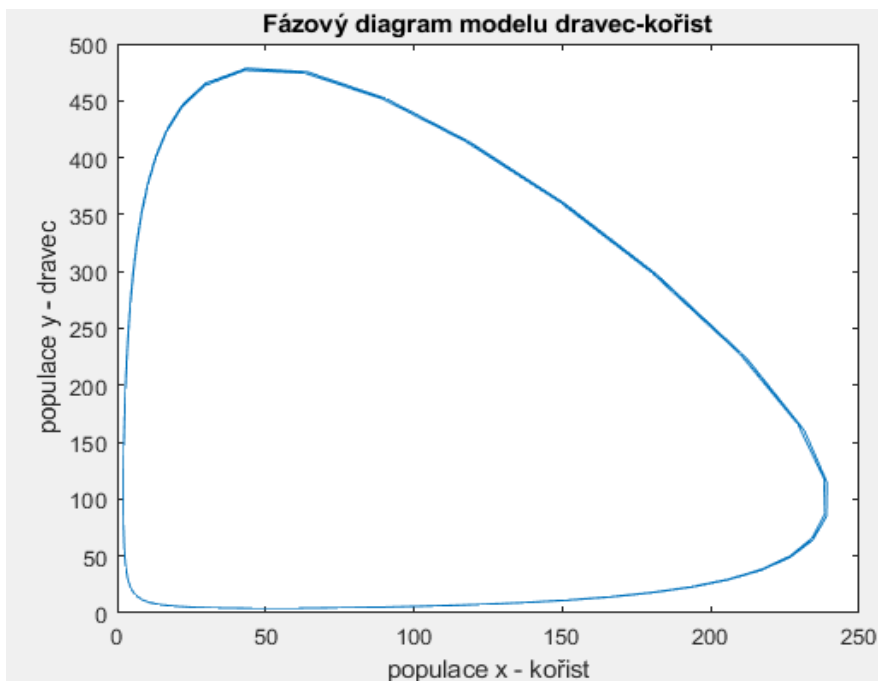
$$J(S_1) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -b\frac{c}{d} \\ d\frac{a}{b} & 0 \end{vmatrix} \quad (21)$$

2.6 Fázový diagram

Fázový diagram je grafické znázornění soustavy parametrických křivek, odpovídajících různým kombinacím počátečních podmínek. Každý bod náleží právě jedné křivce v daném systému. Pokud se změní jednotlivé parametry dojde ke vzniku nové dráhy.

```
type lotka.m
alpha =0.033
beta=0.08
t0=0
tfinal=15
y0=[10; 10]
[t,y] = ode23(@lotka,[t0 tfinal],y0)

plot(y(:,1),y(:,2))
title('Fázový diagram modelu dravec-kořist')
xlabel('populace x - kořist')
ylabel('populace y - dravec')
```



Obrázek 4 - Fázový diagram – zobrazení uzavřeného dynamického systému MDK v programu MATLAB

Zdroj: vlastní zpracování

Obrázek 4 zobrazuje životní cyklus populace dravce a kořisti za určitých a neměnných podmínek. Jsou-li podmínky pro životní cyklus neměnné lze popsat periodu trajektorie křivky. U periody T záleží na počátečních podmínkách, celá křivka osciluje proti směru kolem rovnovážného bodu E_1 , který se nachází na souřadnicích získaných z (7) a (8) . V blízkosti

rovnovážného bodu jsou tyto oscilace malé a čím více se blíží rovnovážnému bodu E_0 , tak se zvětšují. Fungují na principu kyvadla.[1]

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}} \quad (22)$$

Nečekaná změna počátečních podmínek může mít vliv na růst či pokles populace. Negativní změna vstupních parametrů ovlivní fázový diagram tak, že orbitu zmenší, naopak pozitivní změna zvětší sledovanou orbitu fázového diagramu.

Dosud byl popsán MDK bez vnitrodruhového soupeření. To znamená, že nebyl zohledněn faktor soupeření v daných populacích. MDK s vnitrodruhovou konkurencí se více přibližuje realitě, jelikož zohledňuje vnitrodruhové soupeření mezi populacemi x a y . Taková situace nastane v případě, že mezi sebou začnou predátoři soupeřit o kořist a kořist se snaží před predátory uniknout.[8]

Při aplikaci na ekonomické chování tržních subjektů bude využit základní model MDK, který nezohledňuje mezidruhovou konkurenci.

3 VYUŽITÍ MODELU DRAVEC-KOŘIST PŘI POPISU CHOVÁNÍ EKONOMICKÝCH SUBJEKTŮ

Tato kapitola bude zaměřena na využití MDK při popisu chování ekonomických subjektů. Nejčastěji je MDK užíván k modelaci vztahů mezi populacemi v biologii, chemii či v ekologii. Slouží k vyjádření jejich vzájemné interakce.

Během posledních let se, díky rozvoji počítačové technologie, začal tento model častěji využívat k zobrazení vztahů v různých systémech. Bude popsána jedna z nejznámějších aplikací MDK na ekonomické chování subjektů Goodwinovým modelem. Tento model bude představen, porovnán s MDK a ověřen na vybraných makroekonomických datech z České republiky.

3.1 Ekonomické pojetí dynamického modelu

V ekonomickém pojetí dynamických systémů, je sledována určitá vzácnost, dostupnost či omezenost jednotlivých zdrojů. Cílem je poukázat na jednotlivé vztahy mezi sebou, vysvětlit jejich vzájemnou interakci a popsat jednotlivé jevy či situace. Některé jevy, které nejsou zohledněny v parametrech mohou působit na systém s časovým zpožděním. [6] Je tedy vhodné dívat se na zkoumaný celek i z širšího hlediska a sledovat další faktory, které by něj mohly mít vliv.

3.2 Obecné předpoklady modelu MDK

Pro aplikace MDK je vhodné připomenout obecné předpoklady.

- V prostředí existují dva druhy, které jsou na sobě závislé.
- Pokud není v daném systému, žádný predátor, jsou vytvořeny podmínky pro exponenciální růst populace kořisti.
- Neexistuje-li žádná kořist, dochází k úhynu predátora.[6]

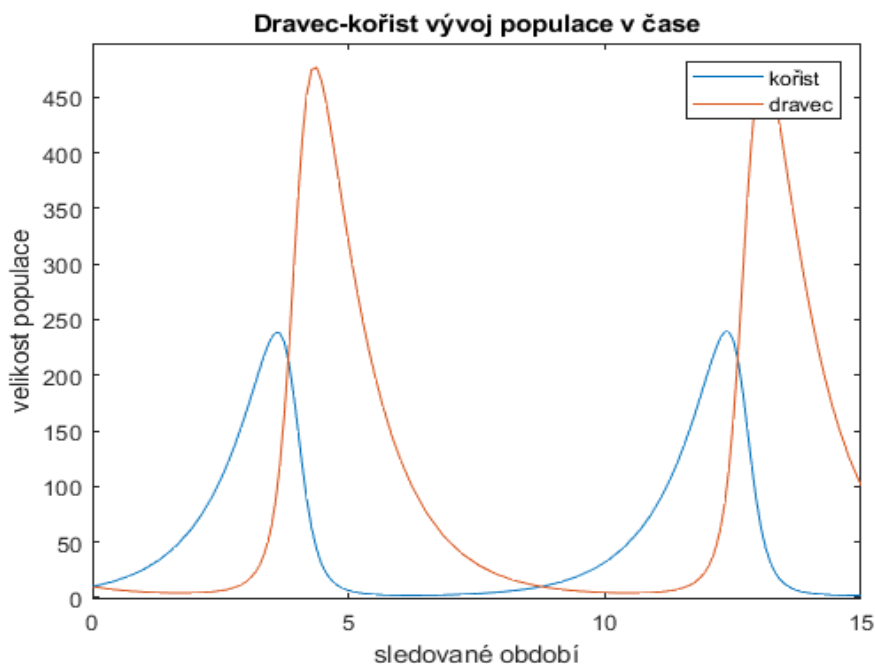
Dále je vhodné se zamyslet i nad grafickou interpretací modelu, která usnadní prvotní rozhodování a vyhodnocení závislosti mezi proměnou x a y . K tomu může posloužit bodový diagram či grafické zobrazení chování těchto proměnných.

3.3 Bodový diagram

Bodový diagram³ je matematicko-statistickou metoda, pomocí níž je vyhodnocována závislost a vztah dvou měřených hodnot. Tento typu zobrazení, který je zapisován pomocí bodů je nazýván také jako korelační diagram. Vztah mezi hodnotami je nazýván korelace. V diagramu je zkoumán rozptyl a směr vývoje, cílem je vyšetřit vzájemný vztah mezi dvěma veličinami. Na vodorovnou osu x se vynášejí nezávisle proměnná a na osu y jsou vynášeny hodnoty, které jsou závislé. Tímto způsobem lze velmi jednoduše provést vizuální kontrolu lineární závislosti proměnné y s proměnou x . [12][13][14]

3.3.1 Grafická analýza dat

Po splnění základních předpokladů může být provedena i další vizuální kontrola dat, která zobrazuje předpoklady pro MDK. Tato vizuální kontrola by měla upozornit také na vztah mezi veličinami. Cílem je sledovat růst populace dravce, který se opoždí za růstem populace kořisti.



Obrázek 5 – Ilustrace vztahu populace dravce a kořisti

Zdroj: Vlastní zpracování v programu MATLAB.

³ anglicky *Scatter plot*

3.4 Goodwinův model

Goodwinův model (dále GM) je jednou z nejznámějších aplikací na soustavu rovnic Lotky-Volterra v modelu dravec-kořist. Tento model popisuje chování ekonomických subjektů, ověřen bude na makroekonomických datech České republiky. Problematika týkající GM je čerpána převážně z následujících zdrojů: [2] [15] [16] a [7]. Inspirací mi byly i vysokoškolské práce [10] [17].

3.4.1 Princip Goodwinova modelu

Richard M. Goodwin v roce 1967⁴ představil svůj model, který byl inspirován myšlenkami Karla Marxe. Cílem bylo poukázat na souvislost mezi cyklickým vývojem ekonomiky v kapitalistickém systému a vztahem mezi zaměstnaností a reálnými mzdami. [20][15]

3.4.2 Matematické vyjádření

Matematický popis Goodwinova modelu je inspirován vztahy z MDK.

$$v'(t) = \left(\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) - \frac{1}{k}u\right)v \quad (23)$$

$$u'(t) = (-\alpha + \gamma + \delta v)u \quad (24)$$

- v – zaměstnanost a odpovídá x v MDK (kořist). Výraz $\frac{1}{k} - (\alpha + \beta)$ má význam parametru a ;
- u – podíl mezd na produktu je dle MDK v pozici predátora ($\alpha + \gamma$) v rovnici má význam parametru c .

Porovnání a přiřazení parametrů v GM s parametry v MDK.

$$\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) = a; \quad \frac{1}{k} = b; \quad (\alpha + \gamma) = c; \quad \delta = d$$

Levá strana popisuje vztahy v GM a pravá strana popisuje vztahy v MDK. V dalším oddílu budou detailněji a postupně představeny jednotlivé parametry z GM.

⁴ v příspěvku s názvem *A Growth Cycle*, který byl publikován ve sborníku *Socialism, Capitalism and Economic Growth (1967)*.

3.4.3 Základní předpoklady Goodwinova modelu

V původním GM je řešena zaměstnanost, která odpovídá populaci kořisti a podíl mezd na produkt je v pozici predátora. Blíže budou popsány v několika bodech základní předpoklady pro aplikaci GM.

1. Technologický pokrok a produktivita práce

V dané ekonomice musí docházet k neustálému, ale zároveň stabilnímu technologickému pokroku, který je měřitelný produktivitou práce. Tento vztah lze vyjádřit na jednotku práce následujícím vztahem:

$$a = \frac{Y}{L} = a_1 e^{at} \quad (25)$$

Legenda: Y – produkt; L – počet zaměstnaných; a – koeficient pro míru produktivity, tato konstanta musí být kladná. Parametr a = vyjadřuje růst produktivity práce (lze zjistit v programu MS Excel). Známe-li koeficient pro míru produktivity může být vyjádřen podíl mezd na produkt:

$$u = \frac{wL}{Y} = \frac{w \frac{Y}{a}}{Y} = \frac{w}{a} \quad (26)$$

Legenda: w = mzdová sazba na jednoho zaměstnance.

2. Růst pracovních sil

Míru růstu nabídky práce, lze vyjádřit parametrem β , který je vždy kladný a roste exponenciálně. N vyjadřuje nabídku pracovní síly a $N(t)$ značí změnu pracovní nabídky v čase. Tento vztah je vyjádřen:

$$\beta = \frac{N(t)}{N} \quad N = N_0 e^{\beta t} \quad (27)$$

3. Výrobní faktory

Pro daný model je povolena existence pouze dvou výrobních faktorů a těmi jsou práce (L) a kapitál (K).

4. Kapitálový koeficient

U koeficient kapitálu k je předpokládáno, že zaměstnanci své mzdy spotřebují a zisk bude využit k dalším investicím. Jedná se o zisk firmy, který nebyl investován do mezd a lze jej využít za účelem investice do kapitálu. Tempo růstu kapitálu se rovná růstu investic. Tomu odpovídá vztah, kde platí rovnost úspor a investic.

$$k = \frac{K}{Y} \quad (28)$$

5. Mzdy rostou za předpokladu, že je plná zaměstnanost.

Zde Goodwin vycházel z principu původní Phillipsovy křivky, a to ze vztahu, který popisuje vztah nezaměstnanost a tempo růstu nominální mzdy. Tuto křivku linearizoval a aproximací zjistil parametr γ a δ , kde γ je průsečík křivky s osou y a parametr δ vyjadřuje růst zaměstnanosti. Phillipsovu křivku modifikoval a nezaměstnanost vyměnil za zaměstnanost. Tento vztah lze zapsat následovně:

$$w'(t) = -\gamma + \delta v \quad (29)$$

6. Uzavřenost ekonomiky

V původním modelu je počítáno s uzavřenou ekonomikou. Uzavřená ekonomika je taková ekonomika, která nevyváží a ani nedováží. Tím pádem je soběstačná a není závislá na dovozu a vývozu zboží na okolních státech a má dostatečné zdroje pracovní síly. [2]

V dnešní době je většina ekonomik otevřená. Jen záleží na míře otevřenosti a s tím je spojena i závislost na okolních státech. Kromě uzavřenosti je dalším předpokladem periodicita cyklu. Daná ekonomika se vrací do počátečního bodu a cyklus se opakuje.

Výpočet této periody vychází z rovnice (22) a jsou do ní dosazeny parametry z GM, které odpovídají svým chováním parametrům z MDK. Tyto parametry jsou popsány v oddílu 3.4.2 Matematické vyjádření . [20]

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{k} - (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)}} \quad (30)$$

3.5 Ověření na datech České republiky

Tento oddíl bude zaměřen na GM a jeho aplikace na data České republiky. V části, kde jsou popisovány vstupující hodnoty bylo čerpáno převážně z následujících zdrojů. [21][30][33][34]

3.6 Definice hodnot

Zde bude popsán význam hodnot, které budou využity při zpracování GM.

3.6.1 Hrubý domácí produkt

Hrubý domácí produkt (dále HDP) je jeden z významných makroekonomických ukazatelů, který zobrazuje výkonnost ekonomiky daného státu. Do tohoto produktu jsou započítávány tržní hodnoty všech vyrobených finálních statků a služeb, vyprodukovaných v dané ekonomice za určité období. Tempo růstu HDP je měřitelné a je to jeden ze čtyř ukazatelů, který je řazen do tzv. magického čtyřúhelníku. Své místo mají v magickém čtyřúhelníku také další ukazatele, kterými platební bilance, inflace a zaměstnanost. HDP lze zjistit třemi metodami a to výdajovou, výrobní (produkční) nebo důchodovou. Bez ohledu na to, jakou metodu využijeme musíme vždy dojít ke stejnému výsledku.

Výrobní metoda neboli produkční – při užití této metody jsou sčítány přidané hodnoty, které vznikají při produkci výrobku.

Výdajová metoda – součet všech celkových výdajů, které byly vynaloženy na finální produkt. Zde je sčítána spotřeba (C); investice (I); vládní výdaje na nákup služeb a výrobků (G); čistý export (NX).

Důchodová metoda – princip této metody je, že jsou sčítány důchody výrobních faktorů. Vyjadřuje tok mezd a platů, úroků, zisků firem a ostatních příjmů, které dostává jednotlivec nebo celé země.[30][33][34][21]

3.6.2 Hrubý národní produkt

Hrubý národní produkt je finální hodnota všech statků a služeb, které byly produkovány na území daného státu. V práci bude používána anglická zkratka GNP (Gross National Product)

3.6.3 Hospodářský cyklus

Hospodářský cyklus⁵ je zaměřen na sledování reálného produktu, který osciluje okolo potenciálního produktu. Hospodářský cyklus má dvě fáze, které popisují jeho situaci a pro které

⁵ anglicky Business Cycle

je charakteristický růst či pokles. Růstová fáze je označována jako **expanze**. Při expanzi dochází k růstu GNP. Klesající fáze je označována jako **recese**, zde dochází k poklesu GNP a při této fázi dochází k nárůstu nezaměstnanosti. I v hospodářských cyklech existují maxima a minima. Tyto části hospodářského cyklu jsou označovány jako **vrchol** (bod maxima, po kterém ekonomika přechází do fáze recese) a **sedlo** (bod minima, po kterém dochází k oživení ekonomiky a k expanzi).

3.6.4 Zaměstnanost a míra zaměstnanosti

Zaměstnanost (L) vyjadřuje počet všech osob, které jsou starší 15 let a jsou zaměstnány bez ohledu na typ pracovního poměru. Dle metodiky Českého statistického úřadu, jsou do této skupiny zařazeny osoby, které pracují ve firmě – vlastní či rodinné, příslušníci armády a osoby, které jsou na mateřské dovolené, ale před nástupem na mateřskou dovolenou pracovaly.

Míra zaměstnanosti je ukazatel, který bude označen l . Tento ukazatel vyjadřuje podíl zaměstnaných vůči ekonomicky aktivnímu obyvatelstvu (EA), hodnota tohoto ukazatele je vyjadřována v procentech. Tento vztah lze vyjádřit také následujícím zápisem:

$$l = \frac{L}{EA} * 100 (\%) \quad (31)$$

3.6.5 Pracovní síla, míra produktivity

Za pracovní sílu je označován součet všech osob, které jsou schopné práce. Zde jsou započítány osoby zaměstnané a nezaměstnané. Mezi nezaměstnané nepatří skupina obyvatel, která je označována jako ekonomicky neaktivní.

Mezi ekonomicky neaktivní obyvatelstvo řadíme osoby, které nejsou v pracovním poměru v rozhodném období. Jedná se o skupinu obyvatel, která nesplňuje podmínky určené pro nezaměstnané. Věková struktura této kategorie je vymezena věkem 0–14 let a 65 let a více. Jedná se například o děti předškolního věku, starobní důchodce či dlouhodobě nemocné osoby apod.

3.6.6 Nezaměstnanost

Ukazatel nezaměstnanosti je získáván z výběrového šetření pracovních sil (dále VŠPS). VŠPS je mezinárodní metodika, která je zaměřena na náhodně vybraný vzorek domácností za účelem zjišťování ekonomické situace obyvatelstva v daném státě. VŠPS je stejné pro všechny členské státy Evropské unie.

Cílem tohoto šetření je získávání pravidelných informací o reálné situaci vybraných domácností, které se týkají zaměstnanosti/ nezaměstnanosti. Tyto informace jsou dále analyzovány z různých pohledů a jsou zaměřeny na ekonomické, sociální či demografické faktory. Toto výběrové šetření probíhá pravidelně ve vybraných domácnostech v intervalu po třech měsících v pěti šetření. Celkem je sledované období za 15 měsíců. Informace z VŠPS slouží k sledování reálné situace domácností na pracovním trhu. [11]

Nezaměstnanost je dalším z makroekonomických ukazatelů. Pro tento ukazatel je typické, že obyvatelstvo, které by mohlo být zaměstnáno a mělo by vykazovat činnost si nemůže či nechce najít zaměstnání. Pro tuto skupinu jsou charakteristické následující znaky:

- evidence na úřadu práce
- neschopnost nastoupit do práce do 14 dnů
- osoby, které jsou na rodičovské dovolené, které nebyly před tím v pracovněprávním poměru

Osoby, které jsou zde zařazeny jsou označeny jako nezaměstnané (U). I v tomto případě je zde měřena obecná míra růstu nezaměstnanosti (u) a jeho hodnota je uváděna v procentech.

Tento vztah lze vyjádřit následujícím zápisem:

$$u = \frac{U}{EA} * 100 (\%)$$

3.6.7 Průměrná hrubá mzda

Průměrná hrubá mzda je ukazatel, který představuje podíl mezd, které připadají na jednoho zaměstnance. Do mzdy jsou zahrnuty následující položky.

- základní mzdy a platy,
- příplatky a doplatky,
- odměny, náhrady mezd a platů,
- odměny za pracovní pohotovost a jiné složky mzdy nebo platu.

Do průměrné hrubé mzdy není započtena náhrada mzdy/platu při pracovní neschopnosti. Nejsou zde zohledněny mzdy/platy osob, které vykonávají veřejné funkce, platy soudců, příjmy osob na mateřské a rodičovské dovolené a lidí, kteří pracující na dohodu o provedení práce.



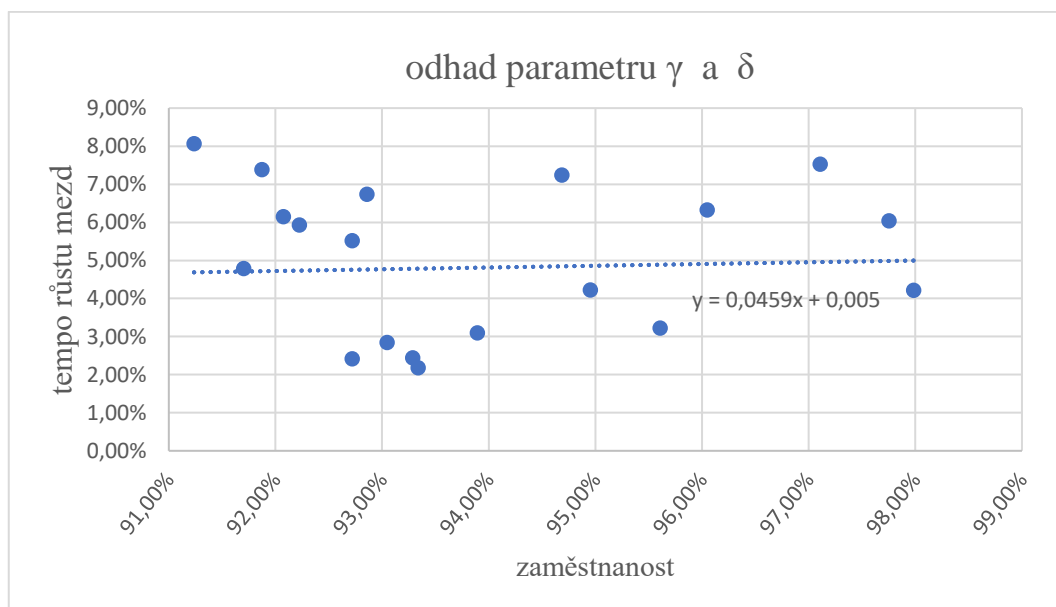
Obrázek 6 - Tempo růstu mezd 2000-2019

Zdroj: vlastní zpracování dle (<http://www.czso.cz>)

3.6.8 Phillipsova křivka

V této práci bude zmíněna pouze původní Phillipsova křivka, které bude sloužit k odhadu parametru dle předpokladu 5, který řeší růst mezd při plné zaměstnanosti. V roce 1958 publikoval A. W. Phillips výzkum, kde se zabýval vztahem mezi mírou nezaměstnanosti a tempem růstu nominálních mezd (1958). Během svého pozorování došel k závěru, že čím vyšší je míra nezaměstnanosti, tím nižší je tempo růstu mezd⁶. [16][21][2][20]

Odhad parametru dle modifikované původní Phillipsovy křivky.



Obrázek 7 – Odhad parametru γ a δ .

Zdroj: vlastní zpracování dle (<http://www.czso.cz>)

⁶ Mzdová inflace

Zde byl vypracován odhad parametrů γ a δ , který by měl vycházet z původní Phillipsovy křivky, jež byla Goodwinem modifikována.

3.7 Vstupní hodnoty pro aplikaci Goodwinova modelu na ČR

V tabulce 3 jsou zobrazeny vstupní hodnoty, které budou využity při zpracování dat v GM. Po jejich zpracování by měl být získán cyklus. Cílem je zjistit, zda data vykazují cyklický charakter, který se bude vykazovat podobné chování jako MDK. Dle výše uvedených předpokladů budeme popisovat vztah zaměstnanosti (kořisti) a mezd na GNP (dravce).

Parametr β , který v GM odpovídá předpokladu 2, je vyjádřen v rovnici (27), tento parametr zobrazuje růst ekonomicky aktivního obyvatelstva. Nabídka pracovní síly N , je totožná s ukazatelem EA. Počet nezaměstnaných osob vyjadřuje (U) a (L) je označení pro počet osob, které jsou zaměstnané v daném roce.

Tabulka 3 – Tabulka vstupních hodnot pro GM

období (t)	průměrná hrubá měsíční mzda (Kč)	průměrná roční hrubá mzda (Kč)	průměrný počet zaměstnanců	(EA)	(L)	(U)	HDP (mil. Kč)	GNP (mil. Kč)
2000	13 219	158 628	3 894 300	5 186 114	4 731 603	454 512	2 386 289	2 340 395
2001	14 378	172 536	3 936 800	5 145 958	4 727 692	418 266	2 579 126	2 505 283
2002	15 524	186 288	3 836 500	5 139 064	4 764 915	374 150	2 690 982	2 594 997
2003	16 430	197 160	3 837 400	5 132 329	4 733 182	399 147	2 823 452	2 731 408
2004	17 466	209 592	3 846 600	5 132 504	4 706 627	425 877	3 079 207	2 928 917
2005	18 344	220 128	3 907 100	5 174 170	4 764 016	410 154	3 285 601	3 116 945
2006	19 546	234 552	3 934 900	5 199 358	4 828 065	371 293	3 530 881	3 293 471
2007	20 957	251 484	4 003 400	5 198 326	4 921 993	276 334	3 859 533	3 583 321
2008	22 592	271 104	4 037 200	5 232 329	5 002 497	229 832	4 042 860	3 772 071
2009	23 344	280 128	3 816 000	5 286 458	4 934 268	352 190	3 954 320	3 654 134
2010	23 864	286 368	3 786 100	5 268 890	4 885 239	383 650	3 992 870	3 665 144
2011	24 455	293 460	3 773 300	5 222 970	4 872 406	350 564	4 062 323	3 700 691
2012	25 067	300 804	3 775 100	5 256 948	4 890 053	366 894	4 088 912	3 793 656
2013	25 035	300 420	3 737 400	5 306 022	4 937 084	368 939	4 142 811	3 846 205
2014	25 768	309 216	3 778 500	5 297 885	4 974 295	323 590	4 345 766	4 013 339
2015	26 591	319 092	3 856 900	5 309 950	5 041 903	268 047	4 625 378	4 273 901
2016	27 764	333 168	3 925 700	5 350 023	5 138 578	211 445	4 796 873	4 418 981
2017	29 638	355 656	4 012 300	5 377 140	5 221 605	155 535	5 110 743	4 767 812
2018	32 051	384 612	4 073 700	5 415 411	5 293 789	121 622	5 409 665	5 056 344
2019	34 111	409 332	4 087 000	5 412 170	5 303 096	109 074	5 748 805	5 352 201

Zdroj: vlastní zpracování dle (<http://www.czso.cz>) [11]

3.8 Aplikace Goodwinova modelu na data ČR

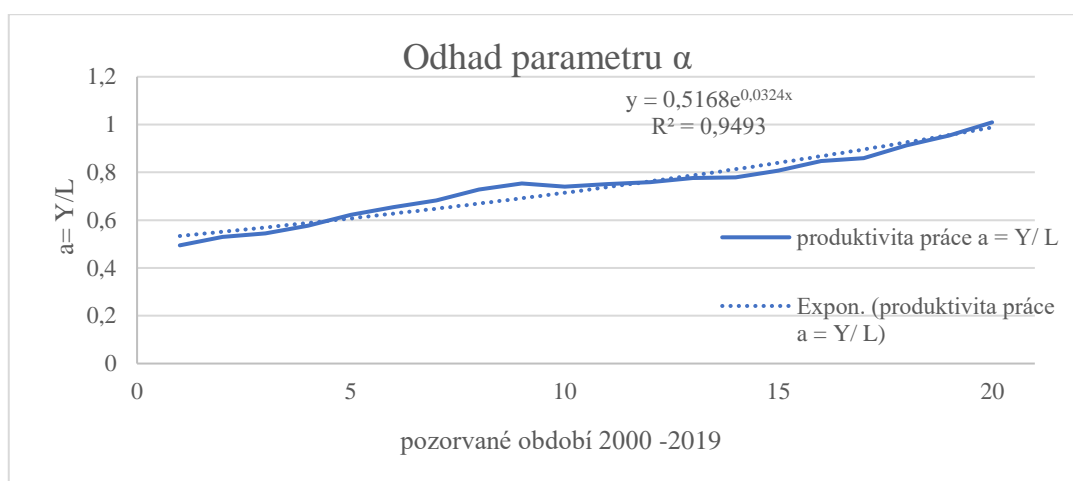
Tato část bude zaměřena na míru zaměstnanosti a podílu mezd na GNP. V tabulce 3 jsou uvedeny jevy, které byly sledovány v období od roku 2000 do roku 2019. Hodnoty pro rok 2019 jsou odhadnuté z předběžných dat Českého statistického úřadu.

V první části tohoto oddílu bude také zobrazen výstup, kde byly získány parametry α , β . Cílem je zjistit, zda se lze na vybraná makroekonomická data ČR odpovídají GM a zda se tento model bude chovat podobně jako MDK.

3.8.1 Odhad parametrů

Zde bude ukázán odhad parametrů vytvořených v programu MS Excel. Za předpokladu, že jsou známy počáteční hodnoty a případný vývoj změn, lze odhadnout parametry růstu produktivity práce (α) a parametr růstu pracovní síly (β). Tyto konstanty jsou kladné a rostou exponenciálně. [10]

Vycházíme z předpokladu, že je ekonomika ČR uzavřená a hodnota Y byla počítána z hrubého národního produktu České republiky. Při odhadu parametru α , je vycházeno z předpokladu 1., který řeší produktivitu práce. Na ose x je umístěno sledované období od roku 2000 do roku 2019. Produktivita práce, která je počítána ze vztahu $a = Y/L$, je umístěna na ose y . Přidáním exponenciální spojnice trendu získáme rovnici ve tvaru $a = 0,5168e^{0,0324x}$. Hodnota parametru α je 0,0324.

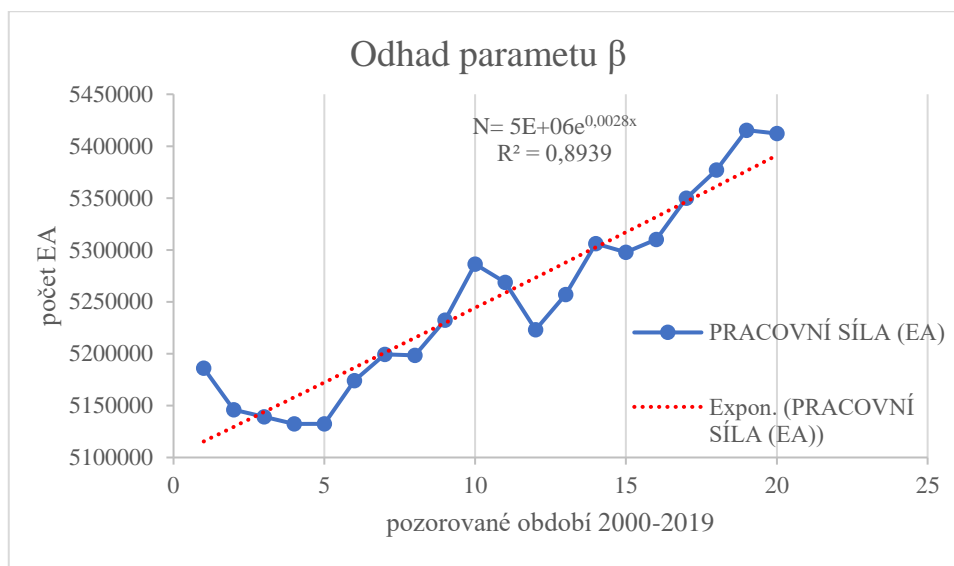


Obrázek 8 – Odhad parametru α

Zdroj: vlastní zpracování dle (<http://www.czso.cz>)

Parametr β je získán obdobným způsobem. Tento parametr vyjadřuje míru růstu pracovní síly. Na ose x je zobrazeno sledované období 2000-2019 a celkový počet pracovní síly neboli

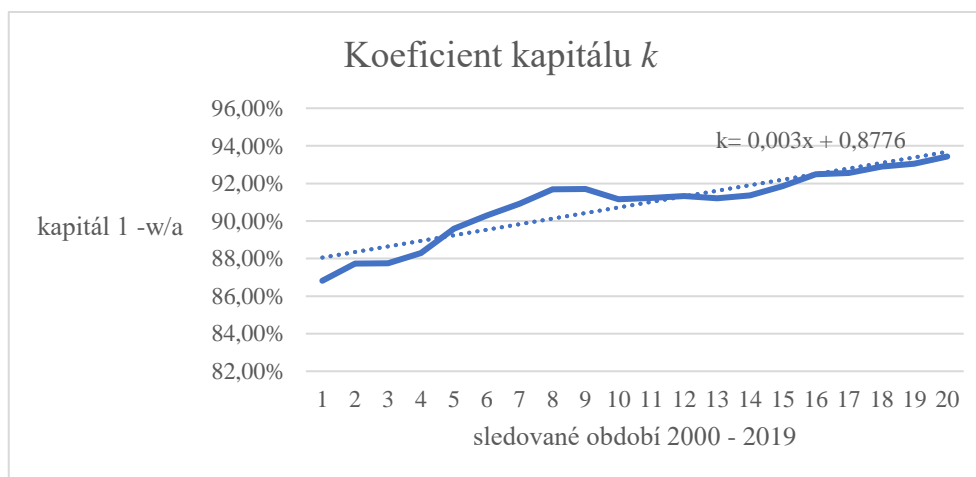
ekonomicky aktivního obyvatelstva (EA) je zobrazen na ose y. Exponenciální spojnicí trendu, která slouží k určení odhadu míry růstu pracovní síly. Hodnota parametru β je tedy 0,0028.



Obrázek 9 – Odhad parametru β

Zdroj: vlastní zpracování dle (<http://www.czso.cz>)

Koeficient k , vypočítáme z míry zaměstnanosti (%), kterou odečteme od 1. Na obrázku 10 je znázorněn vývoj kapitálového koeficientu, pro který platí $k = 0,8776$.



Obrázek 10 – Odhad koeficientu k

Zdroj: vlastní zpracování

3.8.2 Zobrazení

Tato část bude věnována grafickému zobrazení GM, dle zjištěných hodnot. V tabulce 4 jsou uvedeny sledované hodnoty, a to míra zaměstnanosti a míra růstu mezd na GNP. Tyto jevy byly

sledovány v období od roku 2000 do roku 2019. Hodnoty pro rok 2019 jsou odhadnuté z předběžných dat Českého statistického úřadu.

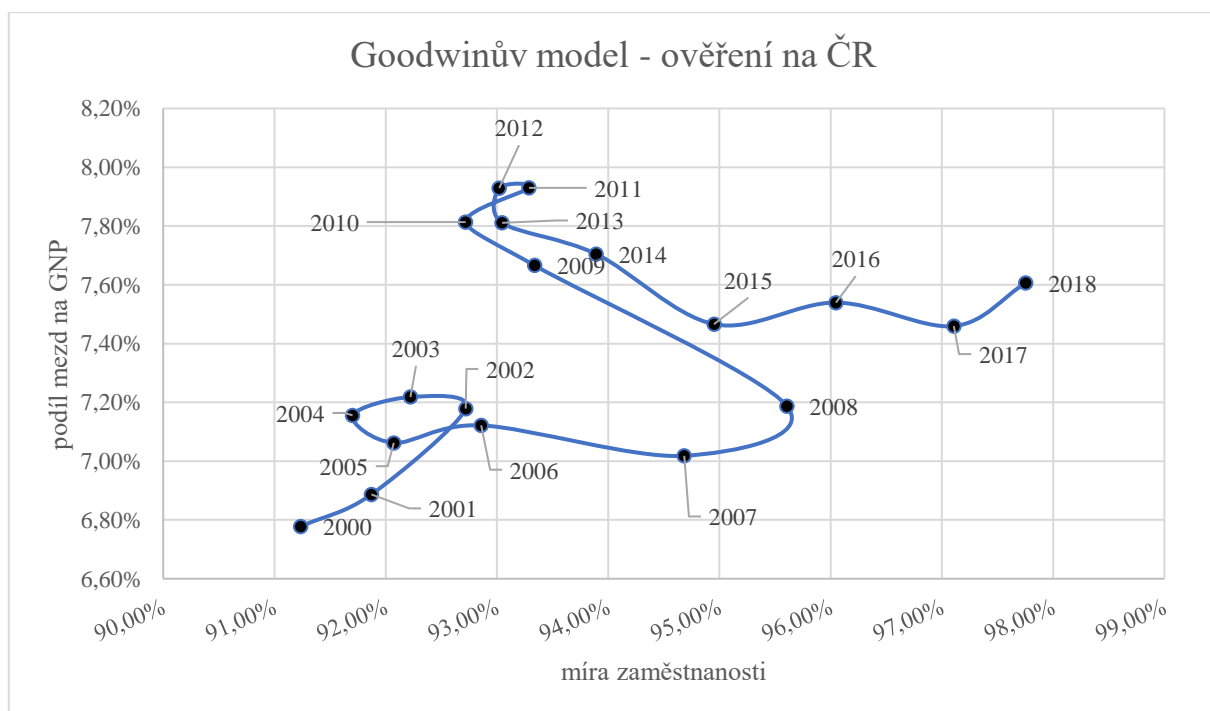
Tabulka 4 - Míra zaměstnanosti a růst podílu mezd na GNP

ROK	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
míra zaměstnanosti (I) - kořist	91,24%	91,87%	92,72%	92,22%	91,70%	92,07%	92,86%	94,68%	95,61%	93,34%
míra růstu mezd - dravec	6,78%	6,89%	7,18%	7,22%	7,16%	7,06%	7,12%	7,02%	7,19%	7,67%
ROK	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
míra zaměstnanosti (I) - kořist	92,72%	93,29%	93,02%	93,05%	93,89%	94,95%	96,05%	97,11%	97,75%	97,98%
míra růstu mezd - dravec	7,81%	7,93%	7,93%	7,81%	7,70%	7,47%	7,54%	7,46%	7,61%	0,00%

Zdroj: vlastní zpracování dle (<http://www.czso.cz>)

Pokud dosahuje zaměstnanost svého maxima, které se blíží 100 %, tak by mělo docházet k růstu míry podílu mezd na GNP. Vzhledem k tomu, že v ekonomice existují i nezaměstnaní, tak je pravděpodobné, že daná ekonomika nebude nikdy dosahovat plné zaměstnanosti.

Dle dat lze odhadovat, že v roce 2018 byla zaměstnanost na svém vrcholu, a tudíž by měla pozvolna klesat a tím pádem by měla růst nezaměstnanost a také by se snižovat podíl mezd na HDP. Hodnoty z tabulky 3, jsou zobrazeny na obrázku 11.



Obrázek 11 – Vztah mezi zaměstnaností a podílu mezd na GNP

Zdroj: vlastní zpracování dle (<http://www.czso.cz>)

Na obrázku 11 je vidět, že vývoj podílu mezd na GNP a zaměstnanost. V tomto upraveném modelu lze pozorovat také, že na vliv vývoje mezd a zaměstnanost mají vliv endogenní (vnitřní) a exogenní (vnější) faktory.

3.8.3 Vyhodnocení dat ČR

K analýze GM bylo vybráno rozhodné období od roku 2000 do roku 2019. Během těchto let se událo mnoho významných událostí, které měly vliv na vývoj ekonomiky ČR.

Na obrázku 11 je vyobrazena závislost podílu mezd na GNP a míra zaměstnanosti. Křivka znázorňující vztah těchto ukazatelů má odpovídat modelu dravec-kořist. Na osu x byla umístěna míra zaměstnanosti, která byla zjištěna z dostupných dat dle Českého statistického úřadu na základě vztahu uvedeného v rovnici (31), jež vyjadřuje míru zaměstnanosti, která je v pozici kořisti. Na ose y jsou umístěny hodnoty, které popisují stejně jako v MDK vlastnost, jež je označována jako predátor (podíl mezd na GNP). Hrubý národní produkt byl zvolen z důvodu, aby se daly splnit co nejvíce předpoklady GM. Cílem tohoto zobrazení bylo ukázat shodu mezi GM a MDK, který byl aplikován na ekonomické chování tržního subjektu, jímž byla Česká republika. Je třeba vzít v úvahu, že vzhledem k otevřenosti ekonomiky ČR není splněn předpoklad 6, tedy uzavřenost ekonomiky, která měla zjistit periodu hospodářského cyklu.

Ve sledovaném období 2000–2019 se událo mnoho významných událostí, které měly vliv na vývoj a růst ekonomiky ČR. Mezi tyto události patří například vstup ČR do Evropské unie (2004) nebo hypoteční krize z USA (2008), která postupně zasáhla všechny světové ekonomiky. Ekonomiku ČR zasáhla se zpožděním až v letech 2010–2012. Všechny uvedené události měly sice vliv na vývoj zaměstnanosti/ nezaměstnanosti a byl ovlivněn vývoj mezd, ale přesto při ověření GM na datech ČR nebyl na tyto události brán ohled.

V tabulce 5, jsou detailněji popsány děje a vztahy, které se vyskytují v modelu GM. Tyto situace jsou spojeny s cyklickým chováním ekonomického cyklu v popisované ekonomice. Situace jsou shodné s Tabulka 2 – Popis situace a vztahy v jednotlivých kvadrantech v MDK.

Tabulka 5 – Vztahy v GM

	Kvadranty	I	II	III	IV
vztahy v GM	míra zaměstnanosti (x)	↗	↑	↙	↓
	podíl mezd na GNP (y)	↓	↗	↑	↙
	nezaměstnanost	↙	↓	↗	↑
Legenda		↑	růst	↗; ↘	pozdvolný růst
		↓	pokles	↘; ↗	pozdvolný pokles

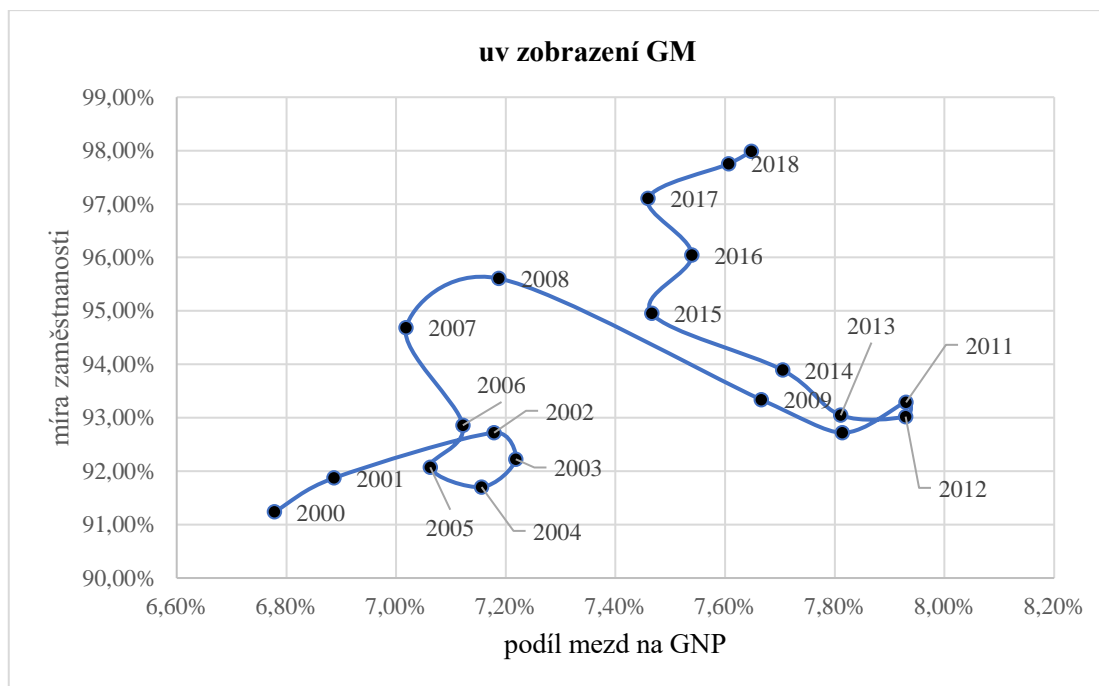
Zdroj: vlastní zpracování

V tabulce 5 je uvedena i nezaměstnanost, která by neměla být opomíjena. Tento ekonomický ukazatel sice není předmětem šetření v GM, ale má vliv na růst mezd. Čím více roste zaměstnanost, tím více klesá nezaměstnanost a naopak. Což má dále vliv na vývoj mezd. Zde platí, že čím nižší je nezaměstnanost, tím více roste pracovní síla (zaměstnaní) a její nároky na vyšší mzdové ohodnocení. Tento fakt má vliv na ekonomické subjekty, které musí využít svých volných finančních prostředků k zaplacení mezd, které by jinak mohly investovat do kapitálu či rozvoje společnosti. Vzhledem k tomu, že tento stav není dlouhodobě udržitelný dochází k propouštění zaměstnanců a nárůstu nezaměstnanosti a poklesu výše mezd.

Pro popis toho modelu je vhodnější uv. zobrazení, které bude popsáno v následujícím oddílu.

3.8.4 uv zobrazení

Na osu x jsou nanášeny hodnoty u získané z rovnice (24) a na osu y jsou nanášeny hodnoty v z rovnice (23). Toto zobrazení je označováno jako uv zobrazení modelu.



Obrázek 12 – uv zobrazení modelu GM na datech ČR

Zdroj: vlastní zpracování

Křivka na obrázku 12 se pochybuje po směru hodinových ručiček a je čitelnější, proto lze snadněji odhadnout krátkodobý vývoj. Závěr bude stejný jako u obrázku 11, který popisuje klasické zobrazení dle GM.

3.8.5 Jiný pohled na Goodwinův model

GM, byl navržen v roce 1967 a od té doby až dodnes inspiruje ekonomy. Jeho původní myšlenky například použili ve svých pracích Meghnad Desai (1973), Robert Solow (1990), David Harvie (2000) a další. Nyní si v krátkosti představíme jejich inovace, které se týkají GM. [20][16]

Desai model zobecnil a přidal další parametry na které je nutno brát zřetel. Předpokládal, že výše mezd je závislá na inflaci a budoucím očekávání. Rozšíření GM představil v roce 1973 v textu *Growth cycles and inflation in a model of the class struggle*. [22]

Solow ve své práci s GM představil uv zobrazení, které aplikoval na ekonomiku USA v letech 1947-1986. [38]

Harvie otestoval GM cyklus na deseti zemích OECD. Těchto deset zemí testoval z dlouhodobého hlediska a sledoval vztah mezi zaměstnaností a mzdou. Na základě empirického pozorování odvodil vztahy:

$$u = \frac{\text{odměna zaměstnance}}{\text{hrubý národní produkt}}$$

$$v = \frac{\text{celková zaměstnanost}}{\text{celková pracovní síla}}$$

Odměna zaměstnance vyjadřuje mzdy/platy zaměstnanců před zdaněním hrubé mzdy. [20][19]

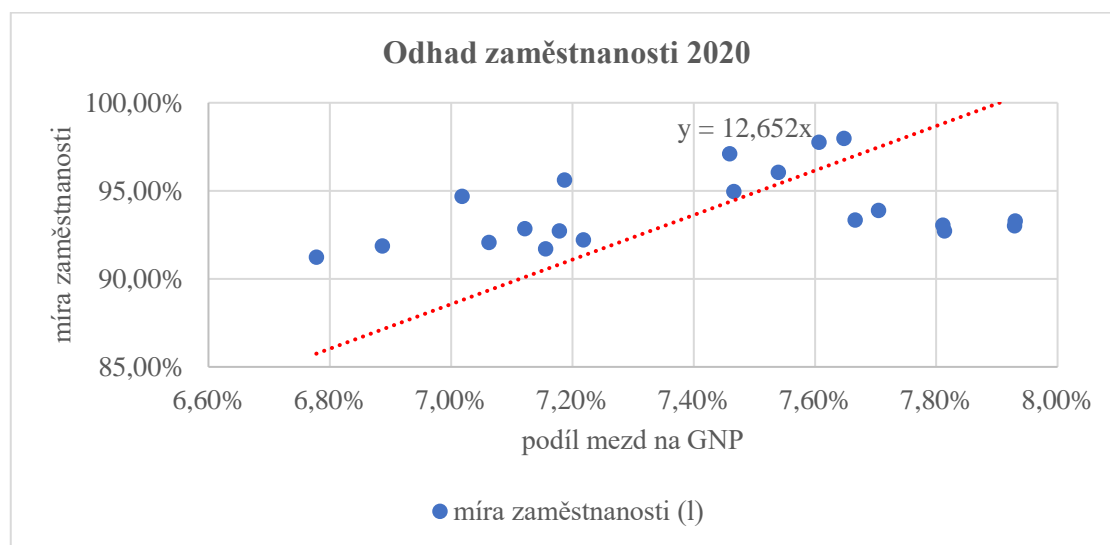
Zkoumání tohoto modelu přivedlo autorku na myšlenku, zda by bylo možné odhadnout budoucí nezaměstnanost na konci roku 2020, tudíž hledá se očekávaná zaměstnanost. Tento výsledek bude porovnán s údaji Českého statistického úřadu.

Tabulka 6 – Podklad vstupních hodnot pro odhad zaměstnanosti

ROK	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
podíl mezd na GNP (u)	6,78%	6,89%	7,18%	7,22%	7,16%	7,06%	7,12%	7,02%	7,19%	7,67%
míra zaměstnanosti (v)	91,24%	91,87%	92,72%	92,22%	91,70%	92,07%	92,86%	94,68%	95,61%	93,34%
ROK	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
podíl mezd na GNP (u)	7,81%	7,93%	7,93%	7,81%	7,70%	7,47%	7,54%	7,46%	7,61%	7,65%
míra zaměstnanosti (v)	92,72%	93,29%	93,02%	93,05%	93,89%	94,95%	96,05%	97,11%	97,75%	97,98%

Zdroj: vlastní zpracování

Data byla vyhodnocena pomocí programu MS Excel s využitím znalosti lineární regrese.



Obrázek 13 – Odhad zaměstnanosti rok 2020

Zdroj: vlastní zpracování

Tímto způsobem byla získán vztah mezi podílem mezd na GNP a mírou zaměstnanosti ve tvaru $y = 12,652x$. Vzhledem k tomu, že by měl být zjištěn budoucí odhad zaměstnanosti a následně nezaměstnanosti, byl do rovnice vložen koncový stav zaměstnanosti z roku 2019.

$$y = 12,652 * 0,0765$$

$$y = 0,9678$$

$$y = 96,78 \%$$

Očekávána zaměstnanost na počátku roku by měla být okolo 96,78 %, což potvrzuje i analyzovaný model, kde by mělo docházet k pozvolnému poklesu zaměstnanosti. Nezaměstnanost na konci roku roku 2020 by mohla dosahovat přibližné hodnoty okolo 3,22 %.

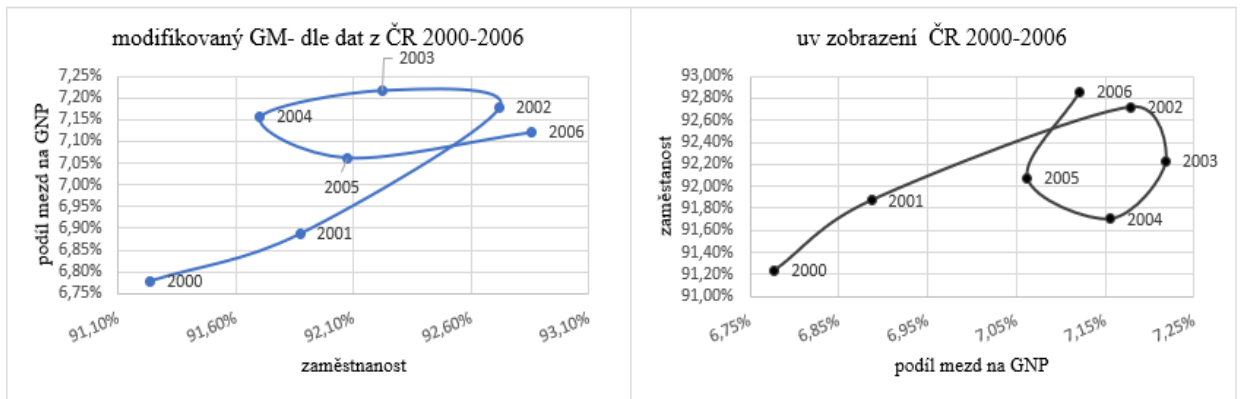
Dle oficiálních zdrojů Českého statistického úřadu je obecná míra nezaměstnanosti za prosinec 2020 dosáhla 3,2 %. [36]

Výsledky jsou si velmi podobné, jen se nesmí opomíjet, že se jedná pouze o odhad, který vychází z pozorovaných hodnot a je idealizovaný, protože bylo předpokládáno, že se jedná o stabilní prostředí.

Goodwinova aplikace se ukázala být užitečnou při popisu chování ekonomických subjektů, spojených s hospodářskými cykly a odpovídá vztahu MDK, ale vzhledem k tomu, že nejsou splněny některé předpoklady, mělo by být toto zpracování bráno jako ilustrativní ověření funkce GM.

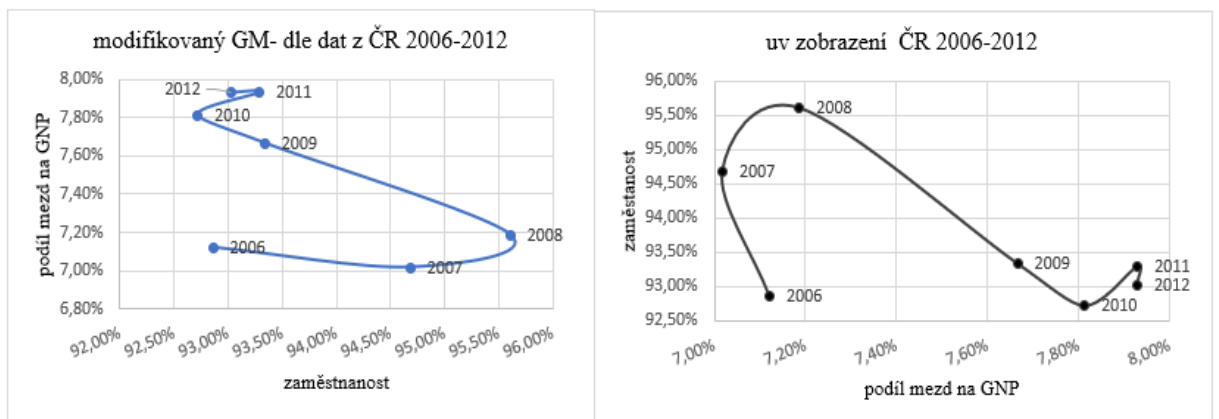
Na základě získaných parametrů byla rovněž zjištěna perioda T pro ČR, kdy perioda je odhadnuta na 5,92 roku a zjištěné parametry byly dosazeny do rovnice (30). Kritický bod zaměstnanosti je hodnota, při které by měla ekonomika fungovat, avšak podíl mezd na GNP bude roven nule je 81,48 %. Při výpočtu kritické hodnoty byla využita rovnice (8).

Na obrázcích 14, 15 a 16 je znázorněn GM v klasickém zobrazení a v uv zobrazení. Data byla rozdělena na šestiletá období, dle vypočtené periody.



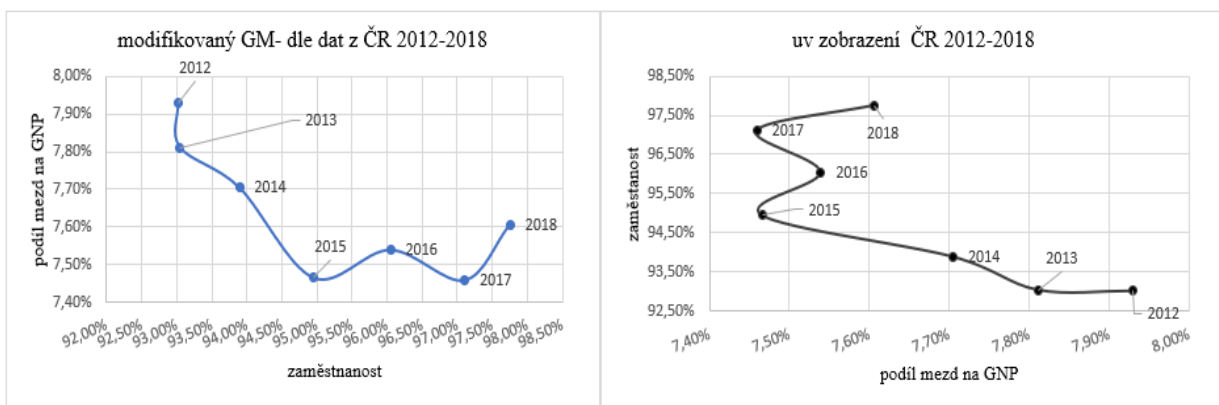
Obrázek 14 – 2000–2006

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 15 -2006–2012

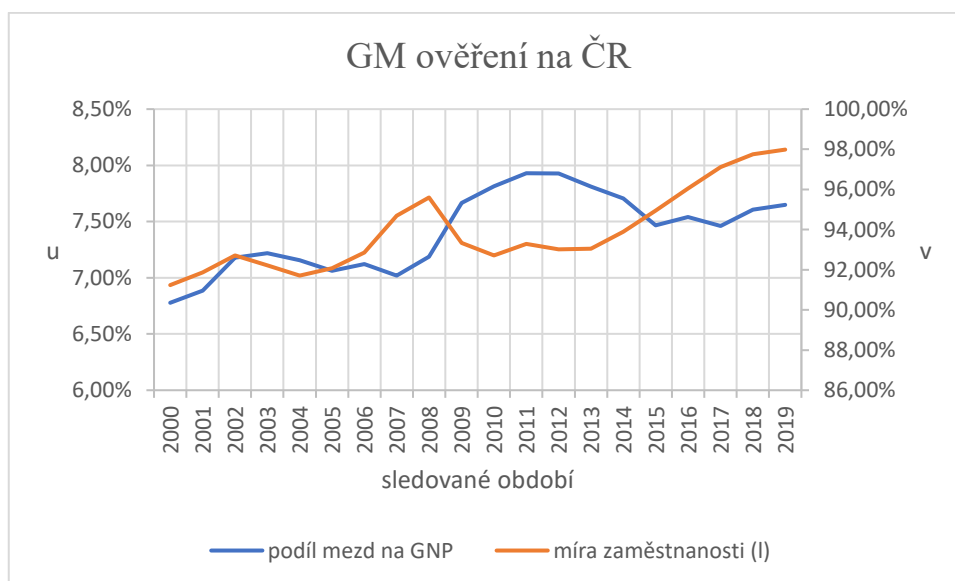
Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 16 – 2012–2018

Zdroj: vlastní zpracování

U obrázku 14 je sice pozorována jistá shoda s vypočtenou periodou a cyklickým chováním hodnot, ale u obrázků 15 a 16 je vidět, že se perioda pravděpodobně zkrátila vlivem vnějších i vnitřních faktorů, které působily na ekonomický růst. Vypočtená perioda má tedy spíše orientační charakter a nelze jí aplikovat na data ČR



Obrázek 17 – GM v graf hodnot u a v

Zdroj: vlastní zpracování

GM by měl být stabilní a předpokládá se, že jeho chování by mělo být cyklické a mělo by odpovídat Obrázek 5. Tento vztah by měl korespondovat se zobrazením uvedeným Gandolfem [2] strana 462.

4 HODNOCENÍ PRICIPU MODELU DRAVCE-KOŘISTI

V této části práce budou shrnuty přednosti a nedostatky modelu. V závěru této kapitoly bude krátké zamyšlení nad dalším možným užitím MDK.

4.1 Nedostatky modelu

MDK popisuje zidealizovanou situaci a v původní verzi nebylo počítáno s vnitrodruhovou konkurencí. Tím, že je předpokládána jistá uzavřenost systému, tak nejsou zohledňovány faktory, které by mohly mít vliv na jeho vývoj. Pokud by měl být tento model aplikován na reálnou situaci a tu co nejdříve popisovat, bylo by potřeba zohlednit i chování a dlouhodobý stav jednotlivých subjektů.

I přes svá omezení má MDK poměrně širokou škálu možných využití. Původně byl tento vztah druhů pozorován na periodickém chování chemických prvků v laboratorních podmínkách, ale postupně byl rozšířen na chování živočišných druhů. Své místo našel i v ekonomii, navzdory tomu, že na průběh ekonomických dějů působí řada vnějších i vnitřních faktorů

4.2 Přednosti modelu

Rovnice Lotky-Volterry a vztah dravec-kořist může být užitečný k analýze vztahů v systému jednoho slabšího a druhého silnějšího druhu. Této interakce mezi dvěma druhy může být využito i ve firemním prostředí. Model může sloužit třeba jako jeden z možných kontrolních systémů při plnění cílů. Na základě porovnávaných hodnot budou ověřeny vztahy a závislosti. Pokud by bylo zjištěno, že zde existuje pravidelná perioda, lze využít poznatků z tohoto modelu a vymodelovat situace, která bude popisovat zvolený cíl. Při znalosti vztahů a volbě vhodných parametrů, lze odhadnout určitý vzorec chování spotřebitelů a predikovat budoucí vývoj. Goodwinova aplikace MDK se ukázala jako praktické využití při popisu chování ekonomických subjektů, spojených s hospodářskými cykly.

4.3 Možné využití modelu

Dalším možným využitím MDK by mohla být aplikace na kapitálové trhy. Tento model by mohl sloužit jako podklad pro analýzu konkurenčního prostředí dvou či více firem, při monitoringu prostředí a konkurentů na kapitálových trzích. Toho by mohli využít investoři, kteří by si mohli zjistit stávající stav trhu a odhadnout v jaké aktuální pozici dle MDK se nachází zvolený typ akcie a v jakém postavení je vůči ostatním sledovaným akciím.

ZÁVĚR

Cílem této práce bylo ověření aplikace modelu dravec-kořist na tržní chování ekonomických subjektů. Bylo zjištěno, že tento model je využíván i v ekonomii. Nejznámější aplikací tohoto modelu je Goodwinův model.

V druhé kapitole bylo popsáno matematické řešení modelu dravec-kořist, jeho základní princip a význam jednotlivých parametrů. V závěru této kapitoly je zobrazení fázového diagramu, které bylo vytvořeno v programu MATLAB s upravenými parametry.

Goodwinův model lze aplikovat na hospodářské cykly. Důležité je vyhodnotit a analyzovat jednotlivé parametry. Vhodnou úpravou jednotlivých parametrů lze docílit toho, že model bude funkční a bude predikovat budoucí vývoj. Zde bylo vycházeno z předpokladu, že studovaná ekonomika je stabilní a splňuje předpoklady modelu dravec-kořist a také základní předpoklady GM.

Aplikace Goodwinova modelu na data ČR je popsána ve třetí kapitole. Vzhledem k tomu, že ekonomika ČR není uzavřená, je velmi těžké odhadnout periodu modelu. Tato perioda by měla popisovat vztah mezi zaměstnaností a podílem mezd na GNP, který by podle Goodwinova modelu měl mít cyklický charakter. Vzhledem k tomu, že cyklus není uzavřený, mělo by být toto zpracování bráno jako ilustrativní ověření funkce GM na datech ČR.

V poslední části práce jsou shrnuty přednosti a nedostatky modelu a je v ní uvedeno také krátké zamyšlení nad jeho možným dalším užitím. Tento model by mohl být aplikován i na jiný obchodní cyklus a mohl by třeba fungovat jako doplňková analýza při strategickém plánování.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] BACAËR, N. A *Short History of Mathematical Population Dynamics*. London: Springer-Verlag, 2011. ISBN 978-0-85729-114-1
- [2] GANDOLFO, G. *Economic Dynamics: Study Edition*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1997. ISBN 3-540-62760-X
- [3] CHICONE, C. C. *Ordinary differential equations with applications*. New York: Springer-Verlag, 1999. ISBN 978-0-387-22623-1
- [4] MACUR, J. *Úvod do teorie dynamických systémů a jejich simulace*. Brno: PC-DIR, 1995. ISBN 80-214-0698-4
- [5] MURRAY, J. D. *Mathematical biology*. New York: Springer-Verlag, 2002. ISBN 978-0-387-22437-4
- [6] PRNO, I. *Dynamika sociálně-ekonomických procesov: simulovanie dynamiky v sociálně-ekonomických systémech*. Bratislava: Veda, 2012. ISBN 978-80-224-1250-6
- [7] PŘIBYLOVÁ, L. *Deterministické modely [online]*. 1 vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2015 [cit. 2021-03-19]. Elportál. Dostupné z: <<http://is.muni.cz/elportal/?id=1315620>>. ISBN 978-80-210-8160-4. ISSN 1802-128X
- [8] SHONE, R. *Economic dynamics: phase diagrams and their economic application*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0-521-01703-3
- [9] KLÍČ A., M. DUBCOVÁ, L. BUŘIČ. *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic – kvalitativní teorie, dynamické systémy [online]*. Praha: VŠCHT Praha, 2009 [cit. 2020-06-17]. Dostupné z www: <http://vydavatelstvi.vscht.cz/knihy/uid_isbn-978-80-7080-724-8/>. ISBN 978-80-7080-724-8
- [10] ZEMÁNKOVÁ, L. *Dynamické systémy a jejich aplikace [online]*. Olomouc, 2017 [cit. 2021-03-24]. Dostupné z: <<https://theses.cz/id/ru93dn/>>. Diplomová práce. Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.
- [11] ČESKÝ STATISTICKÝ ÚŘAD [online]. 2021 [cit. 2021-04-06]. Dostupné z: <<https://www.czso.cz/>>

- [12] NEUBAUER, J., M. SEDLAČÍK a O. KŘÍŽ. *Základy statistiky: aplikace v technických a ekonomických oborech*. 2., rozšířené vydání. Praha: Grada, 2016. ISBN 978-80247-5786-5.
- [13] BARILLA, J., P.SIMR a K.SÝKOROVÁ. *Microsoft Excel 2016: podrobná uživatelská příručka*. Brno: Computer Press, 2016. Podrobná uživatelská příručka. ISBN 978-80-251-4838-9
- [14] MANAGEMENTMANIA.COM. [online]. © 2011-2016 [cit. 2021-04-06]. Dostupné z: <<https://managementmania.com/cs/korelacni-diagram-scatter-diagram>>
- [15] VADASZ, V. *Economic Motion: An Economic Application of the Lotka-Volterra Predator-Prey Model*. In: [online]. [cit. 2021-04-06]. Dostupné z: <<https://digital.fandm.edu/object/scholars-square2255>>
- [16] WEBER, L.. *A Contribution To Goodwin's Growth Cycle Model From A System Dynamics Perspective*, [cit. 2021-04-06], dostupné z: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.504.4652&rep=rep1&type=pdf>
- [17] ČÁPOVÁ, H. *Model kořist-dravec*. Pardubice, 2013. Diplomová. Univerzita Pardubice. Vedoucí práce Prof. Ing. Jan Čapek, CSc. [cit. 2021-04-06]. Dostupné z: <https://dk.upce.cz/bitstream/handle/10195/52151/CapovaH_ModelKoristDravec_JC_2013.pdf?sequence=7&isAllowed=y>
- [18] MATLAB. <https://www.mathworks.com> [online]. © 1994-2021 The MathWorks, Inc. [cit.2021-04-06]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/matlab/math/numerical-integration-of-differential-equations.html?s_tid=srchtitle>
- [19] HARVIE D., Testing Goodwin: growth cycles in ten OECD countries. *Cambridge Journal of Economics* 2000. DOI:10.1093/cje/24.3.349 Dostupné z: <https://www.researchgate.net/publication/5208246_Testing_Goodwin_Growth_cycles_in_the_OECD_countries>
- [20] HARVIE, D. Testing Goodwin: growth cycles in ten OECD countries. *Cambridge Journal of Economics* [online]. **24**(3), 349-376 [cit. 2021-04-09]. ISSN 14643545. Dostupné z: doi:10.1093/cje/24.3.349
- [21] PAVELKA, T. *Makroekonomie: základní kurz*. 3. vyd. Slaný Melandrium, 2007. ISBN 978-80-86175-58-4

- [22] DESAI M. *Growth cycles and inflation in a model of the class struggle* Journal of Economic Theory, Volume 6, Issue 6, 1973, Pages 527-545, ISSN 0022-0531, [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(73\)90074-4](https://doi.org/10.1016/0022-0531(73)90074-4).
- [23] WEBER, Lars. (2005). *A Contribution To Goodwin's Growth Cycle Model From A System Dynamics Perspective*.
- [24] HARVIE, David & Kelmanson, Mark & Knapp, David. (2007). *A Dynamical Model of Business-Cycle Asymmetries: Extending Goodwin*. Economic Issues. 12.
- [25] BECKER, O., Leopold-Wildburger, U. *Optimální dynamické řízení modelů dravec-kořist*. Cent Eur J Oper Res 28, 425–440 (2020). Dostupné z: <<https://doi.org/10.1007/E10100-019-00656-7>>
- [26] IDCZAK, D. *On a Generalization of a Global Implicit Function Theorem Advanced Nonlinear Studies*, vol. 16, no. 1, 2016, pp. 87-94. Dostupné z: <<https://doi.org/10.1515/ans-2015-5008>>
- [27] MADOTTO, M., M. GAUDENZI AND F. ZANOLIN. *A Generalized Approach for the Modeling of Goodwin-Type Cycles Advanced Nonlinear Studies*, vol. 16, no. 4, 2016, pp. 775-793. Dostupné z: <<https://doi.org/10.1515/ans-2015-5050>>
- [28] ZAHŘÁDKA, J. *Matematický seminář - MATLAB*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2013. ISBN 978-80-7395-691-2
- [29] INSTITUT BIostatistiky a ANALÝZ LF a PŘF MU. <https://www.matematickabiologie.cz/> 2021 Masarykova univerzita. [cit. 2021-04-06]. Dostupné z: <<https://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=analyza-a-hodnoceni-biologickych-dat--statisticke-modelovani--analyza-zavislosti-dvou-velicin--testovani-nezavislosti-intervalovych-ci-pomerovych-velicin--koeficient-korelace-dvourozmerneho-normalniho-rozdeleni>>
- [30] SAMUELSON, P. A. a W. D. NORDHAUS. *Ekonomie*. Praha: Svoboda, 1991. ISBN 80-205-0192-4.
- [31] SVĚT PRODUKTIVITY, s. r. o. www.svetproduktivity.cz [online]. 2012 [cit. 2021-04-06]. Dostupné z: <<https://www.svetproduktivity.cz/slovník/Korelacni-diagram.htm>>
- [32] AMERICAN SOCIETY FOR QUALITY. www.asq.org [online]. 2021 [cit. 2021-04-06]. Dostupné z: <<https://asq.org/quality-resources/scatter-diagram>>
- [33] PROVAZNÍKOVÁ, R. a J. VOLEJNÍKOVÁ. *Makroekonomie I: pro bakalářské studium*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2019. ISBN 978-80-7560-221-3.

- [34] PROVAZNÍKOVÁ, R. a J. VOLEJNÍKOVÁ. *Makroekonomie I: pro bakalářské studium*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2019. ISBN 978-80-7560-220-6.
- [35] OECD. <https://www.oecd.org> 2021© Organisation for Economic Co-operation and Development [cit. 2021-04-25]. Dostupné z <https://www.oecd.org/about/>
- [36] ČESKÝ STATISTICKÝ ÚŘAD. [online]. 2021 [cit. 2021-04-25]. Dostupné z <<https://www.czso.cz/csu/czso/cris/miry-zamestnanosti-nezamestnanosti-a-ekonomicke-aktivity-prosinec-2020>>
- [37] FONSECA, G. L. <https://www.hetwebsite.net> [online]. 2021 [cit. 2021-04-29]. Dostupné z: <<https://www.hetwebsite.net/het/profiles/goodwin.htm>>
- [38] SOLOW R. M. *Goodwin's Growth Cycle: Reminiscence and Ruminaton*. In: Velupillai K. (eds) *Nonlinear and Multisectoral Macrodynamics*. 1990 Palgrave Macmillan, London. https://doi.org/10.1007/978-1-349-10612-7_4
- [39] GOODWIN, R. *A growth cycle*, Carl Feinstein, editor, *Socialism, Capitalism and Economic Growth*. 1967 Cambridge, UK: Cambridge University Press