UNIVERZITA PARDUBICE

FAKULTA EKONOMICKO-SPRÁVNÍ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2020 Anna Nováková

Univerzita Pardubice
Fakulta Ekonomicko-správní

Přiřazovací problém – teorie a praxe

Bakalářská práce

2020 Anna Nováková

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2019/2020

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	**Anna Nováková**
Osobní číslo:	**E17337**
Studijní program:	**B6208 Ekonomika a management**
Studijní obor:	**Ekonomika a provoz podniku**
Téma práce:	**Přiřazovací problém – teorie a praxe**
Zadávající katedra:	**Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Zásady pro vypracování

Cílem práce je vyzdvihnout důležitost korektního řešení přiřazovacích problémů při řízení podniku. Práce bude obsahovat teoretický popis přiřazovacího problému a popis metod řešení, které budou použity na řešení několika reálných problémů.

Osnova:
- Operační výzkum.
- Teoretický popis přiřazovacího problému z matematického hlediska.
- Metody řešení přiřazovacího problému.
- Řešené příklady popsanými metodami.
- Reálný příklad použití metod přiřazovacího problému v podniku.

Rozsah pracovní zprávy: **35**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

BRÁZDOVÁ, Markéta. Řešené úlohy lineárního programování. Vydání 2. opr. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2016. ISBN 978-80-7560-001-1.

JABLONSKÝ, Josef. Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování. 3. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3.

LINDA, Bohdan a Josef VOLEK. Lineární programování. Vydání 6., opravené a doplněné. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2016. ISBN 978-80-7560-018-9.

PELIKÁN, Jan a Vladislav CHÝNA. Kvantitativní management. Praha: Oeconomica, 2011. ISBN 978-80-245-1830-5.

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Jana Heckenbergerová, Ph.D.**
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání bakalářské práce: **2. září 2019**
Termín odevzdání bakalářské práce: **30. dubna 2020**

L.S.

doc. Ing. Romana Provazníková, Ph.D.
děkanka

doc. Ing. Marcela Kožená, Ph.D.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 2. září 2019

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji tímto, že jsem zadanou bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Jany Heckenbergerové, Ph.D. Veškeré literární prameny a další zdroje, které jsem v práci použila, jsou uvedeny v použité literatuře.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 7/2019 Pravidla pro odevzdávání, zveřejňování a formální úpravu závěrečných prací, ve znění pozdějších dodatků, bude práce zveřejněna prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 24. 05. 2020

Anna Nováková

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych ráda poděkovala své vedoucí bakalářské práce Mgr. Janě Heckenbergerové, Ph.D. za vstřícnost při konzultacích a za cenné rady, které mi pomohli tuto práci zkompletovat.

ANOTACE

Práce je zaměřena na stručný popis operačního výzkumu a lineárního programování. Hlavní část je zaměřena především na popis přiřazovacího problému, u kterého jsou popsány jeho metody řešení a jejich následná aplikace na jednoduchém příkladu. Cílem práce je vyzdvihnout důležitost korektního řešení přiřazovacího problému při řízení podniku.

KLÍČOVÁ SLOVA

operační výzkum, lineární programování, přiřazovací problém, Maďarská metoda, pěstování stromu, krycí čára, Řešitel

TITLE

Assignment problem - theory and practice

ANNOTATION

The thesis is focused on brief description of operational research and linear programming. The main part is mainly focused on the description of assignment problem, which describes its solution methods and their subsequent application on simple example. The aim of this work is to emphasize the importance of correct solution of assignment problem in company management.

KEYWORDS

operation research, linear programming, assignemnt problem, Hungarian method, growing tree, cover line, Solver

OBSAH

SEZNAM ILUSTRACÍ A TABULEK

Tabulky:

Obrázky:

ÚVOD

Cílem bakalářské práce je seznámit čtenáře s problematikou přiřazovacího problému a vyzdvihnout jeho důležitost při řízení podniku.

Práce bude rozdělena do dvou částí, a to teoretické a praktické. Jelikož je přiřazovací problém speciální úlohou lineárního programování, které je disciplínou operačního výzkumu, začátek práce bude zaměřen na operační výzkum. Tomu bude věnována první kapitola, ve které bude stručně popsána jeho historie, podstata a jeho současnost. Další kapitola bude zaměřena na lineární programování, jeho formulaci úloh a typy úloh tohoto programování. Třetí kapitola bude zaměřena už na samotný přiřazovací problém, v němž bude popsána Maďarská metoda pomocí tzv. růstu stromu a krycích čar a metoda Řešitele. Tyto metody budou následně prezentovány na jednoduchých příkladech tohoto problému.

Další část práce bude zaměřena na praktické využití přiřazovacího problému v podniku Mesa Parts s.r.o., ve které pomocí popsaných metod budou řešeny určité přiřazovací problémy.

1 Geneze operačního výzkumu

Operační výzkum je pojem velmi rozsáhlý, a proto není zcela možné konkrétně stanovit jeho vznik, jako samostatné vědní disciplíny. Zrod operačního výzkumu můžeme datovat do 30. a 40. let 20. století. Rozhodujícími roky pro genezi operačního výzkumu jsou léta 1936-1939, kdy existovala reálná možnost, že nastane válka. **[1], [2]**

Když, v roce 1936, rostla hrozba války, vznikla ve Velké Británii výzkumná stanice, kde pracovali vědci z různých oborů, kteří zkoumali, jak nejefektivněji bránit svoji vlast před německou vzdušnou silou. Před 2. světovou válkou zkonstruovali rádiové věže s efektivnějším umístěním antén, a tím vylepšili systém obrany proti nepřátelským letkám. Pojem *operational research*, údajně poprvé použil fyzik **Albert Percival Rowe** (1898-1976), k označení činností, které na této výzkumné stanici probíhaly. Byl nástupcem anglického fyzika **Roberta Watson-Watta** (1892-1973), který jako první na této stanici vedl veškeré výzkumné činnosti. **[2]**

Po zapojení USA do 2. světové války, v roce 1942, a spolupráci s Velkou Británií, byly vytvořeny týmy vědců, které měly za úkol analyzovat armádní operace a řešit jejich problémy z hlediska strategie a taktiky. Díky těmto skupinám, které se zaměřovaly na operační výzkum, bylo v průběhu 2. světové války vyvinuto lineární programování jako speciální disciplína operačního výzkumu. Tím došlo k rozvoji operačního výzkumu během 2. světové války a poté primárně v době poválečné tzn. v 50. letech, kdy nastal prudký rozvoj ekonomiky. Nepochybně hrál ve vývoji operačního výzkumu velkou roli i rozvoj výpočetní techniky. **[1], [2]**

1.1 Současnost operačního výzkumu

Operační výzkum se v současnosti neustále rozvíjí a jeho metody mají čím dál častější praktické využití. Jsou využívány v různých činnostech různých odvětví, u kterých je potřeba analyzovat problémy a zároveň efektivně uvádět prováděné operace do vzájemného souladu. Jelikož je v dnešní době kladen čím dál větší důraz na to, aby současná společnost hospodárně a efektivně fungovala, je aplikace této vědní disciplíny velice důležitá, a proto se konají mezinárodní konference a vydávají se odborné publikace s touto tématikou, kde si vědci a jiní odborníci z celého světa předávají nabyté zkušenosti a neustále se snaží operační výzkum zdokonalovat. Zároveň se na většině ekonomických vysokých školách tato vědní disciplína vyučuje. **[2]**

1.2 Předmět operačního výzkumu

Operační výzkum lze charakterizovat jako soubor samostatných vědních disciplín, které se, po využití modelů a vyčíslitelných matematických metod, orientují na analýzu a koordinaci. Z hlediska analýzy se řeší různé druhy problémů v rozhodování a z hlediska koordinace se bavíme o efektivitě ve vykonávání jednotlivých operací, které probíhají uvnitř určitého systému. Výsledkem je zajištění ideálního fungování tohoto systému s ohledem na všechna kritéria a omezení. Na jeho chod mají vliv, kromě kritérií a omezení čerpaných zdrojů, také vnější faktory, další operace, které systém provádí apod. Prakticky můžeme tuto disciplínu využít v mnoha oblastech, jednou z nich je například ekonomie a management. **[1], [2]**

Operační výzkum využívá různé nástroje, ovšem hlavním nástrojem je **matematické modelování.** Jestliže provádíme operační analýzu určitého systému, potom prostřednictvím této analýzy využíváme jeho model, který je pouze zjednodušenou formou reálného systému. **[1]**

1.3 Fáze operačního výzkumu při jeho aplikaci

Pokud řešíme věcný rozhodovací problém za použití operačního výzkumu lze jeho aplikaci rozdělit do několika fází.

1. **Zjištění a definování problému v reálném systému** patří mezi první kroky při aplikaci modelů tohoto výzkumu. V této části je potřeba se zaměřit na vedoucí pracovníky, kteří by měli se svými schopnostmi rozeznat problém, poté pro jeho analýzu posoudit v jaké míře je potřebný modelový přístup a eventuelně zajistit kompetentní odborníky, kteří se této analýzy budou účastnit.
2. **Definování modelů daného systému.**
   a) Nejprve definujeme **ekonomický model** určitého problému. U reálného systému není možné vymodelovat všechny jeho části, jelikož je velmi složitý. Ovšem během zkoumání problému se ukazuje, že není potřeba brát v úvahu všechny složky systému.

      Ekonomický model nám popisuje reálny systém, ale velmi zjednodušeně. Takovýto systém obsahuje pouze ty nejdůležitější složky a jejich vazby.

   b) Poté definujeme **matematický model** určitého problému. Jelikož je ekonomický model číselným a slovním popisem konkrétního problému, je třeba ho převést z ekonomického modelu na matematický, který se dá vyřešit běžnými postupy.

3. **Získání výsledků z matematického modelu** je otázka spíše technická. Využívají se zde metody a postupy operačního výzkumu.
4. Dostáváme se k důležité části aplikace modelů, kterou je **interpretace výsledků a jejich verifikace.** Jde o výsledky získané z matematického modelu a ověření jejich správnosti. V této části se ukazuje, že hlavním problémem není technické zpracování ani samotný výpočet, ale objasnění a zejména verifikace vzniklých výsledků. Tou ověříme správnost provedení ekonomického a matematického modelu. Pokud se však zanedbají, při sestavování modelu, některé z důležitých složek systému, může vyjít výsledné řešení jako optimální z hlediska konkrétního modelu, ale nepoužitelné z hlediska praxe.
5. Pokud při ověření správnosti výsledků vyjde řešení jako optimální, můžeme přejít k následné **implementaci** analyzovaného reálného systému. Výsledkem úspěšné implementace by mělo být, vzhledem k definovanému cíli, zvýšení efektivnosti konkrétního systému. **[1]**

1.4 Klasifikace modelů operačního výzkumu

Operační výzkum využívá modely, které slouží k zobrazení důležitých vlastností systému, který je modelován.
Jelikož je i sám model součástí tohoto světa, je bohužel nemožné, aby zobrazil celý svět se všemi jeho vlastnostmi. Je možné, že reálný svět obsahuje nekonečně vlastností, a proto je při tvoření modelu podstatné, abychom z vlastností, která nám jsou známá, zvolili ty, které zvládneme zpracovat, a které pomohou daný problém efektivně vyřešit.

Model obsahující velké množství vlastností se těžce sestavuje a práce s ním je velmi náročná. Naopak model, který obsahuje málo vlastností je po pracovní stránce relativně nenáročný, avšak není tak přesný.

Model je možné různě zkoumat, experimentovat s ním, optimalizovat jeho kritéria a další. Výsledky, které modelování přinese, je důležité následně přenést opět do reálného světa. Jde o převedení výsledků zkoumání, které jsou v modelovém jazyce, nazpět do reálného problému, následně jde o to prosadit tyto výsledky a poté je realizovat.

Druhy modelů:

- **Modely fyzikální** – jedná se o modely různých objektů v malém měřítku. Jako příklad můžeme uvést prototypy různých částí letadel nebo automobilů v aerodynamickém tunelu, kde se zkoumají jejich funkční vlastnosti v nasimulovaném proudu větru.

- **Modely matematické** – tyto modely prostřednictvím matematických vztahů modelují části reálného světa. Jsou velice různorodé.
- **Modely vyhodnocovací** – ve velké většině je zobrazují vzorce nebo rovnice. Jedná se o výpočet veličin, které neznáme, z veličin, které známe.
- **Modely optimalizační** – jak už nám napovídá samotný název, jde o nalezení optimálního řešení prostřednictvím optimalizačních úloh.
- **Modely simulační** – v tomto modelu jsou události, z hlediska času, uspořádány tak, jak po sobě následují ve skutečném světě a tím pádem zde mohou mít děje podobný průběh jako ve skutečnosti.

  S tímto modelem můžeme i experimentovat, což lze použít například při zjišťování optimálních kritérií modelu.

  Simulační modely lze dělit na fyzikální a počítačové a dále na deterministické a stochastické, kdy deterministické modely nepoužívají náhodu a stochastické ano. **[3]**

1.5 Disciplíny operačního výzkumu

Vzhledem ke skutečnosti, že jsou modely operačního výzkumu velice rozmanité a zaměřené na různé části ekonomiky, vznikly s postupem času různé disciplíny pro řešení různých problémů.

Následující výčet disciplín samozřejmě neobsahuje všechny, budou tu však vyjmenovány ty, které jsou nejpoužívanější.

- **Matematické programování** se zabývá sestavením a řešením matematické optimalizační úlohy, pomocí níž se hledá optimálního řešení daného kritéria formulovaného kriteriální funkcí podmíněnou omezujícími podmínkami, a to v podobě nelineárních nebo lineárních rovnic, popřípadě nerovnic.

  Pokud jsou omezující podmínky i kriteriální funkce lineární, jedná se o úlohu lineárního programování (viz kap. 2), jejichž aplikace je velmi častá. Pokud ovšem bude přinejmenším jedna funkce nelineární, budeme se bavit o úloze nelineárního programování, u kterých je řešení velmi problémové, a proto nejsou tolik obvyklé.
- **Vícekriteriální rozhodování** je disciplína, která analyzuje rozhodovací úlohy, které jsou recenzovány více jak jedním hodnotícím kritériem najednou. Cílem analýzy těchto úloh je řešení rozporu kritérií, která jsou typicky navzájem protikladná.
- **Teorie grafů** je v praxi velmi často používanou disciplínou. Jde o objekty vytvořené množinou uzlů a hran (grafy). Těmito grafy je možné znázorňovat reálné systémy jako

je například řízení projektů. Zde hrany grafu reprezentují činnosti, které daný projekt tvoří a jsou ohodnoceny například časovým údajem trvání činnosti nebo velikostí nákladů nutných k jejich provedení. Výsledkem analýzy je poté rozbor, z hlediska času nebo nákladů, potřebný k uskutečnění tohoto projektu.

- **Teorie zásob** se zabývá řízením zásob, optimalizováním jeho procesů a objemu zásob na skladě. Jde hlavně o dosažení minimálních nákladů spojených s objednáváním zásob, jejich udržováním na skladě a vydáváním.
- **Teorie hromadné obsluhy (teorie front)** se zabývá zefektivněním systémů, ve kterých nacházejí požadavky a obslužné linky. Požadavek je jednotka, která do systému vstupuje a potřebuje obsluhu, k čemuž slouží, už zmíněné, obslužné linky. Teorie front je název, který vyplývá z nutnosti vytváření front při obsluze požadavku. Tato teorie je používána ve snaze vyřešit rozpor mezi mírou využití obslužných linek a časem, kdy požadavky čekají ve frontě na vyřízení.
  Příkladem tohoto systému mohou být supermarkety, banky, pošty, výrobní linky apod.
- **Modely obnovy** se zabývají systémy, u kterých, po nějakém čase, dochází k selhání některých jeho prvků v důsledku provozu. Zkoumáním systémů, tímto modelem lze odhadnout stáří prvků a dobu, ve které bude nutné je nahradit či vyměnit. Doba jejich životnosti je náhodnou veličinou.
- **Markovské rozhodovací procesy** se zabývají způsobem popisu chování systémů, které se v určitém čase nachází v některém z možných stavů. Změna takovýchto stavů závisí na tom, jak se zachová uživatel. Cílem tohoto procesu je odhad toho, jaké chování budou vykazovat tyto systémy.
- **Teorie her**, v rozhodovacích situacích, zkoumá a formuluje jejich nejvýhodnější strategie. Tyto situace, které mají více rozhodovatelů, můžeme brát jako hru, kde každý rozhodovatel vlastní určitou strategii chování, na kterých závisí, kdo vyhraje.
- **Simulace**. Jedná se o experimentování s modelem určitého systému, které probíhá na počítači. Dobu, při které simuluje ekonomické procesy počítač, nelze srovnávat s dobou, při které probíhají tyto procesy v reálném systému. Zpravidla čas při simulaci probíhá rychleji než ve skutečnosti, a tím napomáhá k optimalizaci systému. K těmto simulacím jsou potřebné velmi výkonné počítače a speciální softwary. **[1]**

2 Lineární programování

Pokud se zaměříme na samostatné lineární programování a jeho historii, je dnes uznáván jako jeho průkopník sovětský matematik **Leonid V. Kantorovič** (1912-1986). Ten ve své odborné publikaci, z roku 1939, *Matematické metody organizace a plánování výroby* jako první definoval základní myšlenky lineárního programování, a to za pomoci lineárních vztahů. Také v této práci popsal z matematického hlediska přiřazovací problém s navržením jeho výpočtu a praktickým využitím. **[2]** Poté se v roce 1941 anglický matematik **F. L. Hitchcock** (1875-1957) zaobíral problémy v oblasti optimalizace, které vedly k formulování dopravní úlohy. O významný rozvoj lineárního programování se zasloužil především americký matematik **George. B. Dantzig** (1914-2005), který ve spolupráci s dalšími vědci (R. Hurwitz, T. S. Koopmans) definoval univerzální úlohu lineárního programování a poté se mu podařilo vyvinout simplexovou metodu, která tyto úlohy byla schopna řešit. **[4]**

Lineární programování je jedna z disciplín operačního výzkumu, na které nejčastěji narazíme v ekonomické praxi. U tohoto typu programování matematický model úloh obsahuje účelovou (kriteriální) funkci a omezení úloh představují lineární rovnice a lineární nerovnice. **[2]**

Toto programování plánuje realizace jistých činností, které v daném systému probíhají nebo v něm mohou začít probíhat. Tímto způsobem se snaží o nalezení optimálního řešení vzhledem k jeho definovanému cíli. **[1]**

V obecném zápisu matematického modelu úlohy lineárního programování budeme označovat:

„n – počet strukturních proměnných modelu,

m – počet vlastních omezení,

c_j, – cenový koeficient příslušející j-té proměnné (j = 1,2, …, n),

b_i, – hodnota pravé strany příslušející i-tému vlastnímu omezení (i = 1,2, …, m),

a_{ij}, – strukturní koeficient vyjadřující vztah mezi i-tým činitelem a j-tým procesem

(i = 1,2, …, m, j = 1,2, …, n).“

Obecný zápis matematického modelu úlohy lineárního programování zapíšeme následovně:

„maximalizovat (minimalizovat)

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \,, \tag{2.1}$$

za podmínek

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \quad \leq b_1 \,, \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \quad \leq b_2 \,, \\
&. \\
&. \\
&. \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \quad \leq b_m \,, \\
&x_j \geq 0 \,, j = 1,2, \dots, n."
\end{aligned}$$

Samozřejmostí je, že tyto podmínky mohou obsahovat jak nerovnice (≤, ≥) tak i rovnice (=).

Zápis za pomocí sumací zapíšeme následovně:

„maximalizovat (minimalizovat)

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,, \tag{2.2}$$

za podmínek

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \,, \qquad && i = 1,2, \dots, m \,, \\
&x_j \geq 0 \,, && j = 1,2, \dots, n \,.“
\end{aligned}$$

Maticový zápis zapíšeme následovně:

„maximalizovat (minimalizovat)

$$z = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \tag{2.3}$$

za podmínek

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\ ,$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\ ,\text{“}$$

kde $\mathbf{c}^{\mathbf{T}} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ je n – složkový řádkový vektor cenových koeficientů,

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ je n – složkový sloupcový vektor strukturních proměnných modelu,

$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ je m – složkový sloupcový vektor hodnot pravé strany,

$\mathbf{0} = (0, 0{,}0 \ldots{,}0)^T$ je n – složkový sloupcový nulový vektor,

A je matice strukturních koeficientů o rozměru m x n.“ **[1, s. 23-24]**

2.1 Formulace úlohy lineárního programování

Aplikace lineárního programování vyžaduje několik kroků, mezi které patří definování určitého problému ekonomickým modelem a následně matematickým modelem. Formulování těchto modelů se řadí k jednomu z podstatných kroků.

Matematický model hledá extrém (maximum/minimum) lineární funkce, kde strukturní proměnné reprezentují procesy ekonomického modelu. Vlastní omezení lineárního programování nám představují lineární rovnice či nerovnice, v kterých jsou obsaženy jak strukturní koeficienty (vztah činitelů a procesů), tak hodnoty na pravých stranách (absolutní úroveň činitelů).

Jelikož je definování ekonomického modelu velice složité, a je k němu zapotřebí mít kvalitní poznatky o reálném ekonomickém systému, budeme vycházet z toho, že tento model určitého problému už máme formulovaný i slovně popsaný. Informace obsažené v ekonomickém modelu, je potřeba proměnit do podoby vhodné pro matematický model. Lze postupovat následovně:

1. Nejprve musíme **identifikovat rozhodovací proměnné,** a to z hlediska jejich počtu, významu a fyzikálního rozměru. Takto určené rozhodovací proměnné, nám pomohou správně sestavit matematický model. Tyto proměnné nám v určitém systému představují procesy, které v něm probíhají.
2. V dalším kroku **definujeme optimalizační kritérium (účelová funkce)**.
3. V posledním kroku **identifikujeme omezující podmínky (činitele modelu)**, jejich **pravé strany** a posléze identifikujeme **strukturní koeficienty**. **[1]**

2.2 Úlohy lineárního programování

- **Úlohy výrobního plánování** mají za úkol optimálně stanovit sortiment výroby. Touto optimalizací se má namysli dosažení buď maximálního zisku nebo minimálních nákladů, a to za předpokladu, jak omezujících podmínek, tak proměnných, které nejčastěji představují objem produkce určitého výrobku.
- **Směšovací problém** se zabývá vytvořením určité směsi z nabízených jednotlivých složek (komponent). Proměnné reprezentuje kvantum použitých komponent a omezující podmínky těchto úloh představují vlastnosti, které chceme, aby konečná směs měla. Cílem je vytvoření optimální směsi za předpokladu minimalizace nákladů nebo maximalizace zisku.
  - **Nutriční problém** je speciálním typem úlohy směšovacího problému. Jde o návrh denního nutričního příjmu, pro určitého člověka, který může zahrnovat spoustu různých komponent se specifickým složením. Proměnnými zde bude počet komponent zahrnutých do denní dávky výživy a omezujícími podmínkami budou většinou nároky na minimalizaci, popřípadě maximalizaci úrovně těchto komponent. Cílem by mohlo být minimalizování ceny denního nutričního příjmu.
  - **Úlohy finančního plánování** neboli úlohy optimalizace portfolia. Tato úloha má za cíl stanovit objem investic do dílčích investičních variant za účelem dosažení maximálního očekávaného výnosu nebo minimalizování rizik. Objemy investic zde představují proměnné modelu, a to ať už v absolutních číslech nebo v procentním vyjádření. Omezujícími podmínkami jsou investiční strategie limitující výši investic do jednotlivých dílčích typů investičních variant.
  - **Plánování reklamy** je jednou z marketingových aplikací lineárního programování. Tato úloha se zabývá rozdělením rozpočtu určeného na reklamu do jednotlivých médií nebo rozdělení v rámci času. Proměnné zde mohou představovat to, kolikrát se bude daná reklama opakovat v určitém médiu. Omezující podmínky vyplývají například z reklamní strategie, z rozpočtu, který je vymezený apod. Cílem je určit počet vysílání reklamy pro určitou skupinu jedinců, tak aby byl vliv reklamy na tuto skupinu maximalizován.
- **Úlohy o dělení materiálu** řeší problém při rozdělení materiálu s ohledem na minimalizaci vzniku zbytečného odpadu. Úlohy mohou mít charakteristiku dělení jednorozměrnou (rozřezání pásů, tyčí apod.) či dvojrozměrnou (z většího celku vyříznutí menšího dílu). **[1]**

- **Řezný plán** vždy řeší jednorozměrné dělení materiálu. Proměnnými rozumíme způsoby, kterými lze materiál rozdělit, jejichž hodnoty udávají kolikrát se tyto způsoby použijí. Omezující podmínky jsou vytvořeny z požadavků na množství určitých částí, které jsou potřeba rozřezat.
- **Problém batohu** je variantou více komplikovanou, která má za úkol zajistit efektivní využití omezeného prostoru. **[2]**

* **Rozvrhování pracovníků** je úloha, která se zabývá rozdělením zaměstnanců na určité směny, přičemž její omezující podmínky vznikají například z určitého počtu zaměstnanců, kteří musí na směně pracovat, z odborné způsobilosti pracovníků apod. To, jestli pracovník bude působit v rámci dané směny či nikoli, nám představuje hodnota proměnné, vyjádřená buď 1 nebo 0.
* **Distribuční úlohy**
  - **Dopravní úlohy** mají za cíl naplánovat distribuci zboží od dodavatele k odběrateli tak, aby byly náklady na distribuci co nejnižší. Matematický model dopravní úlohy bude obsahovat vlastní omezení a proměnné, které budou představovat množství zboží, které je přepravováno.
  - **Přiřazovací problém** má za cíl jednoznačně přiřadit dvě skupiny prvků tak, aby toto přiřazení bylo nejefektivnější (viz kap. 3).
  - **Okružní dopravní problém (úloha obchodního cestujícího)** má za cíl určit nejkratší trasu, kterou se navštíví všechna potřebná místa právě jednou, s tím, že trasa začíná a končí na stejném místě. Tento problém lze reálně aplikovat všude tam, kde se pravidelně rozváží jakékoli výrobky a služby. **[1]**
  - **Kontejnerový dopravní problém** je upravený dopravní problém, ve kterém se platí za přepravu kontejneru (např. kamionu) se zbožím, a ne za jednotky tohoto zboží. Nehraje zde roli množství přepravované v kontejneru. Každý kontejner má stanovenou cenu a je nepodstatné, zda je zcela naplněn nebo pouze zčásti.
  - **Obecný distribuční problém** je další upravený dopravní problém, u kterého je zapotřebí použít i převodní koeficienty, jelikož se v tomto problému jednotky kapacit dodavatelů a jednotky nároků odběratelů liší. **[5]**

3 Přiřazovací problém

Jedná se o speciální úlohu lineárního programování, konkrétně o jednu z distribučních úloh. U tohoto problému jde o jednoznačné a zároveň nejefektivnější přiřazení jedné skupiny prvků k druhé skupině prvků s tím, že obě tyto skupiny mají stejný počet jednotek.

Pokud se stane, že tyto skupiny stejný počet jednotek nemají, je možné přidat do jedné z nich fiktivní prvky tak, aby se počet prvků v těchto skupinách vyrovnal. **[1], [6]**

Za předpokladu, že přiřazovací problém obsahuje stejný počet řádků a sloupců, a za podmínky, že se součty v těchto řádcích i sloupcích rovnají jedné, kdy jsou hodnoty proměnných obsažených v tabulce buď nula nebo jedna, lze obecný matematický výpočet zapsat následovně:

„minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{3.1}$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1,2,\dots,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1,2,\dots,n,$$

$$x_{ij} = 0\ (1), \qquad i = 1,2,\dots,n, \ \ j = 1,2,\dots,n."$$ **[1, s. 109]**

Pojmy:

- **Přípustné řešení** představuje libovolné prvky, jejichž počet je shodný s rozměrem matice a zároveň se každý z těchto prvků nachází v každém řádku i sloupci právě jednou.
- **Optimální řešení** je takové přípustné řešení, jehož součet prvků (účelová funkce) je minimální.

Můžeme narazit i na maximalizační úlohu přiřazovacího problému. Takovouto úlohu lze převést na minimalizační tak, že matici přiřazovacího problému vynásobíme číslem (-1). Nově vytvořená matice představuje minimalizační úlohu přiřazovacího problému. **[4]**

V rámci praktického využití se v různých podnicích jedná např. o zjištění nejefektivnějšího přiřazení policejních jednotek k určitým zásahům, nejefektivnější a nejkratší přesun bagrů z jednoho stanoviště na stanoviště nová, nejoptimálnější přiřazení pracovníků na určitá pracovní pozice, nejkratší a nejefektivnější přesun strojů v podniku na konkrétní místa a nákladovost procesů u různých strojních zařízení.

Metoda, kterou se řeší přiřazovací problém se nazývá Maďarská metoda, která bude popsána v kapitole 3.1. Ovšem reálné případy lineárního programování je nutné řešit pomocí různých softwarů, proto bude také popsáno softwarové řešení v MS Excel tzv. Řešitel, a to v kapitole 3.3.1.

3.1 Maďarská metoda

Tato metoda se využívá za předpokladu, že je přiřazovací problém minimalizační, je definován maticí prvků (hodnocení, náklady apod.) a tyto prvky jsou nezáporné. **[4]**

3.1.1 Postup řešení pomocí pěstování stromu

1. Pokud matice přiřazovacího problému obsahuje záporné prvky, musíme nejprve tyto **záporné prvky odstranit**. Jestliže je v řádku, resp. sloupci, jeden záporný prvek, je potřeba k jeho odstranění přičíst k danému řádku (sloupci) jeho absolutní hodnotu. Obdobně pokud je v řádku, resp. sloupci, více záporných prvků, odstraníme je tak, že k řádku (sloupci) přičteme nejmenší absolutní hodnotu z těchto prvků.
2. Pokud všechny řádky i sloupce matice neobsahují alespoň jednu nulu, je potřeba tyto **nuly vytvořit (redukovat matici)**. V matici přiřazovacího problému vyhledáme řádky, resp. sloupce, ve kterých není obsažena ani jedna nula a následně od každého z těchto:
   a) řádků odečteme nejnižší prvek, který danému řádku náleží,
   b) sloupců odečteme nejnižší prvek, který danému sloupci náleží.
   Tím v této matici vytvoříme v každém řádku i sloupci alespoň jednu nulu.
3. V tomto kroku **označíme nuly (nezávislé nuly)**. Cílem je, aby v žádném z řádků a zároveň sloupců nebylo označeno více nul, ale pouze jedna. Pokud se rovná počet označených nul rozměru matice přiřazovacího problému přejdeme na 7. krok, pokud je počet těchto nul menší pokračujeme 4. krokem.
4. Další krok je označován jako **pěstování stromu**. Nejprve vyhledáme řádek, který neobsahuje označenou nulu, následně:

a) vedeme čáru od každé nuly v tomto řádku svisle ke každé označené nule, pokud se zde taková nula nachází,[1]
b) vedeme vodorovnou čáru od všech označených nul, kterých jsme dosáhli, ke všem neoznačeným nulám, pokud se zde takové nuly nachází,
c) od všech neoznačených nul, kterých jsme dosáhli, vedeme opět další čáry svisle k označeným nulám.[2]

Tento postup aplikujeme tak dlouho dokud je to možné. Zároveň označujeme řádky, které obsahují označené nuly vypěstovaného stromu/stromů, a také sloupce, které obsahují neoznačené nuly vypěstovaného stromu/stromů.

Kořenem stromu je nula, ve které započínáme aplikovat „větvení" i zde musíme označit sloupec i řádek, ve kterém se nachází. Tento proces končí buď v označené nule (dále pokračujeme krokem 6.) nebo v neoznačené nule (dále pokračujeme krokem 5.) Pokud vznikne více větví stromů, krok 6. aplikujeme za podmínky, že všechny větve budou končit v označené nule a krok 5. pokud alespoň jedna z nich bude končit v neoznačené nule.

5. Podpůrný krok – **augmentace**. Tento krok provádíme, pokud proces pěstování stromu končí v neoznačené nule. V tom případě od této neoznačené nuly ke kořenu stromu změníme všechny neoznačené nuly na označené a naopak, čímž docílíme toho, že počet označených nul bude o jednu vyšší. Jestliže bude počet označených nul odpovídat rozměru matice, přejdeme na 7. krok. Pokud ovšem nebude jejich počet odpovídat rozměru matice, musíme zrušit veškeré označení větví, řádků i sloupců vypěstovaného stromu/stromů, s tím, že označené nuly zůstávají, a začít znovu 2. krokem za podmínky vynechání kroku 3.

6. Krok **transformace** provádíme, pokud proces pěstování stromu končí v označené nule. V tom případě si v označených řádcích vyhledáme prvek s nejmenší hodnotou (kromě nuly) a tuto hodnotu následně odečteme od označených řádků a zároveň přičteme k označeným sloupcům.[3] Poté se vracíme ke 4. kroku s tím, že prvotní výchozí řádek zůstává.

---

[1] Pokud pro některou z nul v tomto řádku neexistuje označená nula v příslušném sloupci, provádíme augmentaci (viz 5. krok) s tím rozdílem, že pokud bude počet označených nul menší, než je rozměr matice, anulujeme označení řádku a aplikujeme znovu 4. krok.

[2] Pokud je více větví stromů nelze vést čáru k nule v jejímž řádku či sloupci je už nula patřící jinému stromu.

[3] Jestliže sloupec, ke kterému přičítáme danou hodnotu, obsahuje nulu, která náleží neoznačenému řádku, přičítáme tuto hodnotu i k této nule. K ostatním nulám tohoto sloupce, které náleží označeným řádkům, hodnotu nepřičítáme.

7. Poslední krok – určení **hodnoty účelové funkce.** Pozice označených nul (jejichž počet se rovná rozměru matice) nám při převedení do původní matice vytyčí prvky, které znázorňují optimální řešení. Jejich sumarizací získáme hodnotu účelové funkce. **[4], [7]**

3.1.2 Řešený příklad

Hledáme optimální přiřazení operací (A_i) ke strojům (B_j), aby byly celkové náklady po přiřazení těchto operací minimální. Podmínkou je, aby byla přiřazena jedna operace pouze jednomu stroji a naopak. Ceny přiřazení (c_{ij}) jsou zanesené do tabulky 3.1. Hodnoty v uvedeném příkladu jsou smyšlené a nepředstavují reálná data.

Tabulka 3. 1 – Náklady na přiřazení

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	50	3	5	7	10
A_2	5	50	5	7	15
A_3	5	3	50	10	20
A_4	5	3	15	50	10
A_5	10	5	15	7	50

Zdroj: vlastní zpracování

Postup řešení:

V matici se nenacházejí záporná čísla, přejdeme tedy k vytvoření nul, od každého řádku odečteme jeho nejmenší prvek, aby se v každém řádku vytvořila alespoň jedna nula.

Tabulka 3. 2 – Řádková redukce

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	47	0	2	4	7
A_2	0	45	0	2	10
A_3	2	0	47	7	17
A_4	2	0	12	47	7
A_5	5	0	10	2	45

Zdroj: vlastní zpracování

Od každého sloupce, ve kterém není alespoň jedna nula, odečteme jeho nejmenší prvek, aby se nula vytvořila.

Tabulka 3. 3 – Sloupcová redukce

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	47	0	2	2	0
A_2	0	45	0	0	3
A_3	2	0	47	5	10
A_4	2	0	12	45	0
A_5	5	0	10	0	38

Zdroj: vlastní zpracování

Označíme maximum nezávislých nul, například podle tabulky 3.4.

Tabulka 3. 4 – Označení nezávislých nul

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	47	**0**	2	2	0
A_2	**0**	45	0	0	3
A_3	2	0	47	5	10
A_4	2	0	12	45	**0**
A_5	5	0	10	**0**	38

Zdroj: vlastní zpracování

Máme označené čtyři nuly, počet označených nul se tedy nerovná rozměru matice, tím pádem pokračujeme dalším krokem, kterým je pěstování stromu. Na řádku A_3 máme kořen stromu a začneme s „větvením“, viz tabulka 3.5.

Tabulka 3. 5 – Pěstování stromu

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	
A_1	47	**0**	2	2	0	★
A_2	**0**	45	0	0	3	
A_3	2	0	47	5	10	★
A_4	2	0	12	45	**0**	★
A_5	5	0	10	**0**	38	
		★			★	

Zdroj: vlastní zpracování

Jelikož jsme skončili s pěstováním v označené nule, přichází krok transformace.

Tabulka 3. 6 - Transformace

	$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	$\mathbf{B}_4$	$\mathbf{B}_5$	
$\mathbf{A}_1$	45	**0**	0	0	0	★
$\mathbf{A}_2$	**0**	47	0	0	5	
$\mathbf{A}_3$	0	0	45	3	10	★
$\mathbf{A}_4$	0	0	10	43	**0**	★
$\mathbf{A}_5$	5	2	10	**0**	40	
		★			★	

Zdroj: vlastní zpracování

Po aplikaci transformace přejdeme znovu na krok 4.

Tabulka 3. 7 – Pěstování stromu

	$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	$\mathbf{B}_4$	$\mathbf{B}_5$	
$\mathbf{A}_1$	45	**0**	0	0	0	★
$\mathbf{A}_2$	**0**	47	0	0	5	★
$\mathbf{A}_3$	0	0	45	3	10	★
$\mathbf{A}_4$	0	0	10	43	**0**	★
$\mathbf{A}_5$	5	2	10	**0**	40	★
	★	★	★	★	★	

Zdroj: vlastní zpracování

V tabulce 3.7 vidíme, že jsme nalezli 3 větve stromů, jedna z nich končí v neoznačené nule, aplikujeme tedy augmentaci podle kroku 5 (viz tab. 3.8).

Tabulka 3. 8 - Augmentace

	$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	$\mathbf{B}_4$	$\mathbf{B}_5$
$\mathbf{A}_1$	45	**0**	0	0	0
$\mathbf{A}_2$	0	47	**0**	0	5
$\mathbf{A}_3$	**0**	0	45	3	10
$\mathbf{A}_4$	0	0	10	43	**0**
$\mathbf{A}_5$	5	2	10	**0**	40

Zdroj: vlastní zpracování

Počet označených nul se nám zvýšil na 5, což je shodný počet s rozměrem matice. Nalezli jsme tedy optimální řešení a přejdeme k 7. kroku.

Tabulka 3. 9 – Zanesení do původní tabulky

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	50	**3**	5	7	10
A_2	5	50	**5**	7	15
A_3	**5**	3	50	10	20
A_4	5	3	15	50	**10**
A_5	10	5	15	**7**	50

Zdroj: vlastní zpracování

Optimálního přiřazení tedy docílíme, pokud operace (A_i) přiřadíme ke strojům (B_j) následovně:

A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_j	B_2	B_3	B_1	B_5	B_4

Po zanesení do původní tabulky lze vypočítat hodnotu účelové funkce, která nám udává minimální náklady na přiřazení operací ke strojům a v tomto případě má hodnotu 30.

3.1.3 Postup řešení pomocí krycích čar

1. Zbavíme se záporných prvků, pokud takové prvky matice obsahuje (viz kapitola 3.1.1, krok 1.).
2. Provedeme **řádkovou a sloupcovou redukci matice** (viz kapitola 3.1.1, krok 2.).
3. V tomto kroku **označíme nuly** (viz kapitola 3.1.1, krok 3.).
4. Pokud se počet vyznačených nul shoduje s rozměrem matice, je nalezeno optimální řešení. Pokud je počet menší než rozměr matice, snažíme se nalézt maximální počet nezávislých nul minimálním počtem krycích čar. Nejprve „překrýváme“ sloupce, které obsahují označené nuly.
5. V řádcích hledáme nuly, které jsou nepřekryté krycí čarou. Pokud žádné nepřekryté nuly v matici neexistují, je nutné provést dodatečnou redukci matice, pokud existují přejdeme k dalšímu kroku.

Dodatečná redukce matice:

- Z prvků, které nejsou pokryté čarami, nalezneme nejnižší prvek mezi nimi (kromě nuly).
- následně ho odečteme od všech nepřekrytých řádků a přičteme ke všem překrytým sloupcům.

Tím vytvoříme alespoň jednu nepřekrytou nulu a je možné přejít ke kroku 6.

6. Existují v řádcích nepřekryté nuly:

a) **řádek obsahující tuto nulu, obsahuje také označenou nulu, která je překrytá**. Zrušíme překrytí sloupce s danou označenou nulou a zavedeme překrytí daného řádku, tím se nám překryje jak označená, tak dosud nepřekrytá nula a přejdeme znovu k 5. kroku.

b) **řádek obsahující tuto nulu, neobsahuje žádnou označenou nulu.** Navýšení počtu označených nul docílíme tak, že nalezenou nepokrytou nulu označíme a jestliže se v daném sloupci nenachází jiná označená nula, zvýšil se nám počet označených nul právě o jednu. Pokud je jejich počet shodný s rozměrem matice nalezli jsme optimální řešení a přejdeme na krok 7. V opačném případě přejdeme znovu ke kroku 5. Pokud je ovšem ve stejném sloupci další označená nula, tvoříme tzv. řetízek.

Řetízek vzniká v nepokryté nule, kterou jsme označili. Následně zrušíme označení nuly, která je ve stejném sloupci a zároveň označíme neoznačenou nulu, která náleží tomuto řádku. Nově označená nula nesmí mít v daném sloupci další označenou nulu a pokud se zde taková nula nachází, musíme postup opakovat. Tímto postupem se nám záměnou označených a nepokrytých nul zvýšil počet označených nul právě o jednu. Následně opět zjišťujeme, zda je počet označených nul shodný s rozměrem matice a pokud ano, našli jsme optimální řešení a pokračujeme krokem 7, v opačném případě se vrátíme ke kroku 5.

7. **Určení hodnoty účelové funkce** (viz kapitola 3.1.1 krok 7). **[6]**

3.1.4 Řešený příklad

Hledáme optimální přiřazení operací (A_i) ke strojům (B_j), aby byly celkové náklady po přiřazení těchto operací minimální. Podmínkou je, aby byla přiřazena jedna operace pouze jednomu stroji a naopak. Ceny přiřazení (c_{ij}) jsou zanesené do tabulky 3.10. Hodnoty v uvedeném příkladu jsou smyšlené a nepředstavují reálná data.

Tabulka 3. 10 – Náklady na přiřazení

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	50	3	5	7	10
A_2	5	50	5	7	15
A_3	5	3	50	10	20
A_4	5	3	15	50	10
A_5	10	5	15	7	50

Zdroj: Vlastní zpracování

Postup řešení:

Nemáme žádné nezáporné prvky, proto přejdeme na redukci matice. Nejprve uděláme řádkovou redukci.

Tabulka 3. 11 – Řádková redukce

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	47	0	2	4	7
A_2	0	45	0	2	10
A_3	2	0	47	7	17
A_4	2	0	12	47	7
A_5	5	0	10	2	45

Zdroj: Vlastní zpracování

Po řádkové redukci, ve zbylých sloupcích, kde nemáme vytvořenou ani jednu nulu, zavedeme sloupcovou redukci matice.

Tabulka 3. 12 – Sloupcová redukce

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	47	0	2	2	0
A_2	0	45	0	0	3
A_3	2	0	47	5	10
A_4	2	0	12	45	0
A_5	5	0	10	0	38

Zdroj: Vlastní zpracování

Označíme maximum nezávislých nul, například podle tabulky 3.13.

Tabulka 3. 13 – Označení nezávislých nul

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	47	**0**	2	2	0
A_2	**0**	45	0	0	3
A_3	2	0	47	5	10
A_4	2	0	12	45	**0**
A_5	5	0	10	**0**	38

Zdroj: Vlastní zpracování

Máme označené 4 nuly, jelikož se jejich počet nerovná rozměru matice snažíme se nalézt maximální počet nezávislých nul minimálním počtem krycích čar. Nejprve „překryjeme“ sloupce, které obsahují označené nuly viz tabulka 3.14.

Tabulka 3. 14 – Krycí čáry podle kroku 4

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	47	**0**	2	2	0
A_2	**0**	45	0	0	3
A_3	2	0	47	5	10
A_4	2	0	12	45	**0**
A_5	5	0	10	**0**	38

Zdroj: Vlastní zpracování

V řádcích jsme nalezli nulu, kterou nepřekrývá krycí čára. Ve stejném řádku se ovšem nachází i překrytá označená nula. Postupujeme tedy podle 6. kroku písm. a).

Tabulka 3. 15 – Krok 6a)

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	47	**0**	2	2	0
A_2	**0**	45	0	0	3
A_3	2	0	47	5	10
A_4	2	0	12	45	**0**
A_5	5	0	10	**0**	38

Zdroj: Vlastní zpracování

V řádcích se nenachází další nepokryté nuly, a tak je potřeba provést dodatečnou redukci matice, která je vidět v tabulce 3.16.

Tabulka 3. 16 – Dodatečná redukce

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	45	**0**	0	2	0
A_2	**0**	47	0	2	5
A_3	0	0	45	5	10
A_4	0	0	10	45	**0**
A_5	3	0	8	**0**	38

Zdroj: Vlastní zpracování

Po redukci matice přejdeme na 6. krok. V řádku A_1 a A_4, vznikli nepokryté nuly, které mají ve stejném řádku i nulu nezávislou, proto zrušíme překrytí sloupců, kde se tyto nezávislé nuly nachází a zavedeme pokrytí zmíněných řádků. Tím jsme docílili pokrytí nezávislých i nepokrytých nul v těchto řádcích.

Tabulka 3. 17 – Krok 6a)

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	45	**0**	0	2	0
A_2	**0**	47	0	2	5
A_3	0	0	45	5	10
A_4	0	0	10	45	**0**
A_5	3	0	8	**0**	38

Zdroj: Vlastní zpracování

V důsledku předchozího kroku, došlo k odkrytí nuly v pátém řádku, která má ve stejném řádku i nezávislou nulu, a tak lze aplikovat znovu krok 6a).

Tabulka 3. 18 – Krok 6a)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	45	**0**	0	2	0
A_2	**0**	47	0	2	5
A_3	0	0	45	5	10
A_4	0	0	10	45	**0**
A_5	3	0	8	**0**	38

Zdroj: Vlastní zpracování

V nepokrytém řádku A_3 se nacházejí dvě nuly, tento řádek neobsahuje nezávislou nulu a je potřeba postupovat dle kroku 6 b). Vybereme například nulu na pozici A_3B_1 a začneme tvořit řetízek. Tuto nulu označíme, označené nule na pozici A_2B_1 označení zrušíme a nulu na pozici A_2B_3 označíme. Počet označených nul se zvýšil o jednu a je roven rozměru matice, tím jsme našli optimální řešení, které je vidět v tabulce 3.19.

Tabulka 3. 19 – Navýšení počtu nezávislých nul

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	45	**0**	0	2	0
A_2	0	47	**0**	2	5
A_3	**0**	0	45	5	10
A_4	0	0	10	45	**0**
A_5	3	0	8	**0**	38

Zdroj: Vlastní zpracování

Pozice označených nul nám při zanesení do původní tabulky a následné sumarizaci ukáže hodnotu účelové funkce.

Tabulka 3. 20 – Zanesení do původní tabulky

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	50	**3**	5	7	10
A_2	5	50	**5**	7	15
A_3	**5**	3	50	10	20
A_4	5	3	15	50	**10**
A_5	10	5	15	**7**	50

Zdroj: Vlastní zpracování

Optimálního přiřazení tedy docílíme, pokud operace (A_i) přiřadíme ke strojům (B_j) následovně:

A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_j	B_2	B_3	B_1	B_5	B_4

Po zanesení do původní tabulky lze vypočítat hodnotu účelové funkce, která nám udává minimální náklady na přiřazení operací ke strojům a v tomto případě má hodnotu 30.

3.3 Softwarové zpracování úloh

Při řešení optimalizačních úloh lineárního programování v praxi je jejich neodmyslitelnou součástí využití programových systémů. Existuje mnoho systémů, které se liší podle toho, jaké množství proměnných a omezujících podmínek lze zadat pro vyřešení úlohy.

Z profesionálních systémů můžeme jmenovat optimalizační systém LINDO a LINGO. Ovšem pro řešení jednodušších úloh lineárního programování, které obsahují menší množství (pár desítek) proměnných a omezujících podmínek, stačí tabulkový kalkulátor MS Excel, který obsahuje optimalizační nástroj tzv. Řešitele. **[1]**

3.3.1 Tabulkový kalkulátor MS Excel (Řešitel)

Za jeden z nejrozšířenějších tabulkových kalkulátorů se dá považovat MS Excel, jelikož ho má téměř každý uživatel ve svém počítači. Řešitelem v MS Excelu lze řešit lineární i nelineární úlohy, které se zabývají optimalizací problémů a také lze nastavit i další možnosti jako je například definování proměnných jako celočíselných.

Řešení úloh s větším množstvím proměnných a omezujících podmínek je ovšem omezeno určitými limity. Matematický model může mít maximálně 200 hodnot proměnných a 600 omezujících podmínek, ovšem z nich je 400 míst určeno dolním a horním mezím proměnných, tím pádem na samostatné omezující podmínky zbývá pouhých 200 míst. **[1]**

Dále bude popsán postup řešení lineárních úloh Řešitelem v MS Excel 2019.

Postup:

1. Nejprve je potřeba si **připravit** na list **vstupní data** z úlohy. Tedy strukturní koeficienty proměnných, určité požadavky na ně a jejich horní a dolní mez a koeficienty účelové funkce. Dále je nutné si vyhradit buňky, do kterých se budou vkládat hodnoty proměnných s počáteční hodnotou 0 nebo 1, levé strany omezujících podmínek a optimalizační kritérium.

   Omezující podmínky vyjádříme tak, že jejich levé strany porovnáme se stranami pravými. Levou stranu vyjádříme skrze skalární součin vektoru určitých strukturních koeficientů s vektorem proměnných matematického modelu. Takovýto skalární součin lze v MS Excel vypočítat přes funkci

   =SOUČIN.SKALÁRNÍ(vektor určitých strukturních koeficientů**;** vektor proměnných**).**

   Optimalizační kritérium (účelová funkce) vyjádříme také jako skalární součin, a to součin vektoru koeficientů účelové funkce s vektorem proměnných matematického modelu. Obdobně jako u omezujících podmínek ho vyjádříme přes funkci

   =SOUČIN.SKALÁRNÍ(vektor koeficientů účelové funkce**;** vektor proměnných**). [1], [8]**

2. Pokud máme připravena všechna potřebná data, využijeme nástroje zvaného **Řešitel**. Ten v MS Excel nalezneme v nabídce Data.

   Po rozkliknutí Řešitele, se nám zobrazí okno nazývající se *Parametry Řešitele* a je následně potřeba zadat určitá data.

   - Do pole *Účelová funkce* se vloží buňka, která v nachystaných datech reprezentuje optimalizační kritérium tedy účelovou funkci.
   - V možnostech *Hledat* se vybere, zda se má optimalizační kritérium maximalizovat, minimalizovat nebo se má rovnat určité hodnotě.
   - Do pole *Proměnné modelu* se vloží oblast, kterou jsme si připravili pro hodnoty proměnných s počáteční hodnotou 0 nebo 1. **[1]**
   - Přes tlačítko Přidat se zobrazí okno *Přidat omezující podmínku*. Následně zadáme levou a pravou stranu omezení a vybereme znaménko rovnosti či nerovnosti. **[8]**

- Zaškrtávací pole *Nastavit podmínky nezápornosti* nám zavede u všech rozhodovacích proměnných dolní mez 0, a tak není potřeba tuto podmínku ručně zadávat k ostatním omezujícím podmínkám.
- Pole *Vyberte metodu řešení* nám dává na výběr, zda chceme řešit úlohy Simplexovou metodou, Gradientní metodou nebo Evolučním algoritmem. K řešení lineárních úloh se používá metoda Simplexová, další dvě metody jsou určeny na řešení úloh nelineárních.

3. V dalším kroku můžeme upravit další parametry, které nalezneme také v okně *Parametry Řešitele* pod tlačítkem Možnosti.
   - V poli *Přesnost omezující podmínky* lze nastavit hodnotu, která udává, jak přesná má být omezující podmínka, aby byla pokládána za splněnou.
   - V polích *Maximální čas* a *Iterace*, lze nastavit po jak dlouhém čase či po kolika iteracích bude výpočet přerušen, jestliže nebude do té doby nalezeno optimální řešení. Slouží k omezení doby výpočtu. Pokud dojde k přerušení výpočtu jedním z těchto limitů, lze následně pokračovat v řešení úlohy nebo ho zcela ukončit.
   - Přes tlačítko OK uložíme nastavení a vrátíme se do dialogového okna *Parametry řešitele*.
4. Pro zahájení výpočtu už stačí kliknout na tlačítko Řešit a vyčkat na zobrazení výsledku.
5. Po dokončení výpočtu se zobrazí okno *Výsledky Řešitele*, kde je volba *Uchovat řešení Řešitele*, díky níž se vypočítá optimální hodnota účelové funkce. Zároveň je možné získat výsledek s podrobnějšími informacemi, které jsou obsažené ve zprávách (Výsledková, Citlivostní, Limitní). **[1], [8]**

3.3.2 Řešený příklad

Hledáme optimální přiřazení operací (A_i) ke strojům (B_j), aby byly celkové náklady po přiřazení těchto operací minimální. Podmínkou je, aby byla přiřazena jedna operace pouze jednomu stroji a naopak. Ceny přiřazení (c_{ij}) jsou zanesené do tabulky 3.21. Hodnoty v uvedeném příkladu jsou smyšlené a nepředstavují reálná data.

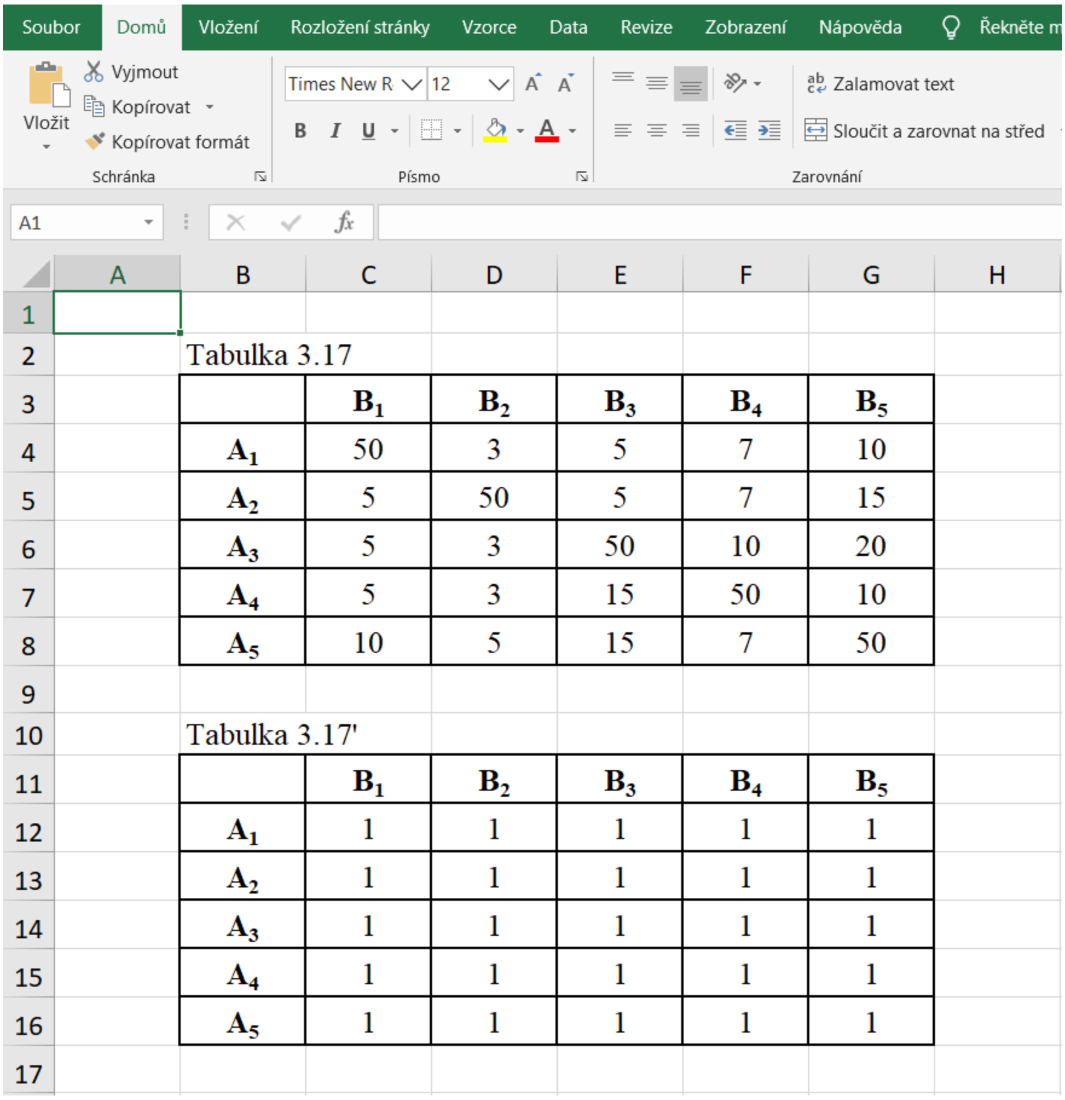
Tabulka 3. 21 – Náklady na přiřazení

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	50	3	5	7	10
A_2	5	50	5	7	15
A_3	5	3	50	10	20
A_4	5	3	15	50	10
A_5	10	5	15	7	50

Zdroj: vlastní zpracování

Postup řešení:

Tabulku přepíšeme do excelu a zároveň si vytvoříme další tabulku s totožným popisem sloupců a řádků, kde hodnoty proměnných budou představovat jedničky. Jelikož s nimi budeme dále počítat je nevhodné vybrat hodnoty nulové. Tento krok znázorňuje obrázek 3.1.



Tabulka 3.17

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	50	3	5	7	10
A_2	5	50	5	7	15
A_3	5	3	50	10	20
A_4	5	3	15	50	10
A_5	10	5	15	7	50

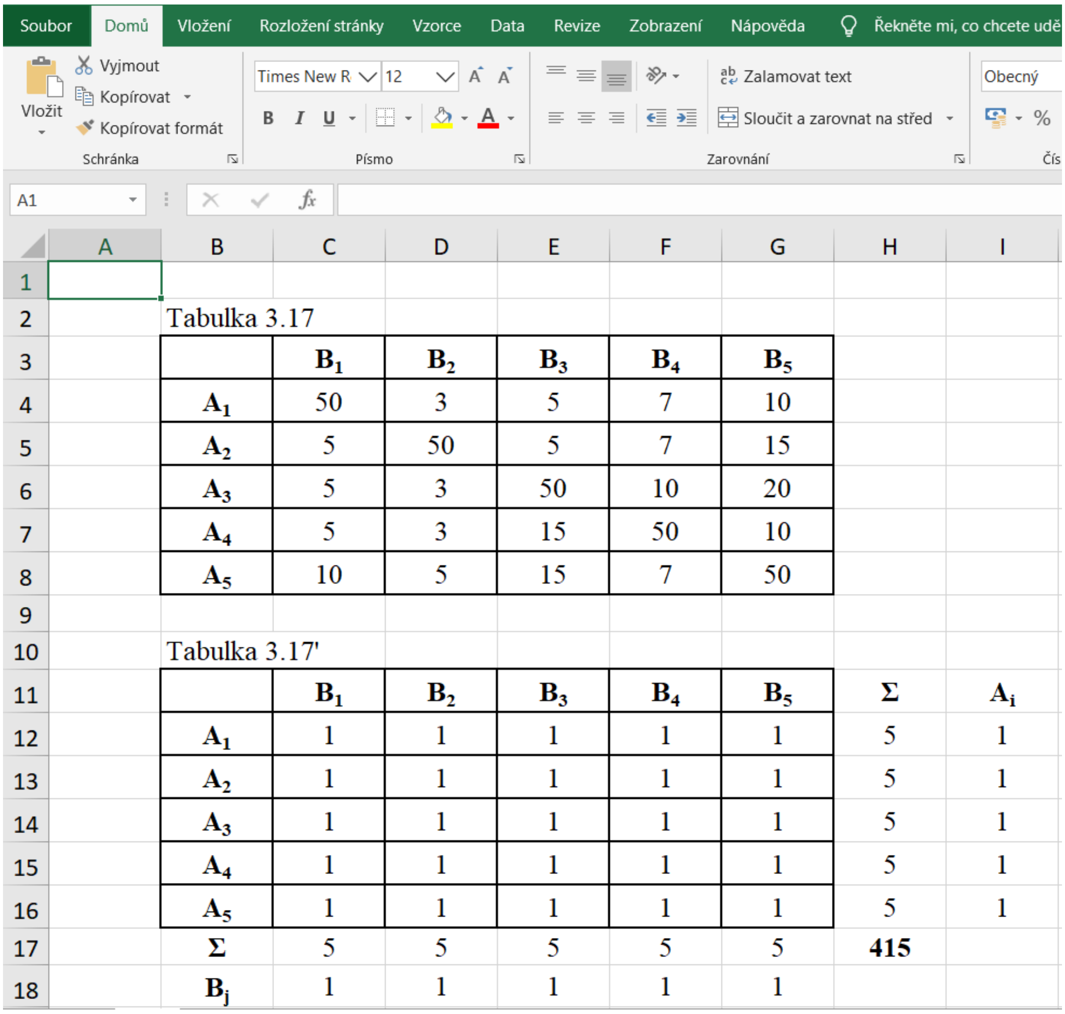
Tabulka 3.17'

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	1
A_3	1	1	1	1	1
A_4	1	1	1	1	1
A_5	1	1	1	1	1

Obrázek 3. 1 – Příprava vstupních dat

Zdroj: vlastní zpracování

Následně si k tabulce 3.17‘ vytvoříme levé a pravé strany omezujících podmínek a optimalizační kritérium (účelovou funkci). Levé strany omezení nám představují hodnoty v oblasti „Σ“ a pravé strany nám představují hodnoty „B_j“ a „A_i“. Optimalizační kritérium vypočítáme přes funkci =SOUČIN.SKALÁRNÍ. V našem případě se toto kritérium nachází v buňce H17.



Tabulka 3.17

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	50	3	5	7	10
A_2	5	50	5	7	15
A_3	5	3	50	10	20
A_4	5	3	15	50	10
A_5	10	5	15	7	50

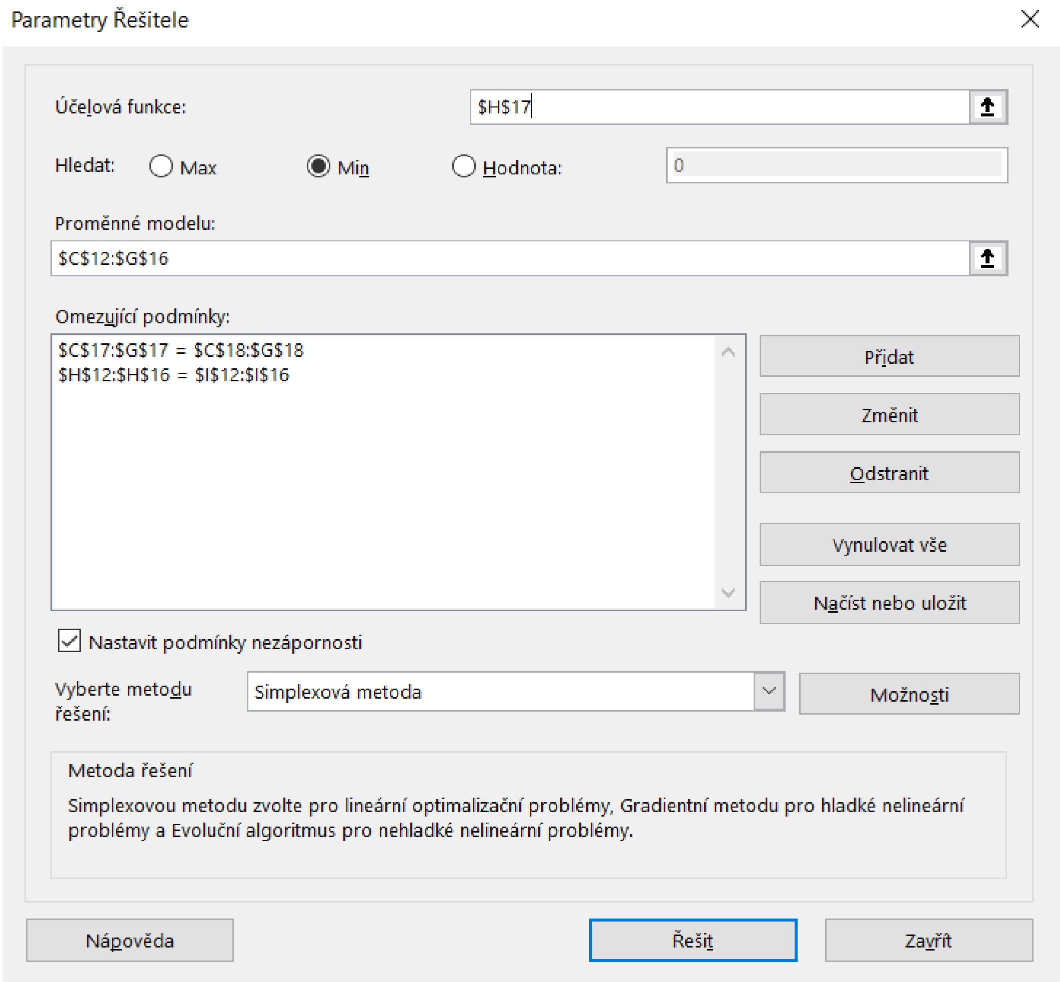
Tabulka 3.17'

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Σ	A_i
A_1	1	1	1	1	1	5	1
A_2	1	1	1	1	1	5	1
A_3	1	1	1	1	1	5	1
A_4	1	1	1	1	1	5	1
A_5	1	1	1	1	1	5	1
Σ	5	5	5	5	5	**415**	
B_j	1	1	1	1	1		

Obrázek 3. 2 – Vstupní data

Zdroj: vlastní zpracování

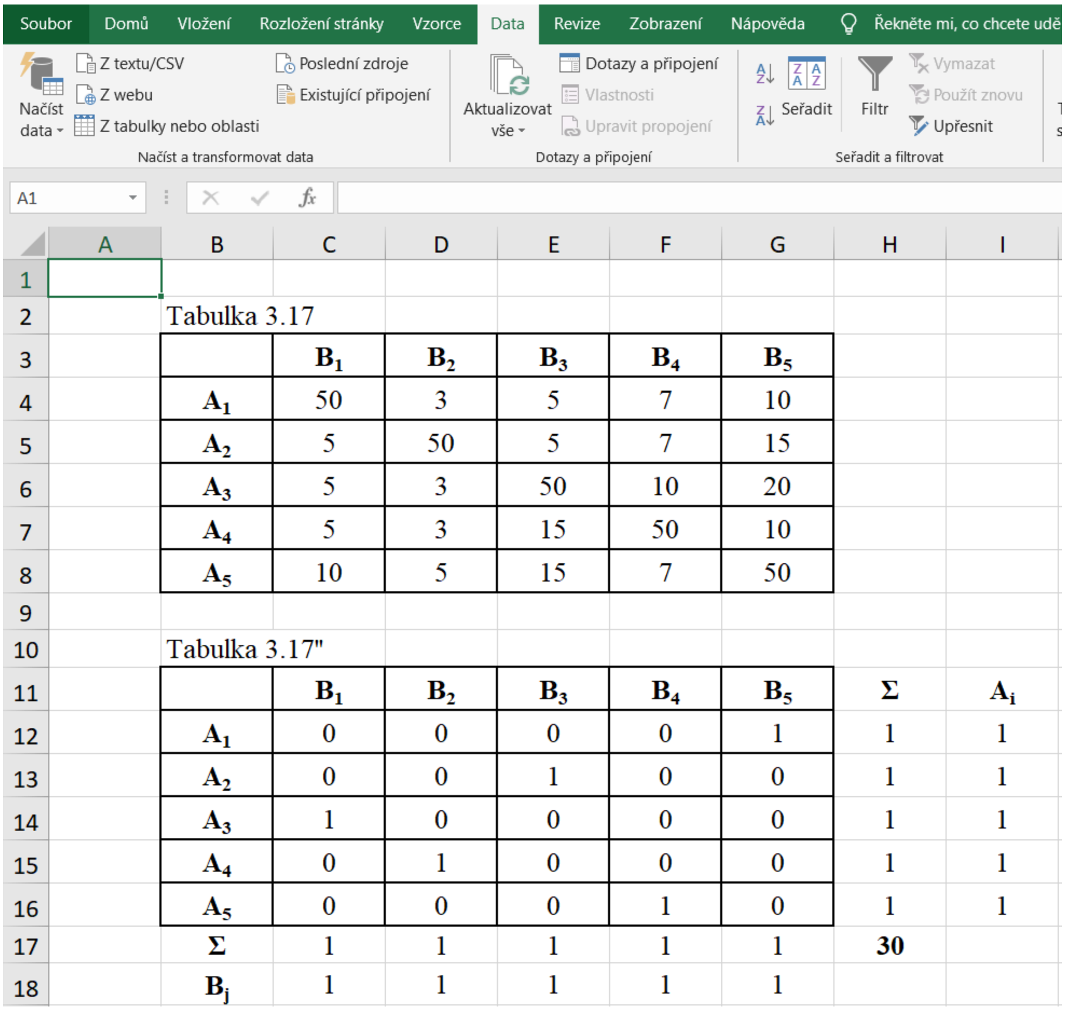
Vstupní data z úlohy jsou připravená, nastavíme tedy parametry Řešitele (karta Data) viz obrázek 3.3. Přes tlačítko Možnosti další úpravy neděláme, jelikož je pro takto jednoduché příklady toto nastavení zbytečné.



Obrázek 3. 3 – Parametry Řešitele

Zdroj: vlastní zpracování

Po nastavení všech parametrů Řešitele dáme úlohu vyřešit a počkáme na výsledek. Jelikož je úloha velmi jednoduchá našel Řešitel optimální přiřazení okamžitě. Výsledek je znázorněn na obrázku 3.4 v tabulce 3.17“, kde je vidět, že právě jedna operace byla přidělena právě jednomu stroji. Pomocí Řešitele jsme nalezli optimální přiřazení s minimálními náklady, tato hodnota je vidět v buňce H17.



Tabulka 3.17

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	50	3	5	7	10
A_2	5	50	5	7	15
A_3	5	3	50	10	20
A_4	5	3	15	50	10
A_5	10	5	15	7	50

Tabulka 3.17"

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Σ	A_i
A_1	0	0	0	0	1	1	1
A_2	0	0	1	0	0	1	1
A_3	1	0	0	0	0	1	1
A_4	0	1	0	0	0	1	1
A_5	0	0	0	1	0	1	1
Σ	1	1	1	1	1	**30**	
B_j	1	1	1	1	1		

Obrázek 3. 4 – Výsledek Řešitele

Zdroj: vlastní zpracování

Pozice jedniček na obrázku 3.4 v tabulce 3.17“, nám znázorňují optimální přiřazení operací (A_i) ke strojům (B_j) následovně:

A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_j	B_5	B_3	B_1	B_2	B_4

Jak můžeme vidět, oproti předchozím dvěma metodám, vyšlo optimální přiřazení jinak, což je přípustné, podstatné je, aby vyšla stejně hodnota účelové funkce.

Tabulka 3. 22 - Zanesení do původní tabulky

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	50	3	5	7	**10**
A_2	5	50	**5**	7	15
A_3	**5**	3	50	10	20
A_4	5	**3**	15	50	10
A_5	10	5	15	**7**	50

Zdroj: vlastní zpracování

4 Praktická část

Praktická část této bakalářské práce se zabývá optimálním přiřazením zaměstnanců na určitá pracovní místa a optimálním přiřazením dodavatelů při koupi určitého sortimentu. Tato přiřazení budou provedena za pomoci výše popsaných metod. Potřebná data, k těmto přiřazení, jsou získána ve spolupráci se společností Mesa Parts, během konzultace s manažerem a personálním oddělením této společnosti.

4.1 Společnost Mesa Parts, s.r.o.

Mesa Parts je společnost s dlouholetou tradicí, která v roce 1896 začala jako rodinná firma v německém Lenzkirchu. V současné době má společnost dva dceřiné podniky, a to v Lermě v Mexiku a na Vysokově v České republice, v okrese Náchod. Pobočka na území České republiky, o které pojednává tato práce, byla založena roku 1993 a v současné době vykazuje okolo 300 zaměstnanců.

Společnost Mesa Parts, jenž má mezinárodní působnost, se specializuje na výrobu a vývoj rotačních soustružených dílců a konstrukčních skupin. Export výrobků přesahuje 40 % a jsou využívány na trzích prvotřídních technologií jako je například automobilový a lékařský průmysl.

Firma je rozdělena do 6 segmentů. 1., 2. a 3. segment jsou segmenty výrobní, 4. segment je částečně výrobní a zpracovatelský, 5. segment slouží na čištění výrobků a 6. segment slouží k vizuální kontrole a výstupu.

Společnost se snaží o neustálé zlepšování svých výrobků a služeb. Dále klade důraz ne flexibilitu, neustálý rozvoj a řešení, která jsou komplexní. Jelikož si společnost zakládá na svých výrobcích, které splňují i ty nejvyšší nároky, umožňují tak získat svým zákazníkům výhodu nad jejich konkurencí. **[9]**

4.2 Přidělení zaměstnanců na pracovní pozice

V této kapitole bude popsáno přiřazení zaměstnanců (Zj) společnosti Mesa Parts na výrobní pracovní pozice (Pi) podle jejich hodnocení. Zaměstnanci byli hodnoceni od 1 do 10, kdy číslo 1 znamená, že se na danou pozici hodí nejvíce a číslo 10, že se hodí nejméně. Hodnocení je zaneseno do tabulky 4.1.

Tabulka 4. 1 – Hodnocení zaměstnanců na výrobní pozice

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}
P_1	6	5	1	10	9	2	8	2	1	1
P_2	4	7	8	8	5	4	10	1	1	1
P_3	1	3	3	4	8	8	4	10	6	10
P_4	10	3	4	9	6	5	5	3	1	1
P_5	1	10	7	3	2	2	4	1	1	3
P_6	1	1	1	5	1	1	2	7	10	9
P_7	1	1	4	4	4	4	7	4	5	2
P_8	10	4	7	4	8	5	6	9	10	8
P_9	1	1	3	3	2	10	1	5	10	5
P_{10}	1	1	10	1	6	8	3	1	1	1

Zdroj: Vlastní zpracování

4.2.1 Maďarská metoda

Redukcí matice byla vytvořena v každém řádku a každém sloupci nula/nuly a následně byly zvolené nuly nezávislé. Jeden z možného výběru nezávislých nul představuje tabulka 4.2.

Tabulka 4. 2 – Redukce matice a vyznačení nezávislých nul

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}
P_1	5	4	**0**	9	8	1	7	1	0	0
P_2	3	6	7	7	4	3	9	**0**	0	0
P_3	**0**	2	2	3	7	7	3	9	5	9
P_4	9	2	3	8	5	4	4	2	**0**	0
P_5	0	9	6	2	1	1	3	0	0	2
P_6	0	**0**	0	4	0	0	1	6	9	8
P_7	0	0	3	3	3	3	6	3	4	1
P_8	6	0	3	**0**	4	1	2	5	6	4
P_9	0	0	2	2	1	9	**0**	4	9	4
P_{10}	0	0	9	0	5	7	2	0	0	**0**

Zdroj: Vlastní zpracování

Jelikož existuje pouze 8 nezávislých nul, je třeba začít s pěstováním stromu. V následující tabulce (4.3) je vidět, že vznikly dva stromy s kořeny P_7Z_1 a P_7Z_2.

Tabulka 4. 3 – Pěstování stromu

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}	
P_1	5	4	**0**	9	8	1	7	1	0	0	★
P_2	3	6	7	7	4	3	9	**0**	0	0	★
P_3	**0**	2	2	3	7	7	3	9	5	9	★
P_4	9	2	3	8	5	4	4	2	**0**	0	★
P_5	0	9	6	2	1	1	3	0	0	2	
P_6	0	**0**	0	4	0	0	1	6	9	8	★
P_7	0	0	3	3	3	3	6	3	4	1	★
P_8	6	0	3	**0**	4	1	2	5	6	4	★
P_9	0	0	2	2	1	9	**0**	4	9	4	
P_{10}	0	0	9	0	5	7	2	0	0	**0**	★
	★	★	★	★	★	★		★	★	★	

Zdroj: Vlastní zpracování

Dvě větve skončili v neoznačených nulách, byla vybrána nula na pozici P_6Z_5 a provedena augmentace. Následně se znovu postupovalo od 2. kroku s vynecháním kroku 3 a bylo započato opět pěstování stromu, které ve všech větvích skončilo v označených nulách. Tento proces je zaznamenán v tabulce 4.4.

Tabulka 4. 4 – Augmentace a pěstování stromu

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}	
P_1	5	4	**0**	9	8	1	7	1	0	0	
P_2	3	6	7	7	4	3	9	**0**	0	0	★
P_3	**0**	2	2	3	7	7	3	9	5	9	★
P_4	9	2	3	8	5	4	4	2	**0**	0	★
P_5	0	9	6	2	1	1	3	0	0	2	★
P_6	0	0	0	4	**0**	0	1	6	9	8	
P_7	0	**0**	3	3	3	3	6	3	4	1	★
P_8	6	0	3	**0**	4	1	2	5	6	4	★
P_9	0	0	2	2	1	9	**0**	4	9	4	
P_{10}	0	0	9	0	5	7	2	0	0	**0**	★
	★	★		★				★	★	★	

Zdroj: Vlastní zpracování

Všechny větve skončili v označených nulách, byla provedena transformace a následně opětovné pěstování stromu.

Tabulka 4. 5 – Transformace a pěstování stromu

	Z₁	**Z₂**	**Z₃**	**Z₄**	**Z₅**	**Z₆**	**Z₇**	**Z₈**	**Z₉**	**Z₁₀**	
P₁	6	5	0	10	8	1	7	2	1	1	★
P₂	3	6	6	7	3	2	8	0	0	0	★
P₃	0	2	1	3	6	6	2	9	5	9	★
P₄	9	2	2	8	4	3	3	2	0	0	★
P₅	0	9	5	2	0	0	2	0	0	2	★
P₆	1	1	0	5	0	0	1	7	10	9	★
P₇	0	0	2	3	2	2	5	3	4	0	★
P₈	6	0	2	0	3	0	1	5	6	4	★
P₉	1	1	2	3	1	9	0	5	10	5	
P₁₀	0	0	8	0	4	6	1	0	0	0	★
	★	★	★	★	★	★		★	★	★	

Zdroj: Vlastní zpracování

Ve výchozím řádku zůstal jeden kořen stromu bez větví (P_5Z_6), což vedlo k provedení augmentace, čímž se tento kořen stromu změnil na nezávislou nulu. Tímto postupem bylo dosaženo deseti nezávislých nul, což je shodný počet s rozměrem matice. V tabulce 4.6 je vidět optimální přiřazení zaměstnanců na určité pracovní pozice.

Tabulka 4. 6 - Augmentace

	Z₁	**Z₂**	**Z₃**	**Z₄**	**Z₅**	**Z₆**	**Z₇**	**Z₈**	**Z₉**	**Z₁₀**
P₁	6	5	0	10	8	1	7	2	1	1
P₂	3	6	6	7	3	2	8	0	0	0
P₃	0	2	1	3	6	6	2	9	5	9
P₄	9	2	2	8	4	3	3	2	0	0
P₅	0	9	5	2	0	0	2	0	0	2
P₆	1	1	0	5	0	0	1	7	10	9
P₇	0	0	2	3	2	2	5	3	4	0
P₈	6	0	2	0	3	0	1	5	6	4
P₉	1	1	2	3	1	9	0	5	10	5
P₁₀	0	0	8	0	4	6	1	0	0	0

Zdroj: Vlastní zpracování

Zanesením do původního zadání (viz tabulka 4.7) a jejich následnou sumarizací byla zjištěna hodnota účelové funkce. V tomto případě, má účelová funkce hodnotu 14.

Tabulka 4. 7 – Zanesení do původní tabulky

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}
P_1	6	5	**1**	10	9	2	8	2	1	1
P_2	4	7	8	8	5	4	10	**1**	1	1
P_3	**1**	3	3	4	8	8	4	10	6	10
P_4	10	3	4	9	6	5	5	3	**1**	1
P_5	1	10	7	3	2	**2**	4	1	1	3
P_6	1	1	1	5	**1**	1	2	7	10	9
P_7	1	**1**	4	4	4	4	7	4	5	2
P_8	10	4	7	**4**	8	5	6	9	10	8
P_9	1	1	3	3	2	10	**1**	5	10	5
P_{10}	1	1	10	1	6	8	3	1	1	**1**

Zdroj: Vlastní zpracování

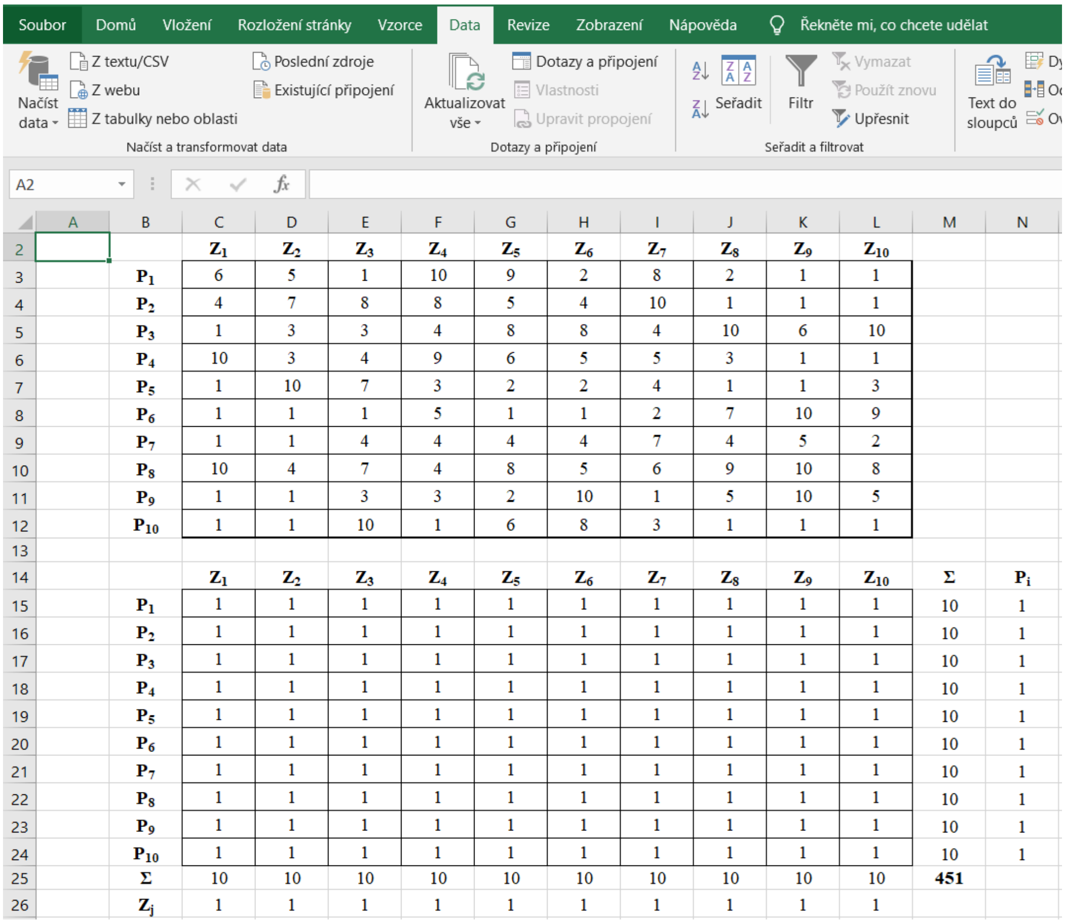
Optimálního přiřazení pracovních pozic (P_i) a zaměstnanců (Z_j) by v tomto případě bylo dosaženo, pokud by přiřazení vypadalo následovně:

P_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
Z_j	Z_3	Z_8	Z_1	Z_9	Z_6	Z_5	Z_2	Z_4	Z_7	Z_{10}

Jak je vidět na pozicích P_8Z_4 a P_5Z_6 byli vybráni zaměstnanci, kteří nebyli hodnoceni číslem 1, ale číslem horším. Což znamená, že ne vždy musí být vybrán zaměstnanec s nejlepší preferencí, aby se dosáhlo optimálního přiřazení.

4.2.2 Řešitel

K tabulce se zadáním vložené do MS Excel se následně vytvořila tabulka s totožným popisem sloupců a řádků, kde hodnoty proměnných představují jedničky. Následně byly vytvořeny levé a pravé strany omezujících podmínek a účelová funkce. Takto připravená data jsou vidět na obrázku 4.1.



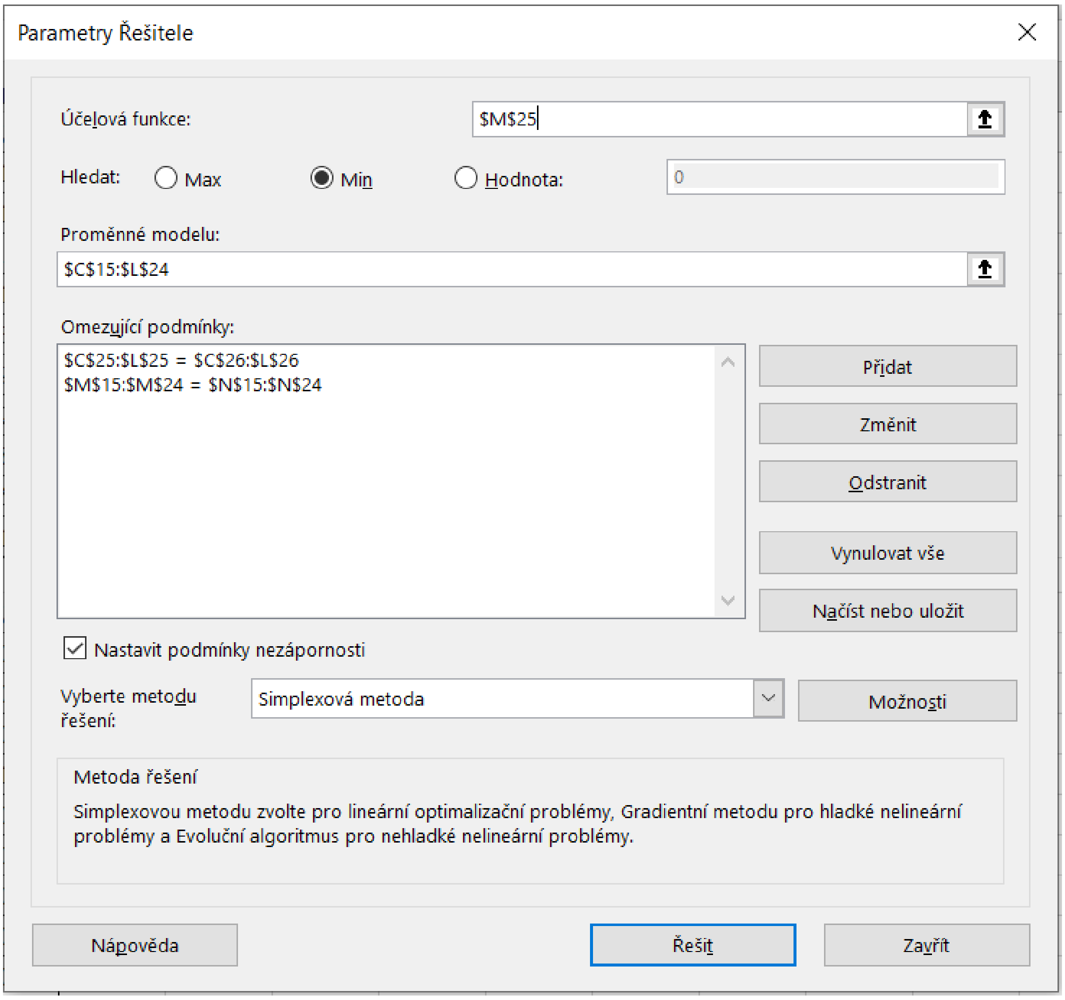
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}
P_1	6	5	1	10	9	2	8	2	1	1
P_2	4	7	8	8	5	4	10	1	1	1
P_3	1	3	3	4	8	8	4	10	6	10
P_4	10	3	4	9	6	5	5	3	1	1
P_5	1	10	7	3	2	2	4	1	1	3
P_6	1	1	1	5	1	1	2	7	10	9
P_7	1	1	4	4	4	4	7	4	5	2
P_8	10	4	7	4	8	5	6	9	10	8
P_9	1	1	3	3	2	10	1	5	10	5
P_{10}	1	1	10	1	6	8	3	1	1	1

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}	Σ	P_i
P_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
P_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
P_3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
P_4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
P_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
P_6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
P_7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
P_8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
P_9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
P_{10}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
Σ	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**451**	
Z_j	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		

Obrázek 4. 1 – Vstupní data

Zdroj: Vlastní zpracování

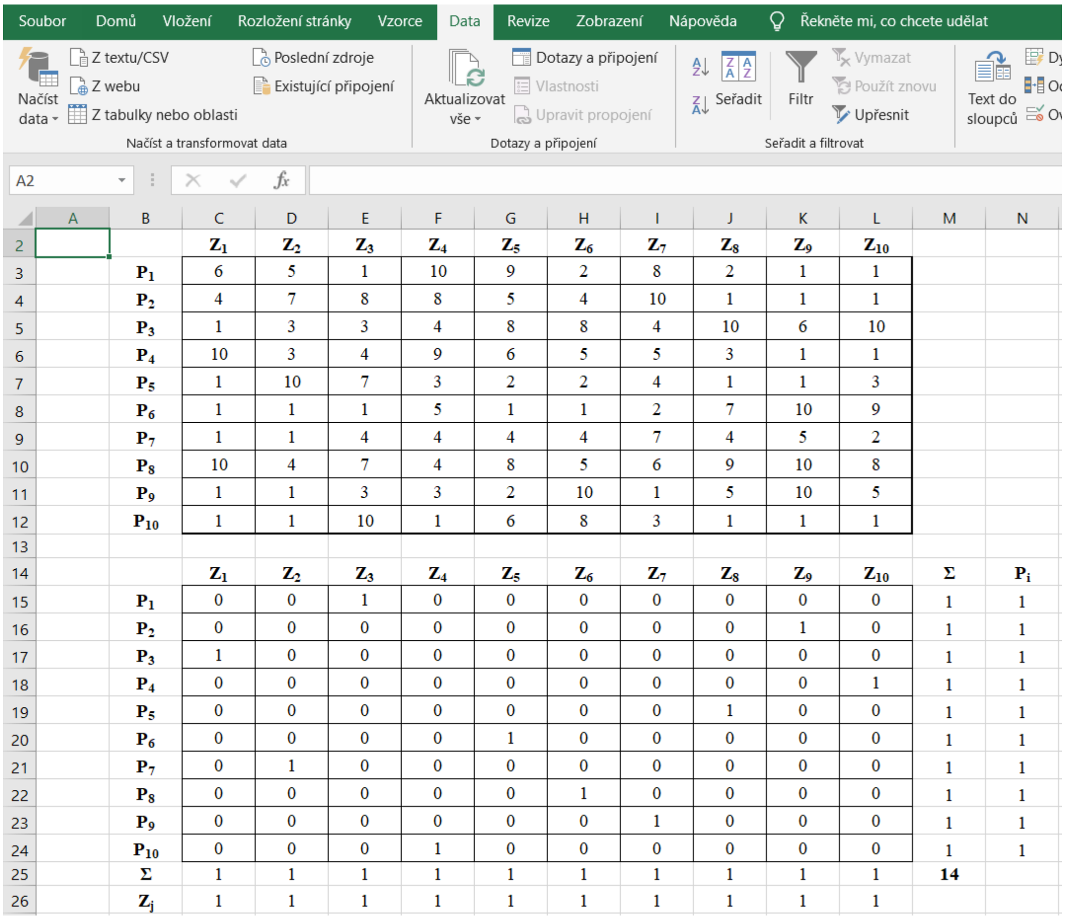
Po vytvoření vstupních dat, byly přes kartu Data a funkci Řešitel, nastaveny potřebné parametry pro výpočet. Viz obrázek 4.2.



Obrázek 4. 2 – Parametry Řešitele

Zdroj: Vlastní zpracování

Při následném stisknutí tlačítka „Řešit“, tato funkce okamžitě znázornila optimální přiřazení zaměstnanců na pracovní pozice a zároveň hodnotu účelové funkce, která je vidět na obrázku 4.3 v buňce M25.



	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}
P_1	6	5	1	10	9	2	8	2	1	1
P_2	4	7	8	8	5	4	10	1	1	1
P_3	1	3	3	4	8	8	4	10	6	10
P_4	10	3	4	9	6	5	5	3	1	1
P_5	1	10	7	3	2	2	4	1	1	3
P_6	1	1	1	5	1	1	2	7	10	9
P_7	1	1	4	4	4	4	7	4	5	2
P_8	10	4	7	4	8	5	6	9	10	8
P_9	1	1	3	3	2	10	1	5	10	5
P_{10}	1	1	10	1	6	8	3	1	1	1

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}	Σ	P_i
P_1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
P_2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
P_3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
P_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
P_5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
P_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
P_7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
P_8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
P_9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
P_{10}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
Σ	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**14**	
Z_j	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		

Obrázek 4. 3 – Výsledek Řešitele

Zdroj: Vlastní zpracování

Po zanesení do původní tabulky (viz tab. 4.8) můžeme vidět optimální přiřazení pracovních pozic (P_i) a zaměstnanců (Z_j), které nám nabídl Řešitel a to:

$\mathbf{P_i}$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
$\mathbf{Z_j}$	Z_3	Z_9	Z_1	Z_{10}	Z_8	Z_5	Z_2	Z_6	Z_7	Z_4

Tabulka 4. 8 - Zanesení do původní tabulky

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}
P_1	6	5	**1**	10	9	2	8	2	1	1
P_2	4	7	8	8	5	4	10	1	**1**	1
P_3	**1**	3	3	4	8	8	4	10	6	10
P_4	10	3	4	9	6	5	5	3	1	**1**
P_5	1	10	7	3	2	2	4	**1**	1	3
P_6	1	1	1	5	**1**	1	2	7	10	9
P_7	1	**1**	4	4	4	4	7	4	5	2
P_8	10	4	7	4	8	**5**	6	9	10	8
P_9	1	1	3	3	2	10	**1**	5	10	5
P_{10}	1	1	10	**1**	6	8	3	1	1	1

Zdroj: Vlastní zpracování

Jak je vidět, oproti předchozí metodě nám Řešitel nabídl jiné přiřazení. Je tedy patrné že je několik variant, jak dosáhnout optimálního přiřazení při stejné hodnotě účelové funkce.

4.3 Nákup sortimentu od dodavatelů

Tato kapitola bude věnována optimálnímu přiřazení dodavatelů (D_i) při koupi určitého sortimentu (S_j) za podmínky, že je nutné využít všechny dodavatele a od každého z nich koupit jiný sortiment. Ceny za sortiment od dodavatelů, jsou uvedeny v tabulce 4.9.

Tabulka 4. 9 - Ceny za sortiment od dodavatelů

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
D_1	1,12	4,10	0,88	22,30	15,80	2,50	3,50	18,70	0,45	5,50
D_2	1,45	4,50	0,90	25,00	22,40	3,00	5,50	20,50	0,22	6,10
D_3	1,64	7,80	1,00	30,00	25,00	3,50	6,20	19,50	0,66	4,20
D_4	1,89	7,10	0,90	25,90	22,90	1,80	5,50	16,70	0,80	4,50
D_5	1,59	6,20	0,75	35,00	18,50	1,50	5,20	17,80	1,00	5,80
D_6	1,45	4,50	0,90	25,00	22,40	3,00	5,50	20,50	0,55	4,50
D_7	1,66	8,20	0,95	35,00	19,40	2,50	4,50	16,70	0,45	5,70
D_8	2,00	6,20	0,90	31,50	20,50	1,45	5,80	19,80	0,60	6,20
D_9	1,55	5,50	1,12	45,20	26,50	2,20	3,90	20,50	0,90	4,50
D_{10}	2,12	8,90	1,20	20,20	15,40	2,40	4,40	19,80	1,00	7,20

Zdroj: Vlastní zpracování

4.3.1 Maďarská metoda

Redukcí matice byla vytvořena v každém řádku a každém sloupci nula/nuly a následně byly zvoleny nezávislé nuly. Jeden z možného výběru těchto nul ukazuje tabulka 4.10.

Tabulka 4. 10 – Redukce matice a vyznačení nezávislých nul

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
D_1	0,02	**0**	0,43	2,65	0,95	1,30	0,05	2,35	0	1,51
D_2	0,58	0,63	0,68	5,58	7,78	2,03	2,28	4,38	**0**	2,34
D_3	0,33	3,49	0,34	10,14	9,94	2,09	2,54	2,94	0	**0**
D_4	0,44	2,65	0,10	5,90	7,70	0,25	1,70	**0**	0	0,16
D_5	0,19	1,80	**0**	15,05	3,35	0	1,45	1,15	0,25	1,51
D_6	0,25	0,30	0,35	5,25	7,45	1,70	1,95	4,05	0	0,41
D_7	0,56	4,10	0,50	15,35	4,55	1,30	1,05	0,35	0	1,71
D_8	0,75	1,95	0,30	11,70	5,50	0,10	2,20	3,30	0	2,06
D_9	0	0,95	0,22	25,10	11,20	0,55	**0**	3,70	0	0,06
D_{10}	0,47	4,25	0,20	**0**	0	0,65	0,40	2,90	0	2,66

Zdroj: Vlastní zpracování

Jelikož byl počet nezávislých nul pouze 7, bylo nutné přejít na pěstování stromu. Jako výchozí řádek byl vybrán řádek D_6. Tento řádek měl pouze jednu větev, která skončila v označené nule, jak je vidět z tabulky 4.11.

Tabulka 4. 11 – Pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,02	**0**	0,43	2,65	0,95	1,30	0,05	2,35	0	1,51	
D_2	0,58	0,63	0,68	5,58	7,78	2,03	2,28	4,38	**0**	2,34	⋆
D_3	0,33	3,49	0,34	10,14	9,94	2,09	2,54	2,94	0	**0**	
D_4	0,44	2,65	0,10	5,90	7,70	0,25	1,70	**0**	0	0,16	
D_5	0,19	1,80	**0**	15,05	3,35	0	1,45	1,15	0,25	1,51	
D_6	0,25	0,30	0,35	5,25	7,45	1,70	1,95	4,05	0	0,41	⋆
D_7	0,56	4,10	0,50	15,35	4,55	1,30	1,05	0,35	0	1,71	
D_8	0,75	1,95	0,30	11,70	5,50	0,10	2,20	3,30	0	2,06	
D_9	0	0,95	0,22	25,10	11,20	0,55	**0**	3,70	0	0,06	
D_{10}	0,47	4,25	0,20	**0**	0	0,65	0,40	2,90	0	2,66	
									⋆		

Zdroj: Vlastní zpracování

Potom co větev stromu skončila v označené nule, byla provedena transformace a následně znovu pěstování stromu. Tentokrát kromě stejné větve, která je vidět v tabulce 4.10, vznikl ještě jeden kořen stromu na pozici D_6S_1, jak je patrné z tabulky 4.12.

Tabulka 4. 12 – Transformace a pěstování stromu

	S_1	**S_2**	**S_3**	**S_4**	**S_5**	**S_6**	**S_7**	**S_8**	**S_9**	**S_{10}**	
D_1	0,02	0	0,43	2,65	0,95	1,30	0,05	2,35	0,25	1,51	
D_2	0,33	0,38	0,43	5,33	7,53	1,78	2,03	4,13	0	2,09	*
D_3	0,33	3,49	0,34	10,14	9,94	2,09	2,54	2,94	0,25	0	
D_4	0,44	2,65	0,10	5,90	7,70	0,25	1,70	0	0,25	0,16	
D_5	0,19	1,80	0	15,05	3,35	0	1,45	1,15	0,50	1,51	
D_6	0	0,05	0,10	5,00	7,20	1,45	1,70	3,80	0	0,16	*
D_7	0,56	4,10	0,50	15,35	4,55	1,30	1,05	0,35	0,25	1,71	
D_8	0,75	1,95	0,30	11,70	5,50	0,10	2,20	3,30	0,25	2,06	
D_9	0	0,95	0,22	25,10	11,20	0,55	0	3,70	0,25	0,06	
D_{10}	0,47	4,25	0,20	0	0	0,65	0,40	2,90	0,25	2,66	
	*								*		

Zdroj: Vlastní zpracování

Jelikož jeden strom skončil v neoznačené nule (kořen stromu), bylo nutné provést augmentaci a redukci matice v řádku D_7 a D_8. Následně byl zvolen nový výchozí řádek, a to řádek D_8 a bylo započato pěstování stromu (viz tab. 4.13).

Tabulka 4. 13 – Augmentace, redukce matice a pěstování stromu

	S_1	**S_2**	**S_3**	**S_4**	**S_5**	**S_6**	**S_7**	**S_8**	**S_9**	**S_{10}**	
D_1	0,02	0	0,43	2,65	0,95	1,30	0,05	2,35	0,25	1,51	
D_2	0,33	0,38	0,43	5,33	7,53	1,78	2,03	4,13	0	2,09	
D_3	0,33	3,49	0,34	10,14	9,94	2,09	2,54	2,94	0,25	0	
D_4	0,44	2,65	0,10	5,90	7,70	0,25	1,70	0	0,25	0,16	
D_5	0,19	1,80	0	15,05	3,35	0	1,45	1,15	0,50	1,51	
D_6	0	0,05	0,10	5,00	7,20	1,45	1,70	3,80	0	0,16	
D_7	0,31	3,85	0,25	15,10	4,30	1,05	0,80	0,10	0	1,46	
D_8	0,65	1,85	0,20	11,60	5,40	0	2,10	3,20	0,15	1,96	*
D_9	0	0,95	0,22	25,10	11,20	0,55	0	3,70	0,25	0,06	
D_{10}	0,47	4,25	0,20	0	0	0,65	0,40	2,90	0,25	2,66	
						*					

Zdroj: Vlastní zpracování

Pěstování stromu skončilo hned v jeho kořenu na pozici D_8S_6, znovu byla provedena augmentace. Tentokrát nebyla potřeba další redukce matice, proto bylo ihned zahájeno pěstování stromu, a to v posledním řádku, ve kterém to bylo možné, tedy v řádku D_7 (viz tab. 4.14).

Tabulka 4. 14 – Augmentace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,02	**0**	0,43	2,65	0,95	1,30	0,05	2,35	0,25	1,51	
D_2	0,33	0,38	0,43	5,33	7,53	1,78	2,03	4,13	**0**	2,09	★
D_3	0,33	3,49	0,34	10,14	9,94	2,09	2,54	2,94	0,25	**0**	
D_4	0,44	2,65	0,10	5,90	7,70	0,25	1,70	**0**	0,25	0,16	
D_5	0,19	1,80	**0**	15,05	3,35	0	1,45	1,15	0,50	1,51	
D_6	**0**	0,05	0,10	5,00	7,20	1,45	1,70	3,80	0	0,16	
D_7	0,31	3,85	0,25	15,10	4,30	1,05	0,80	0,10	0	1,46	★
D_8	0,65	1,85	0,20	11,60	5,40	**0**	2,10	3,20	0,15	1,96	
D_9	0	0,95	0,22	25,10	11,20	0,55	**0**	3,70	0,25	0,06	
D_{10}	0,47	4,25	0,20	**0**	0	0,65	0,40	2,90	0,25	2,66	
									★		

Zdroj: Vlastní zpracování

Větev skončila v označené nule, byla provedena transformace a opětovné pěstování stromu viz tabulka 4.15.

Tabulka 4. 15 – Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,02	**0**	0,43	2,65	0,95	1,30	0,05	2,35	0,35	1,51	
D_2	0,23	0,28	0,33	5,23	7,43	1,68	1,93	4,03	**0**	1,99	★
D_3	0,33	3,49	0,34	10,14	9,94	2,09	2,54	2,94	0,35	**0**	
D_4	0,44	2,65	0,10	5,90	7,70	0,25	1,70	**0**	0,35	0,16	★
D_5	0,19	1,80	**0**	15,05	3,35	0	1,45	1,15	0,60	1,51	
D_6	**0**	0,05	0,10	5,00	7,20	1,45	1,70	3,80	0,10	0,16	
D_7	0,21	3,75	0,15	15,00	4,20	0,95	0,70	0	0	1,36	★
D_8	0,65	1,85	0,20	11,60	5,40	**0**	2,10	3,20	0,25	1,96	
D_9	0	0,95	0,22	25,10	11,20	0,55	**0**	3,70	0,35	0,06	
D_{10}	0,47	4,25	0,20	**0**	0	0,65	0,40	2,90	0,35	2,66	
								★	★		

Zdroj: Vlastní zpracování

Větve stromů skončily v označených nulách, tím pádem bylo znovu potřeba provést transformaci a pěstování stromu.

Tabulka 4. 16 – Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,02	0	0,43	2,65	0,95	1,30	0,05	2,45	0,45	1,51	
D_2	0,13	0,18	0,23	5,13	7,33	1,58	1,83	4,13	0	1,89	★
D_3	0,33	3,49	0,34	10,14	9,94	2,09	2,54	3,04	0,45	0	
D_4	0,34	2,55	0	5,80	7,60	0,15	1,60	0	0,45	0,06	★
D_5	0,19	1,80	0	15,05	3,35	0	1,45	1,25	0,70	1,51	★
D_6	0	0,05	0,10	5,00	7,20	1,45	1,70	3,90	0,20	0,16	
D_7	0,11	3,65	0,05	14,90	4,10	0,85	0,60	0	0	1,26	★
D_8	0,65	1,85	0,20	11,60	5,40	0	2,10	3,30	0,35	1,96	★
D_9	0	0,95	0,22	25,10	11,20	0,55	0	3,80	0,45	0,06	
D_{10}	0,47	4,25	0,20	0	0	0,65	0,40	3,00	0,45	2,66	
			★			★		★	★		

Zdroj: Vlastní zpracování

Opět skončily všechny větve v označených nulách, byla provedena další transformace a pěstování stromu. Nakonec těchto operací bylo nutné provést 14, kdy po poslední z nich jedna větev skončila v neoznačené nule. Tyto operace jsou obsaženy v příloze A. Tabulka 4.17 znázorňuje pěstování stromu po všech transformacích.

Tabulka 4. 17 – Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0	0	0,59	1,70	0	1,46	0	2,61	0,61	1,61	★
D_2	0	0	0,28	4,02	6,22	1,58	1,62	4,13	0	1,83	★
D_3	0,28	3,39	0,40	9,09	8,89	2,15	2,39	3,10	0,51	0	★
D_4	0,23	2,39	0	4,69	6,49	0	1,39	0	0,45	0	★
D_5	0	1,64	0	13,94	2,24	0	1,24	1,25	0,70	1,45	★
D_6	0	0	0	4,00	6,20	1,56	1,60	4,01	0,31	0	★
D_7	0	3,49	0	13,79	2,99	0,85	0,39	0	0	1,20	★
D_8	0,54	1,69	0	10,49	4,29	0	1,89	3,30	0,35	1,90	★
D_9	0	2,00	0,43	24,20	10,30	0,76	0	4,01	0,66	0	★
D_{10}	1,47	5,20	1,31	0	0	1,76	1,30	4,11	1,56	8,71	
	★	★	★		★	★	★	★	★	★	

Zdroj: Vlastní zpracování

Na pozici D_1S_5 skončila větev v neoznačené nule, bylo nutné tedy provést augmentaci, čímž bylo dosaženo optimálního přiřazení, které je znázorněno v tabulce 4.18.

Tabulka 4. 18 - Augmentace

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
D_1	0	0	0,59	1,70	**0**	1,46	0	2,61	0,61	1,61
D_2	0	0	0,28	4,02	6,22	1,58	1,62	4,13	**0**	1,83
D_3	0,28	3,39	0,40	9,09	8,89	2,15	2,39	3,10	0,51	**0**
D_4	0,23	2,39	0	4,69	6,49	0	1,39	**0**	0,45	0
D_5	0	1,64	**0**	13,94	2,24	0	1,24	1,25	0,70	1,45
D_6	0	**0**	0	4,00	6,20	1,56	1,60	4,01	0,31	0
D_7	**0**	3,49	0	13,79	2,99	0,85	0,39	0	0	1,20
D_8	0,54	1,69	0	10,49	4,29	**0**	1,89	3,30	0,35	1,90
D_9	0	2,00	0,43	24,20	10,30	0,76	**0**	4,01	0,66	0
D_{10}	1,47	5,20	1,31	**0**	0	1,76	1,30	4,11	1,56	8,71

Zdroj: Vlastní zpracování

Zanesením do původní tabulky 4.9 (viz tab. 4.19) a následnou sumarizací, byla vypočítána hodnota účelové funkce, která v tomto případě má hodnotu 69,38.

Tabulka 4. 19 – Zanesení do původní tabulky

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
D_1	1,12	4,10	0,88	22,30	**15,80**	2,50	3,50	18,70	0,45	5,50
D_2	1,45	4,50	0,90	25,00	22,40	3,00	5,50	20,50	**0,22**	6,10
D_3	1,64	7,80	1,00	30,00	25,00	3,50	6,20	19,50	0,66	**4,20**
D_4	1,89	7,10	0,90	25,90	22,90	1,80	5,50	**16,70**	0,80	4,50
D_5	1,59	6,20	**0,75**	35,00	18,50	1,50	5,20	17,80	1,00	5,80
D_6	1,45	**4,50**	0,90	25,00	22,40	3,00	5,50	20,50	0,55	4,50
D_7	**1,66**	8,20	0,95	35,00	19,40	2,50	4,50	16,70	0,45	5,70
D_8	2,00	6,20	0,90	31,50	20,50	**1,45**	5,80	19,80	0,60	6,20
D_9	1,55	5,50	1,12	45,20	26,50	2,20	**3,90**	20,50	0,90	4,50
D_{10}	2,12	8,90	1,20	**20,20**	15,40	2,40	4,40	19,80	1,00	7,20

Zdroj: Vlastní zpracování

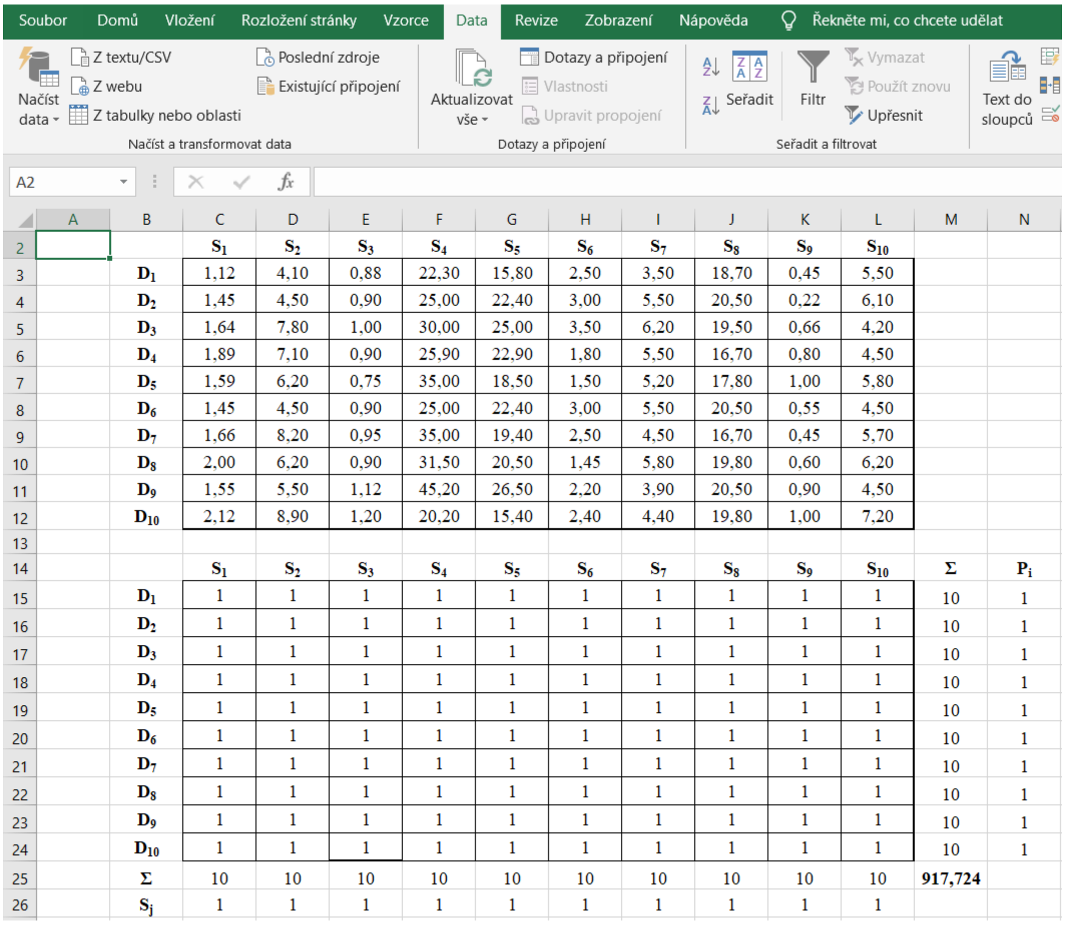
Optimálního přiřazení dodavatelů (D_i) a sortimentu (S_j) by bylo v tomto případě dosaženo, pokud by přiřazení vypadalo následovně:

D_i	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}
S_j	S_5	S_9	S_{10}	S_8	S_3	S_2	S_1	S_6	S_7	S_4

Jak je vidět u sortimentů S_1, S_2, S_5 a S_7, byli vybráni dodavatelé, kteří mají sice vyšší cenu za daný sortiment, přesto však vyšlo toto přiřazení jako optimální.

4.3.2 Řešitel

Jako v případě přiřazení zaměstnanců, byla zcela stejně připravena do MS Excel vstupní data, jak znázorňuje obrázek 4.4.



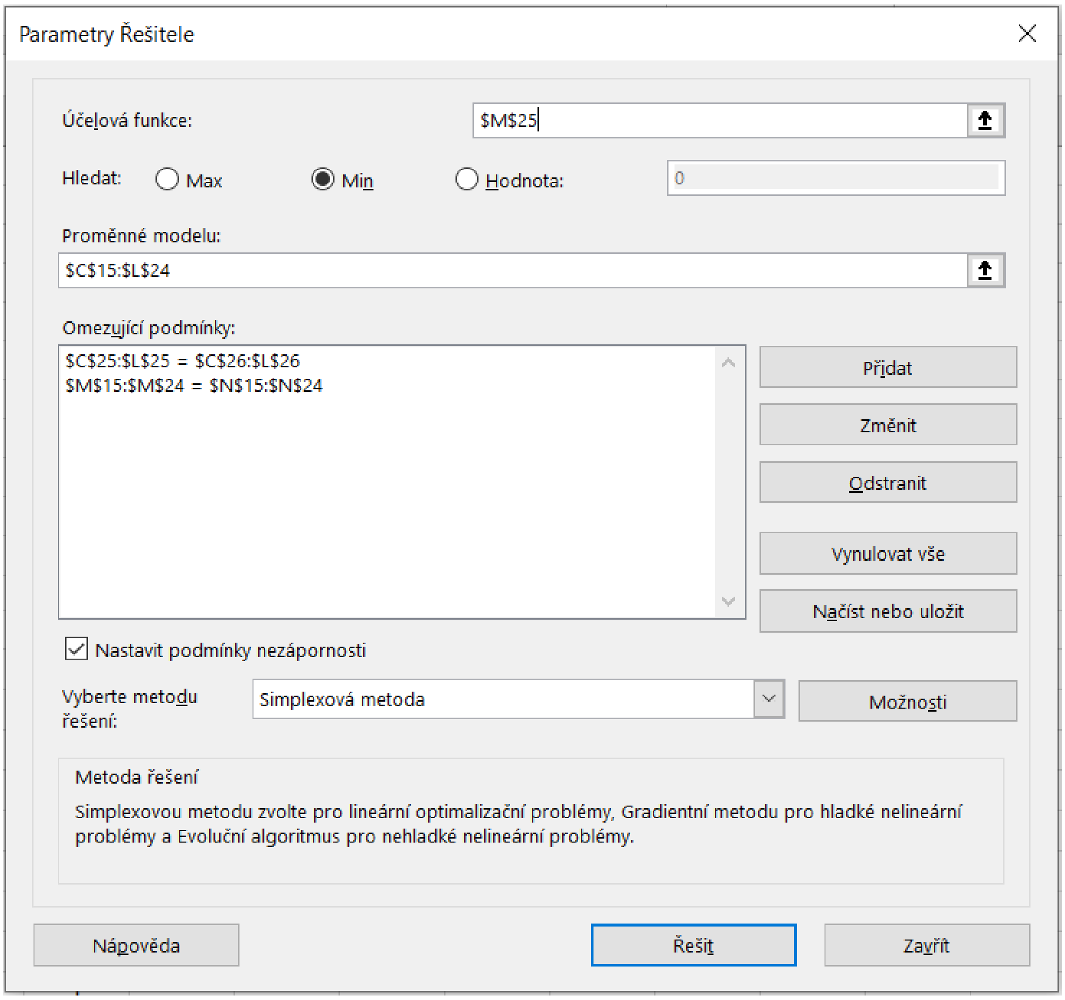
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
D_1	1,12	4,10	0,88	22,30	15,80	2,50	3,50	18,70	0,45	5,50
D_2	1,45	4,50	0,90	25,00	22,40	3,00	5,50	20,50	0,22	6,10
D_3	1,64	7,80	1,00	30,00	25,00	3,50	6,20	19,50	0,66	4,20
D_4	1,89	7,10	0,90	25,90	22,90	1,80	5,50	16,70	0,80	4,50
D_5	1,59	6,20	0,75	35,00	18,50	1,50	5,20	17,80	1,00	5,80
D_6	1,45	4,50	0,90	25,00	22,40	3,00	5,50	20,50	0,55	4,50
D_7	1,66	8,20	0,95	35,00	19,40	2,50	4,50	16,70	0,45	5,70
D_8	2,00	6,20	0,90	31,50	20,50	1,45	5,80	19,80	0,60	6,20
D_9	1,55	5,50	1,12	45,20	26,50	2,20	3,90	20,50	0,90	4,50
D_{10}	2,12	8,90	1,20	20,20	15,40	2,40	4,40	19,80	1,00	7,20

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	Σ	P_i
D_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
D_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
D_3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
D_4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
D_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
D_6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
D_7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
D_8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
D_9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
D_{10}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
Σ	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	917,724	
S_j	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		

Obrázek 4. 4 – Vstupní data

Zdroj: Vlastní zpracování

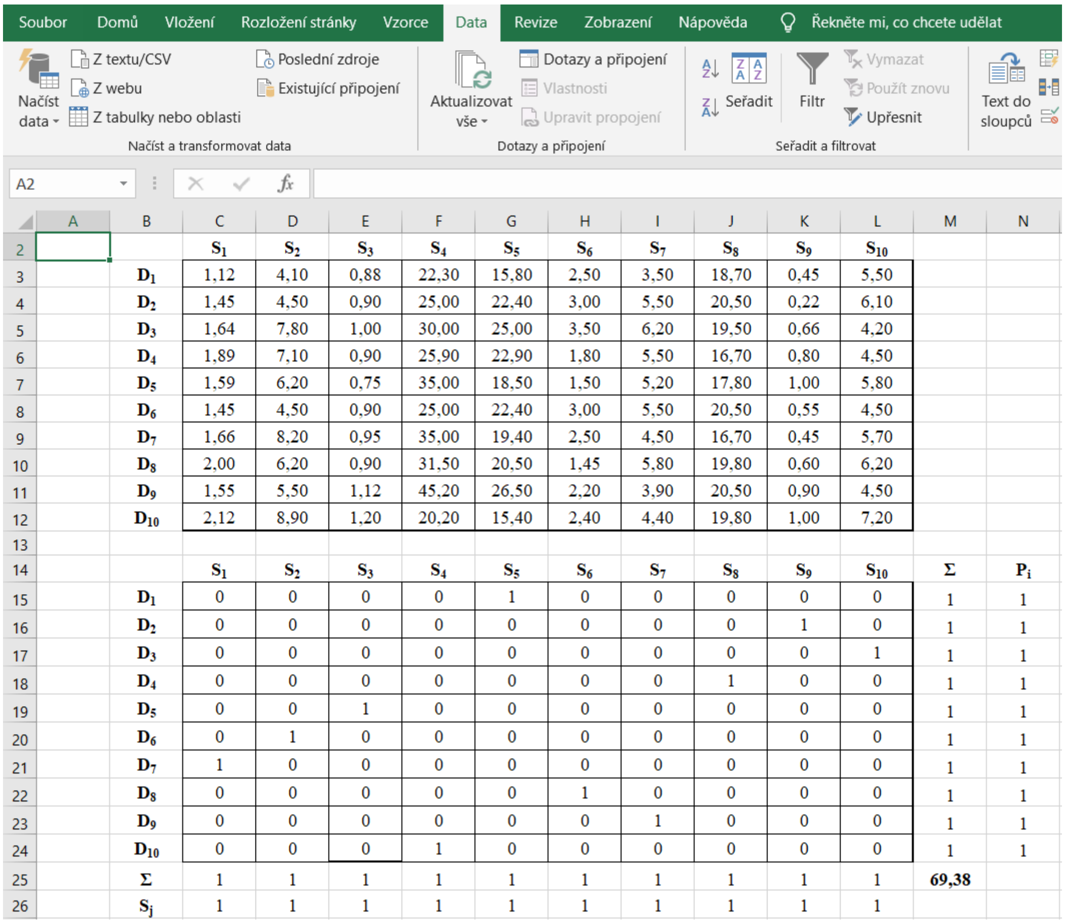
Po vytvoření vstupních dat, byly přes kartu Data a funkci Řešitel, nastaveny potřebné parametry pro výpočet.



Obrázek 4. 5 - Parametry Řešitele

Zdroj: Vlastní zpracování

Při následném stisknutí tlačítka „Řešit“, tato funkce znázornila optimální přiřazení dodavatelů na koupi různého sortimentu a zároveň znázornila hodnotu účelové funkce, která je vidět na obrázku 4.6 v buňce M25.



	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
D_1	1,12	4,10	0,88	22,30	15,80	2,50	3,50	18,70	0,45	5,50
D_2	1,45	4,50	0,90	25,00	22,40	3,00	5,50	20,50	0,22	6,10
D_3	1,64	7,80	1,00	30,00	25,00	3,50	6,20	19,50	0,66	4,20
D_4	1,89	7,10	0,90	25,90	22,90	1,80	5,50	16,70	0,80	4,50
D_5	1,59	6,20	0,75	35,00	18,50	1,50	5,20	17,80	1,00	5,80
D_6	1,45	4,50	0,90	25,00	22,40	3,00	5,50	20,50	0,55	4,50
D_7	1,66	8,20	0,95	35,00	19,40	2,50	4,50	16,70	0,45	5,70
D_8	2,00	6,20	0,90	31,50	20,50	1,45	5,80	19,80	0,60	6,20
D_9	1,55	5,50	1,12	45,20	26,50	2,20	3,90	20,50	0,90	4,50
D_{10}	2,12	8,90	1,20	20,20	15,40	2,40	4,40	19,80	1,00	7,20

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	Σ	P_i
D_1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
D_2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
D_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
D_4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
D_5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
D_6	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
D_7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
D_8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
D_9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
D_{10}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
Σ	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**69,38**	
S_j	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		

Obrázek 4. 6 - Výsledek Řešitele

Zdroj: Vlastní zpracování

Při zanesení do původní tabulky (viz tab. 4.20) je možné vidět optimální přiřazení dodavatelů (D_i) a sortimentu (S_j), které nám nabídl Řešitel a to:

D_i	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}
S_j	S_5	S_9	S_{10}	S_8	S_3	S_2	S_1	S_6	S_7	S_4

Tabulka 4. 20 – Zanesení do původní tabulky

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
D_1	1,12	4,10	0,88	22,30	**15,80**	2,50	3,50	18,70	0,45	5,50
D_2	1,45	4,50	0,90	25,00	22,40	3,00	5,50	20,50	**0,22**	6,10
D_3	1,64	7,80	1,00	30,00	25,00	3,50	6,20	19,50	0,66	**4,20**
D_4	1,89	7,10	0,90	25,90	22,90	1,80	5,50	**16,70**	0,80	4,50
D_5	1,59	6,20	**0,75**	35,00	18,50	1,50	5,20	17,80	1,00	5,80
D_6	1,45	**4,50**	0,90	25,00	22,40	3,00	5,50	20,50	0,55	4,50
D_7	**1,66**	8,20	0,95	35,00	19,40	2,50	4,50	16,70	0,45	5,70
D_8	2,00	6,20	0,90	31,50	20,50	**1,45**	5,80	19,80	0,60	6,20
D_9	1,55	5,50	1,12	45,20	26,50	2,20	**3,90**	20,50	0,90	4,50
D_{10}	2,12	8,90	1,20	**20,20**	15,40	2,40	4,40	19,80	1,00	7,20

Zdroj: Vlastní zpracování

Ačkoliv Řešitel nabídl stejné přiřazení, kterého bylo dosaženo v předchozí metodě, nemusí to být jediné optimální přiřazení, kterého lze dosáhnout.

4.3.3 Realita vs. získané výsledky

Společnost Mesa Parts nakupuje uvedený sortiment od jednoho dodavatele, v tomto případě je to dodavatel D_1. Je nutné dodat, že ve všech jednotkových cenách uvedených v matici jsou započítány i veškeré náklady na dodání. Společnost při nákupu tohoto sortimentu tedy reálně zaplatí i s náklady na dodání 74,85 korun. Ovšem ze získaných výsledků je patrné, že by firma při užití této metody ušetřila, jelikož by cena po takovémto optimálním přiřazení činila 69,38 korun.

Tento sortiment Mesa Parts objednává v malém množství, a i přes lákavou roční úsporu, kterou by jim tato metoda v tomto případě mohla přinést, bude firma objednávat od tohoto jednoho dodavatele, který jim je schopen veškerý objednaný sortiment dovézt najednou.

ZÁVĚR

V úvodní části práce, byl popsán vývoj operačního výzkumu, jeho podstata, fáze při aplikaci operačního výzkumu a také jeho modely a disciplíny. Následně bylo formulováno lineární programování a byly přehledně rozděleny i typy těchto úloh.

Třetí kapitola má za cíl čtenáře seznámit s přiřazovacím problémem jako speciální úlohou lineárního programování. Jsou zde popsány jeho metody řešení jako je Maďarská metoda pomocí tzv. pěstování stromu a pomocí tzv. krycích čar. Jelikož je lineární programování z hlediska reálných případů složité a neobejde se bez pomoci softwarů potřebných pro jeho výpočet, je zde vysvětlena také metoda pomocí tabulkového kalkulátoru v MS Excel, tzv. Řešitel. Ke všem těmto postupům jsou vytvořeny i ukázkové příklady, na kterých jsou tyto metody aplikovány.

V závěrečné části této práce je použita Maďarská metoda pomocí pěstování stromu a metoda Řešitele na reálných případech, které byly zformulovány ve spolupráci se společností Mesa Parts, s. r. o. Jednalo se o optimální přiřazení zaměstnanců na výrobní pozice podle jejich hodnocení, které bylo na škále od 1 do 10 s tím, že číslo 1 znamenalo, že se na danou pozici dotyčný zaměstnanec hodí nejvíce a číslo 10, že se hodí nejméně. Dalším případem bylo optimální přiřazení dodavatelů při koupi určitého sortimentu za podmínky, že chceme využít všechny dodavatele a koupit od každého jiný sortiment.

Ohledně optimálního přiřazení zaměstnanců je tato metoda efektivní, ale spíše v podnicích, které začínají a potřebují zaměstnat více lidí najednou. V takovémto podniku, který už funguje delší dobu a přijímá jednoho nového zaměstnance například jednou za měsíc a na jednu určitou pozici, je podle autorky práce, tato metoda zbytečná. Tato společnost ovšem momentálně pracuje na tzv. rotaci zaměstnanců, na kterou se budou vybírat ti zaměstnanci, kteří se budou schopni střídat i na dalších pozicích, včetně té, na které právě jsou. Pokud by šlo o výběr pouze jedné další pozice pro jednoho zaměstnance, mohla by být tato metoda přiřazení užitečná a mohla by se využít obdobně jako ve výše popsaném případě o přiřazení zaměstnanců dle jejich hodnocení.

Po porovnání výsledků se skutečností, v případě přiřazení dodavatelů při koupi sortimentu, nám práce poukázala na fakt, že by tento případ řešený metodou přiřazovacího problému, zajistil firmě nižší náklady, než které má doposud.

Nutno dodat, že společnost Mesa Parts, s. r. o. tyto přiřazovací problémy neřeší, a tak s nimi byli alespoň seznámeni.

Práce poukazuje na to, že i úlohy s menším rozměrem matice a pouze s přirozenými čísly, je někdy složité a zdlouhavé vypočítat a tím pádem je potřebné používat různé softwary, které tyto výpočty provedou. Při ručním zpracování by byl výpočet nejen zdlouhavý, ale také by mohlo snadno dojít k chybě, která by mohla podnik stát i nemalé peníze.

POUŽITÁ LITERATURA

[1] JABLONSKÝ, Josef. *Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování*. 3. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3.

[2] KUBIŠOVÁ, Andrea. *Podpora výuky předmětu Operační výzkum pro bakalářské studium s ekonomickým zaměřením* [online]. Brno, 2015 [cit. 2020-02-08]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/dxuqz/DP_Kubisova.pdf. Disertace. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Ústav matematiky a techniky.

[3] DEMEL, Jiří. *Operační výzkum* [online]. 2011 [cit. 2020-02-08]. Dostupné z: https://kix.fsv.cvut.cz/~demel/ped/ov/ov110215.pdf.

[4] LINDA, Bohdan a Josef VOLEK. *Lineární programování*. Vydání 6., opravené a doplněné. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2016. ISBN 978-80-7560-018-9.

[5] PELIKÁN, Jan a Vladislav CHÝNA. *Kvantitativní management*. Praha: Oeconomica, 2011. ISBN 978-80-245-1830-5.

[6] PELIKÁN, Jan. *Diskrétní modely v operačním výzkumu*. Brno: Professional Publishing, 2001. ISBN 80-864-1917-7.

[7] BRÁZDOVÁ, Markéta. *Řešené úlohy lineárního programování*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2011. ISBN 978-80-7395-361-4.

[8] FIALA, Alois. *Řešení úloh lineárního programování v MS EXCEL* [online]. 22.1.2009 [cit. 2020-04-12]. Dostupné z: https://www.qmprofi.cz/33/reseni-uloh-linearniho-programovani-v-ms-excel-uniqueidmRRWSbk196FNf8-jVUh4Ekdwy8o5kOgdl_LB--Wt2UFPpA5B5rrwHw/?query=line%E1rn%ED%20programov%E1n%ED%20v%20ms%20excel&serp=1

[9] O nás. *Mesa Parts | Turning into Solutions* [online]. [cit. 2020-04-11]. Dostupné z: https://mesa-parts.com/cs/o-nas.html

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha A – *Celý postup řešení nákupu sortimentu od dodavatelů, pomocí Maďarské metody*

Optimálnímu přiřazení dodavatelů (D_i) při koupi určitého sortimentu (S_j) za podmínky, že je nutné využít všechny dodavatele a od každého z nich koupit jiný sortiment. Ceny za sortiment od dodavatelů, jsou uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1 – Ceny za sortiment od dodavatelů

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
D_1	1,12	4,10	0,88	22,30	15,80	2,50	3,50	18,70	0,45	5,50
D_2	1,45	4,50	0,90	25,00	22,40	3,00	5,50	20,50	0,22	6,10
D_3	1,64	7,80	1,00	30,00	25,00	3,50	6,20	19,50	0,66	4,20
D_4	1,89	7,10	0,90	25,90	22,90	1,80	5,50	16,70	0,80	4,50
D_5	1,59	6,20	0,75	35,00	18,50	1,50	5,20	17,80	1,00	5,80
D_6	1,45	4,50	0,90	25,00	22,40	3,00	5,50	20,50	0,55	4,50
D_7	1,66	8,20	0,95	35,00	19,40	2,50	4,50	16,70	0,45	5,70
D_8	2,00	6,20	0,90	31,50	20,50	1,45	5,80	19,80	0,60	6,20
D_9	1,55	5,50	1,12	45,20	26,50	2,20	3,90	20,50	0,90	4,50
D_{10}	2,12	8,90	1,20	20,20	15,40	2,40	4,40	19,80	1,00	7,20

Zdroj: Vlastní zpracování

Redukcí matice byla vytvořena v každém řádku a každém sloupci nula/nuly a následně byly zvoleny nezávislé nuly. Jeden z možných výběrů nezávislých nul ukazuje tabulka 2.

Tabulka 2 – Redukce matice a vyznačení nezávislých nul

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
D_1	0,02	**0**	0,43	2,65	0,95	1,30	0,05	2,35	0	1,51
D_2	0,58	0,63	0,68	5,58	7,78	2,03	2,28	4,38	**0**	2,34
D_3	0,33	3,49	0,34	10,14	9,94	2,09	2,54	2,94	0	**0**
D_4	0,44	2,65	0,10	5,90	7,70	0,25	1,70	**0**	0	0,16
D_5	0,19	1,80	**0**	15,05	3,35	0	1,45	1,15	0,25	1,51
D_6	0,25	0,30	0,35	5,25	7,45	1,70	1,95	4,05	0	0,41
D_7	0,56	4,10	0,50	15,35	4,55	1,30	1,05	0,35	0	1,71
D_8	0,75	1,95	0,30	11,70	5,50	0,10	2,20	3,30	0	2,06
D_9	0	0,95	0,22	25,10	11,20	0,55	**0**	3,70	0	0,06
D_{10}	0,47	4,25	0,20	**0**	0	0,65	0,40	2,90	0	2,66

Zdroj: Vlastní zpracování

Jelikož byl počet nezávislých nul pouze 7, bylo nutné přejít na pěstování stromu. Jako výchozí řádek byl vybrán řádek D_6. Tento řádek měl pouze jednu větev, která skončila v označené nule, jak je patrné z tabulky 3.

Tabulka 3 – Pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,02	**0**	0,43	2,65	0,95	1,30	0,05	2,35	0	1,51	
D_2	0,58	0,63	0,68	5,58	7,78	2,03	2,28	4,38	**0**	2,34	★
D_3	0,33	3,49	0,34	10,14	9,94	2,09	2,54	2,94	0	**0**	
D_4	0,44	2,65	0,10	5,90	7,70	0,25	1,70	**0**	0	0,16	
D_5	0,19	1,80	**0**	15,05	3,35	0	1,45	1,15	0,25	1,51	
D_6	0,25	0,30	0,35	5,25	7,45	1,70	1,95	4,05	0	0,41	★
D_7	0,56	4,10	0,50	15,35	4,55	1,30	1,05	0,35	0	1,71	
D_8	0,75	1,95	0,30	11,70	5,50	0,10	2,20	3,30	0	2,06	
D_9	0	0,95	0,22	25,10	11,20	0,55	**0**	3,70	0	0,06	
D_{10}	0,47	4,25	0,20	**0**	0	0,65	0,40	2,90	0	2,66	
									★		

Zdroj: Vlastní zpracování

Potom co větev stromu skončila v označené nule, byla provedena transformace a pěstování stromu. Tentokrát kromě stejné větve, která je vidět v tabulce 3, vznikl ještě jeden kořen stromu na pozici D_6S_1, jak je patrné z tabulky 4.

Tabulka 4 – Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,02	**0**	0,43	2,65	0,95	1,30	0,05	2,35	0,25	1,51	
D_2	0,33	0,38	0,43	5,33	7,53	1,78	2,03	4,13	**0**	2,09	★
D_3	0,33	3,49	0,34	10,14	9,94	2,09	2,54	2,94	0,25	**0**	
D_4	0,44	2,65	0,10	5,90	7,70	0,25	1,70	**0**	0,25	0,16	
D_5	0,19	1,80	**0**	15,05	3,35	0	1,45	1,15	0,50	1,51	
D_6	0	0,05	0,10	5,00	7,20	1,45	1,70	3,80	0	0,16	★
D_7	0,56	4,10	0,50	15,35	4,55	1,30	1,05	0,35	0,25	1,71	
D_8	0,75	1,95	0,30	11,70	5,50	0,10	2,20	3,30	0,25	2,06	
D_9	0	0,95	0,22	25,10	11,20	0,55	**0**	3,70	0,25	0,06	
D_{10}	0,47	4,25	0,20	**0**	0	0,65	0,40	2,90	0,25	2,66	
	★								★		

Zdroj: Vlastní zpracování

Jelikož jeden strom skončil v neoznačené nule (kořen stromu), bylo nutné provést augmentaci a redukci matice v řádku D_7 a D_8. Následně byl zvolen nový výchozí řádek, a to řádek D_8 a bylo zahájeno opětovné pěstování stromu (viz tab. 5).

Tabulka 5 – Augmentace, redukce matice a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,02	0	0,43	2,65	0,95	1,30	0,05	2,35	0,25	1,51	
D_2	0,33	0,38	0,43	5,33	7,53	1,78	2,03	4,13	0	2,09	
D_3	0,33	3,49	0,34	10,14	9,94	2,09	2,54	2,94	0,25	0	
D_4	0,44	2,65	0,10	5,90	7,70	0,25	1,70	0	0,25	0,16	
D_5	0,19	1,80	0	15,05	3,35	0	1,45	1,15	0,50	1,51	
D_6	0	0,05	0,10	5,00	7,20	1,45	1,70	3,80	0	0,16	
D_7	0,31	3,85	0,25	15,10	4,30	1,05	0,80	0,10	0	1,46	
D_8	0,65	1,85	0,20	11,60	5,40	0	2,10	3,20	0,15	1,96	*
D_9	0	0,95	0,22	25,10	11,20	0,55	0	3,70	0,25	0,06	
D_{10}	0,47	4,25	0,20	0	0	0,65	0,40	2,90	0,25	2,66	
						*					

Zdroj: Vlastní zpracování

Pěstování stromu skončilo hned v jeho kořenu na pozici D_8S_6, znovu byla provedena augmentace. Tentokrát nebyla potřeba další redukce matice, čímž bylo ihned zahájeno pěstování stromu, a to v posledním řádku, ve kterém to bylo možné, tedy v řádku D_7 (viz tab. 6).

Tabulka 6 – Augmentace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,02	0	0,43	2,65	0,95	1,30	0,05	2,35	0,25	1,51	
D_2	0,33	0,38	0,43	5,33	7,53	1,78	2,03	4,13	0	2,09	*
D_3	0,33	3,49	0,34	10,14	9,94	2,09	2,54	2,94	0,25	0	
D_4	0,44	2,65	0,10	5,90	7,70	0,25	1,70	0	0,25	0,16	
D_5	0,19	1,80	0	15,05	3,35	0	1,45	1,15	0,50	1,51	
D_6	0	0,05	0,10	5,00	7,20	1,45	1,70	3,80	0	0,16	
D_7	0,31	3,85	0,25	15,10	4,30	1,05	0,80	0,10	0	1,46	*
D_8	0,65	1,85	0,20	11,60	5,40	0	2,10	3,20	0,15	1,96	
D_9	0	0,95	0,22	25,10	11,20	0,55	0	3,70	0,25	0,06	
D_{10}	0,47	4,25	0,20	0	0	0,65	0,40	2,90	0,25	2,66	
									*		

Zdroj: Vlastní zpracování

Větev skončila v označené nule, byla provedena transformace a opětovné pěstování stromu viz tabulka 7.

Tabulka 7 – Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,02	**0**	0,43	2,65	0,95	1,30	0,05	2,35	0,35	1,51	
D_2	0,23	0,28	0,33	5,23	7,43	1,68	1,93	4,03	**0**	1,99	★
D_3	0,33	3,49	0,34	10,14	9,94	2,09	2,54	2,94	0,35	**0**	
D_4	0,44	2,65	0,10	5,90	7,70	0,25	1,70	**0**	0,35	0,16	★
D_5	0,19	1,80	**0**	15,05	3,35	0	1,45	1,15	0,60	1,51	
D_6	**0**	0,05	0,10	5,00	7,20	1,45	1,70	3,80	0,10	0,16	
D_7	0,21	3,75	0,15	15,00	4,20	0,95	0,70	0	0	1,36	★
D_8	0,65	1,85	0,20	11,60	5,40	**0**	2,10	3,20	0,25	1,96	
D_9	0	0,95	0,22	25,10	11,20	0,55	**0**	3,70	0,35	0,06	
D_{10}	0,47	4,25	0,20	**0**	0	0,65	0,40	2,90	0,35	2,66	
								★	★		

Zdroj: Vlastní zpracování

Větve stromů skončily v označených nulách, a tak byla znovu provedena transformace a pěstování stromu.

Tabulka 8 – Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,02	**0**	0,43	2,65	0,95	1,30	0,05	2,45	0,45	1,51	
D_2	0,13	0,18	0,23	5,13	7,33	1,58	1,83	4,13	**0**	1,89	★
D_3	0,33	3,49	0,34	10,14	9,94	2,09	2,54	3,04	0,45	**0**	
D_4	0,34	2,55	0	5,80	7,60	0,15	1,60	**0**	0,45	0,06	★
D_5	0,19	1,80	**0**	15,05	3,35	0	1,45	1,25	0,70	1,51	★
D_6	**0**	0,05	0,10	5,00	7,20	1,45	1,70	3,90	0,20	0,16	
D_7	0,11	3,65	0,05	14,90	4,10	0,85	0,60	0	0	1,26	★
D_8	0,65	1,85	0,20	11,60	5,40	**0**	2,10	3,30	0,35	1,96	★
D_9	0	0,95	0,22	25,10	11,20	0,55	**0**	3,80	0,45	0,06	
D_{10}	0,47	4,25	0,20	**0**	0	0,65	0,40	3,00	0,45	2,66	
			★			★		★	★		

Zdroj: Vlastní zpracování

Větve stromů skončily v označených nulách, byla znovu provedena transformace a pěstování stromu.

Tabulka 9 - Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,02	0	0,48	2,65	0,95	1,35	0,05	2,50	0,50	1,51	
D_2	0,08	0,13	0,28	5,08	7,28	1,58	1,78	4,13	0	1,84	*
D_3	0,33	3,49	0,39	10,14	9,94	2,14	2,54	3,09	0,50	0	
D_4	0,29	2,50	0	5,75	7,55	0,15	1,55	0	0,45	0,01	*
D_5	0,14	1,75	0	15,00	3,30	0	1,40	1,25	0,70	1,46	*
D_6	0	0,05	0,15	5,00	7,20	1,50	1,70	3,95	0,25	0,16	
D_7	0,06	3,60	0	14,85	4,05	0,85	0,55	0	0	1,21	*
D_8	0,60	1,80	0,20	11,55	5,35	0	2,05	3,30	0,35	1,91	*
D_9	0	0,95	0,27	25,10	11,20	0,60	0	3,85	0,50	0,06	
D_{10}	0,47	4,25	0,25	0	0	0,70	0,40	3,05	0,50	2,66	
			*			*		*	*		

Zdroj: Vlastní zpracování

Větve stromů skončily v označených nulách, byla znovu provedena transformace a pěstování stromu.

Tabulka 10 - Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,02	0	0,49	2,65	0,95	1,36	0,05	2,51	0,51	1,51	
D_2	0,07	0,12	0,28	5,07	7,27	1,58	1,77	4,13	0	1,83	*
D_3	0,33	3,49	0,40	10,14	9,94	2,15	2,54	3,10	0,51	0	*
D_4	0,28	2,49	0	5,74	7,54	0,15	1,54	0	0,45	0	*
D_5	0,13	1,74	0	14,99	3,29	0	1,39	1,25	0,70	1,45	*
D_6	0	0,05	0,16	5,00	7,20	1,51	1,70	3,96	0,26	0,16	
D_7	0,05	3,59	0	14,84	4,04	0,85	0,54	0	0	1,20	*
D_8	0,59	1,79	0,20	11,54	5,34	0	2,04	3,30	0,35	1,90	*
D_9	0	0,95	0,28	25,10	11,20	0,61	0	3,86	0,51	0,06	
D_{10}	0,47	4,25	0,26	0	0	0,71	0,40	3,06	0,51	2,66	
			*			*		*	*	*	

Zdroj: Vlastní zpracování

Větve stromů skončily v označených nulách, byla znovu provedena transformace a pěstování stromu.

Tabulka 11 - Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,02	**0**	0,54	2,65	0,95	1,41	0,05	2,56	0,56	1,56	
D_2	0,02	0,07	0,28	5,02	7,22	1,58	1,72	4,13	**0**	1,83	★
D_3	0,28	3,44	0,40	10,09	9,89	2,15	2,49	3,10	0,51	**0**	★
D_4	0,23	2,44	0	5,69	7,49	0,15	1,49	**0**	0,45	0	★
D_5	0,08	1,69	**0**	14,94	3,24	0	1,34	1,25	0,70	1,45	★
D_6	**0**	0,05	0,21	5,00	7,20	1,56	1,70	4,01	0,31	0,21	★
D_7	0	3,54	0	14,79	3,99	0,85	0,49	0	0	1,20	★
D_8	0,54	1,74	0,20	11,49	5,29	**0**	1,99	3,30	0,35	1,90	★
D_9	0	0,95	0,33	25,10	11,20	0,66	**0**	3,91	0,56	0,11	
D_{10}	0,47	4,25	0,31	**0**	0	0,76	0,40	3,11	0,56	2,71	
	★		★			★		★	★	★	

Zdroj: Vlastní zpracování

Větve stromů skončily v označených nulách, byla znovu provedena transformace a pěstování stromu.

Tabulka 12 - Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,04	**0**	0,56	2,65	0,95	1,43	0,05	2,58	0,58	1,58	
D_2	0	0,05	0,28	5,00	7,20	1,58	1,70	4,13	**0**	1,83	★
D_3	0,28	3,42	0,40	10,07	9,87	2,15	2,47	3,10	0,51	**0**	★
D_4	0,23	2,42	0	5,67	7,47	0,15	1,47	**0**	0,45	0	★
D_5	0,08	1,67	**0**	14,92	3,22	0	1,32	1,25	0,70	1,45	★
D_6	**0**	0,03	0,21	4,98	7,18	1,56	1,68	4,01	0,31	0,21	★
D_7	0	3,52	0	14,77	3,97	0,85	0,47	0	0	1,20	★
D_8	0,54	1,72	0,20	11,47	5,27	**0**	1,97	3,30	0,35	1,90	★
D_9	0,02	0,95	0,35	25,10	11,20	0,68	**0**	3,93	0,58	0,13	
D_{10}	0,49	4,25	0,33	**0**	0	0,78	0,40	3,13	0,58	2,73	
	★		★			★		★	★	★	

Zdroj: Vlastní zpracování

Všechny větve stromu skončily v označených nulách, byla znovu provedena transformace a pěstování stromu.

Tabulka 13 - Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,07	**0**	0,59	2,65	0,95	1,46	0,05	2,61	0,61	1,61	★
D_2	0	0,02	0,28	4,97	7,17	1,58	1,67	4,13	**0**	1,83	★
D_3	0,28	3,39	0,40	10,04	9,84	2,15	2,44	3,10	0,51	**0**	★
D_4	0,23	2,39	0	5,64	7,44	0,15	1,44	**0**	0,45	0	★
D_5	0,08	1,64	**0**	14,89	3,19	0	1,29	1,25	0,70	1,45	★
D_6	**0**	0	0,21	4,95	7,15	1,56	1,65	4,01	0,31	0,21	★
D_7	0	3,49	0	14,74	3,94	0,85	0,44	0	0	1,20	★
D_8	0,54	1,69	0,20	11,44	5,24	**0**	1,94	3,30	0,35	1,90	★
D_9	0,05	0,95	0,38	25,10	11,20	0,71	**0**	3,96	0,61	0,16	
D_{10}	0,52	4,25	0,36	**0**	0	0,81	0,40	3,16	0,61	7,76	
	★	★	★			★		★	★	★	

Zdroj: Vlastní zpracování

Všechny větve stromu skončily v označených nulách, byla znovu provedena transformace a pěstování stromu.

Tabulka 14 - Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,07	**0**	0,59	2,63	0,93	1,46	0,03	2,61	0,61	1,61	★
D_2	0	0	0,28	4,95	7,15	1,58	1,65	4,13	**0**	1,83	★
D_3	0,28	3,39	0,40	10,02	9,82	2,15	2,42	3,10	0,51	**0**	★
D_4	0,23	2,39	0	5,62	7,42	0,15	1,42	**0**	0,45	0	★
D_5	0,08	1,64	**0**	14,87	3,17	0	1,27	1,25	0,70	1,45	★
D_6	**0**	0	0,21	4,93	7,13	1,56	1,63	4,01	0,31	0,21	★
D_7	0	3,49	0	14,72	3,92	0,85	0,42	0	0	1,20	★
D_8	0,54	1,69	0,20	11,42	5,22	**0**	1,92	3,30	0,35	1,90	★
D_9	0,07	1,97	0,40	25,10	11,20	0,73	**0**	3,98	0,63	0,18	
D_{10}	0,54	4,27	0,38	**0**	0	0,83	0,40	3,18	0,63	7,78	
	★	★	★			★		★	★	★	

Zdroj: Vlastní zpracování

Všechny větve stromu skončily v označených nulách, byla znovu provedena transformace a pěstování stromu.

Tabulka 15 - Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0,07	**0**	0,59	2,60	0,90	1,46	0	2,61	0,61	1,61	★
D_2	0	0	0,28	4,92	7,12	1,58	1,62	4,13	**0**	1,83	★
D_3	0,28	3,39	0,40	9,99	9,79	2,15	2,39	3,10	0,51	**0**	★
D_4	0,23	2,39	0	5,59	7,39	0,15	1,39	**0**	0,45	0	★
D_5	0,08	1,64	**0**	14,84	3,14	0	1,24	1,25	0,70	1,45	★
D_6	**0**	0	0,21	4,90	7,10	1,56	1,60	4,01	0,31	0,21	★
D_7	0	3,49	0	14,69	3,89	0,85	0,39	0	0	1,20	★
D_8	0,54	1,69	0,20	11,39	5,19	**0**	1,89	3,30	0,35	1,90	★
D_9	0,10	2,00	0,43	25,10	11,20	0,76	**0**	4,01	0,66	0,21	★
D_{10}	0,57	4,30	0,41	**0**	0	0,86	0,40	3,21	0,66	7,81	
	★	★	★			★	★	★	★	★	

Zdroj: Vlastní zpracování

Všechny větve stromu skončily v označených nulách, byla znovu provedena transformace a pěstování stromu.

Tabulka 16 - Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0	**0**	0,59	2,53	0,83	1,46	0	2,61	0,61	1,61	★
D_2	0	0	0,28	4,85	7,05	1,58	1,62	4,13	**0**	1,83	★
D_3	0,28	3,39	0,40	9,92	9,72	2,15	2,39	3,10	0,51	**0**	★
D_4	0,23	2,39	0	5,52	7,32	0,15	1,39	**0**	0,45	0	★
D_5	0,08	1,64	**0**	14,77	3,07	0	1,24	1,25	0,70	1,45	★
D_6	**0**	0	0,21	4,83	7,03	1,56	1,60	4,01	0,31	0,21	★
D_7	0	3,49	0	14,62	3,82	0,85	0,39	0	0	1,20	★
D_8	0,54	1,69	0,20	11,32	5,12	**0**	1,89	3,30	0,35	1,90	★
D_9	0,10	2,00	0,43	25,03	11,13	0,76	**0**	4,01	0,66	0,21	★
D_{10}	0,64	4,37	0,48	**0**	0	0,93	0,47	3,28	0,73	7,88	
	★	★	★			★	★	★	★	★	

Zdroj: Vlastní zpracování

Všechny větve stromu skončily v označených nulách, byla znovu provedena transformace a pěstování stromu.

Tabulka 17 - Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0	**0**	0,59	2,45	0,75	1,46	0	2,61	0,61	1,61	⋆
D_2	0	0	0,28	4,77	6,97	1,58	1,62	4,13	**0**	1,83	⋆
D_3	0,28	3,39	0,40	9,84	9,64	2,15	2,39	3,10	0,51	**0**	⋆
D_4	0,23	2,39	0	5,44	7,24	0,15	1,39	**0**	0,45	0	⋆
D_5	0	1,64	**0**	14,69	2,99	0	1,24	1,25	0,70	1,45	⋆
D_6	**0**	0	0,21	4,75	6,95	1,56	1,60	4,01	0,31	0,21	⋆
D_7	0	3,49	0	14,54	3,74	0,85	0,39	0	0	1,20	⋆
D_8	0,54	1,69	0,20	11,24	5,04	**0**	1,89	3,30	0,35	1,90	⋆
D_9	0,10	2,00	0,43	24,95	11,05	0,76	**0**	4,01	0,66	0,21	⋆
D_{10}	0,72	4,45	0,56	**0**	0	1,01	0,55	3,36	0,81	7,96	
	⋆	⋆	⋆			⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	

Zdroj: Vlastní zpracování

Všechny větve stromu skončily v označených nulách, byla znovu provedena transformace a pěstování stromu.

Tabulka 18 - Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0	**0**	0,59	2,35	0,65	1,46	0	2,61	0,61	1,61	⋆
D_2	0	0	0,28	4,67	6,87	1,58	1,62	4,13	**0**	1,83	⋆
D_3	0,28	3,39	0,40	9,74	9,54	2,15	2,39	3,10	0,51	**0**	⋆
D_4	0,23	2,39	0	5,34	7,14	0,15	1,39	**0**	0,45	0	⋆
D_5	0	1,64	**0**	14,59	2,89	0	1,24	1,25	0,70	1,45	⋆
D_6	**0**	0	0,21	4,65	6,85	1,56	1,60	4,01	0,31	0,21	⋆
D_7	0	3,49	0	14,44	3,64	0,85	0,39	0	0	1,20	⋆
D_8	0,54	1,69	0,20	11,14	4,94	**0**	1,89	3,30	0,35	1,90	⋆
D_9	0	2,00	0,43	24,85	10,95	0,76	**0**	4,01	0,66	0,21	⋆
D_{10}	0,82	4,55	0,66	**0**	0	1,11	0,65	3,46	0,91	8,06	
	⋆	⋆	⋆			⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	

Zdroj: Vlastní zpracování

Všechny větve stromu skončily v označených nulách, byla znovu provedena transformace a pěstování stromu.

Tabulka 19 - Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0	0	0,59	2,20	0,50	1,46	0	2,61	0,61	1,61	⋆
D_2	0	0	0,28	4,52	6,72	1,58	1,62	4,13	0	1,83	⋆
D_3	0,28	3,39	0,40	9,59	9,39	2,15	2,39	3,10	0,51	0	⋆
D_4	0,23	2,39	0	5,19	6,99	0	1,39	0	0,45	0	⋆
D_5	0	1,64	0	14,44	2,74	0	1,24	1,25	0,70	1,45	⋆
D_6	0	0	0,21	4,50	6,70	1,56	1,60	4,01	0,31	0,21	⋆
D_7	0	3,49	0	14,29	3,49	0,85	0,39	0	0	1,20	⋆
D_8	0,54	1,69	0,20	10,99	4,79	0	1,89	3,30	0,35	1,90	⋆
D_9	0	2,00	0,43	24,70	10,80	0,76	0	4,01	0,66	0,21	⋆
D_{10}	0,97	4,70	0,81	0	0	1,26	0,80	3,61	1,06	8,21	
	⋆	⋆	⋆			⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	

Zdroj: Vlastní zpracování

Všechny větve stromu skončily v označených nulách, byla znovu provedena transformace a pěstování stromu.

Tabulka 20 - Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0	0	0,59	2,00	0,30	1,46	0	2,61	0,61	1,61	⋆
D_2	0	0	0,28	4,32	6,52	1,58	1,62	4,13	0	1,83	⋆
D_3	0,28	3,39	0,40	9,39	9,19	2,15	2,39	3,10	0,51	0	⋆
D_4	0,23	2,39	0	4,99	6,79	0	1,39	0	0,45	0	⋆
D_5	0	1,64	0	14,24	2,54	0	1,24	1,25	0,70	1,45	⋆
D_6	0	0	0,21	4,30	6,50	1,56	1,60	4,01	0,31	0,21	⋆
D_7	0	3,49	0	14,09	3,29	0,85	0,39	0	0	1,20	⋆
D_8	0,54	1,69	0	10,79	4,59	0	1,89	3,30	0,35	1,90	⋆
D_9	0	2,00	0,43	24,50	10,60	0,76	0	4,01	0,66	0,21	⋆
D_{10}	1,17	4,90	1,01	0	0	1,46	1,00	3,81	1,26	8,41	
	⋆	⋆	⋆			⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	

Zdroj: Vlastní zpracování

Všechny větve stromu skončily v označených nulách, byla znovu provedena transformace a pěstování stromu.

Tabulka 21 - Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0	**0**	0,59	1,79	0,09	1,46	0	2,61	0,61	1,61	★
D_2	0	0	0,28	4,11	6,31	1,58	1,62	4,13	**0**	1,83	★
D_3	0,28	3,39	0,40	9,18	8,98	2,15	2,39	3,10	0,51	**0**	★
D_4	0,23	2,39	0	4,78	6,58	0	1,39	**0**	0,45	0	★
D_5	0	1,64	**0**	14,03	2,33	0	1,24	1,25	0,70	1,45	★
D_6	**0**	0	0	4,09	6,29	1,56	1,60	4,01	0,31	0	★
D_7	0	3,49	0	13,88	3,08	0,85	0,39	0	0	1,20	★
D_8	0,54	1,69	0	10,58	4,38	**0**	1,89	3,30	0,35	1,90	★
D_9	0	2,00	0,43	24,29	10,39	0,76	**0**	4,01	0,66	0	★
D_{10}	1,38	5,11	1,22	**0**	0	1,67	1,21	4,02	1,47	8,62	
	★	★	★			★	★	★	★	★	

Zdroj: Vlastní zpracování

Opět skončily všechny větve v označených nulách, a tak byla provedena další transformace a pěstování stromu, kde jedna větev skončila v neoznačené nule (viz tab. 22).

Tabulka 22 - Transformace a pěstování stromu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	
D_1	0	**0**	0,59	1,70	0	1,46	0	2,61	0,61	1,61	★
D_2	0	0	0,28	4,02	6,22	1,58	1,62	4,13	**0**	1,83	★
D_3	0,28	3,39	0,40	9,09	8,89	2,15	2,39	3,10	0,51	**0**	★
D_4	0,23	2,39	0	4,69	6,49	0	1,39	**0**	0,45	0	★
D_5	0	1,64	**0**	13,94	2,24	0	1,24	1,25	0,70	1,45	★
D_6	**0**	0	0	4,00	6,20	1,56	1,60	4,01	0,31	0	★
D_7	0	3,49	0	13,79	2,99	0,85	0,39	0	0	1,20	★
D_8	0,54	1,69	0	10,49	4,29	**0**	1,89	3,30	0,35	1,90	★
D_9	0	2,00	0,43	24,20	10,30	0,76	**0**	4,01	0,66	0	★
D_{10}	1,47	5,20	1,31	**0**	0	1,76	1,30	4,11	1,56	8,71	
	★	★	★		★	★	★	★	★	★	

Zdroj: Vlastní zpracování

Na pozici D_1S_5 skončila větev v neoznačené nule, bylo nutné tedy provést augmentaci, čímž bylo dosaženo optimálního přiřazení, které je znázorněno v tabulce 4.18.

Tabulka 23 - Augmentace

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
D_1	0	0	0,59	1,70	**0**	1,46	0	2,61	0,61	1,61
D_2	0	0	0,28	4,02	6,22	1,58	1,62	4,13	**0**	1,83
D_3	0,28	3,39	0,40	9,09	8,89	2,15	2,39	3,10	0,51	**0**
D_4	0,23	2,39	0	4,69	6,49	0	1,39	**0**	0,45	0
D_5	0	1,64	**0**	13,94	2,24	0	1,24	1,25	0,70	1,45
D_6	0	**0**	0	4,00	6,20	1,56	1,60	4,01	0,31	0
D_7	**0**	3,49	0	13,79	2,99	0,85	0,39	0	0	1,20
D_8	0,54	1,69	0	10,49	4,29	**0**	1,89	3,30	0,35	1,90
D_9	0	2,00	0,43	24,20	10,30	0,76	**0**	4,01	0,66	0
D_{10}	1,47	5,20	1,31	**0**	0	1,76	1,30	4,11	1,56	8,71

Zdroj: Vlastní zpracování

Zanesením do původní tabulky 1 (viz tab. 24) a následnou sumarizací, byla zjištěna účelové funkce. V tomto případě má účelová funkce hodnotu 69,38.

Tabulka 24 - Zanesení do původní tabulky

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
D_1	1,12	4,10	0,88	22,30	**15,80**	2,50	3,50	18,70	0,45	5,50
D_2	1,45	4,50	0,90	25,00	22,40	3,00	5,50	20,50	**0,22**	6,10
D_3	1,64	7,80	1,00	30,00	25,00	3,50	6,20	19,50	0,66	**4,20**
D_4	1,89	7,10	0,90	25,90	22,90	1,80	5,50	**16,70**	0,80	4,50
D_5	1,59	6,20	**0,75**	35,00	18,50	1,50	5,20	17,80	1,00	5,80
D_6	1,45	**4,50**	0,90	25,00	22,40	3,00	5,50	20,50	0,55	4,50
D_7	**1,66**	8,20	0,95	35,00	19,40	2,50	4,50	16,70	0,45	5,70
D_8	2,00	6,20	0,90	31,50	20,50	**1,45**	5,80	19,80	0,60	6,20
D_9	1,55	5,50	1,12	45,20	26,50	2,20	**3,90**	20,50	0,90	4,50
D_{10}	2,12	8,90	1,20	**20,20**	15,40	2,40	4,40	19,80	1,00	7,20

Zdroj: Vlastní zpracování

Optimálního přiřazení dodavatelů (D_i) a sortimentu (S_j) by bylo v tomto případě dosaženo, pokud by přiřazení vypadalo následovně:

D_i	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}
S_j	S_5	S_9	S_{10}	S_8	S_3	S_2	S_1	S_6	S_7	S_4

Jak je vidět u sortimentů S_1, S_2, S_5 a S_7, byli vybráni dodavatelé, kteří mají sice vyšší cenu za daný sortiment, přesto však vyšlo toto přiřazení jako optimální.