

UNIVERZITA PARDUBICE

Fakulta elektrotechniky a informatiky

**OPTIMÁLNÍ ZPĚTNOVAZEBNÍ ŘÍZENÍ RAMENE
ROBOTA ZALOŽENÉ NA LINEARIZACI
MATEMATICKÉHO MODELU**

Bc. Michal Semonský

Diplomová práce

2019

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Akademický rok: 2017/2018

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Michal Semonský**
Osobní číslo: **I16198**
Studijní program: **N2612 Elektrotechnika a informatika**
Studijní obor: **Řízení procesů**
Název tématu: **Optimální zpětnovazební řízení ramene robota založené na linearizaci matematického modelu**
Zadávací katedra: **Katedra řízení procesů**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Práce je zaměřena na teoretický rozbor a praktické ověření přístupů k zpětnovazebnímu řízení manipulátoru podél zadané trajektorie založených na linearizaci matematického modelu, s pomocí simulace. Především bude studován přístup využívající lokální linearizace modelu v okolí referenční trajektorie, kdy optimální akční zásah je generován regulátorem s předem vypočtenými parametry nebo prediktivním způsobem na zkráceném horizontu řízení. Jako alternativní přístup bude uvažována zejména metoda exaktní linearizace modelu robota využívající vnitřní zpětné vazby. Po vytvoření simulačního modelu manipulátoru a implementaci jednotlivých metod budou přístupy porovnány z hlediska účinnosti, robustnosti vzhledem k chybám modelu, hardwarových nároků a vhodnosti pro použití na reálném zařízení.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

SICILIANO, B., SCIAVICCO, L., VILLANI, L., ORIOLO, G. Robotics. Modelling, Planning and Control. Springer-Verlag, 2009.

CVEJN, J. Průmyslové roboty [online]. Univerzita Pardubice, FEI, 2012.

Elektronický studijní materiál k předmětu Průmyslové roboty.

STENGEL, R.F. Stochastic Optimal Control: Theory and Application. New York: Wiley, 1986.

Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. Jan Cvejn, Ph.D.**
Katedra řízení procesů

Datum zadání diplomové práce: **31. října 2017**

Termín odevzdání diplomové práce: **18. května 2018**



L.S.

Ing. Zdeněk Němec, Ph.D.
děkan

Ing. Daniel Honc, Ph.D.
vedoucí katedry

V Pardubicích dne 8. listopadu 2017

Prohlášení

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 9/2012, bude práce zveřejněna v Univerzitní knihovně a prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne

Bc. Michal Semonský

Poděkování

Chtěl bych poděkovat panu doc. Ing. Janu Cvejnovi, PhD., za vstřícnou nápomoc při řešení diplomové práce a také panu Ing. Danielu Honcovi, PhD. za vedení k inženýrskému myšlení v průběhu magisterského studia. Dále děkuji svým rodičům za poskytnutí stabilního zázemí.

V Pardubicích dne

Bc. Michal Semonský

ANOTACE

V této práci je studován přístup ke zpětnovazebnímu řízení robotického manipulátoru. Bude vytvořen dynamický model antropomorfního manipulátoru, který je linearizován podle žádané trajektorie pohybu. Pro výpočet optimálního akčního zásahu jsou využity algoritmy zpětnovazebního řízení založené na linearizovaném modelu. Řízení pohybu manipulátoru je simulováno v prostředí MATLAB Simulink. Na základě simulací budou zhodnoceny výsledky jednotlivých přístupů z hlediska jejich efektivity řízení, robustnosti použití vzhledem k chybám modelu a hardwarové náročnosti.

KLÍČOVÁ SLOVA

zpětnovazební řízení, optimální regulace, antropomorfní robotický manipulátor, matematický model, linearizace, simulace.

TITLE

OPTIMAL FEEDBACK CONTROL OF A ROBOT MANIPULATOR BASED ON LINEARIZATION OF THE MATHEMATICAL MODEL

ANNOTATION

In this work, the approach to feedback control of robotic manipulator is investigated. A dynamic model of an anthropomorphic manipulator is created and linearized in a neighbourhood of the desired trajectory of motion. Feedback control algorithms based on a linearized model are used to calculate the optimal process value. The manipulator motion control is simulated in MATLAB Simulink. On the basis of simulations, the results of individual approaches will be evaluated in terms of their control efficiency, robustness of use due to model errors and hardware demands.

KEYWORDS

optimal feedback control, anthropomorphic robot manipulator, mathematical model, linearization, simulation.

OBSAH

Seznam zkratk a značek	9
Seznam symbolů proměnných veličin a funkcí	10
Seznam ilustrací	11
SEZNAM TABULEK	12
ÚVOD	13
1 TEORETICKÁ ČÁST	14
1.1 Průmyslové roboty	14
1.1.1 Základní princip funkce robota	14
1.2 Robotické manipulátory	15
1.2.1 Kartézský robot	16
1.2.2 Cylindrický robot	16
1.2.3 Sférický robot	17
1.2.4 Antropomorfní manipulátor	18
1.3 Základní pojmy z kinematiky robotických manipulátorů	19
1.4 Plánování pohybu robotických manipulátorů	20
1.4.1 Plánování referenční trajektorie metodou point-to-point	21
1.5 Matematické modely dynamických systémů	23
1.5.1 Vstupně-výstupní model	23
1.5.2 Stavový model	24
1.5.3 Pohybové rovnice robotických manipulátorů	25
1.6 Linearizace modelu	27
1.7 Optimální zpětnovazební řízení založené na linearizaci	28
1.8 Použité numerické metody	30
1.8.1 Numerická derivace	30
1.8.2 Numerické řešení soustav diferenciálních rovnic Eulerovou metodou	31
1.8.3 Numerické řešení diferenciálních rovnic metodou Runge-Kutta	31

2	ŘEŠENÍ	33
2.1	Návrh referenční trajektorie metodou point-to-point	33
2.1.1	Postup výpočtu koeficientů interpolačních polynomů	33
2.1.2	Výpočet koeficientů interpolačních polynomů	34
2.1.3	Výpočet referenčních trajektorií v prostředí MATLAB Simulink	38
2.2	Odvození vztahů přímé kinematiky	39
2.3	Získání pohybových rovnic robota	40
2.3.1	Výpočet celkové kinetické energie	41
2.3.2	Výpočet celkové potenciální energie	44
2.3.3	Získání matice B	45
2.3.4	Získání členu C	46
2.3.5	Získání členu g	46
2.4	Získání stavového modelu	47
2.4.1	Vytvoření stavového modelu v prostředí MATLAB Simulink	48
2.5	Linearizace stavového modelu podél referenční trajektorie	49
2.6	Návrh LQ regulátoru založeném na linearizaci	52
2.6.1	Řešení Riccatiho rovnic Eulerovou metodou	52
2.6.2	Řešení Riccatiho rovnic metodou Runge-Kutta	53
2.6.3	Výpočet regulátorů	54
2.6.4	Schéma optimálního řízení	55
3	DOSAŽENÉ VÝSLEDKY	56
3.1	Simulace řízení	56
4	ZÁVĚR	67
	POUŽITÁ LITERATURA	68
	PŘÍLOHY	69

SEZNAM ZKRATEK A ZNAČEK

MATLAB	matrix laboratory
DOF	degree of freedom (stupeň volnosti)
PID	proporcionálně integračně derivační (regulátor)
ODE	obyčejná diferenciální rovnice
RK4	Runge-Kutta 4. řádu (metoda numerické integrace)

SEZNAM SYMBOLŮ PROMĚNNÝCH VELIČIN A FUNKCÍ

A	matice koeficientů hledaných proměnných
B	matice setrvačnosti
C	Coriolisova matice
φ, ψ, θ	úhly natočení (strojové souřadnice)
F_i	zobecněné síly
F, G	matice linearizovaného stavového modelu
g	tíhové zrychlení, $m \cdot s^{-2}$
\mathbf{g}	vektor působících momentů vlivem tíhových sil
J	hodnota kritériální funkce (kvadratické kritérium řízení)
k_j	koeficient interpolačního polynomu
k_i	řešení soustavy rovnic (koeficienty interpolačního polynomu)
K	kinetická energie, J
\mathcal{L}	Lagrangián
P	potenciální energie, J
P	Riccatiho matice
$\mathbf{q}(t)$	strojový vektor
Q, R	matice LQ regulátoru
r	poloměr otáčení
r_i	koeficienty Runge-Kuttovy metody
t	čas, s
t_f	celková doba pohybu
t_k	diskrétní čas
u	vstupní veličina systému
x, y, z	souřadnice kartézské soustavy
\mathbf{x}	vektor stavů
\mathbf{y}	vektor výstupních veličin systému
y_i	vektor levé strany soustavy rovnic

SEZNAM ILUSTRACÍ

Obr. 1.1 – Kartézský manipulátor a jeho pracovní prostor (Siciliano, 2009)	16
Obr. 1.2 – Cylindrický manipulátor a jeho pracovní prostor (Siciliano, 2009)	17
Obr. 1.3 – Sférický manipulátor a jeho pracovní prostor (Siciliano, 2009)	18
Obr. 1.4 – Antropomorfní manipulátor a jeho pracovní prostor (Siciliano, 2009)	19
Obr. 1.5 – Ukázka referenční trajektorie vzniklé interpolací polynomem 3. řádu	22
Obr. 1.6 – Ukázka profilů referenční trajektorie (profil rychlosti a zrychlení)	22
Obr. 2.1 – Vytvořené referenční trajektorie	36
Obr. 2.2 – Vytvořené rychlostní profily	37
Obr. 2.3 – Vytvořené profily zrychlení	37
Obr. 2.4 – Simulinkové schéma bloku Ref pro výpočet referenční trajektorie	39
Obr. 2.5 – Model antropomorfní struktury s vyznačenými parametry	40
Obr. 2.6 – Znázornění geometrie pohybu bodu m_1	42
Obr. 2.7 – Schéma simulace – stavový model robota	49
Obr. 2.8 – Schéma řízení LQ	55
Obr. 3.1 – Regulace č. 1 – polohy kloubů robota	57
Obr. 3.2 – Regulace č. 1 – průběh kompenzačního zásahu	58
Obr. 3.3 – Regulace č. 1 – Znázornění pohybu robota	58
Obr. 3.4 – Regulace č. 2 – průběh kompenzační odchylky	59
Obr. 3.5 – Regulace č. 2 – polohy kloubů robota	59
Obr. 3.6 – Regulace č. 2 se zvýšením nepřesnosti v hmotnosti m_2	60
Obr. 3.7 – Regulace č. 3 – průběh kompenzační odchylky	60
Obr. 3.8 – Regulace č. 3 – polohy kloubů robota	61
Obr. 3.9 – Regulace č. 4 – průběh kompenzační odchylky	61
Obr. 3.10 – Regulace č. 4 – polohy kloubů robota	62
Obr. 3.11 – Regulace č. 5 – průběh kompenzační odchylky	62
Obr. 3.12 – Regulace č. 5 – polohy kloubů robota	63
Obr. 3.13 – Regulace č. 6 – polohy kloubů robota	64
Obr. 3.14 – Regulace č. 6 – průběh kompenzační odchylky	64
Obr. 3.15 – Regulace č. 6 – znázornění průběhu pohybu robota	65
Obr. 3.16 – Regulace č. 7 – průběh kompenzační odchylky	65
Obr. 3.17 – Regulace č. 7 – polohy kloubů robota	66

SEZNAM TABULEK

Tab. 2.1 – Zadané parametry vytvářených trajektorií	35
Tab. 3.1 – Parametry regulace	56
Tab. 3.1 – Pokračování – Parametry regulace	57

ÚVOD

Pro zajištění pohybu robotických manipulátorů podle očekávaných požadavků je potřeba implementovat takový systém, který zajistí vyrovnání aktuální pozice robota do pozice požadované, a to v definovaných časech. Požadovanou trajektorii, po které se robot pohybuje, zadává uživatel společně s dalšími příkazy definující úlohy manipulátoru. Tato práce se zabývá řízením pohybu manipulátoru a řízením pohybu z hlediska jeho interakce s okolím je vynecháno.

Pohyb robotických manipulátorů může být řízen několika způsoby, přičemž existují dva základní typy řídicích schémat. Prvním typem je centralizované schéma řízení, které uvažuje celkovou dynamiku všech os robota a ta je kompenzována centrálním regulátorem. Je tak vytvořen model robotického manipulátoru, na jehož základě se určují velikosti sil, které je potřeba vyvinout v pohonech kloubů pro dosažení požadované pozice manipulátoru. Druhým typem řídicího schématu je schéma decentralizovaného řízení, ve kterém jsou jednotlivé osy manipulátoru řízeny zvlášť a dynamické účinky ostatních os jsou uvažovány jako poruchové veličiny. Řízení každé osy tak lze provést samostatně, např. s použitím PID regulátorů. Tento přístup je jednodušší z hlediska nároků na modelování, ale nedosahuje takové kvality řízení, jako přístup předchozí.

Optimální řízení je pokročilá metoda regulace, díky které je nalezen takový průběh akčního zásahu, který je podle předem zvoleného kritéria řízení optimální. V tomto kritériu lze penalizovat jednotlivé stavové a vstupní veličiny, čímž lze zajistit optimálnost vzhledem ke kvalitě řízení nebo vzhledem k úspoře vstupní energie, což je výhodou oproti klasickým způsobům řízení robota. Nevýhodou tohoto způsobu řízení robota je jeho složitost. Přístup optimálního řízení je založen na zpětné vazbě získané z matematického modelu popisující celkovou dynamiku systému. Jelikož model robota představuje obecně nelineární systém, je nutné jej linearizovat, aby bylo možné efektivně využívat zpětnou vazbu pro řízení. Dále jsou parametry modelu robota závislé na poloze kloubů ramene, a proto je třeba tento model linearizovat v okolí referenční trajektorie. Ze znalosti modelu a referenční trajektorie je tak možné predikovat pohyby kloubů robotického ramene, díky čemuž je umožněna aplikace metody optimálního řízení. Cílem této práce je pomocí simulace v prostředí MATLAB Simulink zjistit, jakých výsledků dosahuje metoda optimálního řízení robotického ramene, a to z hlediska kvality řízení, robustnosti použití na méně přesných modelech a hardwarové náročnosti.

1 TEORETICKÁ ČÁST

1.1 PRŮMYSLOVÉ ROBOTY

Průmyslové roboty jsou speciálně navrhovány a vyvíjeny pro vykonávání specifických úloh v novodobém průmyslu. Za vývojem těchto robotů i robotů obecně stojí robotika, což je moderní věda zabývající se vývojem, návrhem a konstrukcí robotů. Pro tuto činnost je potřeba sjednotit poznatky také z dalších oborů inženýrství, jako jsou elektrotechnika, informatika, konstruktérství nebo automatizace. Robotika je tedy interdisciplinární věda, která tyto poznatky sjednocuje do formy použitelné také pro řízení robotů.

Myšlenka o vytvoření robotického zařízení pochází z dob průmyslové revoluce v 18. století. S rozmachem moderních technologií se roboty staly poměrně rozšířeným aspektem technologie. Nejhojněji se používají v průmyslu, např. u výrobních či montážních linek, dále pak v lékařství nebo ve vojenském průmyslu. Roboty jsou také součástí dnešních moderních domácností.

Slovo robot bylo poprvé použito českým spisovatelem Karlem Čapkem v jeho knize R.U.R. (Rossumovi univerzální roboti). Roboti zde bylo označením pro biologické inteligentní stroje vykonávající namáhavou lidskou práci (robotu). Pro dnešní mechanická zařízení je používán pojem roboty (nikoli roboti), přičemž se roboty rozdělují na roboty mobilní a na robotické manipulátory.

1.1.1 Základní princip funkce robota

Robot je komplexní systém složený ze 4 hlavních podsystémů. Obsahuje systém vnímání, řídicí systém, hnací aparát a mechanický systém. Systém vnímání robota zajišťuje schopnost získávat informace o svém aktuálním stavu a o stavu okolního prostředí. Tuto funkci zajišťují senzory, které dělíme na proprioceptivní a exteroceptivní. Signály z těchto senzorů jsou přiváděny do řídicího systému, ve kterém je implementován rozhodovací algoritmus umělé inteligence. Na základě inteligentního rozhodování jsou dále řízeny pohonné jednotky hnacího aparátu, které uvádí mechanický systém s pohybovým aparátem do pohybu.

Rozhodování robota může být založeno na různých druzích výpočetních algoritmů, a to od jednoduchých podmínkových struktur až po složitější struktury, jako jsou neuronové sítě nebo genetické algoritmy, které jsou zkoumány v rámci oboru umělé inteligence. Nehledě na druh implementovaného rozhodovacího algoritmu je prozatím inteligence robotů ve své podstatě deterministicky určená sada pravidel, a to platí i pro moderní samo-učící se algoritmy.

Výsledné chování robotů lze tak předvídat, tedy alespoň do té doby, dokud nebude umělá inteligence schopna samovolně modifikovat podstatu svého rozhodování. V takovém případě by docházelo k procesu samovolně se vyvíjející umělé inteligence.

1.2 ROBOTICKÉ MANIPULÁTORY

Robotické manipulátory jsou určeny k manipulačním účelům s předměty. Jedná se o posloupnost pevných těles spojených klouby, která vychází z pevné základny. Tato posloupnost může tvořit jedinou cestu propojující tělesa (otevřený řetězec) nebo může tvořit uzavřenou smyčku (uzavřený řetězec). Obecně se robotický manipulátor skládá ze 3 částí (Cvejn, 2016):

1. paže,
2. zápěstí,
3. koncový efektor.

Koncový efektor (manipulační člen) je nástroj, který zajišťuje vykonání specifické úlohy (např. uchopení objektu). Správnou orientaci efektoru v prostoru zajišťuje zápěstí, přičemž paže umísťuje zápěstí do koncové polohy.

Existuje několik druhů robotických manipulátorů, které se liší typem použitých kloubů (rotačních nebo posuvných), jejich počtem a také způsobem jejich propojení. Tyto věci definují kinematickou strukturu manipulátoru (více v kapitole 1.3). S počtem kloubů a jejich mobilitou souvisí také pojem *stupeň volnosti*, který je označován zkratkou DOF. Stupeň volnosti je definován jako maximální počet nezávislých souřadnic, které popisují polohy jednotlivých těles kinematické struktury. Pokud je posuvný pohyb tělesa možné popsat pouze v rámci jedné souřadné osy, má těleso 1 stupeň volnosti.

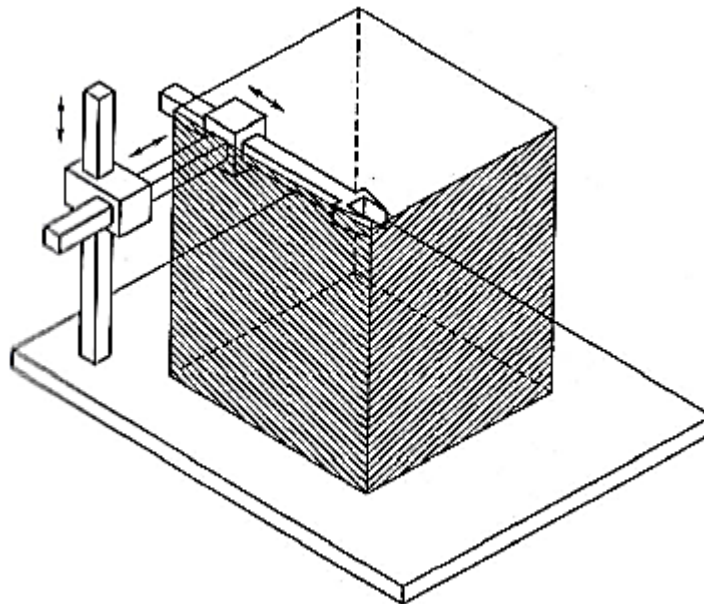
Kloub manipulátoru zajišťuje struktuře manipulátoru pouze 1 DOF a těleso naň napojené tak může vykonat buď rotační, nebo translační pohyb pouze v jedné ose. Aby koncový efektor mohl dosáhnout požadované polohy v prostoru, je tedy potřeba, aby kinematická struktura manipulátoru obsahovala minimálně 3 stupně volnosti. Pro dosažení libovolné orientace v prostoru musí mít kinematická struktura 6 DOF. Struktury, které obsahují vyšší počet DOF, než je potřeba k dosažení libovolné pozici a orientace v prostoru, se nazývají *redundantní struktury*.

V závislosti na kinematických strukturách se robotické manipulátory liší také různými druhy pracovních a operačních prostorů. *Pracovní prostor* robota je jedna ze základních charakteristik robota a udává množinu všech bodů v prostoru, kterých může koncový efektor

manipulátoru dosáhnout. *Operační prostor* je část pracovního prostoru, která je skutečně využívána při manipulační úloze. Dále jsou uvedeny některé známé typy robotických paží.

1.2.1 Kartézský robot

Kartézský typ robotické paže obsahuje 3 posuvné klouby, které jsou spojeny vzájemně ortogonálními osami. Každý stupeň volnosti této struktury koresponduje s možností pohybu po jedné souřadné ose kartézského systému. Vzhledem k povaze manipulátoru je pohyb efektoru vždy přímý. Pracovní prostor manipulátoru je ve tvaru kvádru, jehož rozměry jsou dány minimálním a maximálním vysunutím jeho os. Tato struktura nabízí vysokou tuhost a také stejnou přesnost při dosažení polohy efektoru pro každý bod pracovního prostoru. Tyto struktury se používají pro manipulaci s materiálem a pro montážní účely.



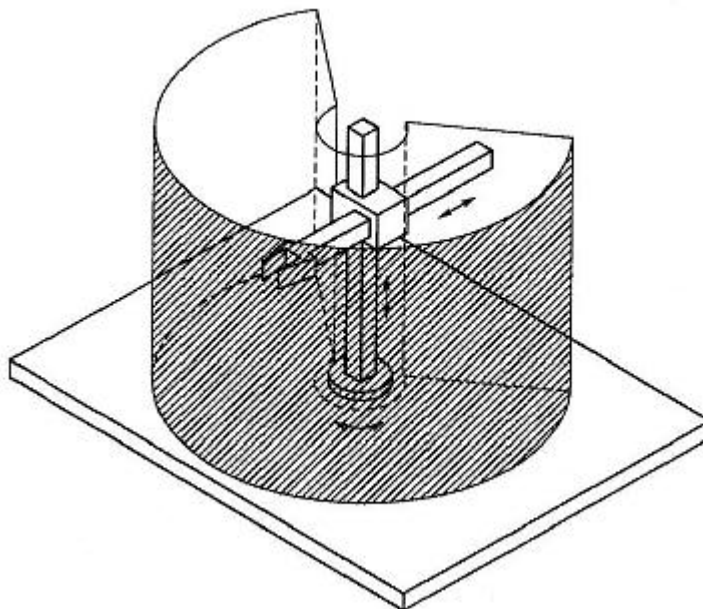
Obr. 1.1 – Kartézský manipulátor a jeho pracovní prostor (Siciliano, 2009)

1.2.2 Cylindrický robot

Cylindrický typ robotické paže se svojí strukturou liší od předchozí tak, že kloub u podstavy je rotační a zbylé dva klouby jsou posuvné. Pracovní prostor manipulátoru je ve tvaru dutého válce, jehož poloměr dutosti je dán rozměry vysunuté části efektoru při minimálním vysunutí. Každý stupeň volnosti této struktury koresponduje s možností pohybu po jedné souřadné ose cylindrické soustavy. Mezi kartézským a cylindrickým souřadným systémem existuje přepočítání.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & r \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

kde x, y, z – souřadnice kartézské soustavy,
 r, φ – souřadnice cylindrické soustavy (poloměr výsunu a úhel natočení).



Obr. 1.2 – Cylindrický manipulátor a jeho pracovní prostor (Siciliano, 2009)

Cylindrický manipulátor nabízí dobrou mechanickou tuhost a často se využívá pro manipulaci s těžkými a rozměrnými předměty. Přesnost při dosažení požadované polohy efektoru se snižuje s horizontálním vysunutím ramene.

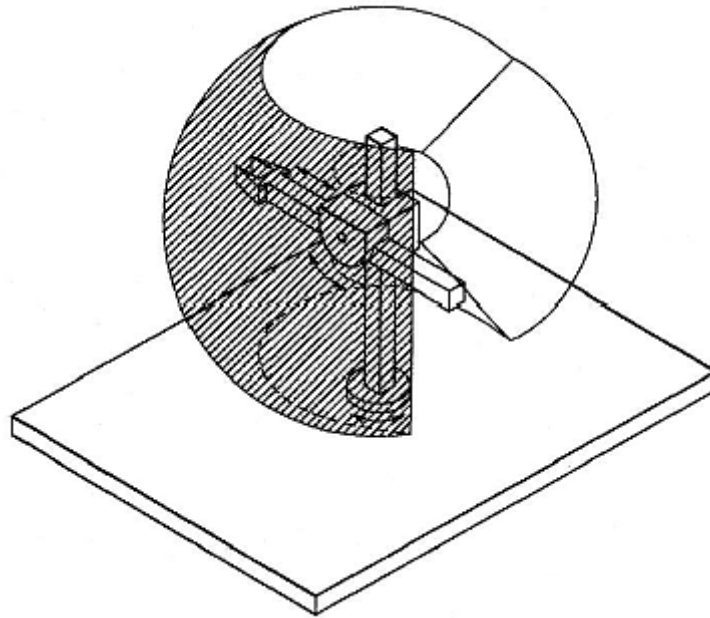
1.2.3 Sférický robot

První dva klouby této struktury jsou rotační a třetí kloub je posuvný. Pracovní prostor sférického robota je ve tvaru duté koule. Poloměr dutosti je dán obdobně jako u předchozího manipulátoru. Stupeň volnosti zde koresponduje se souřadnicí sférického souřadného systému. Mezi kartézskou a sférickou soustavou souřadnic existuje přepočít

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

kde x, y, z – souřadnice kartézské soustavy,
 r, θ, φ – souřadnice sférické soustavy (poloměr výsunu a úhly natočení).

Mechanická tuhost této struktury je nižší než u předchozích dvou struktur. Přesnost polohy efektoru se zmenšuje úměrně s radiálním vysunutím zápěstí. Sférický robot je oproti cylindrickému robotu schopen dosáhnout i na zem a nad podstavu. Tyto struktury se používají při obrábění.

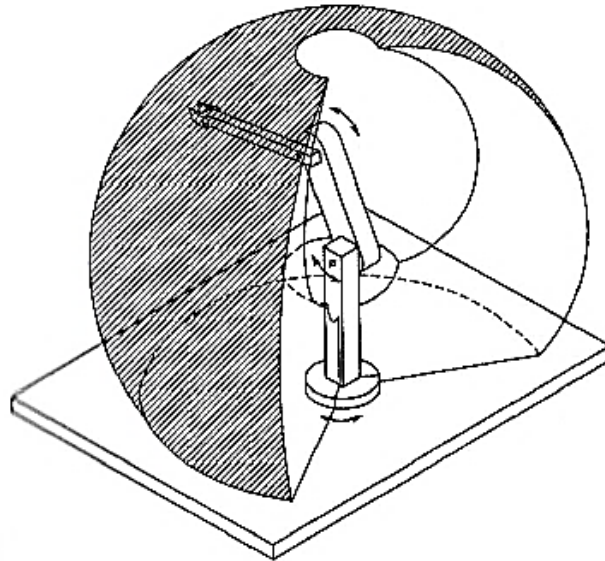


Obr. 1.3 – Sférický manipulátor a jeho pracovní prostor (Siciliano, 2009)

1.2.4 Antropomorfní manipulátor

Antropomorfní (z řeckého „anthrópos“ – člověk, „morfē“ – tvar) manipulátor je robotická struktura, která obsahuje 3 rotační klouby. První osa vystupující z pevné základny je ortogonální ke zbývajícím dvěma osám, které jsou vzájemně rovnoběžné (obě osy se otáčejí ve stejné rovině). Antropomorfní robot (také nazýván angulární) připomíná svoji kinematickou strukturou lidskou paži. Kvůli této podobnosti se druhý kloub manipulátoru nazývá ramenem a třetí kloub loktem.

Tato struktura je ze všech uvedených nejvíce flexibilní. Pracovní prostor manipulátoru je ve tvaru části koule a je poměrně rozsáhlý vzhledem k proporcím struktury. Přesnost dosažení požadované polohy efektoru se v prostoru mění v závislosti na pozici efektoru v pracovním prostoru robota. Převod vzniklé soustavy souřadnic do kartézských souřadnic je komplikovaný. Antropomorfní manipulátor se používá zejména pro manipulační účely.



Obr. 1.2 – Antropomorfní manipulátor a jeho pracovní prostor (Siciliano, 2009)

1.3 ZÁKLADNÍ POJMY Z KINEMATIKY ROBOTICKÝCH MANIPULÁTORŮ

Kinematika robotických manipulátorů se zabývá pohybem částí manipulátoru (jejich polohou, rychlostí nebo zrychlením). Z hlediska mechaniky je na manipulátor nahlíženo jako na kinematický řetězec, který představuje množinu tuhých těles, jež jsou postupně pospojována za sebou. Tato tělesa jsou propojena klouby, které umožňují pohyb částí robota. Vzájemné posuny kloubů jsou popsány pomocí tzv. *strojových souřadnic*. Strojové souřadnice odpovídají buď translačním, nebo rotačním posunům, popř. obojím (záleží na kinematické struktuře robota). Strojový vektor paže antropomorfního robota je dále v této práci značen jako

$$\mathbf{q}(t) = [\varphi(t) \quad \psi(t) \quad \theta(t)]^T, \quad (1.3)$$

kde t – čas, s,

$\varphi(t), \psi(t), \theta(t)$ – strojové souřadnice (úhly natočení jednotlivých kloubů),

$\mathbf{q}(t)$ – vektor strojových souřadnic (strojový vektor).

Jelikož jsou tělesa kinematického řetězce pospojována postupně za sebou, vždy bude pozice jednoho tělesa určitým způsobem ovlivněna pozicemi těles předchozích. Pokud se pohybuje pouze poslední těleso řetězce, jeho pohyb může ovlivňovat zbytek struktury pouze z hlediska silového působení. Závislostmi kinematických veličin na působících silách se zabývá dynamika.

Při vyšetřování kinematických veličin struktury se zjišťují jednotlivé pohybové vazby mezi tělesy (z hlediska pozice a rychlosti). Tyto vazby jsou následně popisovány funkcemi. Pro angulární části robota se jejich pozice popisuje pomocí goniometrických funkcí. Pozice translačních částí robota jsou jednoduše popsány pozicemi kloubů, které odpovídají jejich vysunutí v dané ose. Výsledné funkce popisující tyto kinematické vazby mezi tělesy mohou být odvozeny v závislosti na strojových souřadnicích nebo je lze odvodit z koncové polohy řetězce (polohy koncového členu). V prvním případě se na základě strojových souřadnic vypočítává pozice posledního členu struktury a jedná se tak o výpočet *přímé kinematiky* (kinematické vazby se vyšetřují od počátečního do koncového členu struktury). V druhém případě se jedná o vyšetřování *inverzní kinematiky*, při kterém je zadána pozice koncového členu struktury, na jejímž základě se vypočítávají strojové souřadnice (pozice všech kloubů struktury).

1.4 PLÁNOVÁNÍ POHYBU ROBOTICKÝCH MANIPULÁTORŮ

Plánování pohybu robotických manipulátorů je úloha, při které se vytváří *referenční trajektorie* pohybu koncového členu manipulátoru (efektoru) nebo jeho kloubů. Pokud je plánována trajektorie pohybu koncového členu, je plánována trajektorie v operačním prostoru manipulátoru. V druhém případě, kdy je plánována trajektorie popisující polohy kloubů manipulátoru (u rotačních kloubů odpovídá poloha úhlu natočení), jsou vytvářeny trajektorie v prostoru jeho strojových souřadnic. Pojem trajektorie zde představuje geometrickou cestu doplněnou o souřadnice času (jednotlivé body cesty jsou definovány pro časové okamžiky).

Pro úlohu plánování se volí interpolační funkce, která interpoluje (prokládá) množinu zadaných bodů trajektorie. Pro vytváření hladkých průběhů trajektorie lze použít interpolační polynomy. Pro tuto úlohu jsou vhodné polynomy 3. stupně. Lze tak vytvořit kompletní trajektorie, a to pouze ze dvou zadaných bodů. Všechny body trajektorie pak udávají referenční hodnoty pohybu robota (proto referenční trajektorie).

Kromě polohových trajektorií lze vytvářet také trajektorie popisující průběhy rychlostí a zrychlení (tzv. *profily*). Při vytváření profilů je důležité, aby plánované rychlosti a zrychlení v jednotlivých okamžicích korespondovaly s naplánovanými polohami. Tuto korespondenci lze zajistit derivací interpolační funkce generující polohovou trajektorii, přičemž první derivací funkce vznikne profil rychlosti a druhou derivací funkce vznikne profil zrychlení. Pro plánování rychlosti je vhodný polynom již 3. stupně.

Hladkost plánované trajektorie má pozitivní vliv na pohyb robota a napomáhá při sledování trajektorie. Sledování trajektorie je úloha regulátoru, který má za úkol kompenzovat

odchylku mezi skutečnou polohou a polohou referenčního bodu trajektorie (více v kap 1.9). Křivky se skokově měnícími se hodnotami bodů trajektorie nejsou obecně pro tyto úlohy vhodné, jelikož by vlivem přílišných změn mezi požadovanými polohami referenční trajektorie mohlo docházet k saturačním limitům kloubů a tím i k prodlevám při kompenzaci odchylek.

1.4.1 Plánování referenční trajektorie metodou point-to-point

Při plánování metodou point-to-point se zadává počáteční bod a koncový bod trajektorie a tyto body jsou následně proloženy interpolační funkcí. Společně s těmito body se zadává také celková doba pohybu t_f . Dále je potřeba zvolit vhodnou interpolační funkci. V této práci bude za interpolační funkci zvolen polynom 3. stupně, který je ve tvaru

$$q(t) = k_3 t^3 + k_2 t^2 + k_1 t + k_0, \quad (1.4)$$

kde t – čas, s,

$q(t)$ – referenční trajektorie,

k_j – koeficienty polynomu, $j = 0, 1, \dots, n$,

n – stupeň polynomu ($n = 3$).

Jelikož rychlostní profil vzniká derivací polynomu (1.4), je řád tohoto polynomu snížen na stupeň $n = n - 1$ a rychlostní profil odpovídá parabolickému průběhu

$$\dot{q}(t) = 3k_3 t^2 + 2k_2 t + k_1. \quad (1.5)$$

Derivací profilu rychlosti nebo také druhou derivací rovnice (1.4), vzniká lineární profil zrychlení

$$\ddot{q}(t) = 6k_3 t + 2k_2, \quad (1.6)$$

jehož průběh nelze plánovat, protože polynom pro tuto úlohu neobsahuje dostatečný počet parametrů.

Při plánování pohybu (polohy) se zadávají okrajové body trajektorie $q(0)$, $q(t_f)$ a dále se zadávají také okrajové rychlosti $\dot{q}(0)$, $\dot{q}(t_f)$. Díky zadaným počátečním bodům v čase $t = 0$ s jsou přímo vypočteny koeficienty k_0 a k_1 . To proto, že rovnice (1.4) přechází do tvaru

$$q(0) = k_0, \quad (1.7)$$

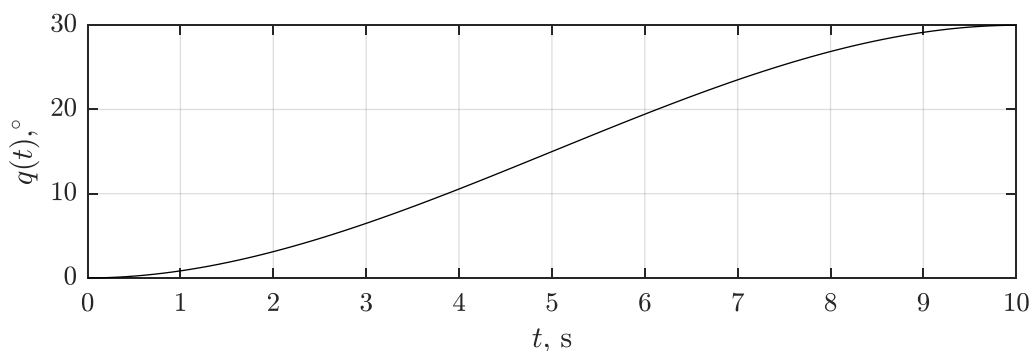
a rovnice (1.5) do tvaru

$$\dot{q}(0) = k_1. \quad (1.8)$$

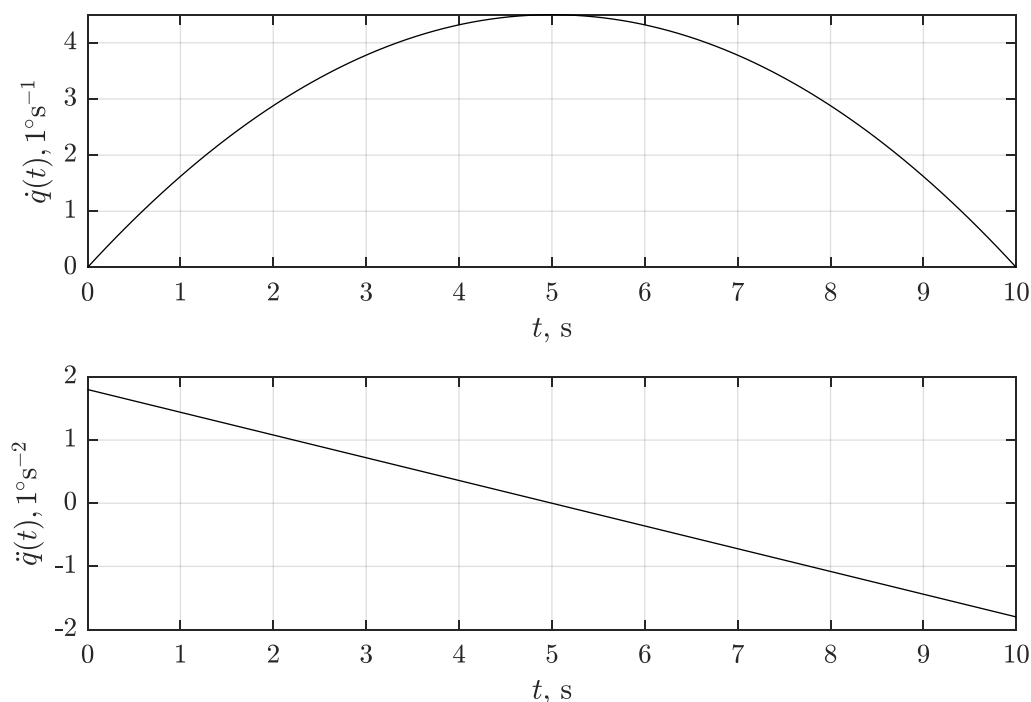
Zbylé koeficienty interpolačního polynomu k_2 a k_3 se vypočítávají z rovnic (1.4) a (1.5) dosazením koncových parametrů v čase $t = t_f$. Vzniká tak soustava dvou rovnic se dvěma neznámými

$$\begin{aligned} q(t_f) &= k_3 t_f^3 + k_2 t_f^2 + k_1 t_f + k_0, \\ \dot{q}(t_f) &= 3k_3 t_f^2 + 2k_2 t_f + k_1. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Na obr. 1.5 je znázorněna ukázka vytvořené referenční trajektorie ve strojovém prostoru pro rotační kloub společně s profilem rychlosti a zrychlení. Trajektorie je vytvořena metodou point-to-point a generována polynomem 3. stupně.



Obr. 1.5 – Ukázka referenční trajektorie vzniklé interpolací polynomem 3. řádu



Obr. 1.3 – Ukázka profilů referenční trajektorie (profil rychlosti a zrychlení)

1.5 MATEMATICKÉ MODELY DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

Snahou při vytváření matematického modelu je matematicky vyjádřit chování zkoumaného systému, resp. jeho dynamiku. Dynamiku spojitého systému lze popsat soustavou diferenciálních rovnic. Dynamika systému se vyjadřuje pomocí parametrů přechodových dějů, které se projevují při odezvě reálného systému. Statické systémy, tedy takové systémy, u kterých se neprojevují přechodové děje, jsou abstrakcí vzniklou pro metodologické účely (jedná se o pouhé zesílení bez dynamiky). Přechodové děje jsou způsobeny setrvačností a dá se tak do jisté míry hovořit o tom, že dynamika systému je dána jeho setrvačností, tedy vlastností setrvávat po určitou dobu v určitém stavu. Popisujeme-li systém soustavou diferenciálních rovnic, určuje se také řád systému, který je dán nejvyšší derivací obsažené v rovnici. Obecně platí, že čím je systém vyššího řádu, tím více se u něj projevují setrvačné síly působící proti změnám stavů. Z hlediska diferenčních rovnic vyjadřujících chování diskretních systémů je tento úkaz analogický ke zpoždění projevů v systému průchodem vstupní veličiny.

1.5.1 Vstupně-výstupní model

Vstupně-výstupní model obsahuje diferenciální rovnici nebo soustavu diferenciálních rovnic (popř. diferenčních v oblasti diskretních systémů), které popisují způsob, jakým se mění hodnoty výstupní veličiny v závislosti na změnách hodnot veličiny vstupní. Na systém je tak nahlíženo jako na „černou skříňku“ se systémovou funkcí, která charakterizuje jeho chování.

Systém může být popsán obecně souborem funkcí a může také obsahovat více vstupů a výstupů, mezi nimiž mohou působit tzv. křížové vazby, díky čemuž mohou být jednotlivé výstupy ovlivněny ostatními vstupy. Tyto systémy se nazývají mnoha-rozměrové a označují se zkratkou MIMO (Multiple Input Multiple Output). Při vytváření modelu systému MIMO se odvozuje vztah pro výpočet vektoru nejvyšších derivací výstupních veličin

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(n-1)}, \dots, \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, \mathbf{u}^{(m-1)}, \dots, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, t), \quad (1.10)$$

kde t – čas, s,

\mathbf{u} – vektor vstupních veličin systému,

\mathbf{y} – vektor výstupních veličin systému,

\mathbf{f} – vektor systémových funkcí,

m, n – řád derivace ($m \leq n$).

Pokud nejsou parametry jednotlivých systémových funkcí proměnné v čase, vytvářený model popisuje chování tzv. časově invariantního systému. V takových případech se parametr

t z předešlé rovnice (1.10) vynechává. Jedná-li se o systém SISO (Single Input Single Output), tedy systém s jedním vstupem a jedním výstupem, jsou v rovnici (1.10) nahrazeny vektorové veličiny skaláry. Speciálním případem této rovnice je tvar popisující lineární časově invariantní systém SISO, jehož chování lze popsat lineární diferenciální rovnicí ve tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_mu^{(m)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u, \quad (1.11)$$

kde a_i – koeficient výstupní veličiny (parametr modelu),

b_i – koeficient vstupní veličiny (parametr modelu),

y – výstupní veličina,

u – vstupní veličina,

m, n – řád derivace ($m \leq n$).

Pozn.: Řád derivace $m \leq n$ je dán podmínkou tzv. fyzikální realizovatelnosti systému.

1.5.2 Stavový model

Stavový model popisuje změny výstupních veličin v závislosti na změnách vstupních veličin systému a jeho vnitřních stavech. Vnitřní stavy jsou součástí stavového vektoru \mathbf{x} a popisují průběhy stavových veličin x_1, x_2, \dots, x_n .

Stavový model lze získat ze vstupně-výstupního modelu zavedením vhodných stavových proměnných. Stavové proměnné jsou zavedeny tak, aby obecně ze soustavy diferenciálních rovnic vyššího řádu vznikla soustava diferenciálních rovnic prvního řádu. Počet stavových proměnných odpovídá velikosti řádu soustavy diferenciálních rovnic.

Stavový popis systému je v obecném tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (1.12)$$

kde \mathbf{x} – vektor stavů systému,

\mathbf{f} – vektor systémových funkcí,

\mathbf{u} – vektor veličin vstupujících do systému,

t – čas, s.

Časově invariantní systémy nemění hodnoty svých parametrů v závislosti na čase. Proto je obecný stavový model časově invariantních systémů ve tvaru $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$.

1.5.3 Pohybové rovnice robotických manipulátorů

Dynamiku robotických manipulátorů lze odvodit pomocí dvou analytických přístupů. Prvním z nich je Newton-Eulerův přístup, ve kterém se vyjadřuje bilanční rovnice působících sil na těleso struktury. Takto se postupuje pro všechna tělesa struktury, až je vyjádřena celková dynamika struktury. Druhým přístupem se odvozuje dynamika manipulátoru pomocí Lagrangeových rovnic. Tento přístup je konceptuálně jednodušší, jelikož umožňuje systematický výpočet, jehož princip je dále popsán. Podrobněji se lze o obou přístupech dočíst v (Siciliano, 2009).

Nejprve je definován Lagrangián systému jako

$$\mathcal{L} = K - P, \quad (1.13)$$

kde K – celková kinetická energie systému, J,

P – celková potenciální energie systému, J.

Lagrangeovy rovnice II. druhu jsou ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = F_i, \quad (1.14)$$

kde t – čas, s,

q_i – zobecněná souřadnice,

F_i – zobecněná síla působící ve směru souřadnice q_i .

Zobecněné souřadnice jednoznačně popisují všechny polohy bodů mechanické struktury a jejich rychlosti. U kinematických struktur robotických manipulátorů jsou jednotlivé polohy a rychlosti bodů struktury (kloubů) dány souřadnicemi strojového vektoru, které jsou závislé na čase. Dále zobecněné síly odpovídají pohybovým silám nebo momentům, které působí ve směru souřadnice q_i (síly nebo momenty generované pohony kloubů). Lagrangeovy rovnice II. druhu se zapisují také vektorově jako

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}. \quad (1.15)$$

Pro výpočet pohybových rovnic robotického manipulátoru je základem znalost celkové kinetické a potenciální energie struktury manipulátoru. Pro výpočet potenciální energie hmotného bodu platí vztah

$$P = mgz, \quad (1.16)$$

kde P – potenciální energie hmotného bodu, J,

m – hmotnost bodu, kg,

g – tíhové zrychlení Země, $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

z – souřadnice Kartézského prostoru (výška hmotného bodu), m,

Potenciální energie hmotného bodu závisí na z -poloze v prostoru, která odpovídá přímé vzdálenosti bodu od místa nulového potenciálu (výšce). Při vyjádření Lagrangiánu tato poloha závisí na zobecněných souřadnicích q_i .

Dále je uveden vztah pro výpočet kinetické energie hmotného bodu pohybujícího se v prostoru

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (1.17)$$

kde K – kinetická energie pohybujícího se hmotného bodu, J,

m – hmotnost bodu, kg,

x, y, z – souřadnice polohy hmotného bodu, m,

v – celková rychlost hmotného bodu, $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Pro výpočet kinetické energie hmotného bodu, který v prostoru vykonává rotační pohyb, lze upravit předchozí vztah do tvaru

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^n (r_i \dot{\varphi}_i)^2, \quad (1.18)$$

kde K – kinetická energie rotačního pohybu hmotného bodu, J,

φ_i – úhel pootočení i -tého hmotného bodu, rad,

r_i – poloměr otáčení i -tého hmotného bodu, m.

Kinetická energie rotačního pohybu je závislá na rychlosti rotačního pohybu hmotného bodu, které závisí na derivaci zobecněných souřadnic \dot{q}_i . Pohybová energie je také závislá na polohách, které jsou dány délkami r_i a které závisí na zobecněných souřadnicích q_i .

Rozepsáním Lagrangiánu v rovnici (1.15) vzniká

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(K-P)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial(K-P)}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}, \quad (1.19)$$

a jelikož potenciální energie tělesa závisí pouze na \mathbf{q} (nikoli na $\dot{\mathbf{q}}$) je $\partial P / \partial \dot{\mathbf{q}} = 0$, lze tak předchozí rovnici (1.19) zjednodušit na tvar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}. \quad (1.20)$$

Dále je vypočten první člen rovnice (1.20). Protože je kinetická energie závislá na $\dot{\mathbf{q}}$ a \mathbf{q} , je první člen $\partial K/\partial \dot{\mathbf{q}}$ derivován jako složená funkce více proměnných, tedy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K(\dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t))}{\partial \dot{\mathbf{q}}(t)} \right), \quad (1.21)$$

jejíž derivaci lze vyjádřit pomocí totálního diferenciálu ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} + \frac{\partial \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \left(\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} \right) \ddot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{q} \partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \dot{\mathbf{q}}. \quad (1.22)$$

Dosazením členu (1.22) do rovnice (1.20) vzniká soustava diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{q} \partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}, \quad (1.23)$$

která se uvádí v literatuře, viz (Cvejn, 2016)

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}, \quad (1.24)$$

kde \mathbf{q} – vektor strojových souřadnic,

$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \partial^2 K/\partial \dot{\mathbf{q}}^2$ – symetrická, pozitivně definitní matice setrvačnosti,

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ – Coriolisova matice (lze získat ze zbývajících členů rovnice),

$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \partial P/\partial \mathbf{q}$ – vektor momentů působících na osy manipulátoru vlivem tíhových sil.

Členy Coriolisovy matice odpovídají účinkům odstředivých a Coriolisových sil. Do pohybových rovnic lze zahrnout také odporové koeficienty ve smyslu tření při otáčení kloubů, které působí proti rychlosti jejich otáčení. Dále lze vyjádřit zobecněné síly \mathbf{F} jako součin řídicích veličin ovládajících klouby a matice převodových poměrů. Výsledný dynamický model manipulátoru je pak ve tvaru

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{V}]\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{K}\mathbf{u}, \quad (1.25)$$

kde \mathbf{V} – diagonální matice odporových koeficientů,

\mathbf{K} – diagonální matice převodových poměrů,

\mathbf{u} – vektor akčních veličin odpovídající silovým momentům pohonů.

1.6 LINEARIZACE MODELU

Nelineární modely lze linearizovat s pomocí totálního diferenciálu v okolí pracovního bodu \mathbf{u}_0 . V okolí pracovního bodu je tedy část nelineární statické charakteristiky nahrazena

lineární závislostí s konstantním zesílením. Díky tomu se s lineárními modely pracuje jednodušeji než s modely nelineárními. Časově invariantní MIMO systémy lze obecně popsat soustav diferenciálních rovnic n -tého řádu, jak je uvedeno v (Cvejn, 2006)

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(n-1)}, \dots, \mathbf{y}, \mathbf{u}^{(m-1)}, \dots, \mathbf{u}), \quad (1.26)$$

pro kterou je totální diferenciál v okolí pracovního bodu \mathbf{u}_0 roven

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{y}^{(n)} \approx & \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}^{(n-1)}} \right) \Delta \mathbf{y}^{(n-1)} + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \right) \Delta \mathbf{y} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^{(m-1)}} \right) \Delta \mathbf{u}^{(m-1)} + \dots + \\ & + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right) \Delta \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

kde $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$,

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{u}_0).$$

Stavové modely ve tvaru $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ lze linearizovat do tvaru

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}(t) \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t) \Delta \mathbf{u}(t), \quad (1.28)$$

kde $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{G}(t)$ – matice linearizovaného modelu,

$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}}$, odchylka stavů od referenčních (požadovaných) hodnot,

$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{ref}}$, odchylka celkového akčního zásahu od referenčních hodnot řízení.

1.7 OPTIMÁLNÍ ZPĚTNOVAZEBNÍ ŘÍZENÍ ZALOŽENÉ NA LINEARIZACI

Základem optimálního řízení je minimalizace zvolené kritériální funkce. V této práci je použito kvadratické kritérium řízení, které je ve tvaru uváděném v (Stengel, 1994)

$$\min \rightarrow J = \frac{1}{2} \mathbf{x}(t_f)^T \mathbf{P}(t_f) \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right) dt, \quad (1.29)$$

kde J – hodnota kritériální funkce,

$t \in \langle t_0, t_f \rangle$ – čas, s,

\mathbf{x} – vektor stavů systému,

$\mathbf{P}(t_f)$ – matice terminálního členu,

\mathbf{u} – vektor vstupů systému,

\mathbf{Q} – váhová matice stavů,

\mathbf{R} – váhová matice řízení.

Kritérium ve tvaru (1.29) platí pro lineární systémy, které jsou popsány stavovým modelem. Pro linearizovaný stavový model je používáno kritérium v odchylovém tvaru

$$\begin{aligned} \min \rightarrow \Delta J = & \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}(t_f)^T \mathbf{P}(t_f) \Delta \mathbf{x}(t_f) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(\Delta \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}(t) + \Delta \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(t) \right) dt, \end{aligned} \quad (1.30)$$

kde $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}}$,

$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{ref}}$.

Hodnoty \mathbf{x}_{ref} udávají pracovní bod linearizace a v této práci odpovídají hodnotám referenční trajektorie (úhlům natočení jednotlivých kloubů struktury a jejich rychlostem otáčení). Hodnoty \mathbf{u}_{ref} odpovídají referenčnímu průběhu řízení pro vytvořenou nominální trajektorii (dále uváděno jako nominální řízení). Cílem regulace je minimalizovat odchylky $\Delta \mathbf{x}$, a to s použitím zpětné vazby, aby se korigovaly nepřesnosti z vytvořeného modelu.

Nastavovanými parametry kritéria jsou váhové matice $\mathbf{P}(t_f)$, \mathbf{Q} a \mathbf{R} . Podle rovnice (1.30) mají tyto matice vliv na složky příslušných násobených vektorů ($\Delta \mathbf{x}$ nebo $\Delta \mathbf{u}$). Běžně se tyto matice volí jako diagonální, díky čemuž je příslušná veličina z násobeného vektoru přímo ovlivněna jednou vahou. V případě nediagonálních matic jsou jednotlivé veličiny ovlivněny váhami ostatních veličin vektoru, díky čemuž lze navrhnout kompenzaci křížových vazeb mezi těmito veličinami. Dále jsou tyto matice symetrické a pozitivně definitní, díky čemuž je příslušná kvadratická forma pozitivně definitní.

Při nastavování matic \mathbf{Q} a \mathbf{R} záleží na poměru mezi velikostmi jejich hodnot. Čím větší jsou prvky váhové matice \mathbf{Q} oproti prvkům váhové matice \mathbf{R} , tím větší je váha na sledování referenčních stavů, přičemž jsou méně zohledněny velikosti vstupních hodnot. V opačném případě se spíše zohledňují velikosti vstupních hodnot za cílem nalezení úspornějších průběhů akčních veličin. Pokud jsou prvky matic přibližně stejně velké, poté se při minimalizaci takto nastaveného kritéria nalézá regulátor, který zajistí vyvážený poměr mezi sledování referenčních stavů a velikostí vstupních veličin.

Matice terminálního členu $\mathbf{P}(t_f)$ ovlivňuje výpočet regulátoru pro koncový bod regulace při zadané referenční trajektorii. Díky němu lze specifikovat důležitost přivedení jednotlivých stavů k požadovaným hodnotám. Přesněji řečeno, je vytvořena pozitivně definitní matice (většinou diagonální), která obsahuje váhy jednotlivých stavů a platí, že čím je váha pro příslušný stav větší, tím více se regulátor snaží jej dostat do koncového referenčního bodu.

Minimalizace kvadratického kritéria (1.30) vede na řešení Riccatiho rovnice ve tvaru

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{F}(t)^T \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{F}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{G}(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}(t)^T \mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}, \quad (1.31)$$

kde \mathbf{F}, \mathbf{G} – matice linearizovaného stavového modelu.

Získané řešení Riccatiho rovnice je dále použito pro výpočet kvadraticky optimálního regulátoru

$$\mathbf{C}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{G}^T(t) \mathbf{P}(t), \quad (1.32)$$

kde $\mathbf{C}(t)$ – matice kvadraticky optimálního regulátoru (LQR – Linear-Quadratic Regulator).

Zákon optimálního zpětnovazebního řízení je podle (Stengel, 1994) ve tvaru

$$\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{C}(t) \Delta \mathbf{x}(t). \quad (1.33)$$

Pozn.: Z předešlého vztahu je vypočítána kompenzační odchylka nominálního řízení a nikoli celkový průběh akční veličiny oproti klasickým metodám lineárního řízení.

1.8 POUŽITÉ NUMERICKÉ METODY

1.8.1 Numerická derivace

Derivace funkce jedné proměnné v bodě x je dána limitou

$$\dot{f} = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \quad (1.34)$$

která přechází volbou parametru $h > 0$ v numerickou derivaci ve tvaru

$$\dot{f}(t_k) \approx \frac{f(t_k + h) - f(t_k)}{h}. \quad (1.35)$$

kde t_k – diskrétní čas výpočtu (čas odpovídajícího kroku k).

Při numerických výpočtech derivací se doporučuje volba $h \approx 10^{-7}$. Tato hodnota vychází z parametru ε (Machine Epsilon), více v (Nocedal, 2006).

Pro přesnější výpočet numerické derivace je používán tvar s centrální diferencí

$$\dot{f} = \frac{f(t_k + h) - f(t_k - h)}{2h}. \quad (1.36)$$

Dále je uveden obecný vztah pro výpočet numerických parciálních derivací vektorové funkce více proměnných s centrální diferencí

$$\frac{\partial \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n)}{\partial (x_i)} \approx \frac{\mathbf{f}(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - \mathbf{f}(x_1, \dots, x_i - h, \dots, x_n)}{2h}. \quad (1.37)$$

1.8.2 Numerické řešení soustav diferenciálních rovnic Eulerovou metodou

Diferenciální rovnice lze řešit numericky pomocí numerické integrace. Princip numerického výpočtu integrálu Eulerovu metodou spočívá ve vyjádření řešení ze vztahu

$$\dot{f} = \frac{df(t)}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.38)$$

Při tomto výpočtu se počítá derivace v bodě ze znalosti nadcházejících bodů funkce. Podle potřeby lze tento vzorec modifikovat tak, aby byla počítána derivace z bodů předcházejících.

Z rovnice (1.38) je určeno řešení numerického integrálu

$$y_2 = f'(t_1)(t_2 - t_1) + y_1 = f'(t_1)\Delta t + y_1, \quad (1.39)$$

které lze přepsat pro použití diskrétního času výpočtu

$$f(t_{k+1}) = f'(t_k)\Delta t_k + f(t_k). \quad (1.40)$$

Pro numerické řešení Riccatiho rovnic je nutné provést integraci rovnice ve zpětném směru (od posledního času simulace k počátečnímu). Pro tuto úlohu je rovnice (1.40) upravena do tvaru

$$f(t_k) = f'(t_{k+1})\Delta t_k + f(t_{k+1}). \quad (1.41)$$

Výhodou použití Eulerovy metody je její jednoduchost, nicméně se jedná o méně přesnou výpočtu numerického integrálu. Proto je dále uvedena přesnější metoda.

1.8.3 Numerické řešení diferenciálních rovnic metodou Runge-Kutta

Metoda Runge-Kutta se používá pro řešení ODE ve tvaru

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t), \quad (1.42)$$

s definovanou okrajovou podmínkou pro x . Tato podmínka bývá běžně stanovena jako počáteční podmínka, kde $x(t_0) = x_0$. Pokud se při řešení ODE postupuje ve zpětném směru, je definována okrajová (koncová) podmínka $x(t_f) = x_f$.

Metoda Runge-Kutta 4. řádu (RK4) počítá hodnotu bodu x_2 na základě váženého průměru 4 hodnot. Ty jsou počítány pro body funkce získaných ze směrnic, a to v bodech t_1 , $t_1 + h/2$ (zde dvakrát) a $t_1 + h$. Výsledná hodnota integrálu je rovna váženému průměru těchto hodnot, který je přičten k původní hodnotě x_1 . Následují vzorce pro výpočet řešení ODE metodou RK4

$$x_2 = x_1 + \frac{(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4)}{6}, \quad (1.43)$$

kde

$$\begin{aligned} r_1 &= hf(x_1, t_1), \\ r_2 &= hf(x_1 + r_1/2, t_1 + h/2), \\ r_3 &= hf(x_1 + r_2/2, t_1 + h/2), \\ r_4 &= hf(x_1 + r_3, t_1 + h). \end{aligned}$$

Parametr h je dán časovou diferencí $h = t_2 - t_1$. Pro řešení ODE ve zpětném směru jsou upraveny vzorce RK4 do tvaru

$$x_1 = x_2 - \frac{(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4)}{6}, \quad (1.44)$$

kde

$$\begin{aligned} r_1 &= hf(x_2, t_2), \\ r_2 &= hf(x_2 - r_1/2, t_2 - h/2), \\ r_3 &= hf(x_2 - r_2/2, t_2 - h/2), \\ r_4 &= hf(x_2 - r_3, t_2 - h). \end{aligned}$$

2 ŘEŠENÍ

2.1 NÁVRH REFERENČNÍ TRAJEKTORIE METODOU POINT-TO-POINT

V této práci budou řízeny polohy kloubů antropomorfního manipulátoru. Tento druh manipulátoru obsahuje 3 rotační klouby a budou tak plánovány 3 referenční trajektorie. Jelikož budou trajektorie udávat průběhy strojových souřadnic, bude množina těchto trajektorií značena jako strojový vektor $\mathbf{q}(t) = [\varphi(t) \ \psi(t) \ \theta(t)]^T$. Trajektorie tedy budou představovat průběhy úhlových natočení jednotlivých kloubů, kterých se budou klouby snažit dosáhnout.

Referenční trajektorie budou vytvořeny metodou point-to-point s interpolačním polynomem 3. stupně. Při této úloze uživatel zadá následující parametry:

- celkovou dobu pohybu kloubů t_f ,
- počáteční úhel natočení $q_i(0)$ a koncový úhel natočení $q_i(t_f)$ kloubu i ,
- počáteční úhlovou rychlost $\dot{q}_i(0)$ a koncovou úhlovou rychlost $\dot{q}_i(t_f)$ kloubu i .

Na základě těchto parametrů budou dále vypočteny koeficienty jednotlivých interpolačních polynomů.

2.1.1 Postup výpočtu koeficientů interpolačních polynomů

Polohy jednotlivých kloubů budou popsány vektorem $\mathbf{q}(t)$, přičemž pro každou jeho složku q_i bude navržena referenční trajektorie pohybu. Tato trajektorie vznikne interpolací zadaného počátečního a koncového úhlu natočení daného kloubu. Každá i -tá dvojice těchto okrajových bodů trajektorie bude proložena polynomem

$$q_i(t) = k_3 t^3 + k_2 t^2 + k_1 t + k_0, \quad (2.1)$$

kde t – čas, s,

k_j – koeficient interpolačního polynomu, kde $j = 0, 1, 2, 3$,

q_i – referenční trajektorie ve strojovém prostoru, $i = 1, 2, 3$, rad.

Dále je odvozen odpovídající rychlostní profil, tedy průběh úhlových rychlostí otáčení kloubu tak, aby bylo v daném čase referenční trajektorie dosaženo požadovaného úhlu natočení. Pro interpolaci počátečních a koncových úhlových rychlostí bude použit polynom druhého stupně, který vznikne derivací rovnice (2.1), tedy

$$\dot{q}_i(t) = 3k_3 t^2 + 2k_2 t + k_1, \quad (2.2)$$

kde \dot{q}_i – rychlostní profil i -tého kloubu ($i = 1, 2, 3$), rad/s.

Ze znalosti počátečních parametrů $q_i(0)$ a $\dot{q}_i(0)$ jsou odvozeny parametry k_0 a k_1 . V čase $t = 0$ s jsou rovnice (2.1) a (2.2) rovny

$$q_i(0) = k_0, \dot{q}_i(0) = k_1. \quad (2.3)$$

Zbylé koeficienty k_2 a k_3 lze se znalostí koncových podmínek $q_i(t_f)$ a $\dot{q}_i(t_f)$ vypočítat ze soustavy rovnic vzniklé z rovnic (2.1) a (2.2), tedy

$$\begin{aligned} q_i(t_f) &= k_3 t_f^3 + k_2 t_f^2 + k_1 t_f + k_0 \\ \dot{q}_i(t_f) &= 3k_3 t_f^2 + 2k_2 t_f + k_1, \end{aligned} \quad (2.4)$$

která je řešena v prostředí MATLAB vždy při zahájení simulace. Aby zde bylo možné řešit tuto soustavu rovnic efektivně, je soustava rovnic přepsána do maticového tvaru

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{A} \mathbf{k}_i \Rightarrow \mathbf{k}_i = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}_i, \quad (2.5)$$

kde \mathbf{k}_i – řešení soustavy rovnic (vektor hledaných koeficientů polynomu i , kde $i = 1, 2, 3$),
 \mathbf{y}_i – vektor levé strany soustavy rovnic (vektor známých hodnot rovnic),
 \mathbf{A} – matice koeficientů hledaných proměnných.

Soustava rovnic (2.4) je přepsána do odpovídajícího maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} k_3 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} t_f^3 & t_f^2 \\ 3t_f^2 & 2t_f \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q(t_f) - (k_1 t_f + k_0) \\ \dot{q}(t_f) - k_1 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

kterou lze v prostředí MATLAB řešit pomocí *levého maticového dělení*, viz následující příkaz.

```
k = A \ y;
```

Dále jsou pro simulaci potřeba také hodnoty zrychlení (profil zrychlení), které jsou vypočteny z lineární funkce vzniklé derivací rovnice (2.2), tedy

$$\ddot{q}_i(t) = 6k_3 t + 2k_2 \quad (2.7)$$

kde \ddot{q}_i – profil zrychlení kloubu i ($i = 1, 2, 3$), rad/s^2 .

2.1.2 Výpočet koeficientů interpolačních polynomů

V dalším průběhu práce je v prostředí MATLAB vytvořena funkce, která vypočítává všechny koeficienty interpolačního polynomu ze zadaných okrajových podmínek. Na základě znalosti všech koeficientů jsou dále zadané okrajové body interpolovány polynomem 3. stupně, čímž jsou vytvářeny referenční trajektorie, profily rychlosti a profily zrychlení. Zadané parametry trajektorie jsou společně s uvedeným zápisem v MATLAB uvedeny v tab. 2.1.

Tab. 2.1 – Zadané parametry vytvářených trajektorií

Zadaný parametr	Jednotka	Zápis v MATLAB	Popis
$t_f = 2$	s	tf=2	Doba pohybu kloubů
$\mathbf{q}(0) = [0 \quad \pi/6 \quad \pi/9]$	rad	q0=[0 pi/6 pi/9]	Počáteční úhly natočení
$\mathbf{q}(t_f) = [\pi/2 \quad \pi/4 \quad \pi/3]$	rad	qtf=[pi/2 pi/4 pi/3]	Koncové úhly natočení
$\dot{\mathbf{q}}(0) = [0 \quad 0 \quad 0]$	rad·s ⁻¹	dq0=[0 0 0]	Počáteční úhlové rychlosti
$\dot{\mathbf{q}}(t_f) = [0 \quad 0 \quad 0]$	rad·s ⁻¹	dqtf=[0 0 0]	Koncové úhlové rychlosti

Dále je uveden postup výpočtu koeficientů interpolačních polynomů. Jelikož jsou vytvářeny referenční trajektorie $\mathbf{q}(t) = [\varphi(t) \quad \psi(t) \quad \theta(t)]$, je pro každou strojovou souřadnici navržen jeden interpolační polynom. Nyní je zavedeno následující značení:

- $k_{i0} = q_i(0)$, $k_{i1} = \dot{q}_i(0)$ – koeficienty i -tého polynomu, které jsou známy ze zadaných počátečních parametrů,
- $\mathbf{k}_i = [k_{i3} \quad k_{i2}]$ – zbývající hledané koeficienty i -tého polynomu ($i = 1, 2, 3$).

Nejprve jsou vypočteny koeficienty 1. interpolačního polynomu ($i = 1$), který generuje referenční trajektorii $\varphi(t)$. Koeficienty k_0 a k_1 jsou známy ze zadaných počátečních parametrů

$$k_{10} = q_1(0) = 0, \quad k_{11} = \dot{q}_1(0) = 0 \quad (2.8)$$

a vektor zbývajících hledaných koeficientů je roven

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} k_{13} \\ k_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} t_f^3 & t_f^2 \\ 3t_f^2 & 2t_f \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_1(t_f) - (k_{11}t_f + k_{10}) \\ \dot{q}_1(t_f) - k_{11} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\begin{bmatrix} k_{13} \\ k_{12} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,39 \\ 1,18 \end{bmatrix}.$$

Koeficienty 2. interpolačního polynomu ($i = 2$), který generuje trajektorii $\psi(t)$ jsou rovny

$$k_{20} = q_2(0) = \frac{\pi}{6}, \quad k_{21} = \dot{q}_2(0) = 0$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} k_{23} \\ k_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} t_f^3 & t_f^2 \\ 3t_f^2 & 2t_f \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_2(t_f) - (k_{21}t_f + k_{20}) \\ \dot{q}_2(t_f) - k_{21} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} k_{23} \\ k_{22} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\pi}{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,07 \\ 0,2 \end{bmatrix}.$$

Koeficienty 3. interpolačního polynomu ($i = 3$), který generuje trajektorii $\theta(t)$ jsou rovny

$$k_{30} = q_3(0) = \frac{\pi}{9}, k_{31} = \dot{q}_3(0) = 0$$

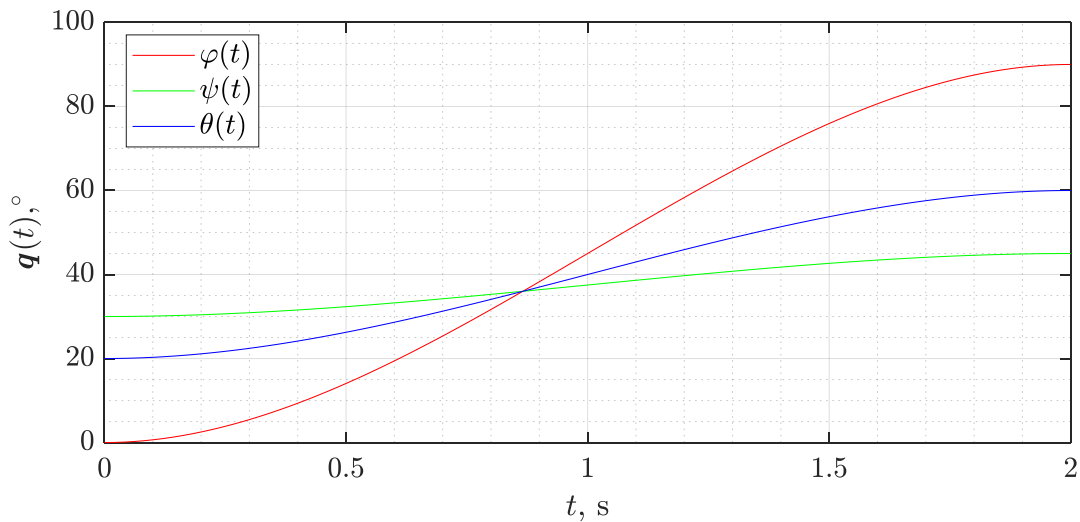
$$\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} k_{33} \\ k_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} t_f^3 & t_f^2 \\ 3t_f^2 & 2t_f \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_3(t_f) - (k_{31}t_f + k_{30}) \\ \dot{q}_3(t_f) - k_{31} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} k_{33} \\ k_{32} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{9} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,18 \\ 0,52 \end{bmatrix}.$$

Nyní jsou známy koeficienty všech interpolačních polynomů. Tyto koeficienty jsou dále dosazeny do předpisu polynomu generující referenční trajektorii, viz rovnice (2.1), a vzniká tak množina polynomů

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{13} & k_{12} & k_{11} & k_{10} \\ k_{23} & k_{22} & k_{21} & k_{20} \\ k_{33} & k_{32} & k_{31} & k_{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,39t^3 + 1,18t^2 \\ -0,07t^3 + 0,2t^2 + \frac{\pi}{6} \\ -0,18t^3 + 0,52t^2 + \frac{\pi}{9} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Průběhy polynomů q_i pro zadanou dobu pohybu $t_f = 2$ s jsou znázorněny na obr. 2.1.

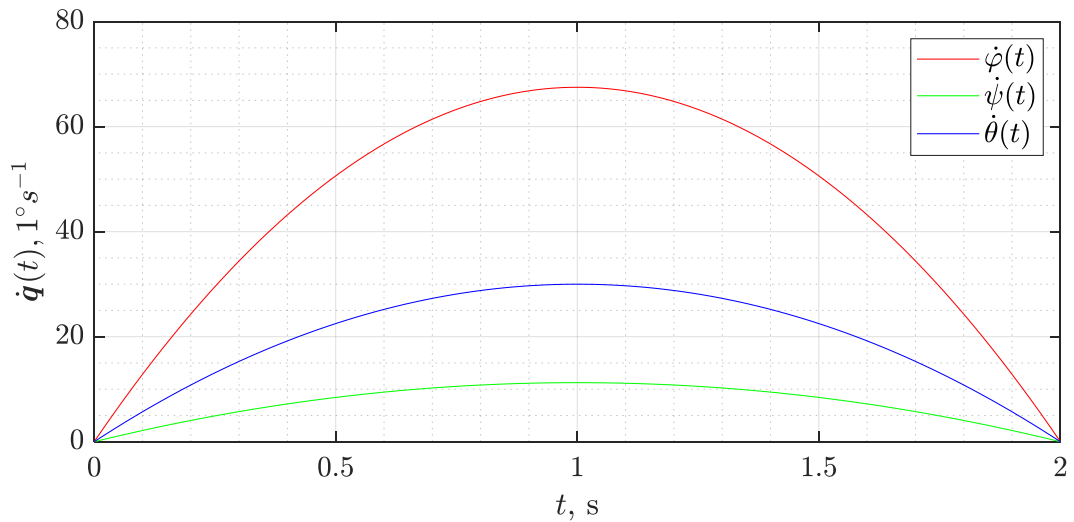


Obr. 2.1 – Vytvořené referenční trajektorie

Dále jsou vypočtené koeficienty polynomů postupně dosazeny do rovnice (2.2), čímž vzniknou rychlostní profily kloubů

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ \dot{\psi}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{13} & k_{12} & k_{11} \\ k_{23} & k_{22} & k_{21} \\ k_{33} & k_{32} & k_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,18t^2 + 2,36t \\ -0,2t^2 + 0,39t \\ -0,52t^2 + 1,05t \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

s následujícími průběhy.

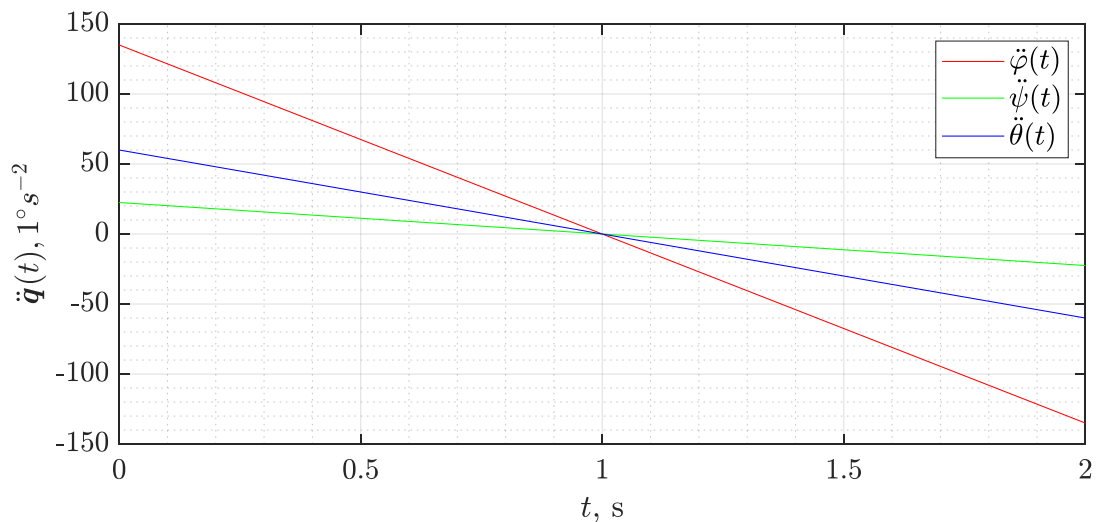


Obr. 2.2 – Vytvořené rychlostní profily

Nalezené koeficienty jsou pro úplnost dosazeny také do rovnice (2.7), čímž jsou získány profily zrychlení.

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{13} & k_{12} \\ k_{23} & k_{22} \\ k_{33} & k_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6t \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,36t + 2,36 \\ -0,39t + 0,39 \\ -1,05t + 1,05 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

s odpovídajícími průběhy na obr. 2.3.



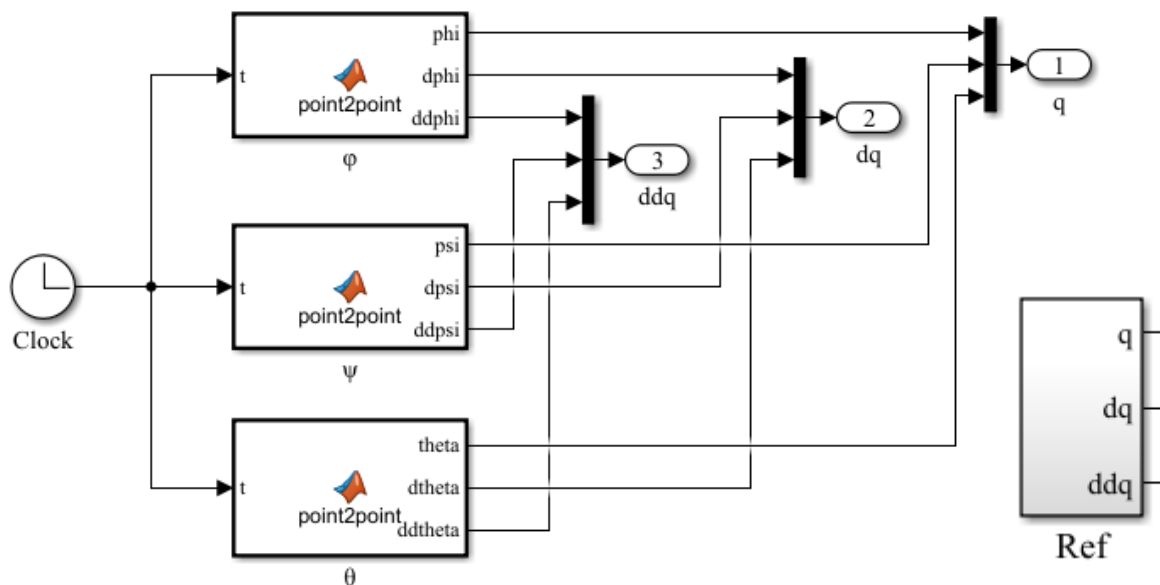
Obr. 2.3 – Vytvořené profily zrychlení

2.1.3 Výpočet referenčních trajektorií v prostředí MATLAB Simulink

Následuje funkce *point2point* vytvořená v prostředí MATLAB pro výpočet referenční trajektorie a jejich derivací. V ukázce je trajektorie počítána pro první kloub struktury manipulátoru a jsou tedy počítány souřadnice φ ze zadaných parametrů z tab. 2.1.

```
function [phi, dphi, ddp] = point2point(t, tf, q0, dq0, qtf, dqtf)
% Vypočítá referenční trajektorii první strojové souřadnice ze zadaných
% okrajových bodů q0 a qtf, které jsou proloženy polynomem 3. stupně.
%
% Dosazení prvních dvou parametrů polynomu
k0 = q0(1);
k1 = dq0(1);
% Parametry soustavy rovnic
A = [tf^3 tf^2; 3*tf^2 2*tf]; % matice koeficientů proměnných
y = [qtf(1)-(k1*tf+k0); dqtf(1)-k1]; % levá strana soustavy rovnic
k = A\y; % získání bývajících koeficientů polynomu
% Přepis získaných koef. do jednotlivých proměnných
k2 = k(2);
k3 = k(1);
% Podmínka - Po čase simulace se generuje konstantní hodnota
if t<=tf
    phi = x3*t.^3 + x2*t.^2 + x1*t + x0;
    dphi = 3*x3*t.^2 + 2*x2*t + x1;
    ddp = 6*x3*t + 2*x2;
else
    phi = x3*tf.^3 + x2*tf.^2 + x1*tf + x0;
    dphi = 3*x3*tf.^2 + 2*x2*tf + x1;
    ddp = 6*x3*tf + 2*x2;
end
```

Dále je v prostředí MATLAB Simulink ukázán vytvořený funkční blok pro výpočet referenční trajektorie. Na obr. 2.4 je znázorněn blok „Ref“ který se skládá z funkčních bloků Matlab Function (z knihovny Simulink/User-Defined Functions). Tyto bloky jsou na obrázku níže pojmenovány jako „point2point“ a jejich vnitřní struktura odpovídá funkci uvedené výše (s obměnami názvů proměnných pro ostatní strojové trajektorie ψ a θ). Tělo této funkce je společné pro všechny bloky s názvem „point2point“, které se pro výpočet referenčních průběhů jednotlivých strojových souřadnic liší pouze v použitých názvech výstupních argumentů (podle názvu strojové souřadnice) a také v definici prvních dvou koeficientů (k_0 a k_1), při které se liší pořadí z vektoru okrajových podmínek q_0 a dq_0 (tato pořadí odpovídají pořadím souřadnic strojového vektoru, kde pořadí 1 odpovídá souřadnici φ atd.).



Obr. 2.4 – Simulinkové schéma bloku Ref pro výpočet referenční trajektorie

2.2 ODVOZENÍ VZTAHŮ PŘÍMÉ KINEMATIKY

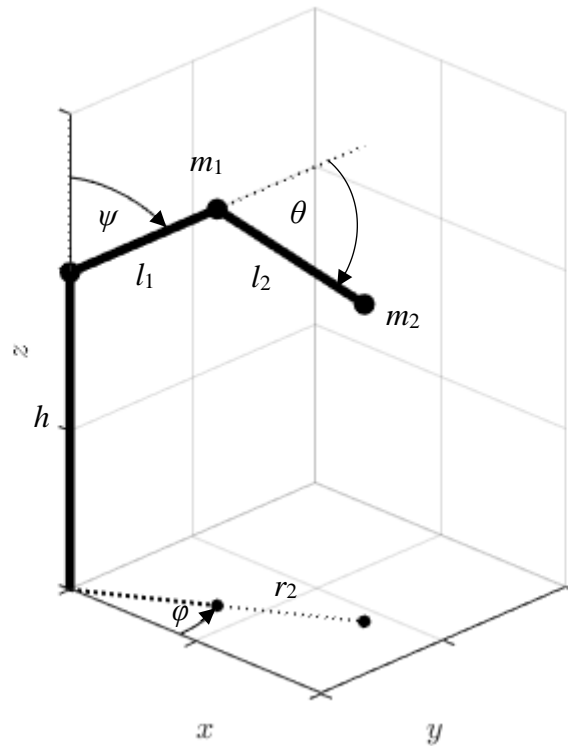
Při vyšetřování přímé kinematiky antropomorfního manipulátoru jsou odvozeny vztahy pro výpočet souřadnic kloubu s hmotností m_1 a koncového členu s hmotností m_2 . Tento kloub a koncový člen jsou v modelu struktury manipulátoru reprezentovány hmotnými body. Další zjednodušení modelu spočívá v nahrazení pevných těles struktury, která spojují klouby, úsečkami bez hmotností s danými délkami, kde

- h označuje výšku základny,
- l_1 označuje délku paže,
- l_2 označuje délku předloktí.

Dále je kinematika manipulátoru odvozena na základě geometrie struktury, jejíž model je znázorněn na obr. 2.5.

Polohy bodu m_1 lze vyjádřit přepočtem sférických souřadnic do Kartézského souřadnicového systému, protože prostor bodů, kterých může m_1 dosáhnout, je ve tvaru koule (viz obr. 2.6). Zároveň zde nejsou uvažována omezení poloh kloubů. Kartézské souřadnice bodu m_1 jsou určeny vztahy

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= (l_1 \sin \psi(t)) \cos \varphi(t) \\
 y_1(t) &= (l_1 \sin \psi(t)) \sin \varphi(t) \\
 z_1(t) &= h + l_1 \cos \psi(t).
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$



Obr. 2.5 – Model antropomorfní struktury s vyznačenými parametry

Dále jsou odvozeny vztahy pro výpočet Kartézských souřadnic bodu m_2 . Nejprve je vypočten průmět délky r_2 jako součet průmětů délky paže a délky předloktí v rovině xy , tedy

$$r_2(t) = l_1 \sin \psi(t) + l_2 \sin(\psi(t) + \theta(t)), \quad (2.16)$$

a poloha bodu m_2 se promítne do prostoru Kartézských souřadnic následovně

$$\begin{aligned} x_2(t) &= r(t) \cos \varphi(t) \\ y_2(t) &= r(t) \sin \varphi(t) \\ z_2(t) &= h + l_1 \cos \psi(t) + l_2 \cos(\psi(t) + \theta(t)). \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.3 ZÍSKÁNÍ POHYBOVÝCH ROVNIC ROBOTA

K získání pohybových rovnic robota je použit nástroj symbolických proměnných v programu MATLAB. Tento nástroj je použit v rámci vytvořeného skriptu, který dále na základě odvozených vztahů kinetické a potenciální energie vypočítá jednotlivé složky členů uvedených v rovnicích (2.20). Proto jsou nejprve definovány vektory strojových souřadnic

$$\mathbf{q}(t) = [\varphi(t) \quad \psi(t) \quad \theta(t)]^T, \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = [\dot{\varphi}(t) \quad \dot{\psi}(t) \quad \dot{\theta}(t)]^T, \quad (2.18)$$

kteřé jsou v programu MATLAB definovány pomocí nástroje symbolických proměnných.

```
% Definice symbolických proměnných - strojové souřadnice
syms psi dpsí phi dphi theta dtheta
n = 3; % počet složek strojového vektoru
% Definice symbolických vektorů
q = sym('q',[n 1]); % strojový vektor (3x1)
q(1)=phi; q(2)=psi; q(3)=theta; % naplnění vektoru
dq = sym('dq',[n 1]); % derivace strojového vektoru
dq(1)=dphi; dq(2)=dpsi; dq(3)=dtheta;
```

Pohybové rovnice antropomorfní struktury jsou získány Lagrangeovým přístupem, díky kterému je získán matematický model ve tvaru

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{V})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}. \quad (2.19)$$

kde \mathbf{V} – volená diagonální matice odporových koeficientů,

\mathbf{u} – nominální veličina řízení,

a zbývající členy jsou rovny

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{q}) &= \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2}, \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{q} \partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

kde \mathbf{B} – matice setrvačnosti,

\mathbf{C} – Coriolisova matice,

\mathbf{g} – vektor momentů působících vlivem tíhových sil Země.

Pro výpočet těchto členů je třeba získat vztahy pro celkovou kinetickou a potenciální energii manipulátoru, jehož model kinematické struktury je znázorněn na obr. 2.5. Při odvozování dynamiky této struktury jsou zavedena následující zjednodušení:

- členy robota nemají hmotnost s výjimkou hmotných bodů m_1 a m_2 , které reprezentují loketní kloub a koncový člen,
- neuvažují se omezení polohy.

2.3.1 Výpočet celkové kinetické energie

Celková kinetická energie pohybu struktury se členy m_1 a m_2 je dána součtem jejich kinetických energií. Tyto body konají rotační pohyb v prostoru, který je dále rozložen na pohyb

ve dvou vzájemně ortogonálních rovinách α a β . Rovina α je tvořena osami xy a rovině β obsahuje všechny členy struktury manipulátoru. Pro výpočet celkové pohybové energie struktury hmotných bodů je použit vztah

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \|\mathbf{v}_i\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \|\dot{\boldsymbol{\varphi}}_i \times \mathbf{r}_i\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \|\dot{\boldsymbol{\varphi}}_i\|^2 \cdot \|\mathbf{r}_i\|^2, \quad (2.21)$$

kde K – výsledná kinetická energie struktury, J,

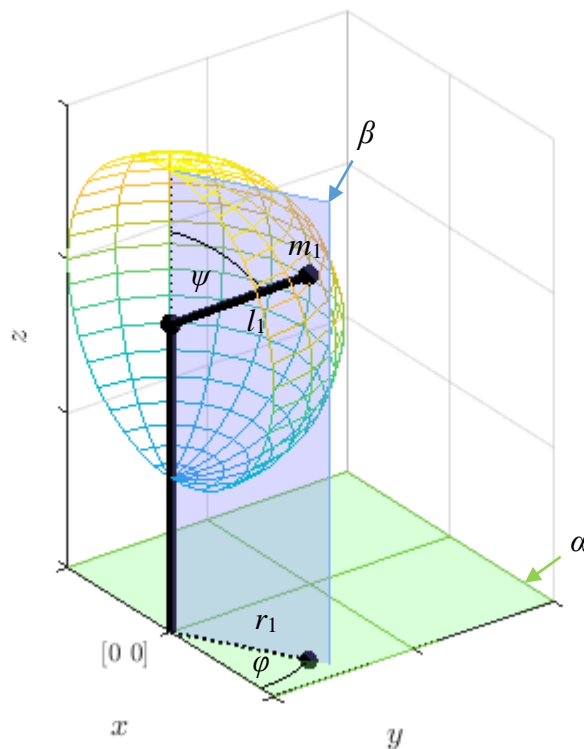
m_i – hmotnost bodu i , kg,

\mathbf{v}_i – vektor obvodové rychlosti bodu i , $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,

\mathbf{r}_i – polohový vektor bodu i (vzdálenost od osy otáčení), $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,

$\boldsymbol{\varphi}_i$ – pootočení bodu i (poloha kloubu daná strojovou souřadnicí), rad.

Rotační pohyb bodu m_1 závisí současně na otáčení ve směrech úhlů φ a ψ . Díky tomu vzniká prostor konfigurace bodu ve tvaru koule, viz obr. 2.6. Proto se také výsledná rychlost bodu skládá ze součtu vektorů rychlostí v rovině α i β (stejně tak platí i pro druhý bod struktury).



Obr. 2.6 – Znázornění geometrie pohybu bodu m_1

Pro určení rychlosti bodu m_1 je nejprve vyjádřen průmět paže do roviny α , tedy

$$r_1 = \|\mathbf{r}_1\| = l_1 \sin \psi, \quad (2.22)$$

kde r_1 – průmět osy robota délky l_1 (paže) do roviny α , m.

Rychlost bodu m_1 v rovině α je dána vztahem

$$v_{1\alpha} = \|\mathbf{v}_{1\alpha}\| = r_1 \dot{\varphi} = l_1 \sin \psi \dot{\varphi}, \quad (2.23)$$

a dále je určen příspěvek rychlosti v rovině β , ve které leží všechny členy robota, tedy

$$v_{1\beta} = \|\mathbf{v}_{1\beta}\| = l_1 \dot{\psi}. \quad (2.24)$$

Výsledný kvadrát pohybové rychlosti bodu m_1 pro výpočet kinetické energie, viz rov. (2.21), je dán součtem druhých mocnin příspěvků rychlostí v obou rovinách α i β , tedy

$$v_1^2 = v_{1\alpha}^2 + v_{1\beta}^2 = (l_1 \sin \psi \dot{\varphi})^2 + (l_1 \dot{\psi})^2, \quad (2.25)$$

kde v_1 – výsledná obvodová rychlost bodu m_1 , $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,

$v_{1\alpha}$ – rychlost bodu m_1 v rovině α , $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,

$v_{1\beta}$ – rychlost bodu m_1 v rovině β , $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,

φ – úhel, který svírá osa robota délky l_1 (paže) s kladnou částí osy x , rad,

ψ – úhel, který svírá paže s kladnou částí osy z , rad.

Dále je odvozena rychlost bodu m_2 , jehož pohyb je závislý na φ , ψ a θ . Délka průmětu r_2 je určena rovnicí (2.16), a rychlost tohoto bodu v rovině α je rovna

$$v_{2\alpha} = \|\mathbf{v}_{2\alpha}\| = r_2 \dot{\varphi} = (l_1 \sin \psi + l_2 \sin(\psi + \theta)) \dot{\varphi}. \quad (2.26)$$

K celkové rychlosti pohybu bodu m_2 se přičítá rychlost bodu m_1 v rovině β , ve které závisí pohyb obou bodů na úhlech ψ a θ . Jelikož jsou vektory rychlostí obou bodů v rovině β různoběžné, je celková rychlost bodu m_2 dána výslednicí vypočtenou pomocí kosinové věty

$$v_{2\beta} = \|\mathbf{v}_{2\beta}\| = \sqrt{\|\mathbf{v}_{1\beta}\|^2 + l_2^2(\dot{\psi} + \dot{\theta})^2 + 2l_1 l_2 \dot{\psi}(\dot{\psi} + \dot{\theta})}. \quad (2.27)$$

Výsledný kvadrát celkové rychlosti pro výpočet kinetické energie bodu m_2 je dán vztahem

$$\begin{aligned} v_2^2 &= v_{2\alpha}^2 + v_{2\beta}^2 \\ v_2^2 &= (l_1 \sin \psi + l_2 \sin(\psi + \theta))^2 \dot{\varphi}^2 + (l_1 \dot{\psi})^2 + l_2^2(\dot{\psi} + \dot{\theta})^2 + \\ &\quad 2l_1 l_2 \dot{\psi}(\dot{\psi} + \dot{\theta}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

kde v_2 – výsledná obvodová rychlost bodu m_2 , $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,

θ – úhel, který svírá předloktí s osou paže, rad.

Celková kinetická energie struktury je rovna

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) \\
 K &= \frac{1}{2}m_1 \left[(l_1 \sin \psi \dot{\varphi})^2 + (l_1 \dot{\psi})^2 \right] + \\
 &\quad \frac{1}{2}m_2 \left[(l_1 \sin \psi + l_2 \sin(\psi + \theta))^2 \dot{\varphi}^2 + (l_1 \dot{\psi})^2 \right] + \\
 &\quad \frac{1}{2}m_2 \left[2l_1 l_2 \dot{\psi}(\dot{\psi} + \dot{\theta}) + l_2^2 (\dot{\psi} + \dot{\theta})^2 \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.29}$$

Tento vztah je dále zapsán ve skriptu.

```

% Definice symbolických proměnných - vlastnosti členů struktury
syms m1 m2 L1 L2
% Kvadráty rychlostí bodů m1, m2
v1 = [L1*sin(psi) L1 0].^2 * dq.^2; % pro bod m1
v2a = [L1*sin(psi)+L2*sin(psi+theta) L1 0].^2 * dq.^2;
v2b = (L2*[0 1 1]*dq)^2 + 2*L1*L2*dpsi*([0 1 1]*dq)*cos(theta);
% Výsledný vztah pro výpočet kinetické energie struktury
K = 0.5*[m1 m2 m2]*[v1; v2a; v2b];

```

2.3.2 Výpočet celkové potenciální energie

Potenciální energie robota je získána ze vztahu

$$P = g \sum_{i=1}^2 m_i z_i,
 \tag{2.30}$$

kde P – potenciální energie, J,

m_i – hmotnost bodu i , kg,

z_i – výšková souřadnice i -tého hmotného bodu, m,

g – tíhové zrychlení, $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Potenciální energie struktury je určena z její geometrie a odpovídá vztahu

$$P = m_1 g (h + l_1 \cos \psi) + m_2 g (h + l_2 \cos(\psi + \theta) + l_1 \cos \psi),
 \tag{2.31}$$

kde m_1 – hmotnost loketního kloubu, kg,

m_2 – hmotnost koncového členu struktury, kg,

h, l_1, l_2 – délky os robota (viz obr. 2.5), m,

φ, ψ, θ – strojové souřadnice, rad,

který je zapsán dále ve skriptu (s uvážením již vytvořených symbolických proměnných z předešlých částí skriptu).

```

% Definice symbolických proměnných - výška základny a tíhové zrychlení
syms h g
% Vztah pro výpočet celkové potenciální energie struktury
P = [m1 m2]*g*[h + L1*cos(psi); h + L1*cos(psi) + L2*cos(psi + theta)];

```

2.3.3 Získání matice B

Matice setrvačnosti je získána ze vztahu

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial K}{\partial [\dot{\phi} \ \dot{\psi} \ \dot{\theta}]^T} \right)}{\partial [\dot{\phi} \ \dot{\psi} \ \dot{\theta}]^T} = \frac{\partial \left[\frac{\partial K}{\partial \dot{\phi}} \ \frac{\partial K}{\partial \dot{\psi}} \ \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} \right]}{\partial [\dot{\phi} \ \dot{\psi} \ \dot{\theta}]^T}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\phi}^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\psi} \partial \dot{\phi}} & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{\psi}} & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\psi}^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{\psi}} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{\theta}} & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\psi} \partial \dot{\theta}} & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\theta}^2} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

jejíž členy jsou vypočteny pomocí skriptu

```

% Definice symbolické matice
B = sym('b',[n n]); % Matice setrvačnosti
B = B*0; % Nulování členů
for i=1:n
    for j=1:n
        B(j,i) = diff(K, dq(j)); % První derivace
        B(j,i) = diff(B(j,i), dq(i)); % Druhá derivace
    end
end
end

```

díky kterému je získána matice

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} m_2(\sigma_3 + l_1 \sin \psi)^2 + l_1^2 m_1 \sin^2 \psi & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 + 2m_2 \sigma_2 + l_1^2(m_1 + m_2) & \sigma_1 + \sigma_2 \\ 0 & \sigma_1 + \sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

kde $\sigma_1 = m_2 l_2^2$,
 $\sigma_2 = l_1 l_2 \cos \theta$,
 $\sigma_3 = l_2 \sin(\psi + \theta)$.

2.3.4 Získání členu C

Dále je získán člen C ze vztahu

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{q} \partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \left(\frac{\partial K}{\partial [\dot{\varphi} \ \dot{\psi} \ \dot{\theta}]^T} \right)}{\partial [\varphi \ \psi \ \theta]^T} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} - \frac{\partial K}{\partial [\varphi \ \psi \ \theta]^T}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) & \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) & \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\psi}} \right) & \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\psi}} \right) & \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\psi}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} \right) & \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} \right) & \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} \right) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial K}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial K}{\partial \psi} \\ \frac{\partial K}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Dále je uveden skript pro výpočet jednotlivých složek tohoto členu.

```
% Definice symbolických proměnných
C1 = sym('c1',[n n]); C1 = C1*0; % první člen C
C2 = sym('c2',[n 1]); C2 = C2*0; % druhý člen C
for i=1:n
    for j=1:n
        C1(j,i) = diff(K, dq(j)); % první derivace
        C1(j,i) = diff(C1(j,i), q(i)); % druhá derivace
    end
    C2(i) = diff(K, q(i));
end
End
C = C1*dq - C2; % Celkový člen C
```

Získaný člen je ve tvaru

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 2 \left(\dot{\varphi} (\dot{\psi} (m_2 \sigma_2 \sigma_1 + m_1 l_1^2 \cos \psi \sin \psi) + m_2 l_2 \dot{\theta} \cos(\psi + \theta) \sigma_1) \right) \\ -\dot{\theta} m_2 l_1 l_2 (\sin \theta (\dot{\psi} + \dot{\theta}) + \dot{\psi} \sin \theta) - \dot{\varphi}^2 (m_2 \sigma_2 \sigma_1 - m_1 l_1^2 \cos \psi \sin \psi) \\ m_2 l_2 (l_1 \sin \theta \dot{\psi}^2 - \cos(\psi + \theta) \sigma_1 \dot{\varphi}^2) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

kde $\sigma_1 = l_2 \sin(\psi + \theta) + l_1 \sin \psi,$
 $\sigma_2 = l_2 \cos(\psi + \theta) + l_1 \cos \psi.$

2.3.5 Získání členu g

Zbývající člen v pohybových rovnicích robota je získán ze vztahu

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial P}{\partial [\varphi \quad \psi \quad \theta]^T} = \left[\frac{\partial P}{\partial \varphi} \quad \frac{\partial P}{\partial \psi} \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} \right]^T, \quad (2.36)$$

jehož složky jsou vypočteny pomocí následující části skriptu.

```

% Definice symbolického vektoru
G = sym('G', [n 1]);
for i=1:n
    G(i) = diff(P, q(i)); % Derivace
end

```

Pomocí skriptu je získán vektor

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 l_1 g \sin \psi - m_2 g (l_2 \sin(\psi + \theta) + l_1 \sin \psi) \\ -m_2 l_2 g \sin(\psi + \theta) \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

2.4 ZÍSKÁNÍ STAVOVÉHO MODELU

Vstupně-výstupní model robota, viz rov. (2.19), je převeden na stavový model pomocí vhodného zavedení stavových proměnných. Jelikož pohybové rovnice představují soustavu diferenciálních rovnic 2. řádu, jsou pro tyto účely zavedeny stavové proměnné $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}$ a $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}}$, které tvoří vektor stavů $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2]^T$. Jelikož jsou strojové vektory závislé na čase, jsou na čase závislé i stavy (dále v práci je tato časová závislost uvažována bez značení). Derivací stavového vektoru vznikne vektor derivací stavů systému $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{\mathbf{x}}_1 \quad \dot{\mathbf{x}}_2]^T$.

Dále platí

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2, \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \ddot{\mathbf{q}}, \quad (2.38)$$

přičemž pro vyjádření $\dot{\mathbf{x}}_2$ je z pohybové rovnice

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{V})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}, \quad (2.39)$$

vyjádřena nejvyšší derivace

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{u} - (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{V})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})]. \quad (2.40)$$

Dále jsou v předchozí rovnici (2.40) nahrazeny strojové veličiny veličinami stavovými, čímž vznikne stavová rovnice ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_1)[\mathbf{u} - (\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{V})\mathbf{x}_2 - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)]. \quad (2.41)$$

Stavový model robota lze tak zapsat maticově jako soustavu diferenciálních rovnic

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_1)[\mathbf{u} - (\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{V})\mathbf{x}_2 - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)] \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

2.4.1 Vytvoření stavového modelu v prostředí MATLAB Simulink

Dále je zavedena funkce

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_1)[\mathbf{u} - (\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{V})\mathbf{x}_2 - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)], \quad (2.43)$$

kteřá odpovídá druhé stavové rovnici v soustavě rovnic (2.42) a která je dále vytvořena v prostředí MATLAB.

```
function dx2 = h(x1, x2, u)
% Definice vlastností struktury robota
L1 = 0.5;           % Délka paže, m
L2 = 0.3;           % Délka předloktí, m
m1 = 1;            % Hmotnost loketního kloubu, kg
m2 = 0.75;         % Hmotnost koncového členu, kg
g = 9.81;          % Tíhové zrychlení, kg.m/s^2
V = [2 2 2]*20;    % Koeficienty odporu

% Přiřazení úhlů jednotlivých stavů
phi = x1(1); dphi = x2(1);
psi = x1(2); dpsi = x2(2);
theta = x1(3); dtheta = x2(3);

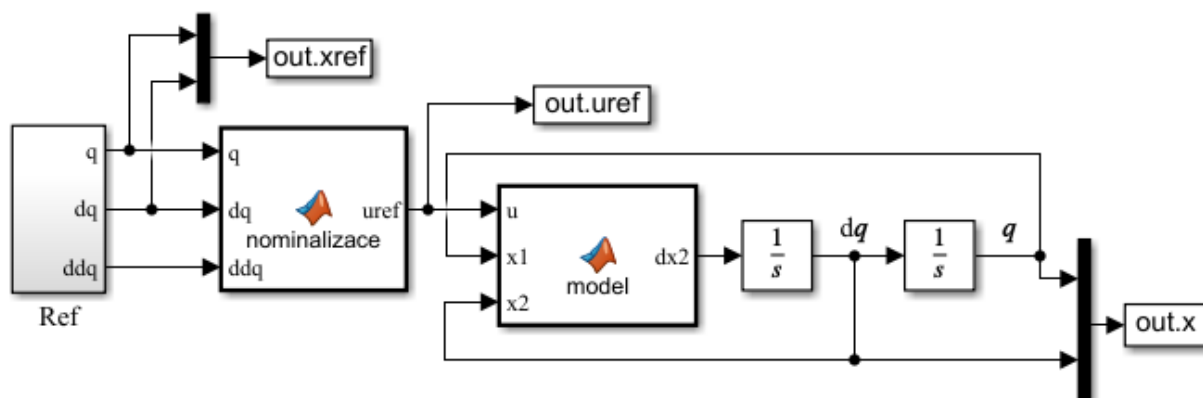
% Výpočet prvků matice setrvačnosti B(q)
B = [m2*(L2*sin(psi+theta) + L1*sin(psi))^2 + L1^2*m1*sin(psi)^2, 0, 0; ...
     0, (m2*(2*L2^2 + 4*L1*cos(theta)*L2))/2 + L1^2*m1 + L1^2*m2, ...
     (m2*(2*L2^2 + 2*L1*cos(theta)*L2))/2; ...
     0, (m2*(2*L2^2 + 2*L1*cos(theta)*L2))/2, L2^2*m2];

% Výpočet prvků členu C(q,dq)dq
Cx=[dpsi*(2*dphi*m2*(L2*cos(psi+theta)+L1*cos(psi))*(L2*sin(psi+theta) ...
+L1*sin(psi)) + 2*L1^2*dphi*m1*cos(psi)*sin(psi))+ ...
2*L2*dphi*dtheta*m2*cos(psi+theta)*(L2*sin(psi+theta)+L1*sin(psi));
-(dtheta*m2*(2*L1*L2*sin(theta))*(dpsi + dtheta)+ ...
2*L1*L2*dpsi*sin(theta))/2 - dphi^2*m2*(L2*cos(psi + theta)+ ...
L1*cos(psi))*(L2*sin(psi+theta)+L1*sin(psi)) - ...
L1^2*dphi^2*m1*cos(psi)*sin(psi);
-L2*m2*cos(psi + theta)*(L2*sin(psi + theta) + L1*sin(psi))*dphi^2- ...
L1*L2*dpsi*dtheta*m2*sin(theta)+L1*L2*dpsi*m2*sin(theta)*(dpsi+dtheta)];

% Výpočet členu g(q)
G = [0; - g*m2*(L2*sin(psi + theta) + L1*sin(psi)) - L1*g*m1*sin(psi);
     -L2*g*m2*sin(psi + theta)];

% Výstup funkce
dx2 = inv(B)*(u - Cx - diag(V)*x2 - G);
end
```


Tělo této funkce se nachází také uvnitř bloku Matlab Function s názvem „model“ ve vytvořeném simulačním schématu, viz obr. 2.7.



Obr. 2.7 – Schéma simulace – stavový model robota

Pro získání referenčních nominálních hodnot řízení \mathbf{u}_{ref} je vytvořen blok s názvem „nominalizace“, ve kterém se přepočítává referenční trajektorie dynamikou modelu na nominální průběh řízení. Pro tuto úlohu obsahuje tento blok také členy dynamického modelu robota (stejně jako blok „model“), avšak se zde liší výpočet výstupního argumentu funkce, a to podle rovnice (2.39).

Pro následovné provedení numerické linearizace stavového modelu jsou získány výstupní proměnné pomocí bloků To Workspace (s názvy „out.xref“, „out.uref“, „out.x“), kde x označuje stavové veličiny a u vektor vstupních veličin.

Dále je do modelu zavedena nepřesnost, ve které se liší hmotnost členu m_2 .

2.5 LINEARIZACE STAVOVÉHO MODELU PODÉL REFERENČNÍ TRAJEKTORIE

Dále je stavový model robota linearizován podél vytvořené referenční trajektorie. Pro tuto úlohu jsou ze stavového modelu, viz rov. (2.42), a se zavedením funkce (2.43) označeny následující vektorové funkce stavového modelu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \mathbf{h}(x_1, x_2, \mathbf{u}) \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

které jsou dále linearizovány vypočtením totálního diferenciálu ve tvaru

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}(t)} \Delta \mathbf{x}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}(t)} \Delta \mathbf{u}(t). \quad (2.45)$$

Linearizací stavového modelu, viz rovnice (2.44), vznikne

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Delta \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{u}} \end{pmatrix} \Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t) \Delta \mathbf{u}(t), \quad (2.46)$$

kde $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{G}(t)$ – matice linearizovaného modelu,

$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}}$, odchylka stavů od referenčních hodnot (trajektorie),

$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{ref}}$, odchylka celkového akčního zásahu od nominální veličiny řízení.

Linearizovaný model, viz rovnice (2.46), umožňuje aplikaci lineárních metod řízení pro regulaci odchylky $\Delta \mathbf{x}$, viz kapitola 2.6. Jak je vidět z předchozí rovnice (2.46), matice modelu \mathbf{F} , \mathbf{G} jsou závislé na čase oproti předchozím druhům modelů, kde jsou členy modelu závislé na strojových souřadnicích, které se mění v závislosti na čase. Je tedy získán model, jehož parametry se mění v čase, a to pro odpovídající hodnoty referenční trajektorie. Tím je provedena linearizace stavového modelu podél referenční trajektorie.

Následuje postup výpočtu jednotlivých složek matic z rovnice (2.46). Nejprve jsou vypočteny prvky matice

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{11} = \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \mathbf{x}_1} = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \psi} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \psi} & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \psi} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \mathbf{x}_2} = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\varphi}} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\varphi}} & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \dot{\varphi}} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \dot{\theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_1} = \frac{\partial [\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_1)[\mathbf{u} - (\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{V})\mathbf{x}_2 - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)]]}{\partial \mathbf{x}_1} =$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} [\mathbf{u} - (\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{V})\mathbf{x}_2 - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)] -$$

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_1) \left(\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} \right),$$

$$\mathbf{F}_{22} = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_2} = -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_1) \left(\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}_2} \mathbf{x}_2 + \mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{V} \right).$$

A dále jsou vypočteny prvky matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_1 = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \left[\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\mathbf{u} - (\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{V}) \mathbf{x}_2 - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)] \right]}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_1).$$

Pro výpočet derivací bylo při linearizaci použito numerických derivací v prostředí MATLAB. Následuje ukázka kódu linearizace, při které je počítána matice \mathbf{F} .

```
function F = linearizace(x_1, x_2, uref)
% x_1 je matice obsahující vektory stavů x1 (podobně tak i x_2)
d = 1e-7; % difference
[m, n] = size(x_1);
% Příprava matic F a G
F11 = zeros(m);
F12 = eye(m);
F21 = F11;
F22 = F11;
F = cell(1,n);
for k = 1:n
    x1 = x_1(:,k); % vektor řádků hodnot [phi;psi;theta]
    x2 = x_2(:,k); % vektor řádků hodnot [dphi;dpsi;dtheta]
    u = uref(:,k); % vektor nom. hodnot řízení [phi;psi;theta]
    for i=1:m
        % Numerická derivace 2. stavové funkce h podle x1 (dh/dx1)
        x = x1(i);
        x1(i) = x - d;
        y1 = h(x1, x2, u); % vektor (3x1)
        x1(i) = x + d;
        y2 = h(x1, x2, u);
        F21(:,i) = (y2-y1)/(2*d); % Výpočet derivace
        x1(i) = x;
        % Numerická derivace dh/dx2
        x = x2(i);
        x2(i) = x - d;
        y1 = h(x1, x2, u);
        x2(i) = x + d;
        y2 = h(x1, x2, u);
        F22(:,i) = (y2-y1)/(2*d); % Výpočet derivace
        x2(i) = x;
    end
    % Naplnění matice hodnotami
    F{k} = [F11 F12; F21 F22];
end
end
```

2.6 NÁVRH LQ REGULÁTORU ZALOŽENÉM NA LINEARIZACI

Pro návrh LQR je použito kvadratické kritérium ve tvaru

$$\Delta J^2 = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}(t_f)^T \mathbf{P}(t_f) \Delta \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\Delta \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}(t) + \Delta \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(t)) dt, \quad (2.49)$$

které je minimalizováno řešením Riccatiho rovnic

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{F}(t)^T \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{F}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{G}(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}(t)^T \mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}, \quad (2.50)$$

kde $\mathbf{P}(t)$ – Riccatiho matice (řešení Riccatiho rovnice),

$\mathbf{P}(t_f)$ – matice terminálního členu,

$\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{G}(t)$ – matice linearizovaného modelu robota,

\mathbf{R} , \mathbf{Q} – váhové matice (zvolené).

Integrací rovnice (2.50) získáme řešení Riccatiho rovnice. Rovnice bude řešena pro diskrétní čas simulace t_k . Pro další používání označme

$$\dot{\mathbf{P}}(t_k) = \Phi(\mathbf{P}(t_k), t_k). \quad (2.51)$$

kde Φ – funkce označující pravou stranu Riccatiho rovnic.

2.6.1 Řešení Riccatiho rovnic Eulerovou metodou

Ze zavedené funkce, viz rovnice (2.51), lze pomocí Eulerovy metody zapsat řešení Riccatiho rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{P}(t_k), t_k) &\approx \frac{\mathbf{P}(t_{k+1}) - \mathbf{P}(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \\ \mathbf{P}(t_{k+1}) &\approx \Phi(\mathbf{P}(t_k), t_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) + \mathbf{P}(t_k) = \\ &\Phi(\mathbf{P}(t_k), t_k) \cdot \Delta t_k + \mathbf{P}(t_k). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Tato rovnice je modifikována tak, aby umožnila řešit Riccatiho rovnici ve zpětném směru, jelikož je známa matice $\mathbf{P}(t_f)$ pro koncový čas simulace (okrajová podmínka rovnice)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t_{f-1}) &\approx -\Phi(\mathbf{P}(t_f), t_f) \cdot \Delta t_f + \mathbf{P}(t_f), \\ \mathbf{P}(t_{f-2}) &\approx -\Phi(\mathbf{P}(t_{f-1}), t_{f-1}) \cdot \Delta t_{f-1} + \mathbf{P}(t_{f-1}), \\ &\vdots \\ \mathbf{P}(t_1) &\approx -\Phi(\mathbf{P}(t_2), t_2) \cdot \Delta t_2 + \mathbf{P}(t_2). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Níže následuje názorná ukázka kódu s použitím Eulerovy metody.

```

% Funkce Fi
function dP = Fi(P, F, G, R, Q)
dP = -F'*P - P*F + P*G*inv(R)*G'*P - Q;
end

% Výpočet řešení Riccatiho rovnic
n = length(t);
for k = n:-1:2 % krok jde ve zpětném směru
dt = t(k) - t(k-1); % časová diference mezi hodnotami
if (k == n)
P{k} = Ptf; % řešení v posl. kroku rovno terminačnímu členu
else
P{k} = P{k+1} - Fi(P{k+1}, F{k+1}, G{k+1}, R, Q)*dt; % řešení
end
end
end

```

2.6.2 Řešení Riccatiho rovnic metodou Runge-Kutta

Pro řešení Riccatiho rovnic je použita metoda Runge-Kutta 4. řádu (RK4), jelikož je přesnější než metoda Eulerova. Rovnice je řešena ve zpětném směru, a proto jsou dále použity vztahy z rovnice (1.44). Vzhledem k zavedené funkci (2.51) existují při řešení rovnice následující korespondence

$$f(y_k, t_k) = \Phi(\mathbf{P}(t_k), t_k), h = \Delta t = t_{k+1} - t_k. \quad (2.54)$$

Řešení Riccatiho rovnic metodou RK4 je ve tvaru

$$\mathbf{P}(t_k) = \mathbf{P}(t_{k+1}) - \frac{(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4)}{6} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}
\text{kde } r_1 &= \Delta t \cdot \Phi(\mathbf{P}(t_{k+1}), t_{k+1}), \\
r_2 &= \Delta t \cdot \Phi(\mathbf{P}(t_{k+1}) - r_1/2, t_{k+1} - \Delta t/2), \\
r_3 &= \Delta t \cdot \Phi(\mathbf{P}(t_{k+1}) - r_2/2, t_{k+1} - \Delta t/2), \\
r_4 &= \Delta t \cdot \Phi(\mathbf{P}(t_{k+1}) - r_3, t_{k+1} - \Delta t).
\end{aligned}$$

Pro implementaci výpočtu integrálu metodou RK4 je důležité zajistit, aby bylo možné vypočítat hodnoty r_2 a r_3 v čase $\Delta t/2$. Proto, pokud jsou k dispozici při výpočtu hodnoty v časech t_k , je potřeba zajistit, aby byl krok výpočtu k dvojnásobný, než krok původní, při kterém byla získána data. Díky tomu lze vypočítat hodnotu prostředního bodu v čase $\Delta t/2$. S tímto dvojnásobným krokem je dále třeba počítat při dalším zápisu vzorců z rovnice (2.55). Následující body vypočtených dat se totiž v případě $t_k + 1$ hodnot musí vybírat ob dva vzorky, tedy s posunem ve výběru vzorků o $k + 2$ hodnot. Následuje ukázka řešení v prostředí MATLAB.

```

% Funkce Fi
function dP = Fi(P, F, G, R, Q)
dP = -F'*P - P*F + P*G*inv(R)*G'*P - Q;
end

% Řešení Riccatiho rovnic metodou RK4
n = length(t);
for k = n:-2:2          % zpětný směr dvojnásobného kroku k
    dt = t(k) - t(k-2); % časová diference
    if (k == n)
        P{k} = Ptf;      % okrajová podmínka (rovno terminačnímu členu)
    else
        r1 = dt*(Fi(P{k+2}, F{k+2}, G{k+2}, R, Q));
        r2 = dt*(Fi(P{k+2} - r1/2, F{k+1}, G{k+1}, R, Q));
        r3 = dt*(Fi(P{k+2} - r2/2, F{k+1}, G{k+1}, R, Q));
        r4 = dt*(Fi(P{k+2} - r3, F{k}, G{k}, R, Q));

        P{k} = P{k+2} - (r1 + 2*r2 + 2*r3 + r4)/6; % řešení
    end
end
end

```

2.6.3 Výpočet regulátorů

Na základě předchozích výpočtů Riccatiho rovnice je získána posloupnost matic $\mathbf{P}(t_k)$. Jelikož je dále použita metoda výpočtu RK4 s dvojnásobným krokem k , viz ukázka kódu výše, jsou nalezeny matice \mathbf{P} pro každý druhý krok simulace a následně jsou podle rovnice

$$\mathbf{C}(t_k) = -\mathbf{R}^{-1}(t_k)\mathbf{G}^T(t_k)\mathbf{P}(t_k), \quad (2.56)$$

vypočteny regulátory \mathbf{C} též pro každý druhý krok simulace. Aby byla množina těchto regulátorů kompletní i pro vynechané body mezi dvojnásobnými kroky, je zvolen přístup, při kterém jsou tyto regulátory získány průměrováním dvou okrajových regulátorů kolem vynechaného bodu. Množina regulátorů je ukládána do proměnné typu cell array (pole buněk), viz následující ukázka kódu.

```

% Výpočet množiny regulátorů
n = length(t);
for k = n:-2:2
    C{k} = inv(R)*G{k}'*P{k};
end
% Doplnění množiny o chybějící první pár regulátorů
C{2} = C{3};
C{1} = C{2};
% Průměrování regulátorů definovaných v lichých krocích k
for i=4:2:n
    C{i} = (C{i-1}+C{i+1})/2;
end

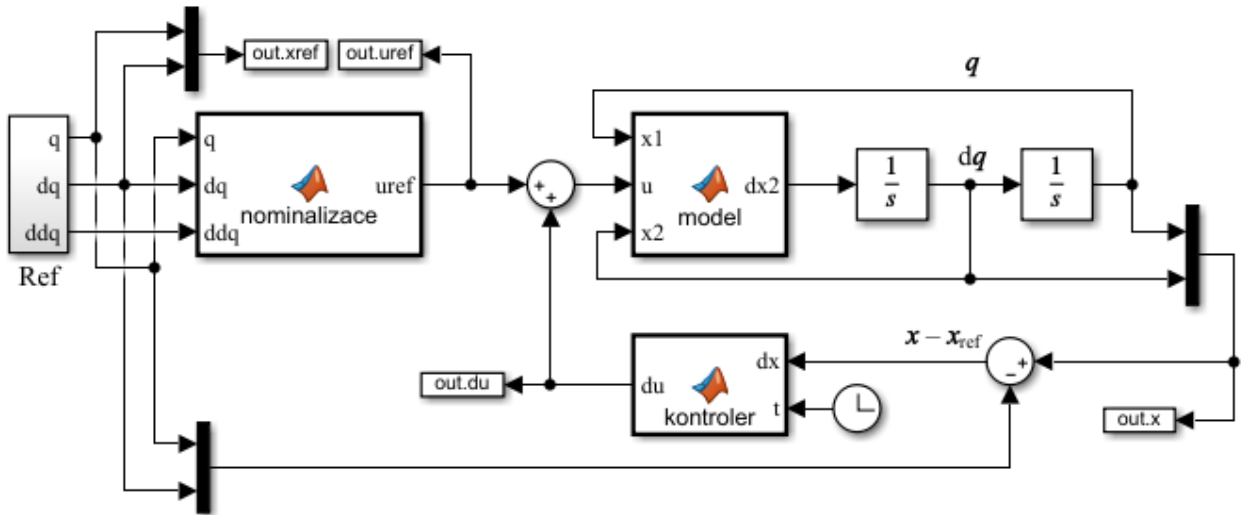
```

2.6.4 Schéma optimálního řízení

Regulační zákon optimálního řízení je ve tvaru

$$\Delta u(t_k) = -\mathbf{C}(t_k)\Delta x(t_k). \quad (2.57)$$

na jehož základě je vytvořeno schéma řízení v Simulinku, viz obr. 2.8.



Obr. 2.84 – Schéma řízení LQ

Blok s názvem „kontroler“ má za úkol vybírat příslušnou matici řízení z pole vypočtených regulátorů pro odpovídající čas simulace. Jelikož jsou matice řízení ukládány do proměnné typu cell array, se kterým Matlab Function neumí pracovat, je pole regulátorů transformováno do jedné velké matice typu double. To lze provést následujícím příkazem.

```
C_mat = cell2mat(C); % stohování matice
```

A dále je uvedena vnitřní funkce bloku „kontroler“.

```
function du = kontroler(dx, t, C_mat, delta)
k = floor(t/delta); % získání kroku k z času t
C = C_mat(:, 6*k+1:6*k+6); % výběr aktuální matice řízení C(6x6)
du = -C*dx; % výpočet regulačního zásahu
```

3 DOSAŽENÉ VÝSLEDKY

3.1 SIMULACE ŘÍZENÍ

Dále jsou provedeny simulace regulačních experimentů, při kterých je zkoumán vliv volených parametrů řízení Q , R , $P(t_f)$ a s tím související parametr velikosti simulačního kroku δ na výsledný průběh simulace. Tyto parametry jsou uvedeny v tab. 3.1 zápisem používaným v prostředí MATLAB. Regulace je aplikována na nominální model se zavedenou nepřesností, ve kterém je rozdílná hmotnost koncového bodu m_2 . Pro většinu regulačních experimentů je tento parametr upraven z původní hmotnosti $m_2 = 0,75$ kg na hmotnost $m_{2n} = 0,8$ kg. Dále je zkoumán vliv nastavení odporových koeficientů V na průběh pohybu robota.

Nejprve je simulován případ s vynecháním odporových koeficientů a nastavením parametrů řízení. Přitom je volen krok simulace δ tak, aby bylo možné spustit a provést simulační experiment. Pokud je tento parametr příliš velký, potom dochází k singularitám v řešení a simulaci nelze provést. Proto je v tabulce parametrů (viz tab. 3.1) uvedena vždy hodnota δ s hodnotou desetinného řádu, která zajistí funkční průběh simulace pro zadané parametry řízení (lze počítat s tím, že větší hodnota desetinného řádu vede k singularitám v řešení). V tab. 3.1 jsou také uvedeny hodnoty kritérií, které vyhodnocují integrál kvadratické plochy sledované veličiny. Hodnota krit. u odpovídá integrálu kvadrátů kompenzačních odchylek za cílem posouzení regulačních dějů z hlediska nároků na řízení. Hodnota krit. x odpovídá integrálu kvadrátů Δx , za cílem posoudit kvalitu regulačního pochodu. V obou případech platí, že čím menší je hodnota kritéria, tím lepšího výsledku dosahuje sledovaný průběh.

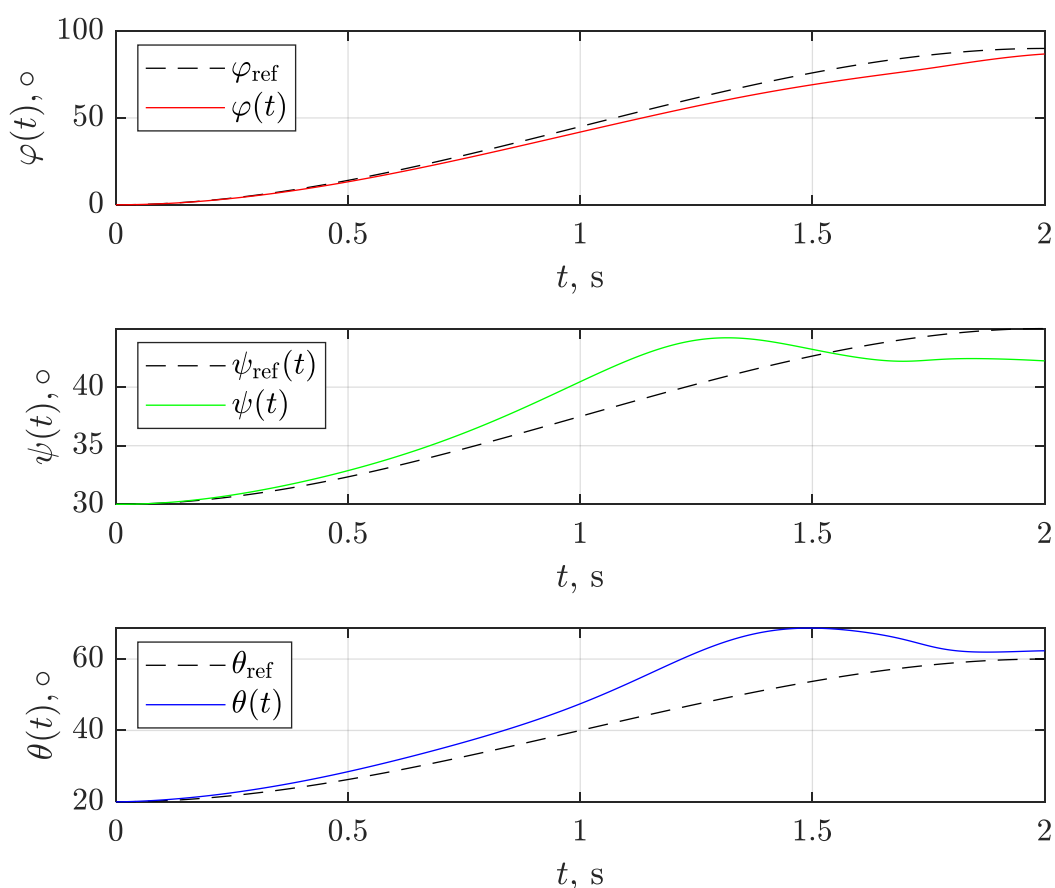
Tab. 3.1 – Parametry regulace

č.	V	δ	Q	R	$P(t_f)$	krit. u	krit. x
1	[0 0 0]	$2 \cdot 10^{-4}$	eye(6)	eye(3)	eye(6)	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$
2	[0 0 0]	$2 \cdot 10^{-4}$	eye(6)	0.1*eye(3)	eye(6)	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$
3	[20 20 20]	$2 \cdot 10^{-4}$	eye(6)	0.1*eye(3)	eye(6)	$3,4 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-6}$
4	[20 20 20]	$2 \cdot 10^{-5}$	eye(6)	0.1*eye(3)	10*eye(6)	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$
5	[20 20 20]	$2 \cdot 10^{-4}$	eye(6)	0.1*eye(3)	0.1*eye(6)	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$2,7 \cdot 10^{-6}$

Tab. 2.1 – Pokračování – Parametry regulace

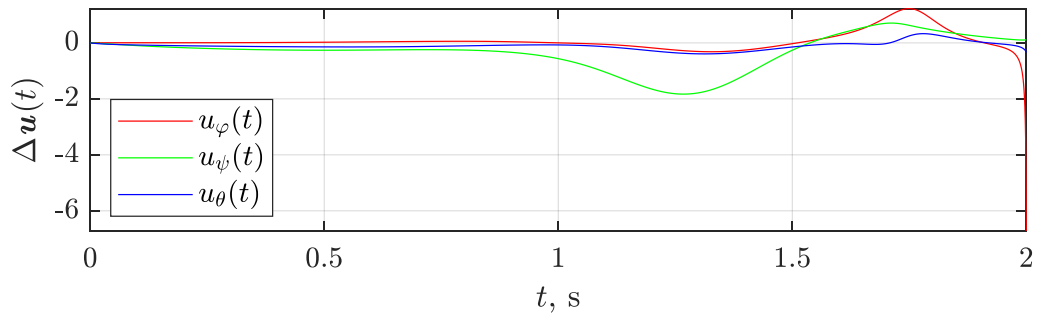
č.	V	δ	Q	R	$P(t_f)$	krit. u	krit. x
6	[20 20 20]	$2 \cdot 10^{-6}$	eye(6)	$0.1 \cdot \text{eye}(3)$	[50*eye(3),zeros(3); zeros(3),10*eye(3)]	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$
7	[20 20 20]	$2 \cdot 10^{-5}$	$10 \cdot \text{eye}(6)$	$0.1 \cdot \text{eye}(3)$	$5 \cdot \text{eye}(6)$	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$

Dále jsou ukázány regulační pochody, průběhy kompenzačních odchylek generovaných regulátorem a v některých zajímavých případech také průběhy pohybu robotické paže.



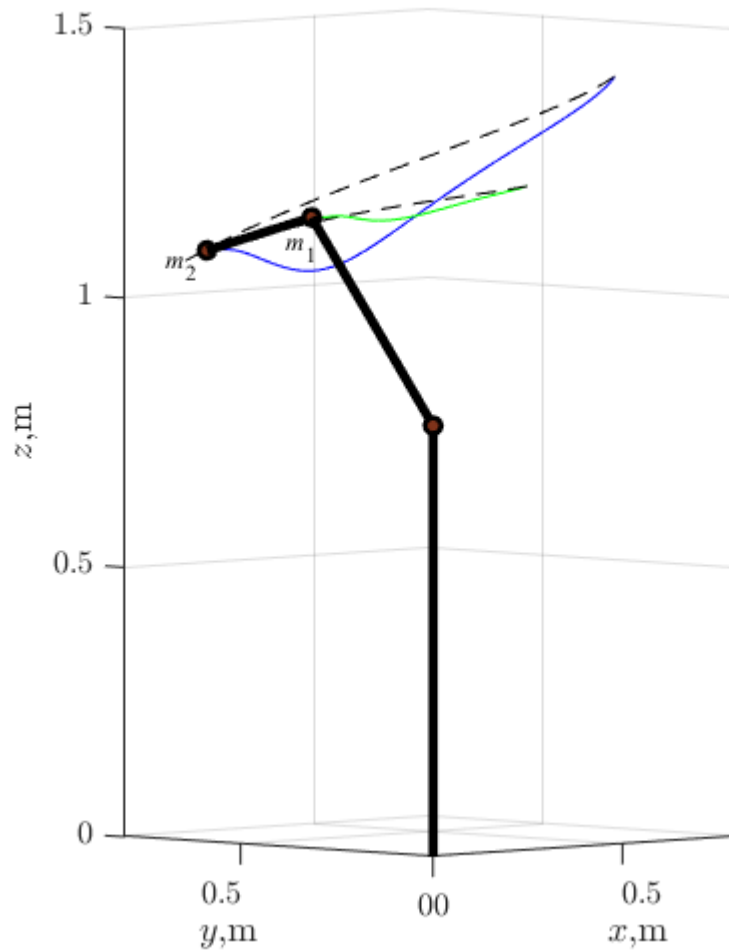
Obr. 3.1 – Regulace č. 1 – polohy kloubů robota

Jak je vidět z průběhu regulace $\theta(t)$, viz obr. 3.1, vynechání odporových koeficientů v modelu způsobí poměrně velký gravitační spád členu m_2 (pro lepší představu viz obr. 3.3), který je následně kompenzován regulátorem do požadované polohy.



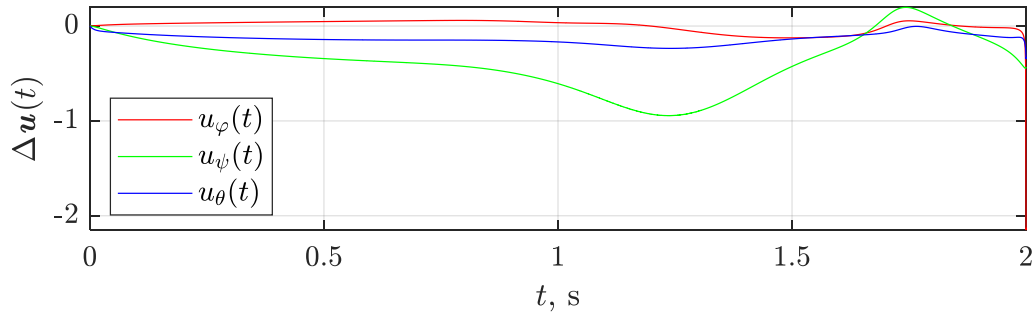
Obr. 3.25 – Regulace č. 1 – průběh kompenzačního zásahu

Z obr. 3.2 je vidět vliv matice terminálního členu na koncový průběh kompenzační odchylky, jež se snaží vyrovnat hodnoty stavů do požadovaných hodnot. Následuje obr. 3.3, který znázorňuje regulovaný pohyb robotické paže.



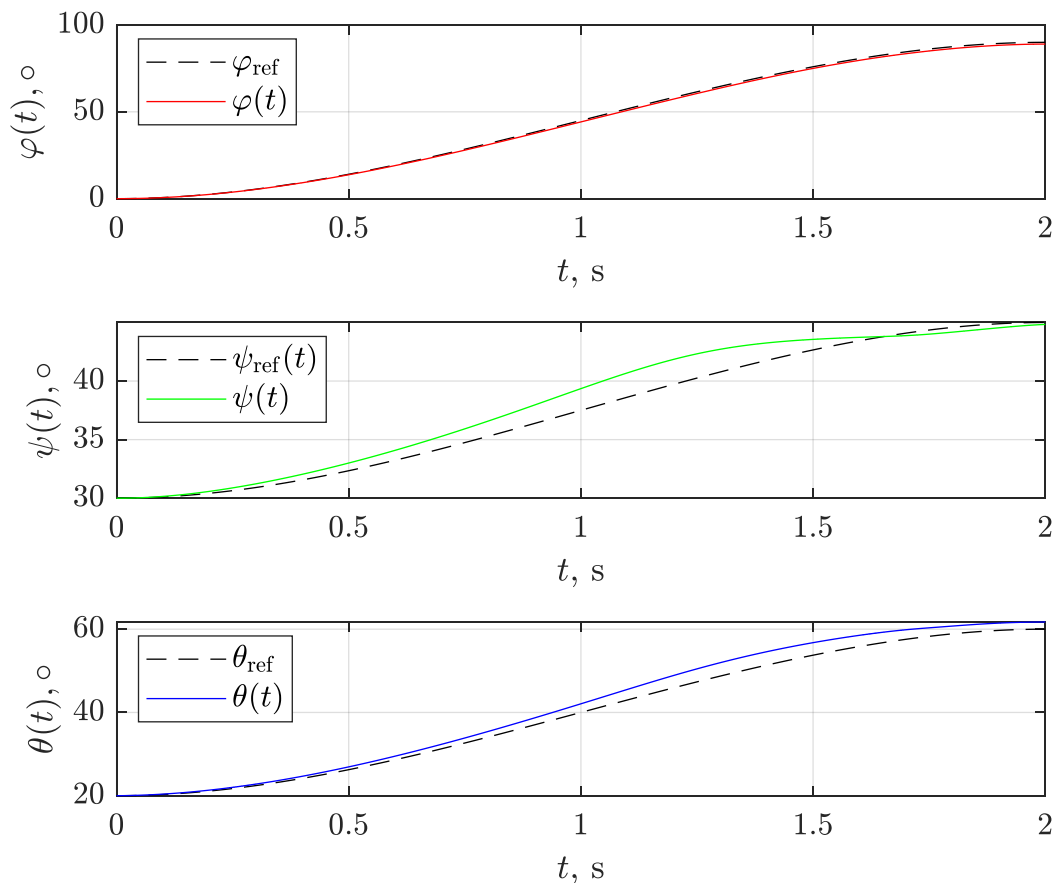
Obr. 3.3 – Regulace č. 1 – Znázornění pohybu robota

Dále je studován vliv změny matice řízení \mathbf{Q} oproti \mathbf{R} (hodnoty matice \mathbf{Q} jsou desetinásobně větší). Opět jsou vynechány odporové koeficienty. Průběh kompenzační odchylky je znázorněn na obr. 3.4.



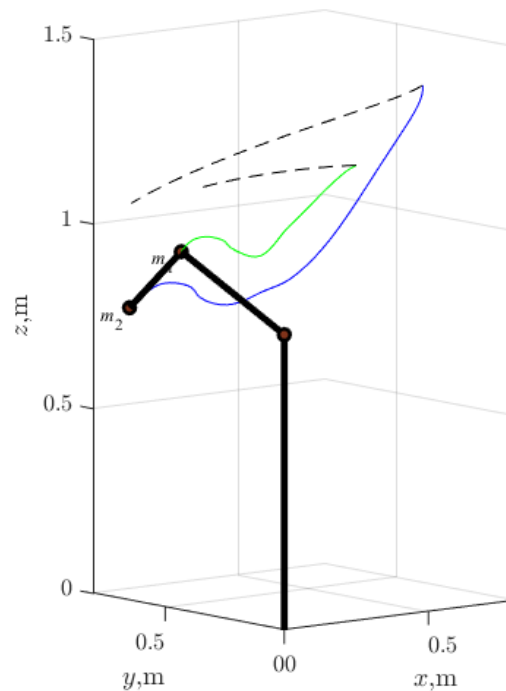
Obr. 3.4 – Regulace č. 2 – průběh kompenzační odchylky

Jelikož je nyní více váženo sledování stavů než velikost řídicích veličin, dochází k lepšímu průběhu regulace, viz obr. 3.5.



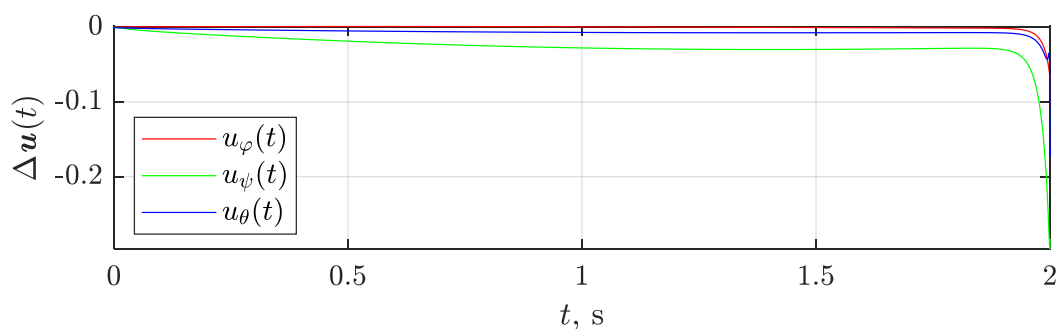
Obr. 3.5 – Regulace č. 2 – polohy kloubů robota

Dále je ukázán vliv zvýšení nepřesnosti na regulaci bez použití odporových koeficientů. Nepřesnost je zvýšena z hodnoty 0,8 kg na hodnotu 0,9 kg při zachování stejných parametrů řízení. Jak je vidět z obr. 3.6, regulátor není schopen regulovat pohyb ramene do požadované pozice i přes jeho snahu.

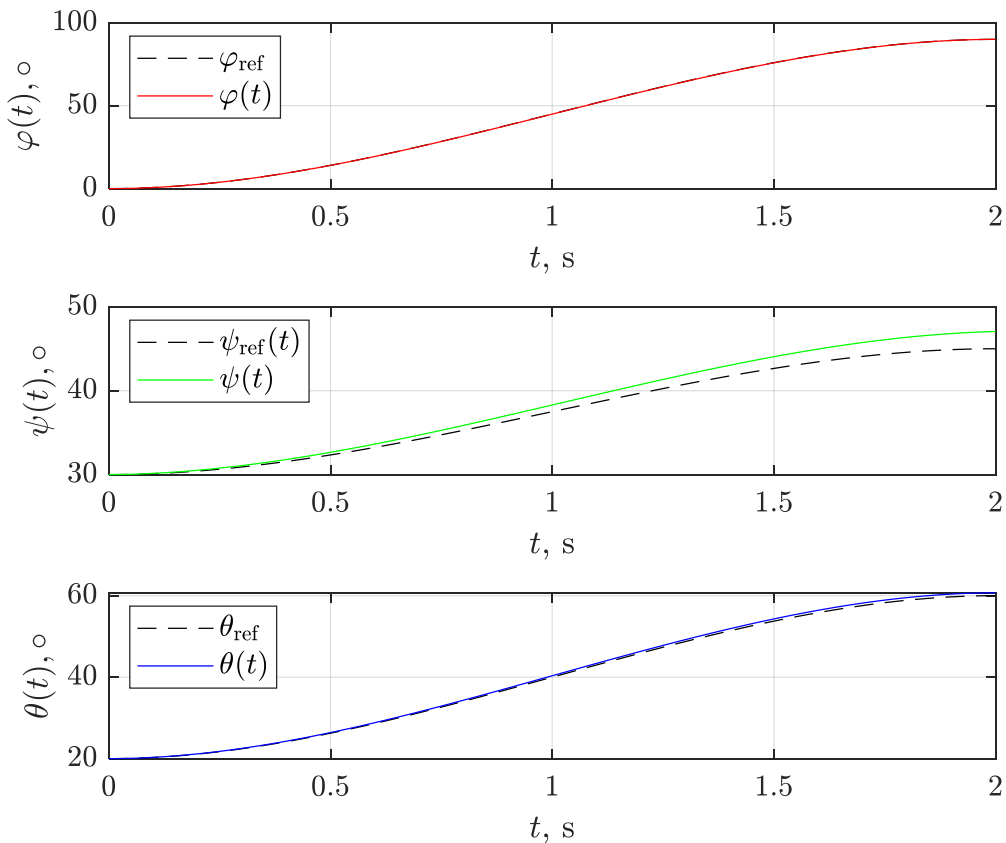


Obr. 3.66 – Regulace č. 2 se zvýšením nepřesnosti v hmotnosti m_2

U regulace č. 3 byly přidány odporové koeficienty s hodnotami $V = [20,20,20]$. Díky tomu je pohyb ramene tužší. Dále lze pozorovat změnu v průbězích kompenzačních odchylek a také v průbězích regulace.

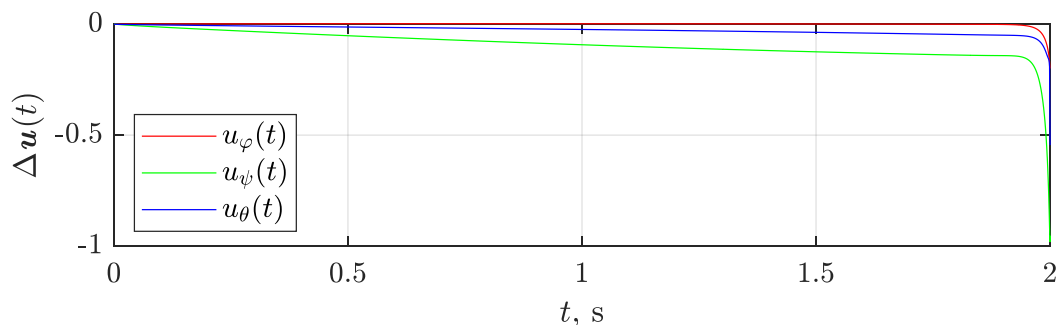


Obr. 3.77 – Regulace č. 3 – průběh kompenzační odchylky



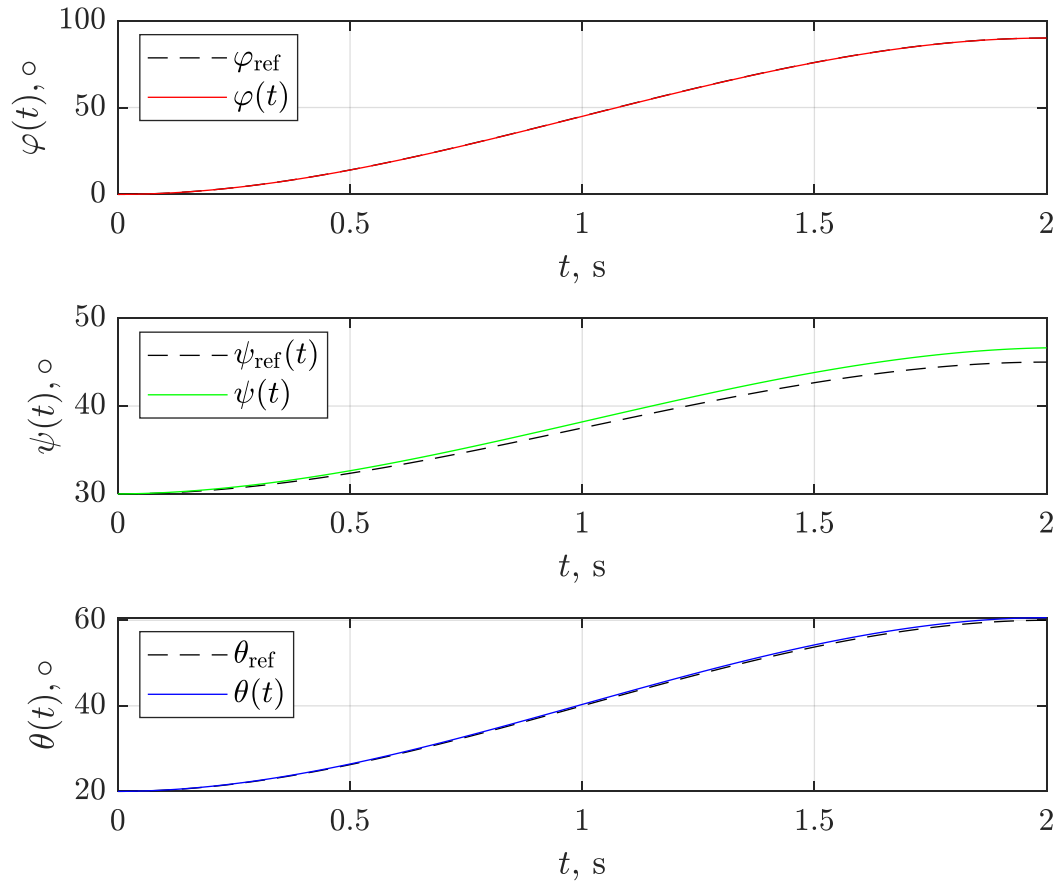
Obr. 3.8 – Regulace č. 3 – polohy kloubů robota

Dále je zkoumán vliv nastavení matice terminálního členu $\mathbf{P}(t_f)$. Pro další experiment jsou prvky matice terminálního členu zvětšeny desetinásobně, tedy na hodnotu $\mathbf{P}(t_f) = 10 \cdot \text{eye}(6)$. Díky tomu se s původním krokem simulace $\delta = 2 \cdot 10^{-4}$ vyskytly v simulaci singularity, a proto byl tento krok snížen o řád. Tím se protáhla doba simulace řádově do několika minut.



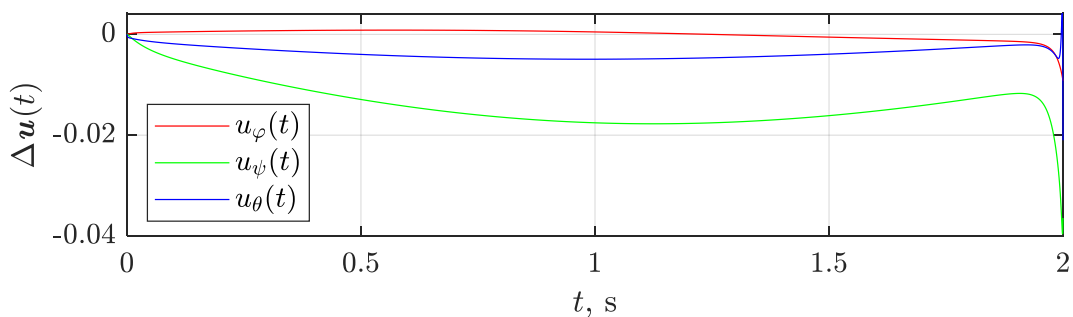
Obr. 3.9 – Regulace č. 4 – průběh kompenzační odchylky

Jak je vidět z obr. 3.9, desetinásobné zvětšení matice terminálního členu nemá oproti předchozímu nastavení patrný vliv na průběh kompenzační odchylky ani na regulační průběhy, viz obr. 3.10.

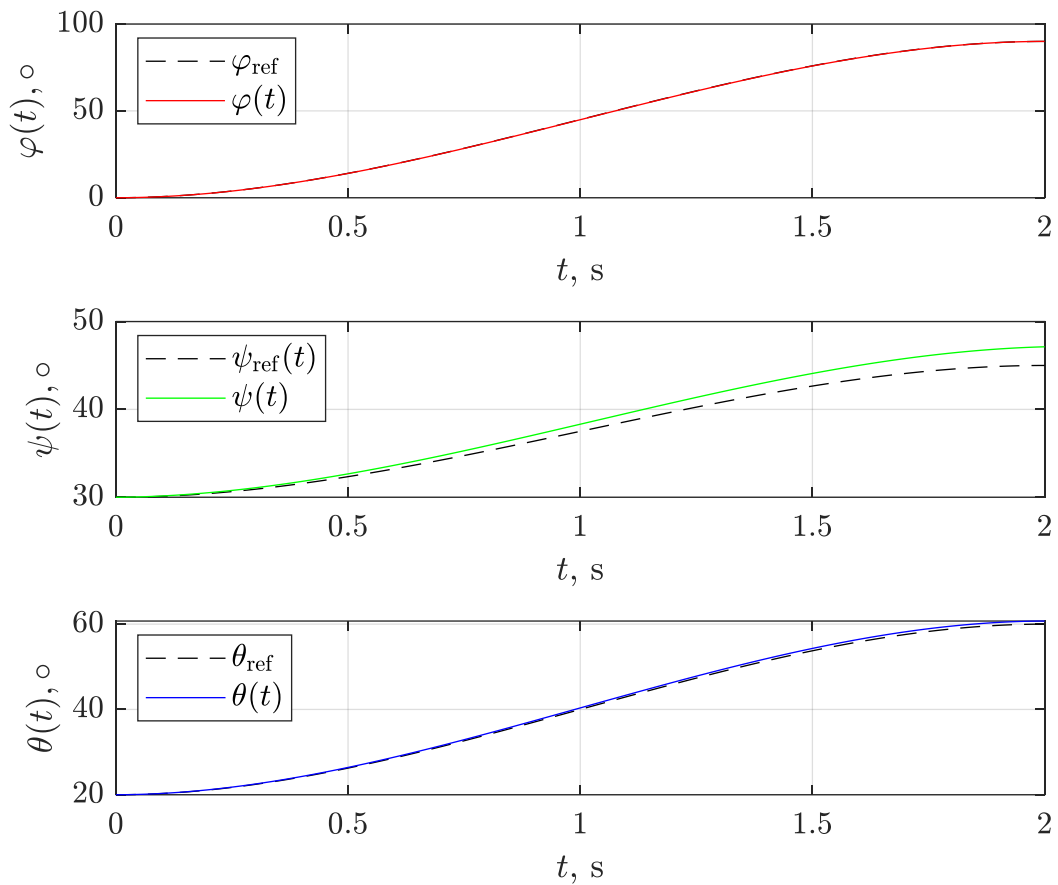


Obr. 3.10 – Regulace č. 4 – polohy kloubů robota

Dále je matice terminálního členu snížena desetinásobně, tedy na hodnotu $\mathbf{P}(t_f) = 0.1 \cdot \text{eye}(6)$. Tím je umožněno zmenšit také krok simulace, což urychlí celkovou dobu výpočtu simulace. Z obr. 3.11 a 3.12 je patrné, že je dosaženo podobné kvality řízení.



Obr. 3.11 – Regulace č. 5 – průběh kompenzační odchylky

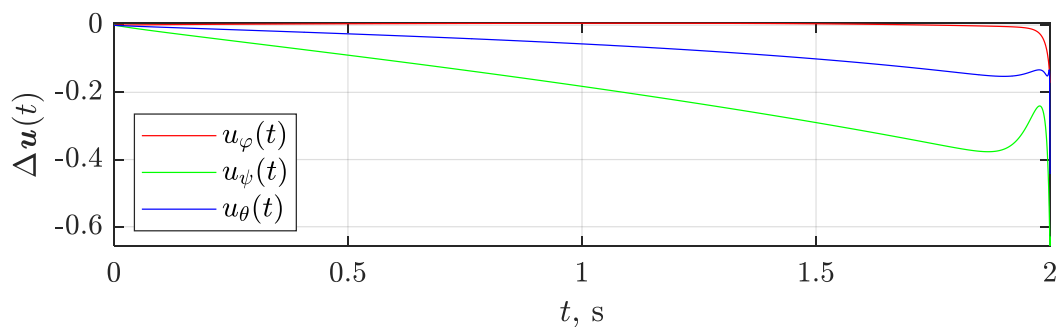


Obr. 3.128 – Regulace č. 5 – polohy kloubů robota

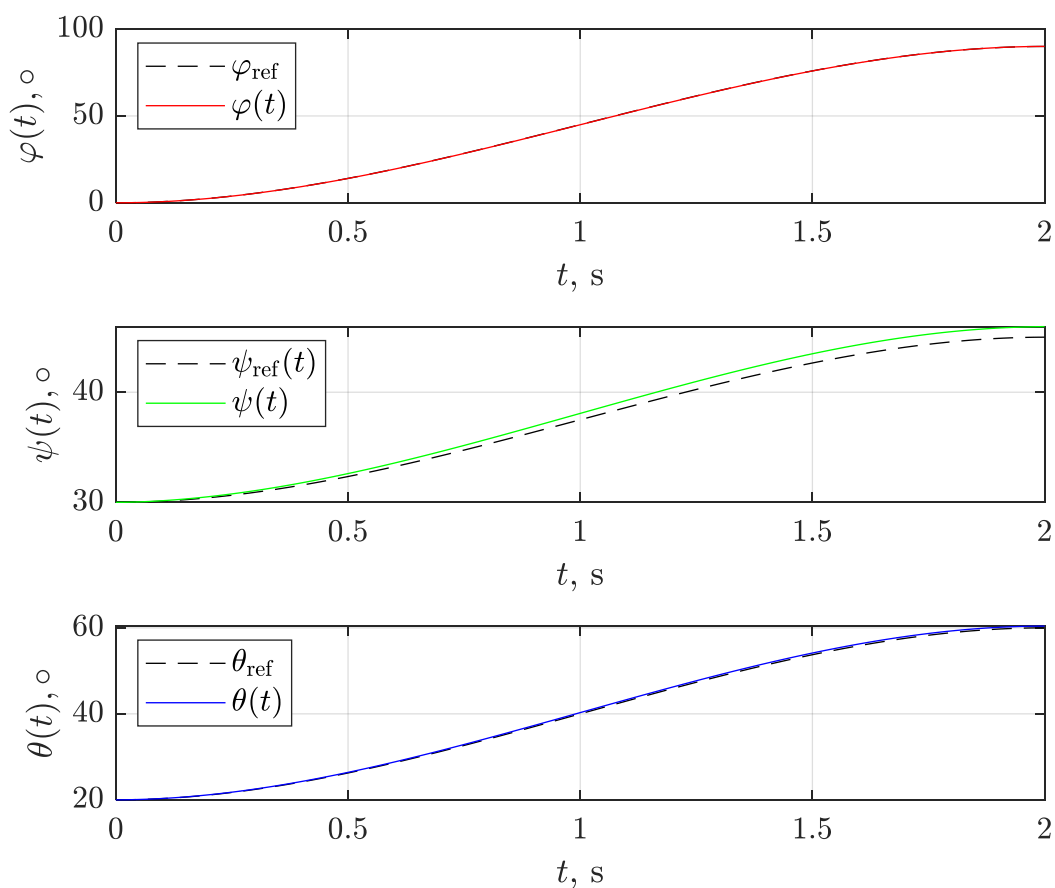
Pro další regulační experiment jsou zvoleny hodnoty matice terminálního členu $\mathbf{P}(t_f) = [50 \cdot \text{eye}(3), \text{zeros}(3); \text{zeros}(3), 10 \cdot \text{eye}(3)]$, které tvoří matici

$$\mathbf{P}(t_f) = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Pro tuto úpravu v nastavení regulátoru je potřeba zmenšit simulační krok (řádově na hodnotu $\delta = 2 \cdot 10^{-6}$), čímž se doba výpočtu simulace protáhla do několika minut. Výsledek regulace je přitom podobný, jako u předchozích nastavení, viz průběhy na obr. 3.13 a 3.14.

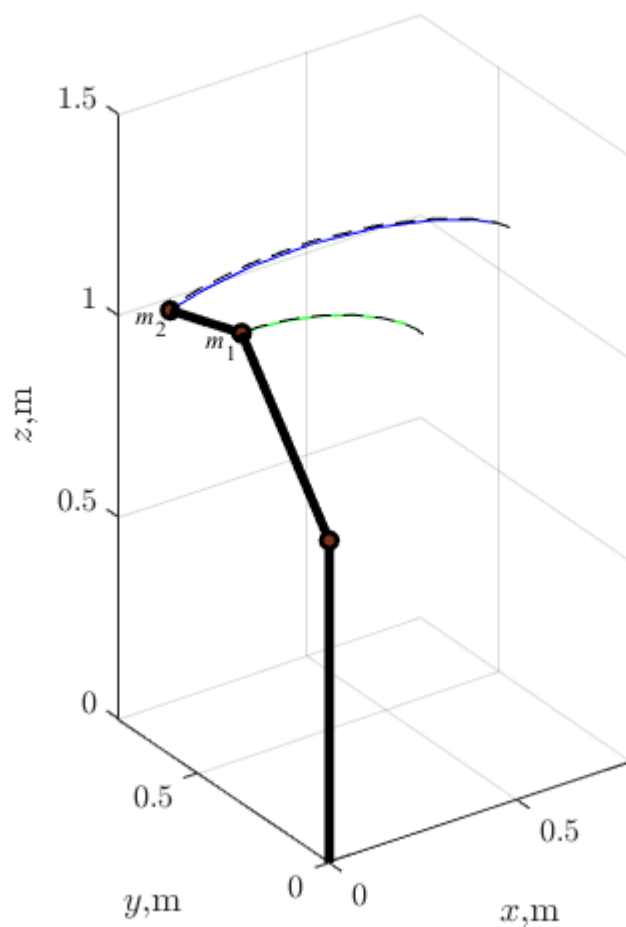


Obr. 3.13 – Regulace č. 6 – průběh kompenzační odchylky



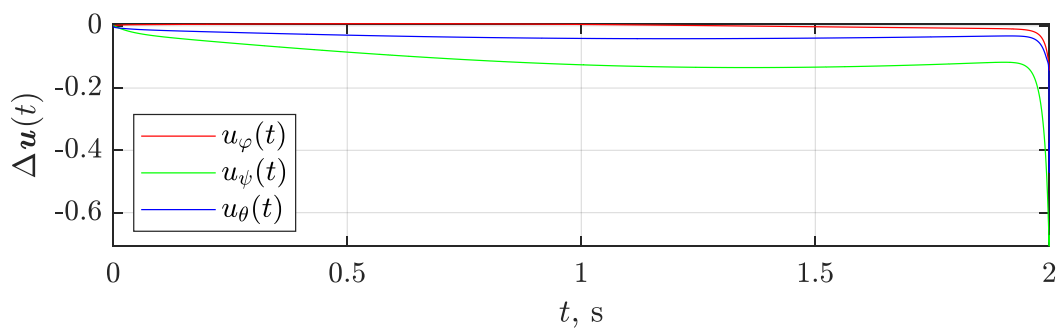
Obr. 3.149 – Regulace č. 6 – polohy kloubů robota

Na obr. 3.15 je znázorněn průběh regulovaného pohybu podle nastavení č. 6, viz tab. 3.1. Jak je vidět z výše uvedených průběhů, a pro názornost také z průběhu pohybu na obr. 3.15, je dosaženo poměrně kvalitního řízení za cenu dlouhé doby výpočtu. Proto je proveden poslední regulační experiment za cílem nalezení optimálního nastavení vzhledem k době výpočtu a k výsledkům regulace.

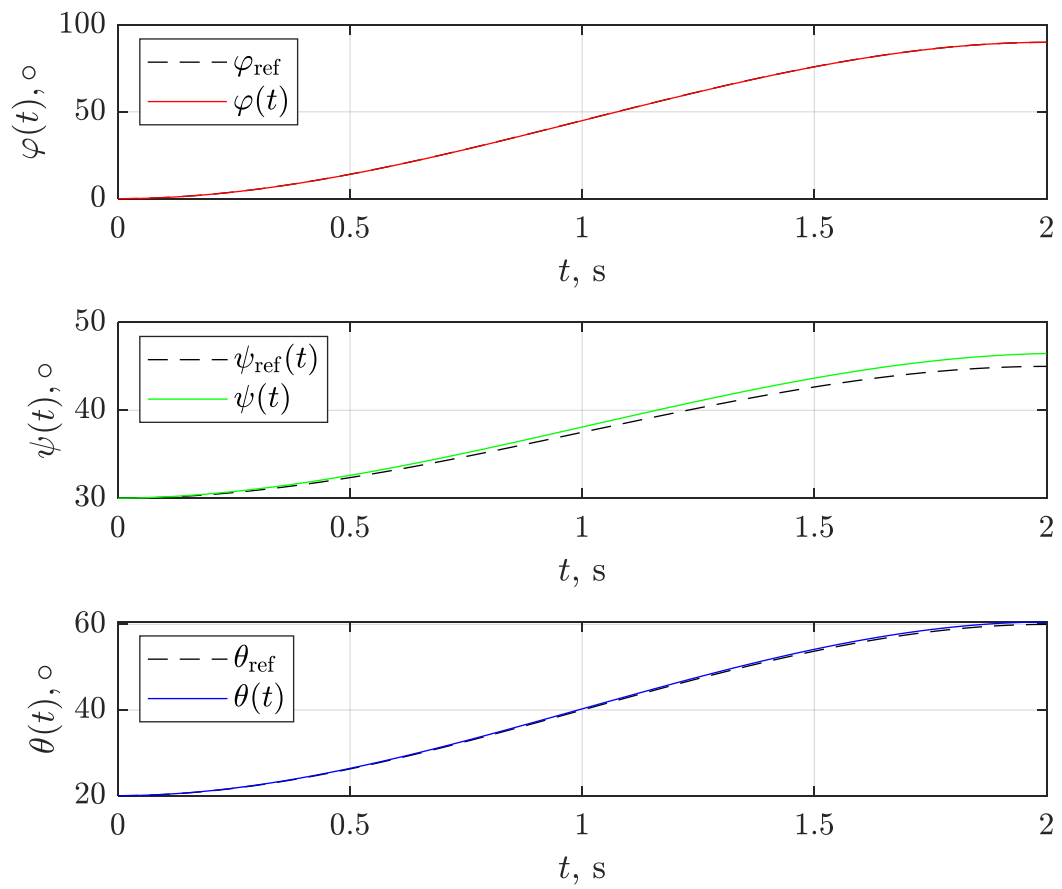


Obr. 3.15 – Regulace č. 6 – znázornění průběhu pohybu robota

Pro poslední nastavení regulátoru proběhne simulace řádově do desítek sekund. Porovnání kvalit regulačních experimentů pro různá nastavení lze porovnat z tab. 3.1.



Obr. 3.16 – Regulace č. 7 – průběh kompenzační odchylky



Obr. 3.17 – Regulace č. 7 – polohy kloubů robota

4 ZÁVĚR

Optimální řízení založené na linearizaci modelu robotické paže je poměrně komplikovanou metodou oproti klasickým způsobům řízení robotů, která umožňuje poměrně kvalitní způsob řízení. Robotickou paži bylo obecně možné regulovat do požadovaných pozic i se zavedenou nepřesností, vyjma regulace prvního členu m_1 , u kterého vznikala trvalá regulační odchylka i při zvýšení velikosti odpovídajícího prvku matice terminálního členu. Nevýhodou této metody řízení jsou výpočetní nároky, které stoupají se zvětšováním parametrů regulátoru. Při optimálním řízení se v každém kroku simulace do paměti ukládá řídicí matice, a proto s menším krokem simulace stoupají paměťové nároky řídicího algoritmu. Navíc, pro řádově nižší velikost kroku simulace jsou vypočítávány redundantní matice řízení, které na výsledný regulační děj nemají vliv, protože dynamiku robota nelze efektivně kompenzovat v takto krátkých úsecích.

Minimalizace kvadratického kritéria optimality vede na maticový stavový regulátor, který má parametry závislé na čase. Maticové regulátory byly vypočteny řešením Riccatiho rovnic, které byly řešeny metodou Runge-Kutta 4. řádu. Metoda RK4 dosahuje přesnějších výsledků než Eulerova metoda. Při použití RK4 byly vypočítávány regulátory pouze pro liché kroky simulace a regulátory v sudých krocích byly dopočteny průměrováním sousedních regulátorů v každém kroku k .

Se změnami váhových matic \mathbf{Q} a \mathbf{R} docházelo k obměnám v regulačních pochodech. Pokud jsou prvky \mathbf{Q} větší než prvky matice \mathbf{R} , dochází ke kvalitnější regulaci polohy. Dostačujícím poměrem velikostí prvků obou matic je 10:1. Se zvětšováním prvků matice \mathbf{Q} je však potřeba snižovat také krok simulace, aby bylo možné simulaci provést. Dalším nastavitelným parametrem regulátoru je matice terminálního členu $\mathbf{P}(t_f)$, která má vliv na regulaci koncového stavu. Čím větší jsou hodnoty této matice, tím lépe je koncový stav regulován, avšak je nutné opět snižovat krok simulace. S výrazným zmenšováním velikostí prvků matice terminálního členu dochází ke snížení kvality regulace.

Pro nízké hodnoty odporových koeficientů je regulace náročnější, jelikož mají osy robota volnější vůli a jsou tak více ovlivněny pohybovou setrvačností a tíhou. Model bez odporových koeficientů byl poměrně dobře řízen nastavením \mathbf{Q} na vysoké hodnoty oproti matici \mathbf{R} . S tímto nastavením však souvisí nastavení velikosti kroku simulace, protože pro vyšší hodnoty \mathbf{Q} bylo opět potřeba snižovat simulační krok a tím byly zvýšeny výpočetní nároky. Pro příliš velké nepřesnosti v modelu nebylo možné dosáhnout dobrého průběhu řízení.

POUŽITÁ LITERATURA

- CVEJN, J. 2016. *Průmyslové roboty*. Přednášky Fakulty elektrotechniky a informatiky. Univerzita Pardubice: Osobní sdělení.
- CVEJN, J. 2006. *Řízení procesů*. Přednášky Fakulty elektrotechniky a informatiky. Univerzita Pardubice: Osobní sdělení.
- CVEJN, J.; ZAPLETAL, M. 2019. *PID-Type Control of Robot Manipulators by Using Gravity and Inertial Effects Compensation*. In: *Proceedings of the 2019 22nd International Conference on Process Control*. New York: IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers). s. 49–54. ISBN 978-1-72813-758-2.
- SICILIANO, B. 2009. *Robotics: modelling, planning and control*. London: Springer. Advanced textbooks in control and signal processing. ISBN 978-1-84628-641-4.
- STENGEL, Robert F. 1994. *Optimal control and estimation*. New York: Dover Publications, ISBN 9780486682006.

Příloha k diplomové práci

Optimální zpětnovazební řízení ramene robota založené na linearizaci
matematického modelu

Bc. Michal Semonský

CD

Obsah

- 1 Text diplomové práce ve formátu PDF.
- 2 Úplný zdrojový kód a schémata řízení